

Valószínűségszámítás

Kevei Péter

2018. november 29.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
1.1. Alapfogalmak	4
1.2. A valószínűségi mérték	5
1.3. Klasszikus valószínűségi mező	8
2. Néhány klasszikus probléma	9
2.1. de Mére paradoxona	9
2.2. A párosítási probléma	10
2.3. Az igazságos osztzkodás problémája	11
3. Geometriai valószínűségi mező	13
3.1. Bertrand paradoxon (1888)	13
3.2. Buffon-féle tűprobléma (1777)	14
4. Feltételes valószínűség	14
4.1. A játékos csődje	18
5. Függetlenség	20
5.1. Craps játék	23
6. Véletlen változók	24
6.1. Diszkrét véletlen változók	26
6.2. Folytonos véletlen változók	26
6.3. Véletlen vektorváltozók	27
6.4. Véletlen változók függetlensége	29
6.5. Függetlenség és geometriai valószínűség	29
7. Várható érték	30
7.1. Várható érték tulajdonságai	31
7.2. Szórás, kovariancia, korreláció	33
7.3. Ferdeség és lapultság	38
8. Feltételes várható érték	39
8.1. Diszkrét feltétel	39
8.2. Folytonos feltétel	40
9. Nevezetes eloszlások	41
9.1. Bernoulli-eloszlás	41
9.2. Binomiális eloszlás	41
9.3. Poisson-eloszlás	42

9.4. Geometriai eloszlás	43
9.5. Egyenletes eloszlás	45
9.6. Exponenciális eloszlás	45
9.7. Normális eloszlás	47
10. Véletlen változók konvergenciája	49
10.1. Markov és Csebisev egyenlőtlenségei	49
10.2. Nagy számok gyenge törvénye	50
10.3. Centrális határeloszlás-tétel	52
11. Konvolúció	53
11.1. Diszkrét eset	53
11.2. Folytonos eset	54
12. A valószínűségi módszer	55
12.1. Weierstrass approximációtétele	55
12.2. Ramsey számok	56
13. Generátorfüggvények	57

1. Bevezetés

1.1. Alapfogalmak

Véletlen (valószínűségi) kísérlet: lényegében azonos körülmények között tetszőlegesen sokszor megismételhető megfigyelés, melynek többféle kimenetele lehet, és a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen a kimenetelt.

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek halmaza az **eseménytér**, jele Ω .

Az **esemény** olyan a kísérlettel kapcsolatban tett állítás, melynek igaz vagy hamis volta eldönthető a kísérlet lefolytatása után. Az **események halmaza** az Ω részhalmazainak egy olyan rendszere, mely σ -algebra. Az (Ω, \mathcal{A}) párt mérhetőségi térnek nevezzük.

Egy $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ halmazrendszert akkor nevezünk **σ -algebrának**, ha

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- valahányszor $A \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ (azaz a halmazrendszer zárt a komplementerképzésre);
- valahányszor $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, mindannyiszor $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (azaz a halmazrendszer zárt a megszámlálható unióképzésre).

Megjegyzés.

- Vegyük észre, hogy a $\{\emptyset, \Omega\}$ halmazrendszer σ -algebra. Ez a triviális σ -algebra.
- A 2^Ω halmazrendszer, az Ω hatványhalmaza, azaz az összes részhalmazának halmaza is σ -algebra. Abban az esetben, amikor az Ω alaphalmaz véges, akkor az események halmaza mindig a hatványhalmaz.

Események jelölése: A, B, A_1, \dots

- $|A| = 1 \Leftrightarrow A = \{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, elemi esemény
- \emptyset a lehetetlen esemény
- Ω a biztos esemény
- A^c az ellentett esemény
- $A \cap B$ mindkét esemény bekövetkezik (A és B)

- $A \cup B$ a két esemény közül legalább az egyik bekövetkezik
- $A \cap B = \emptyset$ a két esemény kizárja egymást
- $A - B$ a bekövetkezik de B nem
- $A \subset B$ az A esemény maga után vonja B -t

Példa. Háromszor földobunk egy pénzérmét.

$$\Omega = \{(F, F, F), (F, F, I), (F, I, F), (F, I, I), (I, F, F), (I, F, I), (I, I, F), (I, I, I)\}$$

azaz $|\Omega| = 2^3 = 8$ darab elemi esemény van, és $|2^\Omega| = 2^8 = 256$ az összes esemény száma.

Legyen $A_i = \{\text{az } i\text{-edik dobás fej}\}$, $i = 1, 2, 3$. Ekkor

$$A_1 = \{(F, F, F), (F, F, I), (F, I, F), (F, I, I)\}.$$

$$B = \{\text{csak az 1. fej}\} = \{(F, I, I)\} = A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c$$

$$C = \{\text{egyik sem fej}\} = \{(I, I, I)\} = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$$

Példa. Véletlen sorrendben leírjuk a MATEMATIKA szó betűit.

1. megoldás: Az azonos betűket nem különböztetjük meg.

$$\Omega = \{\text{AAAEIKMMTT, AAAEIKMTMT, } \dots, \text{TTMMKIEAAA}\}$$

$$|\Omega| = \frac{10!}{3!2!2!}$$

$A = \{\text{MATEMATIKA szót kapjuk}\} = \{\text{MATEMATIKA}\}$, azaz A elemi esemény.

2. megoldás: Az azonos betűket megkülönböztetjük.

$$\Omega = \{A_1A_2A_3EIKM_1M_2T_1T_2, A_1A_2A_3EIKM_1M_2T_2T_1, \dots, T_2T_1M_2M_1KIEA_3A_2A_1\},$$

$$|\Omega| = 10!, \text{ és ha } A = \{\text{MATEMATIKA szót kapjuk}\}, |A| = 3!2!2!.$$

1.2. A valószínűségi mérték

$n \in \mathbb{N}$, és legyen $S_n(A)$ n db független kísérlet során azoknak a száma, melyeknél bekövetkezett az A esemény.

$\frac{S_n(A)}{n}$ az A esemény relatív gyakorisága

Tapasztalat: az $S_n(A)/n$ relatív gyakoriság konvergál valamilyen $[0, 1]$ -beli számhoz, és ez a szám lesz az A esemény valószínűsége. Persze ennek a konvergenciának a hagyományos értelemben nincs értelme.

Mindenesetre a relatív gyakoriság $[0, 1]$ -beli érték, és ha A és B diszjunktak, akkor

$$\frac{S_n(A \cup B)}{n} = \frac{S_n(A)}{n} + \frac{S_n(B)}{n}.$$

Ezek után valamelyest természetes az alábbi:

Egy $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ halmazfüggvény **valószínűségi mérték** az (Ω, \mathcal{A}) mérhetőségi téren, ha

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
- ha az $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ halmazok (páronként) diszjunktak, akkor

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i),$$

azaz a halmazfüggvény σ -additív.

A fenti tulajdonságokkal rendelkező $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

A valószínűség tulajdonságai.

1. Állítás. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, $A, B, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ események.*

(i) *Ha $A_i \cap A_j = \emptyset$, minden $i \neq j$ párra, akkor*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n).$$

(ii) $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

(iii) $\mathbf{P}(A) \leq 1$.

(iv) $A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(B - A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$, és $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

(v) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

(vi) *Szita formula: $\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$.*

(vii) $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

(viii) $\mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n)$.

(ix) *Ha A_n monoton növekvő halmzsorozat, azaz $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$.*

(x) Ha A_n monoton csökkenő halmzsorozat, azaz $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)$.

(xi) $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$ (megszámlálható szubadditivitás).

Bizonyítás. (i) Legyen $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$.

(ii) $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup A^c) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^c)$.

(iii) $1 = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^c) \geq \mathbf{P}(A)$.

