Valószínűségszámítás feladatok

Kevei Péter

2018. április 3.

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak, valószínűség kombinatorikus kiszámítása, szita formula

1.1. Események

1. Egy szabályos érmét tízszer feldobunk. Adjuk meg a kísérlet egy matematikai modelljét! Oldjuk meg a feladatot, ha az érme cinkelt, és a fejdobás valószínűsége p!

2. Fejezzük ki az A, B, C halmazokkal az alábbi eseményeket!

(a) Az A, B, C események közül pontosan $k \in \{1, 2, 3\}$ következik be.

(b) Az A, B, C események közül legalább k következik be.

(c) Az A, B, C események közül legfeljebb k következik be.

3. Legyenek $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Mit jelent az $A_1 \circ \ldots \circ A_n$ esemény?

A $\circ$ a szimmetrikus differenciát jelöli, azaz $A \circ B = (A - B) \cup (B - A)$.

([4] 1.1.7)

4. Igazoljuk az alábbi formulák helyességét!

(a) $A \circ B = (A \cup B) - A \cap B$;

(b) $A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$;

(c) $A - (A - (B - C)) = A \cap B \cap C^c$;

(d) $A \cup B = A \circ B \circ (A \cap B)$.

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események esetén

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) - (n - 1).$$

([4] 1.2.2)

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre

(a) $\mathbf{P}(A \circ C) \leq \mathbf{P}(A \circ B) + \mathbf{P}(B \circ C)$;

(b) ha $\mathbf{P}(A \circ B) = 0$ akkor $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$;

(c) $|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C)| \leq \mathbf{P}(B \circ C)$.

([4] 1.2.3 és 1.2.4)

7. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B eseményre

$$|\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Mikor van egyenlőség? ([4] 1.2.5)

8. Igazoljuk, hogy tetszőleges A és B eseményre

$$\mathbf{P}^2(A \cap B) + \mathbf{P}^2(A \cap B^c) + \mathbf{P}^2(A^c \cap B) + \mathbf{P}^2(A^c \cap B^c) \geq \frac{1}{4}.$$

Mikor van egyenlőség?

9. Igazoljuk, hogy tetszőleges $A_1, \ldots, A_n$ eseményekre

$$-\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq \mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) - \mathbf{P}(A_1) \ldots \mathbf{P}(A_n) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) n^{-1/(n-1)}.$$

(Viktor, ?Polygon)

1.2. Szita formula

10. Két szabályos kockát r-szer feldobunk. Legyen p_r annak a valószínűsége, hogy az $(1,1), (2,2), \ldots, (6,6)$ mindegyike legalább egyszer előfordul. Határozzuk meg p_r-et! ([4] 1.2.13)

11. Sorban elhelyezett n dobozba találomra berakunk N golyót úgy, hogy az összes elhelyezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy az első k doboz egyike sem üres? ([4] 1.2.14)

12. Egy urnában k-féle színű golyó van, mindegyik színűből ugyanannyi darab. Egyenként húzunk a golyókból úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és minden húzásnál bármelyik golyó ugyanolyan valószínűséggel kerülhet kihúzásra.

(a) Mennyi annak a q_n valószínűsége, hogy legalább n húzás kellett ahhoz, hogy minden szín előforduljon?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy n húzás során minden szín előfordult, és ez az n-edik húzásnál következik be először (vagyis az első $(n-1)$ húzás során csak $(k-1)$ szín fordult elő) ?

([4] 1.2.15)

13. A Jonas Brothers nevű együttes újra összeáll és koncertet adnak. A PepsiCo cég a következő ötlettel áll elő: a kólásüvegeik kupakjában elrejtik a banda egy-egy tagjának a nevét és azok között, akik összegyűjtik mindhárom nevet kisorsolnak egy VIP belépőt. Kevin neve a kupakok felén szerepel, Joe-val a kupakok egyharmadában találkozhatunk és Nick a legritkább, neve átlagosan minden hatodik kupakban szerepel. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 kólát vásárolva sikerül kigyűjtenünk a három testvért? (Segítség: a kupakokra gondoljunk úgy mintha egy zsákból húznánk egy nevet, melyben Kevin háromszor, Joe kétszer, Nick pedig egyszer szerepel.)

14. Egy kockát addig dobunk, amíg mind a 6 szám elő nem fordul. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy ez először az n-edik dobás után következik be. Határozzuk meg p_n-et! ([4] 1.2.16)

15. Egy hedge fund három cégbe fekteti pénzét, melyek rendre $0,19$, $0,25$, illetve $0,28$ valószínűséggel mennek csődbe az elkövetkező öt évben. Annak a valószínűsége, hogy az első és a második cég is csődbe megy $0,05$, hogy az első és a harmadik is csődbe megy $0,1$, míg hogy a második és a harmadik is becsődöl annak is $0,1$. Annak az esélye, hogy mindhárom cég becsődöl 2%. Mennyi a valószínűsége, hogy

(a) az első vagy a második cég csődbe megy?

(b) egyik cég sem megy csődbe?

(Szűcs Gábor feladata)

16. A Faluvégi Kurta Kocsma előtt 5 bicikli áll. Záróra előtt egymás után jön ki az 5 tulajdonos, és mindegyikük véletlenszerűen választ egy kerékpárt. Mennyi a valószínűsége, hogy senki sem a saját biciklijén jutott haza?

17. Tekintsük n elem véletlen permutációját. Mekkora a valószínűsége, hogy nem lesz fixpont? Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan k fixpont lesz?

1.3. Kombinatorikus valószínűség

18. Adjuk meg a lottóhúzást leíró valószínűségi mezőt! Mennyi annak a valószínűsége, hogy pont 3 találatunk lesz? Mennyi a valószínűsége, hogy lesz találatunk?

19. Három kockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 4? Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt, ha 3 különböző kockával dobunk, ill. ha 3 egyformával!

20. Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 8 bástyát. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?

21. Egy hallgató 40 tétel közül 20-at úgy megtanul, hogy abból jelesre tud vizsgázni, a másik 20-ból csak jóra. A vizsgatétel kiválasztásakor 40 tétel közül húz 2 tételt, majd ebből választ egyet és ebből felel. Mennyi a valószínűsége, hogy jelesre vizsgázik? ([4])

22. Egy dobókockával n-szer dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható

(a) 6-tal?

(b) 5-tel? (IMC, 1999/2/2)

23. Hét törpe közül Hófehérke leültet ötöt egy kör alakú asztalhoz. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges elrendezés egyformán valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy Morgó és Kuka nem kerül egymás mellé?

24. Egy urnában csak piros, zöld és kék golyók vannak. A piros golyók száma 18. Egy golyó kihúzása esetén annak a valószínűsége, hogy nem piros golyót húzunk 1/15-del kisebb, mint azé, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Annak a valószínűsége viszont, hogy kék vagy piros golyót húzunk 11/10-szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy zöld vagy piros golyót húzunk. Hány zöld és hány kék golyó van az urnában? (2008-as érettségi feladat)

25. Egy vendéglőben az egyik asztalnál 9 vendég ül. Négyen kólát, hárman sört rendeltek, ketten pedig ásványvizet rendeltek. A kissé feledékeny pincér emlékszik, hogy miből mennyit rendeltek, de azt már elfelejtette, hogy ki mit kért. Ezért véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mekkora a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?

26. 2008-ban a Bajnokok Ligájában 4 angol (MU, Arsenal, Chelsea, Liverpool), egy olasz (Roma), egy spanyol (Barcelona), egy német (Schalke) és egy török (Fenerbahce) csapat jutott a 8 közé. Sorsolással határozzák meg a negyeddöntők párosítását. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a negyeddöntőben

(a) a Roma elkerüli a MU-t!

(b) az angol csapatok elkerülik egymást!

27. A Bajnokok Ligájában 2017-ben három spanyol csapat jutott a 8 közé: az Atlético Madrid, a Barcelona és a Real Madrid. Sorsolással határozták meg a negyeddöntők párosítását (itt már nincs kiemelés, és azonos nemzet csapatai is összekerülhetnek). Mennyi volt a sorsolás előtt a valószínűsége annak, hogy a negyeddöntőben

(a) Barcelona – Real Madrid párharc lesz?

(b) lesz spanyol párharc?

28. Egy unatkozó gyakorlatvezető dolgozatiratás során arra lett figyelmes, hogy a csoportjában az összes lány egy sorban ül. A csoportban 10 hallgató van, közülük 3 lány. A teremben 4 sor van és minden sorban 4 hely, és feltesszük, hogy mindenki véletlenszerűen választ helyet, azaz minden leülési konfiguráció egyforma valószínűségű. Mennyi a kérdéses esemény valószínűsége?

29. Egy halastóban M aranyhal és K ezüsthal van. Egy horgász addig fogja ki egyesével a halakat, amíg már csak egyszínű hal marad a tóban (tehát vagy csupa aranyhal, vagy csupa ezüsthal). Mennyi a valószínűsége, hogy a Gyuri nevű ezüsthal megússza a horgászkalandot?

30. Egy n házaspárból álló társaság leül egy kör alakú asztalhoz úgy, hogy férfiak és nők felváltva ülnek, egyébként a sorrend véletlen. Mi a valószínűsége, hogy egyetlen feleség sem kerül a férje mellé?