(iv) $B = A \cup (B - A)$,

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B - A) \Rightarrow \mathbf{P}(B - A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A) \geq 0.$$

(v) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A \cup (B - (A \cap B))) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B - (A \cap B)) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

(vi) Teljes indukcióval. $n = 1, 2$ -re igaz. Tegyük fel, hogy n -ig igaz. A $B_i = A_i$, $i \leq n - 1$, $B_n = A_n \cup A_{n+1}$ jelöléssel

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= \mathbf{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{i_k < n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i_{k-1} \leq n-1} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap (A_n \cup A_{n+1})) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{i_k < n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i_{k-1} \leq n-1} \left[\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n) + \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n \cap A_{n+1}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \end{aligned}$$

(vii) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

(viii) Teljes indukcióval.

(ix) Vezessük be a $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n \geq 2$ jelölést. Ekkor a B_n halmazok diszjunktak, $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, és $\cup_{k=1}^n B_k = \cup_{k=1}^n A_k = A_n$, $n \geq 1$. Így

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) &= \mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(B_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\cup_{k=1}^n B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n), \end{aligned}$$

amint állítottuk.

(x) Mivel A_n monoton csökkenő, A_n^c monoton növekvő halmzsorozat, ezért használhatjuk az előző pont állítását. Ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\cap_{k=1}^{\infty} A_k) &= 1 - \mathbf{P}((\cap_{k=1}^{\infty} A_k)^c) = 1 - \mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k^c) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n^c) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \mathbf{P}(A_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n), \end{aligned}$$

amivel az állítást igazoltuk.

(xi) Tetszőleges n természetes számra a véges szubadditivitás alapján

$$\mathbf{P}(\cup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k).$$

Mivel a $B_n = \sum_{k=1}^n A_k$ halmzsorozat monoton növekvő, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = \mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k),$$

ezért az egyenlőtlenségből határátmenettel kapjuk az állítást. □

Az $(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbf{P})$ hármast **valószínűségi mezőnek** nevezzük.

Valószínűségszámítás axiómája: Feltesszük, hogy minden matematikailag tárgyalható kísérlethez van öt leíró valószínűségi mező.

1.3. Klasszikus valószínűségi mező

Az $(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező **klasszikus**, ha minden kimenetel egyformán valószínű, azaz $\mathbf{P}(\{\omega\}) = c$ minden $\omega \in \Omega$ esetén. Ekkor persze szükségképpen $c = 1/|\Omega|$. Tetszőleges A eseményre $\mathbf{P}\{A\} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$.

Példa. *Születésnap probléma.* Mekkora a valószínűsége annak, hogy n ember között van két olyan, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk?

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathbf{P}(n \text{ ember között van } 2, \text{ akiknek ugyanazon a napon van a születésnapja}) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\text{mindenkinek különböző napon van a születésnapja}) \\ &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}. \end{aligned}$$

$$f(22) \approx 0,4757 < 1/2 < 0,5073 \approx f(23).$$

2. Néhány klasszikus probléma

2.1. de Méré paradoxona

1654: Pascal és Fermat levelezése de Méré lovag feladatairól, majd a „véletlen matematikájának” megalapozásáról.

de Méré lovag paradoxona: Miért nem ugyanakkora valószínűségű a következő két esemény:

- 1 kockával 4-szer dobva legalább egy hatost dobunk;
- 2 kockával 24-szer dobva legalább egy dupla hatost dobunk.

Legyen A az az esemény, hogy 1 kockával 4-szer dobva legalább egyszer dobunk 6-ost. Ekkor $\Omega = \{(1, 1, 1, 1), \dots, (6, 6, 6, 6)\}$, azaz $|\Omega| = 6^4$. Mivel minden kimenetel egyformán valószínű, a valószínűségi mezőn klasszikus. A^c az az esemény, hogy nem dobunk 6-ost, így $|A^c| = 5^4$. Ezért

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(A^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,5177.$$

Vizsgáljuk most azt a kísérletet, hogy 2 kockával dobunk 24-szer, és legyen B az az esemény, hogy dobunk dupla 6-ost. Ekkor $|\Omega| = 36^{24}$, és $|B^c| = 35^{24}$, ezért

$$\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(B^c) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,4914.$$

Az intuíció az, hogy ha 4-szer megyünk neki egy $1/6$ valószínűségű eseménynek, akkor a siker valószínűsége ugyanannyi, mint ha 24-szer megyünk neki egy $1/36$ -od valószínűségűnek, hiszen $4/6 = 24/36$.

2.2. A párosítási probléma

Veszünk n darab kártyát 1-től n -ig megszámozva. Összekeverjük, és véletlen sorrendben lerakjuk őket egy sorba. A k -adik helyen párosítás történik, ha a k -adik helyre a k sorszámú kártya kerül. (Tehát véletlen permutációk fixpontjait tekintjük.)

Arra keressük a választ, hogy mennyi a valószínűsége, hogy nem történik párosítás. Jelölje p_n ezt a valószínűséget.

Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a k -adik helyen párosítás történik, $k = 1, 2, \dots, n$. Ekkor az az esemény, hogy legalább egy párosítás történik éppen $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Ennek a valószínűségét a szita formulával határozhatjuk meg. Eszerint

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \frac{(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}. \end{aligned}$$

Ezek szerint

$$\begin{aligned} p_n = \mathbf{P}(\text{nincs párosítás}) &= \mathbf{P}(A_1^c \cap \dots \cap A_n^c) \\ &= 1 - \mathbf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \left(- \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Analízisből tudjuk, hogy tetszőleges x valós számra

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

ahonnan látjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \approx 0,368.$$

Ezek után határozzuk meg azt a valószínűséget, hogy pontosan k darab párosítás történik. Vezessük be a

$$p_{n,k} = \mathbf{P}(n \text{ kártya van, és pontosan } k \text{ párosítás történik}), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Nyilván $p_n = p_{n,0}$. Jelölje $N_{n,k}$ azon kimenetek számát, amikor pontosan k párosítás történik n kártyával. Ezekkel a jelölésekkel $p_m = N_{m,0}/m!$ minden m természetes szám esetén. Könnyen meggondolható, hogy

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= \frac{N_{n,k}}{n!} = \frac{\binom{n}{k} N_{n-k,0}}{n!} = \frac{\binom{n}{k} (n-k)! p_{n-k}}{n!} \\ &= \frac{p_{n-k}}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Az utóbbi alakból rögtön látjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Megjegyzés. Valójában azt bizonyítottuk be, hogy egy véletlen permutáció fix-pontjainak száma nagy n esetén közelítőleg Poisson-eloszlású, pontosabban a fix-pontok száma eloszlásban konvergál egy 1-paraméterű Poisson-eloszlású véletlen változóhoz. De erről majd később.

2.3. Az igazságos osztzkodás problémája

Két játékos, Anna és Balázs játszanak. Mindketten $1/2 - 1/2$ valószínűséggel nyernek egy-egy játékot. Az előre befizetett tétet az kapja, aki előbb nyer 10 játékot. A játék azonban 8-7-es állásnál abbamaradt. Hogyan osszák el igazságosan a befizetett tétet?

Kicsit általánosabban a következő feladatot vizsgáljuk. Két játékos, Anna és Balázs játszanak. Annának a pont hiányzik a győzelemhez, Balásznak pedig b . Egy-egy játékot Anna $p \in (0, 1)$ valószínűséggel nyer meg, Balázs pedig $1 - p$ valószínűséggel. Hogyan osszák el a tétet?

Már 15. században írnak a problémáról, de Méré előtt (Luca Pacioli (1494), Tartaglia (~1550)). Speciális esetekben meg is tudják oldani a feladatot, azonban a teljes megoldást Pascal és Fermat adják meg. A következőkben Fermat megoldását mutatjuk be.

Vegyük észre, hogy a játéksorozat $a + b - 1$ játékkal biztos véget ér. Anna pontosan akkor nyer, ha az $a + b - 1$ játékból legalább a játékot nyer meg.

Így Anna nyerésének valószínűségét $P_A(a, b, p)$ -vel jelölve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P_A(a, b, p) &= \mathbf{P}(a + b - 1 \text{ játékból Anna legalább } a \text{ pontot szerez}) \\ &= \sum_{k=a}^{a+b-1} \mathbf{P}(a + b - 1 \text{ játékból Anna pontosan } k \text{ pontot szerez}) \\ &= \sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k} p^k (1-p)^{a+b-1-k} \end{aligned}$$

Mivel pontosan az egyikük nyer $P_A + P_B = 1$, a binomiális tétel szerint pedig

$$\sum_{k=0}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k} p^k (1-p)^{a+b-1-k} = (p + (1-p))^{a+b-1} = 1,$$

ezért Balázs nyerésének valószínűsége

$$P_B(b, a, 1-p) = \sum_{k=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{k} p^k (1-p)^{a+b-1-k}.$$

A $p = 1/2$ esetben ez a következőt adja:

$$\begin{aligned} P_A\left(a, b, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^{a+b-1}} \sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k}, \\ P_B\left(b, a, \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2^{a+b-1}} \sum_{k=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{k}. \end{aligned}$$

Ezek szerint a tétet

$$\frac{P_A\left(a, b, \frac{1}{2}\right)}{P_B\left(b, a, \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k}}{\sum_{k=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{k}}$$

arányban kell elosztani. Ezt úgy tudjuk egyszerűen kiszámolni, hogy a Pascal-háromszög $(a+b-1)$ -edik sorában összeadjuk az elemeket az a -adiktól az $(a+b-1)$ -edikig, majd az eredményt elosztjuk a 0-adiktól az $(a-1)$ -edik elemig vett összeggel.

A kiinduló példánkban Annának 2 pont Balázsnak 3 pont hiányzott a győzelemhez. Tehát a tétet

$$\frac{P_A(2, 3, 1/2)}{P_B(3, 2, 1/2)} = \frac{6 + 4 + 1}{1 + 4} = \frac{11}{5}$$

arányban kell elosztani.

3. Geometriai valószínűségi mező

Akkor beszélünk geometriai valószínűségi mezőről, ha a kísérlettel kapcsolatos események egy geometriai alakzat részhalmazainak feleltethetők meg. Ekkor a lehetséges kimenetek halmaza $\Omega = H \subset \mathbb{R}^n$, aminek a mértéke (hossza, területe, térfogata) pozitív és véges. Ekkor egy $A \subset H$ esemény valószínűsége arányos a halmaz mértékével, azaz

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(H)},$$

ahol λ az n -dimenziós Lebesgue-mérték (hossz, terület, térfogat).

3.1. Bertrand paradoxon (1888)

Véletlenszerűen választunk egy húrt egy r sugarú körön. Mennyi a valószínűsége, hogy a húr hosszabb, mint a körbe írható szabályos háromszög oldala? Jelölje p ezt a valószínűséget.

1. *Megoldás.* A húr hosszát meghatározza a felezőpontjának (F) a kör középpontjától (O) vett távolsága. Ha $|OF| > r/2$, akkor a húr hosszabb, mint a szabályos háromszög oldala, különben rövidebb. Tehát a feladat megfeleltethető annak, hogy egy rögzített sugárról egyenletes eloszlás szerint választunk pontot. Ezért

$$p = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}.$$

2. *Megoldás.* Ha az egyik végpontot rögzítjük, akkor a húr hosszát meghatározza, hogy hova esik a másik végpont. Legyen ϑ a húrnak és a rögzített ponthoz húzott érintőnek a szöge. A húr pontosan akkor hosszabb, mint a háromszög oldala, ha $\vartheta \in (\pi/3, 2\pi/3)$. Ennek a valószínűsége nyilván $1/3$, tehát

$$p = \frac{1}{3}.$$

3. *Megoldás.* A húr pontosan akkor lesz hosszabb a háromszög oldalánál, ha a középpontja beleesik a háromszög beírt körébe. Ennek a valószínűsége $(r/2)^2\pi/(r^2\pi) = 1/4$, tehát

$$p = \frac{1}{4}.$$

A problémát természetesen az okozza, hogy a húr választását nem mondja meg a feladat. Azaz a véletlen nincs jól megadva.

3.2. Buffon-féle tűprobléma (1777)

Egy padló mintázata párhuzamos egyenesekből áll. A szomszédos egyenesek távolsága d . A padlóra ledobunk egy ℓ hosszú tűt, ahol $\ell \leq d$. Mekkora a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

Jelölje x a tű középpontjának és a hozzá legközelebbi, tőle balra levő egyenesnek a távolságát! Legyen Θ a tű függőlegessel bezárt szöge. Vegyük észre, hogy a tű akkor metszi a baloldali egyenest, ha $0 \leq x \leq \frac{\ell}{2} \sin \Theta$, és akkor metszi a jobboldalit, ha $0 \leq d - x \leq \frac{\ell}{2} \sin \Theta$. Ha x egyenletes eloszlású $[0, d]$ -n és Θ egyenletes eloszlású $[0, \pi]$ -n, akkor a kísérlet megfeleltethető egy pont egyenletes eloszlás szerinti választásának a $[0, d] \times [0, \pi]$ téglalapról. A kedvező területrészt területe

$$2 \int_0^\pi \frac{\ell}{2} \sin \theta d\theta = 2\ell,$$

így a keresett valószínűség

$$\mathbf{P}(\text{van metszés}) = \frac{2\ell}{\pi d}.$$

Innen látjuk, hogy a π értékét meg lehet határozni empirikus módon.

4. Feltételes valószínűség

Feller színvakos példája: Egy N emberből álló sokaság N_s számú színvakot, és N_h számú nőt tartalmaz. Jelölje A ill. B azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember színvak, ill. nő. Ekkor

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N_s}{N}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{N_h}{N}.$$

Tekintsük most csak a nőket, és vizsgáljuk azt az eseményt, hogy egy nő színvak. Ha N_{sh} jelöli a színvak nők számát, akkor ennek a valószínűsége N_{sh}/N_h . Ez motiválja az alábbi definíciót.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, és ezen A, B események, és tegyük föl, hogy $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ha annyi információnk van a véletlen kísérletről, hogy a B esemény bekövetkezett, akkor az A esemény valószínűsége $\mathbf{P}(A|B)$.

2. Állítás. Rögzítsünk egy tetszőleges B eseményt, melyre $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ valószínűségi mérték \mathcal{A} -n.

Bizonyítás. Világos, hogy tetszőleges A eseményre $\mathbf{P}_B(A) \geq 0$, és mivel $\mathbf{P}(A \cap B) \leq \mathbf{P}(B)$, így $\mathbf{P}_B(A) \leq 1$. Továbbá

$$\mathbf{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbf{P}(\Omega \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1.$$

Már csak az additivitás ellenőrzése maradt. Legyenek $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ diszjunktak. Ekkor a definíció szerint és a \mathbf{P} valószínűségi mérték additivitása alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_B(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i | B) = \frac{\mathbf{P}((\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B))}{\mathbf{P}(B)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(A_i \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i | B) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}_B(A_i), \end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőség. □

Ebből következik, hogy \mathbf{P}_B halmazfüggvényre is teljesülnek a valószínűségi mérték tulajdonságai, melyeket a későbbiekben említés nélkül fölhasználunk.

Szorzási szabály. Legyenek A_1, A_2, \dots, A_n tetszőleges olyan események, melyekre $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Ekkor

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2 | A_1) \mathbf{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \mathbf{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

A bizonyítás előtt megjegyezzük a következőket:

1. A formulában szereplő összes feltétel valószínűsége pozitív, azaz minden jóldefiniált. Ez a $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ feltétel következménye.
2. Ha $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ is teljesül, akkor $n!$ darab különböző ilyen szabály van.
3. A szabályt az $n = 2$ esetben használjuk legtöbbször. Ekkor

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(A|B),$$

amennyiben A és B is pozitív valószínűségű esemény.

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ &= \mathbf{P}(A_1) \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbf{P}(A_1)} \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbf{P}(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} \\ &= \mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n), \end{aligned}$$

amint állítottuk. □

Példa. Egy dobozban 12 kék és 3 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk két golyót egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mindkét golyó kék?