31. Egy vacsorára n feleség érkezik a férjével és egy barátnőjével. A $3n$ embert egy kör alakú asztalhoz kell leültetni. Minden feleség a barátnője mellett akar ülni. Ha ezen feltételt betartva, de egyébként véletlenszerűen ültetnek, jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy semelyik férj nem ül a felesége mellett. Határozzuk meg p_n-et!

32. Tíz pár cipőből véletlenül kiválasztunk négy darabot. Mekkora a valószínűsége, hogy nem lesz egy pár sem?

33. Egy szabályos kockával 11-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az egymást követő 1, 2, 3, 4, 5, 6 eredménysorozat nem fordul elő?

34. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztva ötöt, mi a valószínűsége, hogy lesz közte férges?

35. Mekkora a valószínűsége, hogy az ötöslottón kihúzott számok között nem lesznek egymást követők?

36. Egy embernek n egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Valamely $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén mennyi a valószínűsége, hogy a k-adik próbálkozása sikeres, ha

(a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi?

(b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre?

37. Egy $2n$ lányból és $2n$ fiúból álló társaságot véletlenszerűen két egyenlő létszámú csoportra osztunk. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy a csoportokon belül is megegyezik a lányok és a fiúk száma.

(a) Határozzuk meg p_n-et!

(b) Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty} p_n\sqrt{n}$ határértéket!

38. Egy n elemű halmaz összes részhalmaza közül kiválasztunk egyet, majd újra az összes közül kiválasztunk még egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik halmaz tartalmazza a másikat? ([10, 3.11])

39. Bergengóciában minden ember egymástól függetlenül $p \in (0,1)$ valószínűséggel hazudik, csak két kivétel van: az Elnök és a Rádióriporter, akik megbízhatók. Az Elnök elhatározza, hogy ismét indul a választáson, és ezt közli egy emberrel, aki továbbadja a hírt, ..., végül az n-edik ember elmondja a Rádióriporternek. (Az n ember közt nem szerepel sem a Rádióriporter, sem az Elnök.) Mikor valószínűbb, hogy a Rádióriporter a valódi döntést közvetíti, $n = 19$ vagy $n = 20$ esetén? ([10, 3.40])

40. Egy $n \times n$-es négyzetrács bal alsó és jobb felső sarkába leteszünk egy-egy pókot. A pókok $2n$ lépésben helyet cserélnek úgy, hogy egymástól függetlenül minden útvonalat ugyanakkora valószínűséggel választanak. A pókok egyszerre indulnak, és minden másodpercben egy lépést tesznek. Mi a valószínűsége, hogy a két pók találkozik?

41. Mind a 4 pár különböző cipőmet az előszobában levő beépített szekrényben tartom. Az előszobában kiégett a villany, így sötétben keresgélve véletlenszerűen kiveszek 4 cipőt. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy összeillő párt veszek ki? Mekkora ugyanez a valószínűség, ha 4 pár egyforma cipőm van?

42. Egy kertész három juhar-, négy tölgy- és öt nyírfát ültet egy sorba véletlen sorrendben, mindegyik fát egyenlő valószínűséggel választva. Mennyi annak a valószínűsége, hogy nem kerül egymás mellé két nyír?

43. Egyes vidékeken elterjedt a következő babona: egy lány 6 fűszálat fog a markába úgy, hogy azok a kezéből mindkét irányban kiállnak. Egy másik lány mindkét oldalon páronként összecsomózza a fűszálakat. Ha így egy zárt lánc keletkezik, akkor arra következtetnek, hogy a lány a következő évben férjhez megy. Ha a csomózás teljesen véletlenszerűen történik, mennyi a valószínűsége, hogy zárt láncot kapunk. Mi a helyzet $2n$ fűszál esetén? ([4, 1.3.29])

44. Mennyi a valószínűsége, hogy a kör kerületén adott $2n$ pontot találomra párokba szedve és mindegyik pár két pontját húrral összekötve a kapott n számú húr közül egyik sem metszi a másikat? (Schweitzer, 1952, 6)

A következő feladatok a Boltzmann–Maxwell-, Bose–Einstein- és a Fermi–Dirac-statisztikákat tárgyalják. Bővebben Feller [9].

45. A Boltzmann–Maxwell-statisztikánál r golyót úgy helyezünk el n dobozba, hogy mind az n^r elhelyezés egyformán valószínű. Határozzuk meg annak a p_k valószínűségét, hogy pontosan k golyó kerül az első dobozba! Számítsuk ki ezt a határértéket, ha $n \to \infty$ úgy, hogy $r/n \to \lambda$!

46. A Bose–Einstein-statisztika esetén a feltétel az, hogy a lehetséges $\binom{n+r-1}{r-1}$ számú elhelyezés egyformán valószínű. (Ez a modell jól használható a nukleonok és páros számú elemi részecskét tartalmazó atomok esetében.) Határozzuk meg annak a q_k valószínűségét, hogy pontosan k golyó kerül az első dobozba! Számítsuk ki ezt a határértéket, ha $n \to \infty$ úgy, hogy $r/n \to \lambda$!

47. A Fermi–Dirac-statisztika esetén egy dobozba legfeljebb egy golyó kerülhet, és az összes ilyen $\binom{n}{r}$ elhelyezés egyformán valószínű. (Ez a modell alkalmazható elektronokra, neutronokra és protonokra.) Határozzuk meg annak az r_k valószínűségét, hogy pontosan k golyó kerül az első dobozba, $k = 0, 1$, és számítsuk ki ezt a határértéket, ha $n \to \infty$ úgy, hogy $r/n \to \lambda$!

1.4. Vegyes

48. Egy szabályos érmét addig dobunk, amíg kétszer egymás után azonos oldalára nem esik. Adjuk meg a kísérletet leíró valószínűségi mezőt! Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

(a) { legfeljebb 6-ot kell dobni };

(b) { páros sokat kell dobni }.

49. Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Hanyadik helyen legvalószínűbb a második ász?

50. Egy urnában 101 golyó van, közülük pontosan három piros. A golyókat visszatevés nélkül egyesével kihúzzuk. Hányadik helyen legvalószínűbb a második piros?

51. Száz gyerek közt egy nem szabályos érme többszöri feldobásával szeretnénk kisorsolni egy ajándékot. Az összes k hosszú dobássorozathoz meghatározzuk, hogy ki nyer, majd feldobjuk k-szor az érmét. Bizonyítsuk be, hogy a fej p valószínűségét és a k értékét alkalmasan megválasztva a 2^k kimenetelt fel lehet osztani a gyerekek közt úgy, hogy mindenki azonos valószínűséggel nyerjen. ([10, 3.41])

52. Veszünk egy elég nagy urnát, és éjfél előtt fél perccel 1-től 10-ig számozott golyókat rakunk bele, majd rögtön kiveszünk egyet. Éjfél előtt 1/4 perccel az urnába 11-től 20-ig számozott golyókat teszünk, majd rögtön kiveszünk egyet. Ezt így folytatjuk éjfélig. Hány golyó lesz az urnában pontban éjfélkor, ha

(a) az i-edik lépésben az i-edik golyót vesszük ki?

(b) az i-edik lépésben a $10 \cdot i$-edik golyót vesszük ki?

(c) véletlenül vesszük ki a golyót?

53. Vegyünk két olyan kockát, melyeken annak a valószínűsége, hogy i-t dobunk, p_i, ill. q_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, ahol $p_i, q_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$ és $\sum_{i=1}^{6} q_i = 1$. Választhatók-e a p_i, q_i valószínűségek úgy, hogy két kockával dobva minden összeg 2-től 12-ig egyformán valószínű legyen?

Bolyongás. Olyan sorozatokat fogunk vizsgálni, melyek véges sok plusz egyből és mínusz egyből állnak. Tekintsünk az $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sorozatot, melyben p db 1 és q db -1 szerepel, $p + q = n$. Jelölje $s_k = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ ezek részletösszegét. Az $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sorozatot egy törtvonallal ábrázoljuk: a törtvonal k-adik lépésének meredeksége ε_k és k-adik szögpontjának ordinátája s_k. Jelölje $N_{n,x}$ az origóból az (n, x) pontba vezető utak számát.

54. Határozzuk meg $N_{n,x}$ értékét!

55. Tükrözési elv. Legyen $A = (a, \alpha)$, $B = (b, \beta)$, és $A' = (a, -\alpha)$ az A pont x-tengelyre vonatkozó tükörképe. Mutassuk meg, hogy az x-tengelyt érintő vagy átmetsző $A \to B$ utak száma megegyezik az $A' \to B$ utak számával.

56. Ballot–tétel. Legyenek n és x pozitív egészek. Igazoljuk, hogy az origóból az (n, x) pontba vezető olyan $(s_1, s_2, \ldots, s_n = x)$ utak száma, melyre $s_1 > 0, s_2 > 0, \ldots, s_n > 0$ pontosan $\frac{x}{n} N_{n,x}$.

57. Ballot–tétel'. Tegyük fel, hogy egy választás során a P jelölt p számú, a Q jelölt q számú szavazatot kap, ahol $p > q$. Annak a valószínűsége, hogy a szavazatszámlálás során P végig vezetett $(p - q)/(p + q)$.