Jelölje K_i az az eseményt, hogy az i -ediknek kihúzott golyó kék. Ekkor a szorzási szabály szerint

$$\mathbf{P}(K_1 \cap K_2) = \mathbf{P}(K_1)\mathbf{P}(K_2|K_1) = \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14}.$$

Ugyanezt kapjuk a klasszikus valószínűségi mezőre vonatkozó kedvező/összes formulával is, mely szerint

$$\mathbf{P}(K_1 \cap K_2) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{15}{2}}.$$

A B_1, B_2, \dots események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha

- minden $i \neq j$ párra $B_i \cap B_j = \emptyset$;
- $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$.

Teljes valószínűség tétele. Legyen B_1, B_2, \dots teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n -re. Ekkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n).$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciója és a valószínűség additivitása alapján

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(A \cap B_n)}{\mathbf{P}(B_n)} \cdot \mathbf{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A \cap B_n) \\ &= \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)) = \mathbf{P}(A \cap (\cup_{n=1}^{\infty} B_n)) \\ &= \mathbf{P}(A \cap \Omega) = \mathbf{P}(A). \end{aligned}$$

□

Bayes-formula. Legyenek A és B olyan események, hogy $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$. Ekkor

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Bizonyítás. A definíció szerint

$$\frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B|A).$$

□

Bayes-tétel. Legyen B_1, B_2, \dots teljes eseményrendszer, melyre $\mathbf{P}(B_n) > 0$ minden n -re. Ekkor tetszőleges pozitív valószínűségű $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, tetszőleges k -ra

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n)}.$$

Bizonyítás. Előbb a teljes valószínűség tételét, majd a Bayes-formulát használva

$$\frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A|B_n)\mathbf{P}(B_n)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\mathbf{P}(A)} = \mathbf{P}(B_k|A).$$

□

Példa. *Doppingteszt.* Kifejlesztenek egy új doppingtesztet, mely a doppingolók 99%-ánál pozitív eredményt ad, azonban a nem doppingoló sportolók 1%-nál is tévesen pozitív eredményt ad. Tegyük föl, hogy a sportolók 1%-a doppingol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott sportoló

- (a) doppingtesztje pozitív?
- (b) doppingolt, ha tudjuk, hogy a doppingtesztje pozitív?

Jelölje T azt az eseményt, hogy a teszt eredménye pozitív, és D azt az eseményt, hogy a sportoló doppingolt. Ekkor a feladat (a) része a $\mathbf{P}(T)$, a (b) része a $\mathbf{P}(D|T)$ valószínűséget kérdezi. A teljes valószínűség tételét alkalmazva a D, D^c eseményrendszerre kapjuk

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T) &= \mathbf{P}(D)\mathbf{P}(T|D) + \mathbf{P}(D^c)\mathbf{P}(T|D^c) \\ &= 0,01 \cdot 0,99 + 0,99 \cdot 0,01 = 0,0198. \end{aligned}$$

A Bayes-formula szerint

$$\mathbf{P}(D|T) = \frac{\mathbf{P}(T|D)\mathbf{P}(D)}{\mathbf{P}(T)} = \frac{0,99 \cdot 0,01}{0,0198} = \frac{1}{2}.$$

A feladat eredménye meglepő, hiszen egy látszólag jól működő teszt esetén, annak a valószínűsége, hogy egy sportoló tényleg doppingolt, feltéve, hogy a teszt eredménye pozitív, $1/2$. Világos, hogy ilyen tesztelés mellett nem vehetjük el senkitől az olimpiai aranyérmét. A hiba onnan jön, hogy ha 100 sportolóból 1 doppingol, akkor a teszt ezt az 1-et nagy valószínűséggel kimutatja, viszont a 99 becsületes sportoló közül is kb. egyet tévesen a doppingolók közé sorol. Így kb. két pozitív teszteredmény lesz, de a két sportoló közül csak az egyik doppingol.

Példa. Egy hallgató p valószínűséggel tudja a választ egy kérdésre. Ha nem tudja, akkor az n lehetséges válasz közül véletlenül választ egyet. Mennyi legyen a lehetséges válaszok n száma, hogy az oktató legalább $0,9$ valószínűséggel következtethessen arra a hallgató jó válaszából, hogy a hallgató tudta a választ?

Jelölje H azt az eseményt, hogy a hallgató jól válaszol, T pedig azt az eseményt, hogy tudja a választ. Ekkor olyan n értéket keresünk, melyre teljesül a $\mathbf{P}(T|H) > 0,9$ egyenlőtlenség. Tehát a

$$\mathbf{P}(T|H) = \frac{\mathbf{P}(H|T)\mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(H|T)\mathbf{P}(T) + \mathbf{P}(H|T^c)\mathbf{P}(T^c)} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{n} \cdot (1-p)} \geq 0,9,$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk n -re. Rövid számolás után adódik, hogy $n \geq 9(1-p)/p$. Azaz $p = 1/2$ esetén az oktátónak legalább 9 lehetséges választ, míg $p = 0,7$ esetén legalább 4 lehetséges választ kell megadnia.

Vegyük észre, hogy ahogy p tart 0-hoz, az oktató bizonyosságához szükséges lehetséges válaszok száma tart végtelenbe. Gondoljuk meg mért természetes ez.

4.1. A játékos csődje

Egy szerencsejátékosnak kezdetben a forintja van, és addig játszik, míg vagy nyer b forintot, vagy elveszti az a forintját és így csődbe jut. Minden játékban p valószínűséggel nyer 1 forintot, $1-p$ valószínűséggel veszít. Arra keressük a választ, hogy mekkora a csődbejutás valószínűsége.

Másképp is megfogalmazhatjuk a problémát. Egy bolyongó részecske (esetleg bolha) a számegegyenes 0 pontjából indul, és minden lépésben p valószínűséggel egyet jobbra, $1-p$ valószínűséggel egyet balra lép. Ezt addig

folytatja, amíg el nem éri vagy a $-a$, vagy a b pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a bolyongó részecske a $-a$ pontban köt ki?

Legyen $m = a + b$, és jelölje $p_i = p_i(m - i, p)$ a játékos csődbe jutásának valószínűségét, ha kezdetben i forintja van. A $p_a(b, p)$ értéket akarjuk meghatározni. Jelölje C_i azt az eseményt, hogy a játékos csődbe megy i forinttal indulva. Ekkor

$$\begin{aligned} p_i &= \mathbf{P}(C_i) = \mathbf{P}(C_i | \text{az 1. játékot megnyeri}) \mathbf{P}(\text{az 1. játékot megnyeri}) \\ &\quad + \mathbf{P}(C_i | \text{az 1. játékot elveszti}) \mathbf{P}(\text{az 1. játékot elveszti}) \\ &= p_{i+1}p + p_{i-1}(1 - p). \end{aligned}$$

A rövidség kedvéért vezessük be a $q = 1 - p$, $r = p/q$ jelöléseket. Az előbbi egyenletet átrendezve, és fölhasználva a $p + q = 1$ azonosságot a

$$p_{i-1} - p_i = r(p_i - p_{i+1})$$

formulát kapjuk. A kapott egyenleteket kiírva és a $p_m = 0$ feltételt felhasználva a

$$\begin{aligned} p_{m-1} &= p_{m-1} \\ p_{m-2} - p_{m-1} &= r(p_{m-1} - p_m) = rp_{m-1} \\ p_{m-3} - p_{m-2} &= r(p_{m-2} - p_{m-1}) = r^2p_{m-1} \\ &\vdots \\ p_1 - p_2 &= r(p_2 - p_3) = r^{m-2}p_{m-1} \\ p_0 - p_1 &= r(p_1 - p_2) = r^{m-1}p_{m-1} \end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik. Összeadás után kapjuk, hogy

$$1 = p_0 = (1 + r + r^2 + \dots + r^{m-1})p_{m-1} = \begin{cases} mp_{m-1}, & r = 1, \\ \frac{1-r^m}{1-r}p_{m-1}, & r \neq 1, \end{cases}$$

és így

$$p_{m-1} = \begin{cases} \frac{1}{m} = \frac{1}{a+b}, & p = \frac{1}{2}, \\ \frac{1-r}{1-r^m} = \frac{1-r}{1-r^{a+b}}, & p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A fenti egyenletrendszerben az első két egyenlőséget összeadva $p_{m-2} = (1 + r)p_{m-1}$ adódik, az első hármat összeadva $p_{m-3} = (1 + r + r^2)p_{m-1}$ adódik, Végül kapjuk, hogy $p(a, b) = p_a = p_{m-b} = (1 + r + r^2 + \dots + r^{b-1})p_{m-1}$. A mértani [$r \neq 1$] vagy a konstans 1 [$r = 1$] sorozat összegzése után a

$$p(a, b) = \begin{cases} \frac{b}{a+b}, & \text{ha } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{1-r^b}{1-r^{a+b}}, & \text{ha } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

formulát kapjuk.

Jelölje q_i a játékos nyeresnek valószínűségét. Erre gondolhatunk úgy is, mint a kaszinó csődbe jutásának valószínűsége, ezért az előző formula szerint

$$q(a, b) = \begin{cases} \frac{a}{a+b}, & p = \frac{1}{2}, \\ \frac{1 - (\frac{1}{r})^a}{1 - (\frac{1}{r})^{a+b}} = \frac{r^b - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}}, & p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A csőd és a siker valószínűségét összegezve $p(a, b) + q(a, b) = 1$, vagyis előbb-utóbb valaki 1 valószínűséggel csődbe jut.

Példa.

- (i) Ha $p = 1/2$ és $a = b$, akkor $p(a, a) = 1/2$.
- (ii) Ha $p = 0,49$ és $a = b = 100$, akkor $p(100, 100) = 0,982\dots$
- (iii) Általánosan, ha $p < 1/2$, akkor $r < 1$ és így

$$p(a, b) = \frac{1 - r^b}{1 - r^{a+b}} > 1 - r^b = 1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^b,$$

azaz a játékos csődjének valószínűsége alulról becsülhető egy olyan mennyiséggel, ami csak b -től, a kaszinó tartalékaitól függ, attól nem, hogy mennyi pénzzel indul a játékos. Például $p(a, b) \geq 0,999$ ha $\left(\frac{p}{1-p}\right)^b \leq 0,001$, azaz $\left(\frac{1-p}{p}\right)^b \geq 1000$, vagyis ha

$$b \geq \frac{3}{\log_{10} \frac{1-p}{p}}.$$

Például $p = 0,48$ esetén a kaszinónak mindössze $b = 87$ Ft vagyon kell, $p = 0,495$ esetén $b = 346$ Ft, még $p = 0,499$ esetén is csak $b = 1727$ Ft kell függetlenül attól, hogy mennyi a értéke. [Persze minél nagyobb a , annál tovább tart azt elveszteni.]

5. Függetlenség

Két esemény függetlensége intuitívan azt jelenti, hogy bekövetkezéseik nem befolyásolják egymást. Tekintsünk egy adott kísérlethez tartozó A és B eseményt. Ismételjük n -szer a kísérletet. Ekkor $S_n(A)/n$ az A esemény relatív gyakorisága az n kísérlet során. Most figyeljük csak azokat a kísérleteket,

ahol B bekövetkezett, ezek száma $S_n(B)$. Ezek közül $S_n(A \cap B)$ azon kísérletek száma, ahol A is bekövetkezett, így a megfelelő relatív gyakoriság $S_n(A \cap B)/S_n(B)$. Az, hogy A és B nem befolyásolják egymást, azt jelenti, hogy ez a két relatív gyakoriság kb. megegyezik, azaz

$$\frac{S_n(A)}{n} = \frac{S_n(A \cap B)}{S_n(B)} = \frac{S_n(A \cap B)/n}{S_n(B)/n}.$$

A bal oldal kb. $\mathbf{P}(A)$, a jobb oldal pedig $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(B)$, vagyis azt kaptuk, hogy

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Ez a függetlenség definíciója.

Másképpen, a B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A bekövetkezését, azaz $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$, ahonnan $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

1. Definíció. Az A és B események **függetlenek**, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

A definícióból világos, hogy a függetlenség szimmetrikus. Továbbá, a biztos ill. a lehetetlen eseménytől minden esemény független.

Példa. Francia kártyapakliból véletlenszerűen húzunk egy lapot. Jelölje D azt az eseményt, hogy dámát húzunk, K pedig azt, hogy kórt. Ekkor $D \cap K$ az az esemény, hogy a kőr dámát húztuk ki, így $\mathbf{P}(D \cap K) = 1/52$. Ugyanakkor $\mathbf{P}(D) = 4/52 = 1/13$ és $\mathbf{P}(K) = 13/52 = 1/4$, azaz a két esemény független.

Példa. Földobunk n -szer egy szabályos érmét. Legyen A az az esemény, hogy legfeljebb egy fejet dobunk, B pedig az, hogy legalább egy fejet és egy írást dobunk.

Ekkor $\mathbf{P}(A) = (n+1)/2^n$, $\mathbf{P}(B) = 1 - 2/2^n$, és $\mathbf{P}(A \cap B) = n/2^n$. Azaz A és B pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = \frac{n+1}{2^n} \frac{2^n - 2}{2^n} = \frac{n}{2^n} = \mathbf{P}(A \cap B)$$

teljesül. Innen kis számolgatással kapjuk, hogy A és B függetlenek, ha $n = 3$, különben pedig nem azok.

2. Definíció. Az A, B, C események **függetlenek**, ha $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$, és $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$ teljesül. Továbbá, az A, B, C események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független.

Példa. Válasszunk egyenletes eloszlás szerint egy pontot a $[0, 1]^2$ egység-négyzetben. Legyen A az az esemény, hogy a választott pont a $[0, 1] \times [0, 1/2]$ téglalapba esik, B az az esemény, hogy a választott pont az $[1/2, 1] \times [0, 1]$ téglalapba esik, C pedig az az esemény, hogy a választott pont a $[0, 1/2]^2 \cup [1/2, 1]^2$ halmazba esik. Könnyen ellenőrizhető, hogy A, B, C páronként függetlenek, de *nem* függetlenek.

3. Definíció. Az A_1, A_2, \dots, A_n események **függetlenek**, ha bármely $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ és $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ esetén $\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k})$. Végtelen sok esemény akkor független, ha közülük bármely véges sok független.

3. Állítás. Ha az A_1, \dots, A_n események függetlenek, akkor tetszőleges $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén az $\{A_1, \dots, A_k\}$ eseményekből ill. az $\{A_{k+1}, \dots, A_n\}$ eseményekből alkotott események függetlenek.

Ezt nem bizonyítjuk. Az állítás szerint például ha A, B, C, D független események, akkor $A \cup B$ és $C \cap D$ is függetlenek.

4. Állítás. Független események közül ha néhányat kicserélünk a komplementerére, akkor is független eseményeket kapunk.

Bizonyítás. Legyenek A_1, A_2, \dots, A_n függetlenek. Nyilván elég megmutatni, hogy A_1^c, A_2, \dots, A_n is függetlenek. Hiszen ekkor egyesével kicserélhetünk akárhány eseményt. A definíciót elég az $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ esetben ellenőrizni, hiszen ha A_1^c nincs a kiválasztott események közt, akkor a feltevés szerint teljesül a függetlenség. Ekkor viszont, előbb a mérték tulajdonsága, majd a függetlenség miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1^c \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) &= \mathbf{P}(A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}) - \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}) \\ &= [1 - \mathbf{P}(A_1)] \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}) \\ &= \mathbf{P}(A_1^c) \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}), \end{aligned}$$

amit igazolni kellett. □

Kísérletek függetlenségéről akkor beszélünk, ha a hozzájuk tartozó események függetlenek.