A továbbiakban a fent leírt törtvonalra úgy gondolunk, mint egy bolyongó részecske pályájára. Jelölje $X_1, X_2, \ldots$ az egyes lépéseket és $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Feltesszük, hogy a részecske n lépése során előforduló 2^n útvonal egyformán valószínű.

58. Mennyi $\mathbf{P}(S_n = r)$ valószínűség? Legyen $u_{2k} = \mathbf{P}(S_{2k} = 0)$ és $f_{2k} = \mathbf{P}(S_2 \neq 0, \ldots, S_{2k-2} \neq 0, S_{2k} = 0)$. Határozzuk meg u_n-et, és igazoljuk, hogy

$$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + \cdots + f_{2n} u_0.$$

59. Annak a valószínűsége, hogy az origóba való visszatérés nem következik be a $(2n)$-edik időpillanatig az ugyanannyi, mint annak a valószínűsége, hogy a $(2n)$-edik időpillanatban a részecske visszatért az origóba.

60. Bizonyítsuk be, hogy

$$\Gamma(p+1) \sim \left(\frac{p}{\mathrm{e}}\right)^p \sqrt{2\pi p}.$$

Ennek segítségével igazoljuk, hogy $\Gamma(p+h)/\Gamma(p) \sim p^h$, amint $p \to \infty$.

61. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ez alapján igazoljuk a **Wallis–formulát**: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}$.

62. De Moivre is tudta, hogy $n! \sim (n/\mathrm{e})^n \sqrt{nc}$, ahol c valamilyen pozitív konstans. A Wallis–formula segítségével igazoljuk, hogy $c = \sqrt{2\pi}$! (Stirling is így csinálta 1733-ban.)

63. A béta–függvény (vagy elsőfajú Euler–féle integrál).

(a) Bizonyítsuk be, hogy $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t$ véges minden $x > 0$, $y > 0$ esetén, és $B(x, y) = B(y, x)$.

(b) Mutassuk meg, hogy $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. (Vagyis, ha a Gamma–függvényt a faktoriális folytonos kiterjesztésének tekintjük, akkor a Béta–függvény a binomiális együttható folytonos kiterjesztése.)

2. Geometria valószínűség

64. A $[0, 1]$ intervallumot felosztjuk két véletlenül rádobott ponttal három részre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

(a) mindhárom szakasz hossza nagyobb, mint $1/4$?

(b) mindhárom szakasz hossza kisebb mint $1/2$?

(c) a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

(d) a szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

65. Választunk egy véletlen számot 0 és 2 között, és egy másikat ettől függetlenül 1 és 2 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az összegük kisebb, mint 2?

66. Válasszuk az X, Y pontokat egymástól függetlenül a $(0, 1)$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy az

$$x^2 + Xx + Y = 0$$

egyenletnek valós gyökei lesznek?

67. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül egy-egy du. 4 és 6 közötti egyenletes eloszlású időpontban ér véget. Munkaidejük végeztével mindketten elmennek egy, munkahelyüktől azonos távolságra levő kávézóba, ahol elfogyasztanak egy csésze kávét. András esetében ez 10 perc, Betti esetében 20. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak?

68. Mátyás vonattal utazik Szegedről Debrecenbe, Cegléden kell átszállnia. A 10:45-kor induló vonat 12:12 és 12:22 között érkezik Ceglédre egyenletes eloszlás szerint, a Budapestről Debrecenbe induló vonat pedig 12:14 és 12:19 között egyenletes eloszlás szerint fut be, és vár Cegléden 2 percet. Mennyi a valószínűsége, hogy Mátyás eléri a csatlakozást? (A vonatok szomszédos vágányra érkeznek, és Mátyás nagyon gyors.)

69. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon negyed 3 után indulnak haza? Mennyi ez a valószínűség, ha tudjuk, hogy Anna legalább 10 perccel korábban végzett, mint Szabina?

70. Tekintsünk egy egységnyi kerületű kört, és ennek egy rögzített pontját. Válasszunk további két pontot a körvonalon egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont által meghatározott háromszög fedi a kör középpontját?

71. Egy egységnégyzet két szemközti oldalán véletlenül választunk egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy távolságuk négyzete kisebb, mint $3/2$?

72. Egy egységnyi hosszú szakaszon találomra választunk kettő pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét pont a szakasz egy előre adott végpontjához van közelebb, ha tudjuk, hogy a két választott pont távolsága kisebb, mint $1/3$?

73. A [0,1] intervallumban egyenletes eloszlás szerint véletlenszerűen egymástól függetlenül választunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik szám kisebb, mint 0,5, és ugyanakkor a távolságuk nagyobb, mint 0,25?

74. Egy kör kerületén egymástól függetlenül, egyenletesen választunk 4 pontot: A, B, C, D. Mennyi a valószínűsége, hogy az AB és CD húrok metszik egymást? (KöMaL 2012)

75. Egy négyzet belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a választott pont közelebb van valamelyik oldalhoz, mint $1/4$?

76. Egy kör kerületén válasszunk n pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a pontok konvex burka tartalmazza a kör középpontját? Mennyi ez a valószínűség, ha a pontokat a kör belsejében választjuk függetlenül, egyenletes eloszlás szerint?

3. Függetlenség, feltételes valószínűség

3.1. Feltételes valószínűség, Bayes tétele

77. Az 52 lapos francia kártyából kiosztanak 13 lapot. Legyen A az az esemény, hogy pontosan 2 ászt kaptunk. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(A|B_i)$ feltételes valószínűségeket, ha

(a) B_1 azt jelenti, hogy van legalább egy ászunk;

(b) B_2 azt jelenti, hogy a kőr ász nálunk van;

(c) B_3 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első ász;

(d) B_4 azt jelenti, hogy a kiosztott lapok közül az első a kőr ász.

78. Magyar kártyából kapunk 12 lapot, a másik két játékos 10–10 lapot kap. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 5 pirosat kapunk, közte a piros hetest? Feltéve, hogy pontosan 5 pirosat kaptunk közte a piros hetest, mennyi a valószínűsége, hogy a másik 3 piros egy kézben van?

79. Elhelyezünk N golyót n dobozba úgy, hogy az összes n^N elhelyezés egyformán valószínű. Feltéve, hogy az első dobozban van golyó, mennyi a valószínűsége, hogy K golyó van benne?

80. Egy kockával addig dobunk, míg először kapunk hatost. Feltéve, hogy a szükséges dobások száma páros, mennyi a valószínűsége, hogy kétszer kellett dobnunk?

81. Tegyük fel, hogy egy alkatrész meghibásodásának valószínűsége a $(t, t + h)$ intervallumban, feltéve, hogy t ideig működött, $a(t)h + o(h)$. Határozzuk meg annak a $p(t)$ valószínűségét, hogy az alkatrész legalább t ideig működött!

82. *Doppingteszt.* Kifejlesztenek egy új doppingtesztet, mely a doppingolók 99%-ánál pozitív eredményt ad, azonban a nem doppingoló sportolók 1%-nál is tévesen pozitív eredményt ad. Tegyük föl, hogy a sportolók 1%-a doppingol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott sportoló

(a) doppingtesztje pozitív?

(b) doppingolt, ha tudjuk, hogy a doppingtesztje pozitív?

83. Két pénzérme közül az egyik szabályos, a másik cinkelt, $1/4$ valószínűséggel ad fejet. Véletlenszerűen kiválasztjuk az egyiket, majd ezzel kétszer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy két fejet kapunk? Ha két fejet kapunk, mennyi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét választottuk?

84. Egy hallgató p valószínűséggel tudja a választ egy kérdésre. Ha nem tudja, akkor az n lehetséges válasz közül véletlenül választ egyet. Mennyi legyen a lehetséges válaszok n száma, hogy az oktató legalább $0,9$ valószínűséggel következtethessen arra a hallgató jó válaszából, hogy a hallgató tudta a választ?

85. Aladár a pénzét három egyforma borítékban tartja. Az elsőben két ezerforintos, a másodikban egy ezer- és egy kétezerforintos, a harmadikban egy ezer és három kétezerforintos van. Aladár találomra kivesz egy borítékot, és onnan egy bankjegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy ezerforintost húzott?

86. Feldobunk n egyforma dobókockát, melyeken a hatos valószínűsége $p \in (0, 1)$. Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy páratlan sok hatost dobtunk. Határozzuk meg p_n-et!

87. Egy cukrászdában 3 cukrász A, B és C süt süteményt, és a sütemények 2, 3 illetve 5%-át rontják el. A sütemények 50%-át A, 30 %-át B, 20%-át pedig C készíti. Mennyi a valószínűsége, hogy A sütötte a süteményt, feltéve, hogy az rossz?

88. Aladár hétfő reggelenként 7:15-kor indul el otthonról, hogy 8:00-ra beérjen az egyetemre. Gyalog kimegy a buszmegállóba, 20 percet buszozik, aztán villamosra száll át, amelyen 15 percet utazik, végül ismét gyalogol az egyetemig. A buszon 0,5, a villamoson pedig 0,2 valószínűséggel hallja meg, ha csörög a mobiltelefonja, míg gyaloglás közben biztosan észreveszi, ha hívják. Ha hétfő reggel 7:15 és 8:00 között egy véletlen időpontban felhívjuk, és felveszi a telefonját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy épp villamoson van?