5.1. Craps játék

A craps játékot és annak változatait jelenleg is játsszák kaszinókban. A játék az Egyesült Államokban népszerű, 1820 körül terjedt el New Orleansban.

A játékos két dobókockával dob. Ha az első dobásnál a dobott számok összege 7 vagy 11, akkor azonnal nyer, ha 2,3 vagy 12 akkor veszít. Különben folytatja a dobásokat, és akkor nyer, ha hamarabb dobja meg azt az összeget, amit elsőre dobott, mint a 7-et.

A következőkben meghatározzuk a nyereség valószínűségét.

Jelölje A azt az eseményt, hogy nyerünk, A_i pedig azt, hogy az első dobás eredménye i , és nyerünk. Világos, hogy $\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_{12}) = 0$, továbbá

$$\mathbf{P}(A_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad \text{és} \quad \mathbf{P}(A_{11}) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},$$

hiszen ezekben az esetekben a játék az első dobás után véget ér. Ha az első dobásnál az összeg 4, 5, 6, 8, 9 vagy 10 akkor a dolog érdekesebb. Jelölje $A_{i,n}$ azt az eseményt, hogy az első dobásnál az összeg i és pontosan az n -edik dobásnál nyerünk. Nyilván $A_i = \cup_{n=2}^{\infty} A_{i,n}$, és az unió diszjunkt.

Tekintsük az $A_{4,n}$ eseményt. Ekkor az első dobásnál az összeg 4, ami 3 féleképpen következhet be $((1, 3), (2, 2), (3, 1))$, és mivel nyertünk, az utolsó dobásnál is 4 az összeg. A közbülső $n - 2$ dobás során nem dobtunk 4-et, és 7-et, hiszen ekkor véget ért volna a játék korábban. Így $3 + 6$ esetet zártunk ki. Ezek szerint

$$\mathbf{P}(A_{4,n}) = \frac{3 \cdot (36 - 9)^{n-2} \cdot 3}{36^n} = \frac{9}{36^2} \left(\frac{27}{36}\right)^{n-2}.$$

Innen pedig geometria sort összegezve, kapjuk

$$\mathbf{P}(A_4) = \sum_{n=2}^{\infty} \mathbf{P}(A_{4,n}) = \frac{9}{36^2} \left(\frac{27}{36}\right)^{n-2} = \frac{1}{36}.$$

A többi eset hasonlóan megy,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{4,n}) &= \mathbf{P}(A_{10,n}) = \frac{9}{36^2} \left(\frac{27}{36}\right)^{n-2} \\ \mathbf{P}(A_{5,n}) &= \mathbf{P}(A_{9,n}) = \frac{16}{36^2} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-2} \\ \mathbf{P}(A_{6,n}) &= \mathbf{P}(A_{8,n}) = \frac{25}{36^2} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-2}, \end{aligned}$$

majd a megfelelő geometriai sorokat összegezve

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_4) &= \mathbf{P}(A_{10}) = \frac{1}{36}, \\ \mathbf{P}(A_5) &= \mathbf{P}(A_9) = \frac{2}{45}, \\ \mathbf{P}(A_6) &= \mathbf{P}(A_8) = \frac{25}{396}.\end{aligned}$$

Végül azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=2}^{12} \mathbf{P}(A_i) = \frac{244}{495} \approx 0,493.$$

6. Véletlen változók

4. Definíció. Tekintsünk egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt. Az

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

függvényeket *véletlen változónak* nevezzük, ha a

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega : X(\omega) \leq a\}$$

inverzkép \mathcal{A} -beli tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén.

Már sok példát láttunk véletlen változóra. Ilyen például a dobókockával dobott szám értéke, vagy ha három kockával dobunk, akkor a legkisebb dobott szám. Ilyen az ötösloton kihúzott legnagyobb szám, vagy az egy szelvényen elért találatok száma. Véletlen változó az is, hogy a ropi hol törik el, vagy az egységnégyzetben egyenletesen választott pont milyen távol van a négyzet határától, stb.

5. Definíció. Az X véletlen változó *eloszlásfüggvénye* az

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \quad x \in \mathbb{R},$$

függvény.

1. Tétel. Legyen $F(x)$ egy X véletlen változó eloszlásfüggvénye. Ekkor

(i) F monoton nemcsökkenő;

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;

(iii) F jobbról folytonos.

Bizonyítás. (i) Ha $x_1 < x_2$ akkor $\{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\}$ és így a mérték monotonitása miatt $F(x_1) = \mathbf{P}(X \leq x_1) \leq \mathbf{P}(X \leq x_2) = F(x_2)$.

(ii) A monotonitásból következik, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ létezik, így elég belátni, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = 1$. Tekintsük az $A_n = \{X \leq n\} = \{\omega : X(\omega) \leq n\}$ halmazokat. Ekkor $F(n) = \mathbf{P}(A_n)$. Világos, hogy (A_n) monoton bővülő halmzsorozat, azaz $A_n \subset A_{n+1}$. Ugyanakkor $\cup A_n = \{X < \infty\} = \Omega$, és ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

A másik határérték igazolásához is elég részsorozaton dolgozni a monotonitás miatt. Legyen $B_n = \{X \leq -n\}$. Ekkor $F(-n) = \mathbf{P}(B_n)$, a (B_n) halmzsorozat monoton csökkenő, és $\cap B_n = \{X \leq -\infty\} = \emptyset$. Ezért (ismét a mértékek folytonossági tétele szerint)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty} B_n) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

Végül, a (iii) pont belátásához is hasonlóan okoskodunk. Jelölje $F(x+)$ az x pontban vett jobboldali határértéket. Ez megint létezik a monotonitás miatt. Tekintsük a $C_n = \{X \leq x + n^{-1}\}$ halmazokat. Ekkor (C_n) csökkenő halmzsorozat, és $\cap C_n = \{X \leq x\}$. Így ismét a folytonossági tétel szerint

$$F(x+) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x + n^{-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_n) = \mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty} C_n) = \mathbf{P}(X \leq x) = F(x).$$

□

Vegyük észre, hogy F monotonitásából következik az $F(x-)$ baloldali határérték létezése is, azonban általában az $F(x) = F(x-)$ egyenlőség nem teljesül. Az előzőekhez hasonlóan látható, hogy $F(x-) = \mathbf{P}(X < x)$, továbbá

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X < x) + \mathbf{P}(X = x) = F(x-) + \mathbf{P}(X = x).$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy F pontosan akkor folytonos az x pontban, ha $\mathbf{P}(X = x) = 0$.

A definícióból adódik, hogy $a < b$ esetén $\mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

6.1. Diszkrét véletlen változók

6. Definíció. Egy véletlen változó *diszkrét*, ha értékkészlete megszámlálható (azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen). Ha egy diszkrét véletlen változó lehetséges értékei x_1, x_2, \dots , akkor $p_i = \mathbf{P}(X = x_i) > 0$ a változó eloszlása.

Ha (p_i) eloszlás, akkor $\sum_i p_i = 1$. Az eloszlásfüggvény $F(x) = \sum_{i: x_i \leq x} p_i$.

Példa. Legyen $X = I_A$ az A esemény indikátorváltozója. Azaz

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \omega \notin A, \\ 1, & \text{ha } \omega \in A. \end{cases}$$

Ekkor X lehetséges értékei 0 és 1, és $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(A) = p = 1 - \mathbf{P}(X = 0)$. \tilde{O} a p paraméterű Bernoulli eloszlás.

Példa. Legyen $X = S_n$, egy kísérlet n -szeri ismétlése során az A esemény bekövetkezéseinek a száma. Ekkor X lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots, n$, és $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, ahol $p = \mathbf{P}(A) \in (0, 1)$. \tilde{O} az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás.

Példa. Egy kísérletet addig ismétlünk, amíg egy adott A esemény be nem következik. Legyen X az elvégzett kísérletek száma. Ekkor X lehetséges értékei $1, 2, \dots$, és $\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. \tilde{O} a p paraméterű geometria eloszlás.

6.2. Folytonos véletlen változók

Egy véletlen változó értékkészlete nem feltétlenül megszámlálható. A ropi például bárhol eltörhet. Vagy gondolhatunk tetszőleges mérés eredményére, élettartamra, \dots . Ilyenkor a változó kontinuum sok értéket vehet fel, mindegyiket 0 valószínűséggel. Ez a mese, a definíció a következő.

7. Definíció. Egy X véletlen változó *folytonos eloszlású*, ha létezik egy nemnegatív f függvény, melyre

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az $f(x)$ függvény az X véletlen változó sűrűségfüggvénye.

A definícióból világos, hogy $\mathbf{P}(X \in (a, b)) = \mathbf{P}(X \in (a, b]) = \int_a^b f(y)dy$,
 $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Speciálisan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \mathbf{P}(X \in \mathbb{R}) = 1, \text{ és } \mathbf{P}(X = x) = \int_x^x f(y)dy = 0.$$

Példa. A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$,
 $x \in \mathbb{R}$. Az eloszlásfüggvény $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y)dy$.

6.3. Véletlen vektorváltozók

Egy kísérletnél sokszor több a kísérlet eredményét leíró adatra vagyunk kíváncsiak. Például testtömeg, testmagasság, vérnyomás, pulzus, ...

8. Definíció. Az $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény véletlen vektorváltozó, ha minden komponense véletlen változó. Az X eloszlásfüggvénye

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

Az (X_1, \dots, X_n) véletlen vektorváltozó diszkrét, ha értékészlete megszámlálható, és folytonos, ha van olyan f nemnegatív n -változós függvény, melyre

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n)dy_n \dots dy_1$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ilyenkor az f függvényt az X vektorváltozó sűrűségfüggvényének nevezzük.

Az X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, változók eloszlását, peremeloszlásnak, vagy margiális eloszlásnak nevezzük.

Folytonos esetben a definícióból világos, hogy az egyváltozós eset analógiájára

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

teljesül. Az $x_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ határátmenettel azt is látjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n)dx_n \dots dx_1 = 1,$$

mint az egyváltozós esetben.

5. Állítás. Legyen $X = (X_1, \dots, X_n)$ véletlen vektorváltozó. Az X_i eloszlásfüggvénye

$$F_i(x) = \lim_{x_1 \rightarrow \infty, \dots, x_{i-1} \rightarrow \infty, x_{i+1} \rightarrow \infty, \dots, x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$A_m = \{\omega : X_j(\omega) \leq m, j \neq i, X_i \leq x\}, \quad m \geq 1,$$

halmazokat. Ekkor az (A_m) halmazsorozat monoton bővülő, és

$$\cup_{m=1}^{\infty} A_m = \{\omega : X_i \leq x\}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} F(m, \dots, m, x, m, \dots, m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_m) \\ &= \mathbf{P}(X_i \leq x) = F_i(x). \end{aligned}$$

A koordinátánkénti monotonitásból az állítás következik. \square

6. Állítás. Legyen $X = (X_1, \dots, X_n)$ folytonos véletlen vektorváltozó f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, folytonos véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_{i-1} dy_{i+1} \dots dy_n,$$

azaz az i -edik változón kívül minden változót kiintegrálunk \mathbb{R} -en.

Bizonyítás. Legyen f_i az állításban szereplő függvény. Ekkor a szukcesszív integrálásra vonatkozó tétel szerint

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f_i(y) dy &= \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \dots, y_n) \right. \\ &\quad \left. dy_1 \dots dy_{i-1} dy_{i+1} \dots dy_n \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \dots, y_n) \\ &\quad dy_1 \dots dy_{i-1} dy dy_{i+1} \dots dy_n \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow \infty, \dots, x_{i-1} \rightarrow \infty, x_{i+1} \rightarrow \infty, x_n \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= \mathbf{P}(X_i \leq x), \end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti egyenlőségnél fölhasználtuk az 5. Állítást. Tehát

$$\int_{-\infty}^x f_i(y) dy = \mathbf{P}(X_i \leq x),$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. \square

6.4. Véletlen változók függetlensége

Legyenek X_1, \dots, X_n az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett véletlen változók.

9. Definíció. Az X_1, \dots, X_n függetlenek, ha minden $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1) \dots \mathbf{P}(X_n \leq x_n)$$

teljesül. Vagyis az együttes eloszlásfüggvény az egyes eloszlásfüggvények szorzata.

Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha X_1, \dots, X_n függetlenek, akkor tetszőleges B_1, \dots, B_n véges vagy végtelen intervallumok esetén

$$\mathbf{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbf{P}(X_1 \in B_1) \dots \mathbf{P}(X_n \in B_n)$$

teljesül.

A diszkrét, illetve a folytonos esetben ez a karakterizáció tovább egyszerűsíthető.

7. Állítás. Legyenek X_1, \dots, X_n diszkrét véletlen változók úgy, hogy X_i lehetséges értékei $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ekkor X_1, \dots, X_n pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbf{P}(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, \dots, X_n = x_{i_n}^{(n)}) = \mathbf{P}(X_1 = x_{i_1}^{(1)}) \dots \mathbf{P}(X_n = x_{i_n}^{(n)})$$

teljesül tetszőleges i_1, \dots, i_n indexekre.

Legyenek X_1, \dots, X_n együttesen folytonos véletlen változók f együttes sűrűségfüggvénnyel. Ekkor X_1, \dots, X_n pontosan akkor függetlenek, ha

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n),$$

ahol f_{X_i} az X_i sűrűségfüggvénye.

6.5. Függetlenség és geometriai valószínűség

10. Definíció. Legyen $T = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ egy n -dimenziós téglalap, ahol $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$. Az $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow T$ egyenletes eloszlású véletlen változó T -n, ha tetszőleges $S = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$ résztéglájára T -nek

$$\mathbf{P}(X \in S) = \frac{(d_1 - c_1) \dots (d_n - c_n)}{(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)}.$$

Ekkor X indukál egy geometriai valószínűségi mezőt.

8. Állítás. Az $X = (X_1, \dots, X_n)$ véletlen vektorváltozó pontosan akkor egyenletes eloszlású a $T = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ téglán, ha minden i -re X_i egyenletes eloszlású $[a_i, b_i]$ -n, és X_1, \dots, X_n függetlenek.

Bizonyítás. \Leftarrow : Legyen $S = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \in S) &= \mathbf{P}(X_1 \in [c_1, d_1], \dots, X_n \in [c_n, d_n]) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \in [c_i, d_i]) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{d_i - c_i}{b_i - a_i} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (d_i - c_i)}{\prod_{i=1}^n (b_i - a_i)}. \end{aligned}$$

\Rightarrow : Legyen $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i \leq c_i < d_i \leq b_i$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_i \in [c_i, d_i]) &= \mathbf{P}(X_1 \in [a_1, b_1], \dots, X_i \in [c_i, d_i], \dots, X_n \in [a_n, b_n]) \\ &= \mathbf{P}(X \in [a_1, b_1] \times \dots \times [c_i, d_i] \times \dots \times [a_n, b_n]) \\ &= \frac{(d_i - c_i) \prod_{j \neq i} (b_j - a_j)}{\prod_{j=1}^n (b_j - a_j)} \\ &= \frac{d_i - c_i}{b_i - a_i}. \end{aligned}$$

Hasonlóan igazolható a függetlenség az intervallumok esetén, ahonnan pedig következik általánosan. \square

7. Várható érték

Egy kísérletet n -szer függetlenül ismételünk és minden alkalommal megfigyeljük X értékét: X_1, X_2, \dots, X_n . Ezen értékek átlagai egy számhoz tartanak, ez lesz $\mathbf{E}X$.

Motiváció

11. Definíció. Ha X diszkrét véletlen változó x_1, x_2, \dots lehetséges értékekkel, akkor az X várható értéke

$$\mathbf{E}X = \sum_i x_i \mathbf{P}(X = x_i),$$

ha $\sum_i |x_i| \mathbf{P}(X = x_i) < \infty$.