89. Jókedvében Mátyás király kegyelmet ajánl velencei rabjának, ha a rab két egyforma urna közül az egyikből kihúz egy ezüstgolyót. Megengedi neki, hogy 50 ezüst- és 50 aranygolyót úgy osszon el a két urnába, ahogy akarja. Ezután Mátyás udvari bolondja találomra választ egy urnát, a rab pedig abból találomra egy golyót. Hogyan ossza el a rab a két urnába a golyókat, ha kedves az élete? Ekkor mekkora az esélye a szabadulásra?

90. Vándorlásai közben Odüsszeusz egyszer egy hármas útelágazáshoz ért. Tudta, hogy az egyik út Athénba, a másik Mükénébe, a harmadik pedig Spártába vezet. Azt is tudta, hogy az athéniak átlagosan minden harmadik alkalommal mondanak igazat, a mükénéiek minden második alkalommal, a spártaiak pedig becsületesek, sosem hazudnak. Kockadobással döntötte el, melyik utat válassza, egyforma esélyt adva mindegyiknek. Ezután ment, mendegélt, míg egy városba nem ért. Itt az első szembejövőtől megkérdezte, hogy mennyi kettő meg kettő, és azt a választ kapta, hogy négy. Mennyi a valószínűsége, hogy Athénba érkezett?

91. A szegedi Gabonakutatóban két új kukorica vetőmagot fejlesztettek ki. Az A típusú strapabíró vetőmag csapadékos, átlagos, és száraz időjárás esetén egyaránt 0,2 valószínűséggel hoz prémium termést. A B típusú vetőmag csapadékos időjárás estén 0,5, átlagos időjárás esetén 0,1 valószínűséggel hoz prémium termést, száraz időben viszont biztosan nem hoz jó termést. A meteorológusok 0,5 valószínűséggel átlagos, 0,2 valószínűséggel sok, 0,3 valószínűséggel pedig kevés csapadékot jósolnak. Melyik vetőmagot válasszuk, ha minél nagyobb valószínűséggel akarunk prémium termést?

92. Egy könyvelő irodában három alkalmazott van, akik egyenlő arányban osztoznak a munkán. Felvesznek egy negyedik embert is az irodára, hogy csökkentsék a terhelést, így már négyfelé oszlik a munka egyenlő arányban. A tapasztalt könyvelők ritkán, az eseteknek mindössze 3%-ában hibáznak, míg az újonc, aki csak most tanult bele a könyvelésbe 10%-os hibarátával bír. A könyvelők főnöke kézbevesz egy adóbevallást és azt látja, hogy az hibásan van kitöltve, mekkora a valószínűsége, hogy az új alkalmazottat terheli a felelősség?

93. Egy matematikuscsaládban a fiú megfigyelte, hogy mikor hazaér, az esetek 20%-ában senki nincs otthon, 50%-ában csak az édesanyja, a maradék esetekben pedig mindkét szülője. Tudja, hogy édesanyja az esetek 80%-ában magára zárja az ajtót; ha mindketten otthon vannak, akkor már csak 40%-ban zárják be, de ha nincs otthon senki, szórakozottságból akkor is az esetek 5%-ában nyitva marad az ajtó. A fiú egy délután hazaér, és zárva találja az ajtót. Mekkora a valószínűsége, hogy van otthon valaki?

94. A sztochasztika tanszék egyik oktatója p valószínűséggel szokott bejönni a tanszékre. Ha ismerőseinek azt mondta, hogy aznap bejön, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k-an keresik telefonon $\mathrm{e}^{-\mu}\mu^k/k!$, ha pedig azt mondta, hogy nem, akkor $\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k = 0, 1, \ldots$, $0 < \lambda < \mu$. Feltéve, hogy k hívás érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy aznap bent volt az oktató? Vizsgáljuk a $k \to \infty$ esetet. ([4])

95. Legyen $(1-p)p^n$ annak a valószínűsége, hogy egy almafán n virág van, $n = 0, 1, \ldots$. Tegyük fel, hogy minden virágból α valószínűséggel lesz érett gyümölcs. Feltéve, hogy a fán r alma van, mennyi a valószínűsége, hogy n virág volt? ([4])

96. Van n darab urnánk, melyek mindegyikében a fehér és b piros golyó van. Az első urnából kihúzunk egy golyót, áttesszük a másodikba; majd a másodikból húzunk egyet és átrakjuk a harmadikba, ... Végül az n-edik urnából húzunk egyet. Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy az utolsó urnából fehér golyót húzunk, feltéve, hogy az elsőből fehéret húztunk. Igazoljuk, hogy

$$p_n = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}(a+b+1)^{1-n}.$$

97. Egy fiú és egy lány megbeszéli, hogy két utca kereszteződésénél találkoznak egy meghatározott időpontban. Elfelejtik megbeszélni, hogy a négy sarok közül melyiknél várnak egymásra. Az útkereszteződés nagyon forgalmas, nem lehet átlátni a többi sarokra. Mindketten pontosan érkeznek, és ha a másik nincs ott, akkor 2,5 perc után átmennek a szomszédos sarkok valamelyikére, 1/2–1/2 valószínűséggel. Ez fél percet vesz igénybe, majd ha megint nem találkoztak, akkor 2,5 perc után megint sarkot váltanak. Először mindketten 1/4 valószínűséggel választanak sarkot. Természetesen az is találkozásnak számít, ha egymással szembe jönnek az úttesten.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy az első percen belül találkoznak?

(b) Mennyi annak a p_n valószínűsége, hogy az első $3n$ percen belül találkoznak?

(c) Mennyi annak az r_n valószínűsége, hogy pontosan a $3n$-edik percben találkoznak?

(d) Igazoljuk, hogy egy valószínűséggel véges időn belül találkoznak.

([4])

98. Pinokkiónak kilenc akadályon kell sikerrel túljutnia, hogy fabábuból kisfiúvá változhasson. Ha egy akadályon elbukik, akkor vissza kell mennie az előzőhöz, ha az elsőn bukik el, örökre fabábu marad. Pinokkió nem tanul a kudarcokból, ezért az egyes akadályokon a siker valószínűsége $1/10, 2/10, \ldots, 9/10$. Milyen sorrendben helyezze el a Kékhajú Tündér az akadályokat, hogy Pinokkió a legnagyobb eséllyel lehessen igazi kisfiú. Mennyi ekkor a valószínűség? (KöMaL, 2001, B.3441)

99. Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül egyet kiválasztania oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat. Tegyük fel, hogy egyértelmű szigorúan monoton szépségi sorrendet tud felállítani, és a háremhölgyek bármely elvonulási sorrendje egyformán valószínű. Szindbád k hölgyet elenged, majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultnál. Mennyi a valószínűsége, hogy a legszebb hölgyet választja ki? Milyen k esetén lesz ez a valószínűség a legnagyobb, ha N elég nagy?

100. Shanille O'Keal büntetőket dobál egy kosárpályán. Az elsőt bedobja, a másodikat nem. Ezek után annak a valószínűsége, hogy egy büntetőt bedob, megegyezik az eddig sikeres dobásainak részarányával. Mi annak a valószínűsége, hogy az első 100 dobásból pontosan 50 sikeres?

101. Egy százszemélyes repülőgépen száz ember utazik úgy, hogy mindenkinek van előre kiosztott helye. Az első utas ezzel nem törődve véletlenszerűen leül a száz közül egy helyre. Ezután minden utas a saját helyére próbál leülni, vagy ha az foglalt, véletlenszerűen választ egy másikat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a századik utas a helyére ül, ha egyszerre csak egy ember foglal helyet? (KöMaL B4771)

102. A számegyenesen egy bolha ugrál. A 0-ból indul és minden ugrásának hossza 1. Minden ugrásnál az előzőektől függetlenül p valószínűséggel jobbra, $1-p$ valószínűséggel pedig balra ugrik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy eljut az 1-be?

Jelölje ezt a valószínűséget u. Fejezzük ki így a -1-ből 1-be jutás valószínűségét, majd a kapott egyenletet oldjuk meg u-ra.

103. A számegyenesen egy bolha ugrál. A 0-ból indul és minden ugrásának hossza 1. Először az 1-be ugrik, majd a következő ugrás mindig p valószínűséggel az előzővel egyező, $1 - p$ valószínűséggel pedig ellentétes irányú. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszajut a 0-ba? (KöMaL B4676)

104. Egy bolha ugrál az ABCD négyzet csúcsain, az A csúcsról indulva. Minden egyes ugrásnál $1/2 - 1/2$ valószínűséggel valamelyik szomszédos csúcsba ugrik. A bolha akkor áll meg, ha az utolsó olyan csúcsot is eléri, amin addig még nem volt. Határozzuk meg, hogy melyik csúcs mekkora valószínűséggel lesz utolsó! (KöMaL B4783)

105. A parti tüzérség 1 km távolságban felfedez egy ellenséges cirkálót, és elkezd rá tüzelni, percenként egy lövést adva le. A cirkáló az első lövés leadásakor menekülni kezd 60 km/h sebességgel. A találat valószínűsége x km távolság esetén $0,75\,x^{-2}$. Ha egy lövés talált, akkor még mindig $1/4$ valószínűséggel a cirkáló nem süllyed el, és tovább menekül. Mekkora valószínűséggel menekül el a cirkáló? (Schweitzer, 1950)

3.2. Függetlenség

106. Legyen A önmagától független esemény. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ vagy 1!

107. Válasszunk találomra az $1, 2, \ldots, n$ számok közül úgy, hogy mindegyiket $1/n$ valószínűséggel választjuk. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a választott szám p-vel osztható.

(a) Igazoljuk, hogy ha p_1 és p_2 relatív prím és $p_1 p_2 | n$, akkor A_{p_1} és A_{p_2} függetlenek.

(b) Igazoljuk, hogy

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

ahol $\varphi(n)$ az Euler–féle függvény, azaz $\varphi(n)$ az n-nél kisebb n-hez relatív prím pozitív egészek száma.

108. Háromszor feldobunk egy szabályos érmét. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Függetlenek-e A és B.

109. Adjunk példát olyan A, B, C eseményekre, melyek páronként függetlenek, de nem függetlenek.

110. Legalább hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy egy sorsolásnál a telitalálat valószínűsége legalább 1/2 legyen? Legalább hány hétig kell játszani egyetlen szelvénnyel, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer volt telitalálatunk legalább 1/2 legyen?

111. Egy dobókockával tízszer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első 5 dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy tíz dobás közt nincs egyes. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Függetlenek-e A és B?

112. Egy dobókockával n-szer dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az első m dobás során nincs hatos, B pedig azt, hogy az n dobás közt nincs egyes, $m < n$. Mekkora az A és a B események valószínűsége? Igazoljuk, hogy $\mathbf{P}(A \cap B) < \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

113. Legyenek $x \in [0,1]$ és $m, n \in \mathbb{N}$. Bizonyítsuk be (lehetőleg valószínűségi gondolatmenettel), hogy

$$(1-x^n)^m + (1-(1-x)^m)^n \geq 1.$$

4. Véletlen változók

4.1. Eloszlásfüggvény, eloszlás, sűrűségfüggvény

114. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

(a) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$

(b) $F(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

(c) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$

115. Milyen a, b értékek esetén lesz eloszlásfüggvény

(a) $F(x) = a + b \arctan x$?

(b) $F(x) = \mathrm{e}^{-a\mathrm{e}^{-bx}}$?

116. Legyen $F(x)$ eloszlásfüggvény. Igazoljuk, hogy

$$G_1(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{és} \quad G_2(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(t)\,\mathrm{d}t$$

is az!

117. Adjunk példát olyan F eloszlásfüggvényre, mely tiszta ugrófüggvény, és bármely $a < b$ esetén $F(b) - F(a) > 0$!

118. Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségeloszlást?

(a) $p^k q^2$, ahol $p \in (0,1)$, $q = 1-p$, $k = 1, 2, \ldots$;

(b) $\frac{1}{k(k+1)}$, $k = 1, 2, \ldots$;

(c) $3^k/k!\mathrm{e}^{-3}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

119. Sűrűségfüggvény-e?

(a) $f(x) = (I_{(0,1)}(x) \sin x)/2$;

(b) $f(x) = I_{(1,\infty)}(x) x^{-2}$;

(c) $f(x) = I_{(0,\infty)}(x) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, ahol $\lambda > 0$.

(d) $f(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}$.

4.2. Diszkrét véletlen változók

120. Egy embernek n egyforma kinézetű kulcsa van, melyek közül pontosan egy nyitja az ajtót. Emberünk véletlenül választva sorra próbálja a kulcsokat addig, amíg a jó kulcs elő nem kerül. Valamely $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén mennyi a valószínűsége, hogy a k-adik próbálkozása sikeres, ha

(a) a kipróbált rossz kulcsokat mindig félreteszi?

(b) a kipróbált rossz kulcsokat sose teszi félre?

Várhatóan hányadik próbálkozása sikeres?

121. Ötöslottón egy szelvénnyel játszva határozzuk meg a találataink számának eloszlását!

122. Határozzuk meg az ötöslottón kihúzott legkisebb szám eloszlását, várható értékét és szórását!

123. Mind a 4 pár különböző cipőmet az előszobában levő beépített szekrényben tartom. Az előszobában kiégett a villany, így sötétben keresgélve véletlenszerűen kiveszek 4 cipőt. Jelölje X a kivett összeillő párok számát! Adjuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

124. Száz alma közül tíz férges. Véletlenül kiválasztunk ötöt! Adjuk meg a férges almák számának eloszlását!

125. Egy csomag francia kártyát megkevertünk, majd egyesével kihúzzuk a lapokat. Adjuk meg a második ász helyének eloszlását!

126. Egy urnában 101 golyó van, közülük pontosan három piros. A golyókat visszatevés nélkül egyesével kihúzzuk. Jelölje X a második piros sorszámát. Adjuk meg X eloszlását!

127. Egy fiókban három pár kesztyű van összekeveredve: az egyik pár fekete, a másik szürke, a harmadik piros. (A három pár kesztyű csak a színében különböző.) A fiókból egyesével elkezdjük kihúzni a kesztyűket úgy, hogy húzás előtt nem nézzük meg a kesztyű színét, és a kihúzott kesztyűket nem tesszük vissza a fiókba. Addig folytatjuk a húzást, amíg lesz két azonos színű kesztyűnk. Határozza meg annak a hat eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, 5, illetve 6 kesztyű kihúzására lesz szükség, majd számítsa ki a húzások számának várható értékét!

128. Földobunk n-szer egy szabályos pénzérmét. Határozzuk meg az F-I, I-F váltások számának eloszlását!

129. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ véletlen változók függetlenek és azonos eloszlásúak, melyre $\mathbf{P}(X_i = k) = 1/3,\ k \in \{0, 1, 2\}$. Adjuk meg az $Y = X_1 X_2 \cdots X_n$ szorzat eloszlását!

130. Egy városban 200 taxi közlekedik. Telefonon taxit rendelünk, és ha van szabad taxi, akkor a központ a legközelebbit hozzánk küldi. Feltesszük, hogy a taxik egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a városban, és mindegyik egymástól függetlenül 2/3 valószínűséggel foglalt. Továbbá egy taxi helyzete a városon belül független attól, hogy foglalt-e vagy sem. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legközelebbi szabad taxi 1 km-es körzetünkben legyen (mely nem nyúlik ki a városból), feltéve, hogy van szabad taxi? A város területe $28,26\,\mathrm{km}^2$. ([4])

131. Egy urnában egy piros és egy fehér golyó van. Visszatevéssel húzunk az urnából, minden húzás után még egy piros golyót teszünk az urnába. Jelölje X_f annak a kísérletnek a sorszámát, amikor először húztunk fehéret. Adjuk meg X_f eloszlását, várható értékét!

4.3. Folytonos véletlen változók

132. A $(0, 1)$ intervallumon találomra kijelölünk három pontot. Határozzuk meg a középső nullától vett távolságának eloszlás- és sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

133. Válasszunk az egységnégyzetben egy pontot véletlenszerűen. Legyen X a pontnak a négyzet határától vett távolsága. Adjuk meg X eloszlásfüggvényét, várható értékét, szórását!

134. Anna és Szabina minden szerdán fodrászhoz mennek. Anna 2 és 3 óra között, Szabina pedig 2 és fél 3 között végez egy véletlenszerű időpontban, egymástól függetlenül. Egymást megvárják, majd együtt indulnak haza. Jelölje X azt az időt amennyit a hamarabb végző lány vár a másikra! Határozzuk meg X eloszlását, várható értékét és szórását!

135. Válasszunk két számot egymástól függetlenül az egyenletességi hipotézis szerint a $(-1, 1)$ intervallumból! Adjuk meg a két szám maximumának eloszlásfüggvényét! Számoljuk ki a várható értéket és a szórást is!

136. Válasszunk $2n+1$ pontot egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint a $[0, 1]$ intervallumban. Adjuk meg a középső pont Z eloszlásfüggvényét! Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbf{P}(|Z - 1/2| > \varepsilon) \to 0$$

amint $n \to \infty$.

4.4. Vektorváltozók

137. Legyen az (X, Y) véletlen változó. eloszlása egyenletes az egységkörben. Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a peremeloszlások sűrűségfüggvényeit!

138. Legyen az X és Y véletlen változók együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y), & \text{ha} (x, y) \in (0, 1)^2\,, \\ 0, & \text{különben}\,. \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat!

139. Láttuk, hogy abszolút folytonos véletlen vektorváltozó peremeloszlásai abszolút folytonosak. Igazoljuk, hogy ez nem megfordítható, azaz mutassunk X, Y abszolút folytonos véletlen változókat, melyek együttes eloszlása nem abszolút folytonos!

140. Lássuk be, hogy ha az (X, Y) véletlen vektorváltozó abszolút folytonos, akkor $\mathbf{P}(X = Y) = 0$. Az együttes sűrűségfüggvénnyel írjuk fel a $\mathbf{P}(X \leq Y)$ valószínűséget!

141. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független véletlen változók $F_1, F_2, \ldots, F_n$ eloszlásfüggvénnyel. Adjuk meg $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ véletlen változók eloszlását és együttes eloszlását!

142. Legyen $f(x,y) = c(x+y)$, $0 \le x,y \le 1$, egy (X,Y) vektorváltozó sűrűségfüggvénye. Mennyi c értéke? Adjuk meg a peremeloszlásokat, várható érték vektort, kovarianciamátrixot! Számoljuk ki Xe^Y várható értékét!

143. Legyen X és Y független Poisson eloszlású véletlen változó λ illetve μ paraméterrel. Határozzuk meg $X+Y$ és XY várható értékét és szórását, valamint a két változó kovarianciáját.

144. Legyen az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = 6\mathrm{e}^{-2x-3y} \quad (x,y>0)\,,$$

0, különben. Határozzuk meg az együttes és marginális eloszlásfüggvényeket! Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

145. Legyen X és Y együttes sűrűsége f, ahol

(a) $f(x,y) = 4xy$, ha $x,y \in (0,1)$;

(b) $f(x,y) = 6xy^2$, ha $x,y \in [0,1]$;

(c) $f(x,y) = 2xy + x$, ha $x,y \in (0,1)$;

(d) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-x(1+y)}$, ha $x,y \ge 0$.

Határozzuk meg a kovarianciamátrixot!

146. Legyen az (X,Y) véletlen vektor sűrűsége $f(x,y) = 3/x^5$, ha $x \ge y \ge 0$, $x \ge 1$. Adjuk meg a kovarianciamátrixot!

147. Legyenek X és Y független standard normálisok. Határozzuk meg az $(X-Y, X+Y)$ vektor várhatóérték-vektorát és kovarianciamátrixát!

4.5. Nevezetes diszkrét eloszlások

148. Húsvétra dobta piacra a Kinder Meglepetés új, matematikusfigurákat tartalmazó Kinder tojásait. Átlagosan minden 4-edik tojás rejt matematikusfigurát. Aladár 10 Kinder tojást kapott. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy Aladár matematikusfigurának örülhet! Adjuk meg Aladár matematikusfigurái számának eloszlását, várható értékét!

149. Egy könyvben, az egyes oldalakon levő sajtóhubák száma Poisson(2) eloszlást követ. Határozzuk meg a sajtóhubák várható értékét és szórását!

150. Egy könyvben az egyes oldalakon levő sajtóhubák száma egymástól független, Poisson(2) eloszlást követnek. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a 30. és 31. oldalon sincs hiba! Adjuk meg az ezeken az oldalakon található sajtóhubák várható értékét és szórását!

151. Egy augusztusi éjszakán megfigyelhető csillaghullások száma Poisson–eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy éjszaka egyetlen hullócsillagot sem látunk 0,1. Várhatóan hány hullócsillag figyelhető meg egy éjszaka?

152. Egy biztosítótársaság felmérte, hogy egy év során egy családi ház 0,0002 valószínűséggel gyullad ki. Mennyi a valószínűsége, hogy 2008-ban egy faluban, ahol 15000 ház van, négynél kevesebb tűz üt ki? (Közelítsünk Poisson–eloszlással!)

153. Egy szövet 100 méterében átlagosan 5 hiba van. Három méteres darabokra vágnak 300 m hosszú szövetet. Várhatóan hány hibátlan darab lesz?

154. Legyen $X_n \sim \text{Binom}(n, p_n)$, ahol $np_n \to \lambda > 0$. Határozzuk meg X_n határeloszlását, azaz a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n = k\}$ értékeket!

155. Valamely növényfajta magjaiból álló mintában a hibás magok száma λ paraméterű Poisson–eloszlású véletlen változó. Minden mintát 3 technikus vizsgál meg egymás után, hogy eltávolítsák a hibás magokat. Az i-edik technikus $p_i < 1$ valószínűséggel veszi észre a hibás magokat; döntései az egyes magokra nézve függetlenek, és az egyes technikusok is egymástól függetlenül döntenek. Határozzuk meg az el nem távolított hibás magok eloszlását! ([4])

156. Tegyük fel, hogy egy rovar petéinek száma λ-paraméterű Poisson-eloszlást követ, és egy petéből $p \in (0, 1)$ valószínűséggel lesz lárva, továbbá a peték egymástól függetlenül fejlődnek lárvává, vagy sem. Mutassuk meg, hogy a lárvák száma λp-paraméterű Poisson-eloszlást követ! ([9])

157. Egy szabályos kockával N-szer dobunk, ahol $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Adjuk meg az együttes eloszlást!

158. Mutassuk meg, hogy két független Poisson–eloszlású véletlen változó összege is Poisson–eloszlású!

159. Legyenek X, Y, Z független, $\text{Geom}(p)$ eloszlású véletlen változók. Adjuk meg a következő valószínűségeket:

(a) $\mathbf{P}(X = Y)$;

(b) $\mathbf{P}(X \geq 2Y)$;

(c) $\mathbf{P}(X + Y \geq Z)$.

160. Egy urnában 3 piros és 5 fehér golyó van. Visszatevéssel húzunk N-szer, ahol N Poisson-eloszlású véletlen változó 2 paraméterrel. Határozzuk meg a kihúzott piros golyók számának N-re vett feltételes várható értékét! Adjuk meg a kihúzott piros golyók számának eloszlását!

161. Legyen $U = \min\{X, Y\}$ és $V = X - Y$, ahol X, Y független, Geom(p) véletlen változók. Igazoljuk, hogy U és V függetlenek. [Ez jellemzi is a geometriai eloszlást.]

162. Hipergeometrikus eloszlás. Egy urnában van f fekete és z zöld golyó. Vegyünk egy r elemű véletlen mintát visszatevés nélkül, és jelölje S_r a fekete golyók számát! Határozzuk meg S_r eloszlását, várható értékét és szórását!

4.6. Nevezetes folytonos eloszlások

163. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású, átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte? És egy már fél éve működő? Mennyi időt él meg a villanykörték 90%-a?

164. A skót bakák mellkasának körmérete $N(88, 10)$ eloszlást követ. Mekkora hányaduk fér bele 84-es zubbonyba?

165. Egy munkadarabokat készítő gép 40 cm-re van beállítva. A hiba normális eloszlást követ 0 várható értékkel. Annak a valószínűsége, hogy egy munkadarab nagyobb, mint 40,5 cm, 0,05. Mennyi a szórás?

166. Frankenstein professzor vámpír denevéreket tenyészt a laboratóriumában. A denevérek tépőfogainak a hossza normális eloszlást követ $\mu = 28$ mm átlaggal és $\sigma = 4$ mm szórással. Frankenstein tudja, hogy azoknak az állatoknak a harapása halálos, akiknek a tépőfogmérete a populáció felső 5%-ába esik. Számítsuk ki, hogy ez hány mm-es fogméretet jelent!

167. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ. A macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg, és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb macskák aránya?

168. Tegyük fel, hogy Ausztriában a munkavállalók keresete normális eloszlást követ. Tudjuk, hogy a munkavállalók fele keres havi 3000 eurót vagy kevesebbet, míg 5%-uk keres 8000 eurónál többet. Egy törvénytervezet szerint változna az adókulcs az 5000 eurónál többet keresők számára. A munkavállalók mekkora hányadát érinti ez a változtatás?

169. Egy telefonfülke előtt állunk, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Az illető véletlentől függő ideig beszél, az időtartam sűrűségfüggvénye (percben mérve) $\mathrm{e}^{-(x/3)}/3$, $x > 0$.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés 3 percnél tovább tart?

(b) Mennyi a valószínűsége, hogy a beszélgetés $t + 3$ percnél tovább tart, feltéve, hogy t percnél tovább tart?

170. Anna 30-ik születésnapjára azt a 6 darabos pohárkészletet kapja nagymamájától, mely már 100 éve a család tulajdona. A poharak élettartamai egymástól függetlenek, exponenciális eloszlást követnek 50 év várható értékkel. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy 50 év múlva Anna sértetlenül adhatja tovább unokájának a családi ereklyét (azaz mind a hat poharat)!

171. Számítsuk ki az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás ferdeségét és lapultságát! Miért nem függ az eredmény a-tól és b-től?

172. Számítsuk ki a λ paraméterű exponenciális eloszlás ferdeségét és lapultságát!

173. Számítsuk ki az $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ paraméterű normális eloszlás ferdeségét és lapultságát!

174. Tegyük fel, hogy az X véletlen változó örökifjú, azaz tetszőleges $t, s > 0$ esetén

$$\mathbf{P}\left(X > t + s | X > t\right) = \mathbf{P}\left(X > s\right).$$

Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét!

175. Geometriai eloszlás. Legyen $\mathbf{P}(A) = p \in (0, 1)$. Egy kísérletet addig ismétlünk, míg az A esemény be nem következik. Jelölje X a szükséges ismétlések számát. Adjuk meg X eloszlását, várható értékét, szórását!

176. Legyen X pozitív egész értékű véletlen változó, melyre teljesül a diszkrét örökifjú tulajdonság, azaz

$$\mathbf{P}\{X > k + l | X > l\} = \mathbf{P}\{X > k\}.$$

Mutassuk meg, hogy $X \sim \mathrm{Geom}(p)$!

177. Diszkrét örökifjúból folytonosat. Legyen $X_n \sim \mathrm{Geom}(\lambda/n)$. Határozzuk meg X_n/n határeloszlását, azaz adjuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right)$$

határértéket minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

178. Folytonos örökifjúból diszkrétet. Legyen $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg $\lfloor X \rfloor$ eloszlását! (A geometriai eloszlás a diszkrét örökifjú.)

4.7. Várható érték, szórás, kovariancia, korreláció

179. Legyen X nemnegatív egész értékű véletlen változó, és tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(X) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i).$$

180. Legyen X véletlen változó, melyre $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \mathbf{E}[(X-x)^2]$ az $x = \mathbf{E}X$ pontban veszi föl a minimumát, ami éppen $\mathbf{D}^2(X)$.

181. Egy dobókockával 10-szer dobunk. Határozzuk meg az összeg harmadik momentumát!

182. Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

183. Egy urnában van 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevéssel. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét!

184. Egy szabályos érmével 100-szor dobunk. Jelölje X a különböző FF sorozatok számát. Határozzuk meg X várható értékét és szórását!

185. Határozzuk meg a Poisson, a binomiális, az egyenletes és az exponenciális eloszlás várható értékét és szórását!

186. Legyen a X véletlen változó sűrűségfüggvénye $f(x) = c/x^2$, ha $x > 1$.

(a) Határozzuk meg c értékét!

(b) Adjuk meg X várható értékét (ha létezik)!

(c) Mennyi $\mathbf{P}(X > 4)$?

(d) Legyen $Y = 1/X$. Adjuk meg Y eloszlás–, és sűrűségfüggvényét!

187. Egy szabályos kockával n-szer dobunk. Jelölje X_1 az egyesek, X_2 a kettesek számát. Határozzuk meg az együttes eloszlásukat! Határozzuk meg X_1, X_2 kovarianciáját és korrelációját!

188. Egy halastóban N hal van. Kihalászunk M halat, megjelöljük őket, és visszaeresztjük a tóba. Bizonyos idő elteltével, miután jól elkeveredtek, kihalászunk n-et. Ezek között legyen a megjelöltek száma X. A teljes halállomány N meghatározására az $Mn/(X+1)$ becslést használjuk. Számítsuk ki ennek a várható értékét és szórását! Miért nem a logikusabb Mn/X becslést használjuk?

189. A Jonas Brothers nevű együttes újra összeáll és koncertet adnak. A PepsiCo cég a következő ötlettel áll elő: a kólásüvegeik kupakjában elrejtik a banda egy-egy tagjának a nevét és azok között, akik összegyűjtik mindhárom nevet kisorsolnak egy VIP belépőt. Kevin neve a kupakok felén szerepel, Joe-val a kupakok egyharmadában találkozhatunk és Nick a legritkább, neve átlagosan minden hatodik kupakban szerepel. Veszünk 10 kólát. Adjuk meg a Joe feliratú kupakok számának várható értékét és szórását! Adjuk meg a Joe feliratú és a Kevin feliratú kupakok számának kovarianciáját és korrelációs együtthatóját!

190. Egy permetező szakaszoló szelep napokban mért élettartamának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3000}{x^4}, & \text{ha } x \geq 10, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mennyi a valószínűsége, hogy a permetező szakaszoló szelep 20 napot túlél? Határozzuk meg az szelep élettartamának eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását!

191. Kupongyűjtő probléma. Egy N különböző elemből álló sokaságból visszatevéses mintát veszünk. Jelölje S_r azt a véletlen számot, ahány elemet kellett húznunk, hogy kapjunk r különböző elemet. Határozzuk meg S_r várható értékét, szórását, majd adjunk ezekre kezelhető aszimptotikus egyenlőséget.

Útmutatás: Vezessük be az $X_k = S_{k+1} - S_k$ változót.

192. Egy urnában N golyó van, megszámozva 1-től N-ig. Visszatevéssel n elemű mintát veszünk. Jelölje X a legnagyobb mintaelemet. Adjuk meg X eloszlását, várható értékét, és az utóbbira adjunk aszimptotikát. Ha N értéke ismeretlen, hogyan lehetne becsülni?

193. Egy gombafajta spórái nyolcelemű lánc alakjában keletkeznek. A lánc különböző részekre szakadhat, mind a hét lehetséges helyen egymástól függetlenül p valószínűséggel. Határozzuk meg az i spórából álló láncok várható értékét!

Egy tényleges kísérlet során 7251 spórát számoltak meg, melyek $N = 907$ láncból származtak (5 spóra elveszett). A spórák 1975 láncra szakadtak szét. Adjunk becslést p értékére! ([9])

194. Jelölje S_n n elem véletlen permutációja során a fixpontok számát.

Határozzuk meg S_n várható értékét és szórását!

195. Vérvizsgálatot végeznek N embernél. Egyszerre k ember vérét összeöntik és analizálják. Ha az eredmény negatív, akkor egy vizsgálat elég k embernek, ha pozitív, akkor a k személyt egyenként is meg kell vizsgálni, és így $k+1$ vizsgálat kellett. A vizsgálat eredménye egymástól függetlenül p valószínűséggel pozitív.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy k ember vérét együtt vizsgálva, az eredmény pozitív?

(b) Jelölje X a szükséges vizsgálatok számát! Mennyi X várható értéke?

(c) Minimalizáljuk $\mathbf{E}(X)$-et k függvényeként!

(d) Lássuk be, hogy a kapott k közel van $1/\sqrt{p}$-hez, és a várható érték $2N\sqrt{p}$ körül lesz.

196. Csodaország munka törvénykönyve szerint egy cég minden munkása fizetett szabadságot kap azokon a napokon, amikor legalább az egyiküknek születésnapja van. Ezen napok kivételével azonban az év minden napján mindenkinek dolgoznia kell. Minden munkás 1 TV-készüléket készıt egy nap alatt. Hány alkalmazottat vegyen fel a cégtulajdonos, ha azt akarja, hogy a gyártott TV-készülékek számának a várható értéke maximális legyen?

197. Két szabályos kockával játszunk. Jelölje X az első kockával dobott számot és Y a dobott számok nagyobbikát. Adjuk meg az együttes eloszlást és az összeg várható értékét, szórását!

198. Határozzuk meg $1/(X+1)$ várható értékét, ha

(a) $X \sim \mathrm{Binom}(n,p)$;

(b) $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$;

(c) X geometriai eloszlású;

(d) X hipergeometriai eloszlású.

199. Legyen $X \sim \mathrm{E}(-1,1)$ eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg a következő véletlen változók sűrűségfüggvényeit:

(a) $|X|$;

(b) X^2;

(c) e^X.

200. Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ eloszlású véletlen változó. Határozzuk meg a következő véletlen változók sűrűségfüggvényeit:

(a) $2X + 3$;

(b) X^3;

(c) $\sqrt{X}$.

4.8. Vegyes

A következő néhány feladat a kombinatorikában *véletlen módszerként* ismert bizonyítási módszerre mutat példát. Bővebben, lásd Alon és Spencer [1] könyvét.

201. Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf, és $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a csúcsok egy sorrendje. Minden csúcsra feldobunk egy szabályos érmét, ha az fej akkor a csúcs az A halmazba, különben a B halmazba kerül. Határozzuk meg az A és B halmazok közt futó élek számának várható értékét!

202. Mutassuk meg, hogy tetszőleges hurokélmentes gráfból páros gráfot kaphatunk legfeljebb az élek felének elhagyásával!

203. A $G = (V, E)$ gráf jó síkra rajzolása egy olyan lerajzolás, ahogy mindenki lerajzol egy gráfot, azaz két él véges sok pontban metszi egymást és egy ponton kettőnél több él nem halad át. Egy gráf metszési száma, $\text{cr}(G)$, a lehető legkevesebb metszést adó jó lerajzolásnál keletkezett metszések száma. Igazoljuk, hogy

$$\text{cr}(G) \geq \frac{e^3}{64v^2},$$

ahol e az élek v a csúcsok száma. (Ajtai, Chvatal, Newborn, Szemerédi)

Útmutatás: Tekintsünk egy véletlen G' részgráfot, melyben minden csúcsot egymástól függetlenül $p \in (0, 1)$ valószínűséggel tartunk meg. Jelölje X a G optimális lerajzolásában a G' metszéseinek számát.(Nyilván $X \geq \text{cr}(G')$.) Határozzuk meg az $\mathbf{E}(v(G')), \mathbf{E}(e(G'))$ és $\mathbf{E}(X)$ értékeket, alkalmazzuk az Euler–tételből adódó $\text{cr}(G) \geq e - 3v + 6$ becslést, végül legyen $p = 4v/e$.

204. Ramsey tételkör. $R(k)$ a legkisebb olyan N, hogy ha egy N csúcsú teljes gráf éleit pirossal és kékkel színezzük, akkor lesz egyszínű k-klikk. Mutassuk meg, hogy $2^{k/2} \leq R(k) \leq 2^{2k}$ (Erdős)!

Segítség. A fölső becslés konstruktív, nem kell hozzá véletlen. Az alsó becsléshez színezzük véletlenül az éleket, és számoljuk ki a k-klikkek számának várható értékét! (Konstruktív bizonyítás az alsó becslésre nem ismert.)

Megoldás. Színezzünk minden élet egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel pirosra, $1/2$ valószínűséggel kékre. Válasszunk ki k csúcsot az N-ből. Annak a valószínűsége, hogy ez éppen egy egyszínű k-klikk, $2^{1-\binom{k}{2}}$. Tehát az egyszínű k-klikkek várható értéke $2^{1-\binom{k}{2}}\binom{N}{k}$. Na most, ha ez kisebb, mint 1, akkor szükségképpen van olyan konstrukció, ahol az egyszínű k-klikkek száma 0, azaz ekkor $R(k) > N$. Egyszerű számolás adja, hogy $N = 2^{k/2}$ esetén a várható érték kisebb, mint 1.

205. A $[0, 1]$ intervallumból függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választunk pontokat addig, míg az összeg meghaladja t-t. Jelölje $\alpha(t)$ a szükséges választások várható számát. Határozzuk meg $\alpha(t)$-t, $t \in [0, 1]$ esetén.

Bővebben [6].

206. Bergengóciában felütötte fejét a madárinfluenza legújabb változata, a HπNe. Egy influenzás bergengóc $1/7$ valószínűséggel pontosan egy, és $4/7$ valószínűséggel pontosan kettő másik bergengócot fertőz meg; három, vagy annál több személyt pedig biztosan nem fertőz meg. Mekkora valószínűséggel terjeszti el a járványt egyetlen beteg? (Azaz mekkora annak a valószínűsége, hogy a vírus sosem tűnik el a bergengóc társadalomból?) Mekkora ugyanez a valószínűség, ha kezdetben 3 beteg van?

207. Legyen $X \in [0, 1]$. Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy

$$(X|X \leq a) \stackrel{\mathcal{D}}{=} aX, \text{ minden } a \in [0, 1] \text{ esetén,}$$

azaz feltéve, hogy $X \leq a$, X ugyanolyan eloszlású, mint aX.

Adjunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy

$$(X|X > a) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (1 - a)X + a, \text{ minden } a \in [0, 1] \text{ esetén.}$$

Mutassuk meg, hogy ha X-re teljesül mindkét feltétel, akkor X egyenletes eloszlású $[0, 1]$-en!

208. Legyen $X \in [0, 1]$. Mi a szükséges és elegendő feltétele az $I(X \leq 1/2)$ és $\min\{X, 1 - X\}$ változók függetlenségének?

209. Legyen Y véletlen változó folytonos F eloszlásfüggvénnyel. Mutassuk meg, hogy $F(Y) \sim \text{Uniform}(0, 1)$.

Legyen Y véletlen változó F (*nem feltétlenül folytonos*) eloszlásfüggvénnyel. Legyen $V \sim \text{Uniform}(0, 1)$, mely független Y-tól. Legyen

$$\tilde{F}(x, V) = F(x-) + V(F(x) - F(x-)).$$

Mutassuk meg, hogy $\tilde{F}(Y, V) \sim \text{Uniform}(0,1)$. Bővebben Rüschendorf [13].

210. Ketten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1, ill. p_2 valószínűséggel ér el találatot, $p_1 < p_2$. Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Mennyi a valószínűsége, hogy az ügyesebb nyer? Mennyi a játék várható időtartama, ha percenként egyet lőnek? ([4])

5. De Moivre–Laplace tétel

211. Egy szabályos dobókockát feldobunk 200-szor. Jelölje S_n a dobott hatosok számát. Adjuk meg pontosan, majd a de Moivre– Laplace tétellel közelítve a $\mathbf{P}(30 < S_n \leq 40)$ valószínűséget!

212. Egy szabályos érmét n-szer földobunk. Adjuk meg a

$$\mathbf{P}\left\{\frac{n}{2} - c\sqrt{n} < S_n < \frac{n}{2} + c\sqrt{n}\right\}$$

valószínűségek közelítő értékét! Mit kapunk a $c \to 0$ ill. $c \to \infty$ esetben?

213. Egy étteremben kétféle menü közül lehet választani. A vendégek $5/6$ valószínűséggel A menüt, $1/6$ valószínűséggel B menüt választanak. Egy adott napon 500 vendég érkezik. A vendéglős 420 A és 100 B menüt készített elő. Feltételezve, hogy a vendégek egymástól függetlenül választanak, mi a valószínűsége, hogy mindenkinek jut olyan menü, amilyet kér?

214. Egy szerencsejátékon a nyerési esélyed $1/11$. Ha nyersz, visszakapod a feltett tétet és még nyereményként annak kilencszeresét. Elegendő sok kezdőtőkével indulva ezer alkalommal felteszel 1–1 petákot. Mi a valószínűsége, hogy ezer játszma után még legalább annyi pénzed van, mint kezdetben volt?

215. Az utóbbi években felmerült a mozilátogatókban az igény arra, hogy eredeti hanggal feliratosan is megnézhessék a filmeket. Egy friss felmérés szerint az emberek $2/7$-e választaná a feliratos filmet a szinkronizált változattal szemben. A szegedi Cinema City vezetősége minket kért fel arra, hogy segítsünk dönteni Christopher Nolan The Dark Knight Rises című filmjének premierje kapcsán. A premierre 1000 látogatót várnak, és a filmet 9 egyenként 130 fős teremben vetítik. Hány teremben kell feliratosan vetíteni a filmet, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel tudjon minden látogató arra a változatra beülni, amire szeretne? Mekkora ez a valószínűség?

216. Egy általános iskolában egy és két forintosok gyűjtését hirdetik meg a pénzérmék bevonása előtti fél évben. Megkérik az oda járó diákokat és szüleiket, hogy az otthoni felesleges apórópénzüket az iskolának adják, hogy az így befolyt összegből játszóteret építhessenek az iskolaudvaron. A játszótér megépítéséhez 1,5 millió Ft-ra van szükségük. A gyűjtés során egymillió darab pénzérmét adományoztak az iskolának. Ha ezen pénzérmék mindegyike a többitől függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel egy illetve két forintos, akkor mennyi a közelítő valószínűsége, hogy az igazgatónak legfeljebb 1000 Ft-tal kell hozzájárulnia a játszótér megépüléséhez?

217. Chicago és Los Angeles között két vasútvonal van, melyek mindegyikén egy-egy vonat közlekedik. Mindkét vonat egyidőben indul, lényegében egyformán kényelmes és k személyes. Tegyük fel, hogy 1000 utas egymástól függetlenül $1/2-1/2$ valószínűséggel választ vonatot. Legalább mekkora legyen az ülőhelyek k száma, hogy 0,01-nél kisebb legyen annak a valószínűsége, hogy lesz olyan utas, akinek nem jut ülőhely? ([9, 186.o])

218. Budapesten meg akarják állapítani a dohányosok p arányát. Ehhez kiválasztanak n egyént úgy, hogy minden választásnál mindenki ugyanakkora valószínűséggel kerül kiválasztásra, és csak ezek közt nézik meg a dohányosok k számát. Legalább mekkora legyen az n, hogy a kapott $p' = k/n$ arány legalább 0,95 valószínűséggel legfeljebb 0,005 hibával közelítse a valódi p arányt, akármi is $p \in (0, 1)$? ([9, 187.o])

219. A héten jelenik meg George R. R. Martin új könyve Winds of Winter címmel. A könyvesboltunkba rendeltünk a keménytborítós kiadásból 180-et a puhakötésűből pedig 240-et. Tapasztalataink alapján az emberek 40%-a választja a tartósabb, de valamivel drágább keményborítású kiadást. Ha 400 vevőre számítunk, akik egymástól függetlenül döntenek, akkor milyen valószínűséggel tudunk mindenkit kiszolgálni?

220. Kávézót szeretnénk nyitni egy város forgalmas utcáján. A közelben van egy kávézó, ahol naponta 300 ember megfordul. Mi ezen emberek egy részét szeretnénk elcsábítani, hogy hozzánk térjenek be. Az eltérő hangulat, árak és üzletstratégia alapján úgy gondoljuk, hogy az emberek 27%-át sikerül erre rávennünk. Hány férőhelyesre tervezzük a kávézónkat, ha azt szeretnénk, hogy 90%-os biztonsággal minden betérőnek jusson szabad hely?

Hivatkozások

[1] Alon, Spencer: *The probability method.*

[2] Barczy Mátyás, Pap Gyula: *Valószínűségszámítás II. példatár*. mobiDIÁK könyvtár 2005. http://www.inf.unideb.hu/valseg/dolgozok/barczy/val2gyak.pdf

[3] Patrick Billingsley: *Probability and Measure*. Third edition, Wiley 1995.

[4] Bognár Jánosné, Mogyoródi József, Prékopa András, Rényi Alfréd, Szász Domokos: *Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény*. Negyedik kiadás, Typotex 2001.

[5] Leo Breiman: *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1968.

[6] Branko Curgus, Robert I. Jewett, An unexpected limit of expected values, *Expo. Math.* 25 (2007) 1–20.

[7] Cherny Alexander: The Kolmogorov Students' Competitions on Probability Theory. http://www.newton.ac.uk/preprints/NI05043.pdf.

[8] Csörgő Sándor: *Fejezetek a valószínűségelméletből*. Polygon 2010.

[9] William Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba I.

[10] Hajnal Péter: *Elemi kombinatorikai feladatok*. Polygon, 1997.

[11] Rényi Alfréd: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest 1981.

[12] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis*, Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York 1987

[13] Rüschendorf: On the distributional transform, Sklar's theorem, and the empirical copula process, *J. Statist. Plann. Inference* 139, 11, 3921–3927, 2009.