Ha X folytonos véletlen változó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel, akkor az X várható értéke

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy,$$

ha $\int_{-\infty}^{\infty} |y|f(y)dy < \infty$.

Folytonos eset magyarázata h hosszúságú intervallumokkal.

7.1. Várható érték tulajdonságai

9. Állítás. *Legyenek X, Y véletlen változók, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre az állításokban szereplő várható értékek léteznek. Ekkor*

$$\mathbf{E}g(X) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \mathbf{P}(X = x_i), \text{ ill. } \mathbf{E}g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(y)dy,$$

ahol $f(x)$ az X sűrűségfüggvénye, és

$$\mathbf{E}h(X, Y) = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j), \text{ ill.}$$

$$\mathbf{E}h(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)f(x, y)dx dy,$$

ahol $f(x, y)$ az (X, Y) folytonos véletlen vektorváltozó sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás. Csak az első állítást igazoljuk és csak diszkrét esetben. Mivel X diszkrét, ezért $g(X)$ is diszkrét y_1, y_2, \dots lehetséges értékekkel. Ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{E}g(X) &= \sum_j y_j \mathbf{P}(g(X) = y_j) \\ &= \sum_j y_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} \mathbf{P}(X = x_i) \\ &= \sum_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} y_j \mathbf{P}(X = x_i) \\ &= \sum_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} g(x_i) \mathbf{P}(X = x_i) \\ &= \sum_i g(x_i) \mathbf{P}(X = x_i). \end{aligned}$$

□

10. Állítás. A következőkben a, b valós konstansok, X, Y, X_1, \dots, X_n véletlen változók.

(i) A várható érték lineáris, azaz tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ állandókra

$$\mathbf{E}aX + b = a\mathbf{E}X + b.$$

(ii) Ha $a \leq X \leq b$, akkor $a \leq \mathbf{E}X \leq b$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számok esetén.

(iii) $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y$.

(iv) Ha X_1, X_2, \dots, X_n véletlen változók, akkor

$$\mathbf{E} \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i.$$

(v) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}g_1(X)g_2(Y) = \mathbf{E}g_1(X)\mathbf{E}g_2(Y)$. Speciálisan, ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}XY = \mathbf{E}X\mathbf{E}Y$.

Bizonyítás. (i) Az előző állítást $g(x) = ax + b$ függvénnyel felírva

$$\mathbf{E}(aX + b) = \sum_i (ax_i + b)\mathbf{P}(X = x_i) = a\mathbf{E}X + b.$$

Folytonosra ugyanígy.

(ii)

$$a = a \sum_i \mathbf{P}(X = x_i) \leq \sum_i x_i \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{E}X \leq \sum_i b \mathbf{P}(X = x_i) = b.$$

Folytonosra ugyanígy.

(iii) A 9. Állítást $h(x, y) = x + y$ függvénnyel felírva

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X + Y) &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j) \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_i x_i \sum_j \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_j y_j \sum_i \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \quad \text{tvt} \\ &= \sum_i x_i \mathbf{P}(X = x_i) + \sum_j y_j \mathbf{P}(Y = y_j) \\ &= \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y. \end{aligned}$$

Csak diszkrét esetben bizonyítunk.

- (iv) Következik (iii)-ból teljes indukcióval.
 (v) A 9. Állítást $h(x, y) = g_1(x)g_2(y)$ függvénnyel felírva

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(g_1(X)g_2(Y)) &= \sum_i \sum_j g_1(x_i)g_2(y_j)\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
 &= \sum_i \sum_j g_1(x_i)g_2(y_j)\mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = y_j) \quad \text{függetlenség} \\
 &= \sum_i g_1(x_i)\mathbf{P}(X = x_i) \sum_j g_2(y_j)\mathbf{P}(Y = y_j) \\
 &= \mathbf{E}(g_1(X))\mathbf{E}(g_2(Y)).
 \end{aligned}$$

A folytonos esetben

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(g_1(X)g_2(Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(y)f(x, y)dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(y)f_1(x)f_2(y)dx dy \quad \text{függetlenség} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)f_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y)f_2(y)dy \quad \text{szukcesszív integrálás} \\
 &= \mathbf{E}(g_1(X))\mathbf{E}(g_2(Y)).
 \end{aligned}$$

□

12. Definíció. Az X véletlen változó k -adik momentuma $\mathbf{E}(X^k)$, és k -adik centrális momentuma $\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^k]$, $k = 1, 2, \dots$. A 9. Állítás szerint

$$\mathbf{E}(X^k) = \begin{cases} \sum_i x_i^k \mathbf{P}(X = x_i), & \text{ha } X \text{ diszkrét,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx, & \text{ha } X \text{ folytonos.} \end{cases}$$

7.2. Szórás, kovariancia, korreláció

13. Definíció. Az X véletlen változó szórása $\mathbf{D}(X) = \sqrt{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X))^2}$.

A szórás annak a mérőszáma, hogy a változó mennyire tér el a várható értékétől. Mivel $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X)) = 0$, $\mathbf{E}|X - \mathbf{E}(X)|$ pedig nehezen kezelhető (nem differenciálható az $|\cdot|$ függvény), ezért ez a legegyszerűbb ilyen.

11. Állítás. Tetszőleges X véletlen változó és a, b valós számok esetén

(i) $\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$;

$$(ii) \mathbf{D}^2(aX + b) = a^2 \mathbf{D}^2(X);$$

(iii) $\mathbf{D}(X) = 0$ akkor és csak akkor, ha $X = \mathbf{E}(X)$, azaz X konstans véletlen változó.

Bizonyítás. A definíció alkalmazása. □

Véletlen változók függőségének mérőszámai a kovariancia és a korreláció.

14. Definíció. Az X és Y véletlen változók *kovarianciája*

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))],$$

korrelációja

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y)}.$$

A kovariancia egyszerű tulajdonságai:

12. Állítás. *Tetszőleges $X, X_1, \dots, X_n, Y, Y_1, \dots, Y_m$ véletlen változók és a, b valós számok esetén igazak az alábbiak.*

$$(i) \mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{D}^2(X);$$

$$(ii) \mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X);$$

$$(iii) \mathbf{Cov}(aX, bY) = ab\mathbf{Cov}(X, Y);$$

$$(iv) \mathbf{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{Cov}(X_i, Y_j);$$

$$(v) \text{ ha } X \text{ és } Y \text{ függetlenek, akkor } \mathbf{Cov}(X, Y) = 0.$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás. □

13. Állítás.

(i) $|\mathbf{Cov}(X, Y)| \leq \mathbf{D}(X)\mathbf{D}(Y)$ (*Bunyakovszkij–Cauchy–Schwarz*), ahonnan adódik, hogy $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$;

(ii) ha $\rho(X, Y) = 1$, akkor

$$X = \mathbf{E}(X) + \frac{\mathbf{D}(X)}{\mathbf{D}(Y)}(Y - \mathbf{E}(Y));$$

(iii) ha $\rho(X, Y) = -1$, akkor

$$X = \mathbf{E}(X) - \frac{\mathbf{D}(X)}{\mathbf{D}(Y)}(Y - \mathbf{E}(Y)).$$

Bizonyítás. (i): Tekintsük az $X + tY$ véletlen változót, ahol t egy valós szám. Mivel $\mathbf{E}[(X + tY)^2] \geq 0$, ezért a

$$p(t) = \mathbf{E}[(X + tY)^2] = t^2\mathbf{E}(Y^2) + 2t\mathbf{E}(XY) + \mathbf{E}(X^2) \quad (1)$$

t -ben másodfokú polinom diszkriminánsa nempozitív. Azaz

$$4[\mathbf{E}(XY)]^2 \leq 4\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2), \quad (2)$$

amiből következik, hogy

$$|\mathbf{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget az $X - \mathbf{E}(X)$ és $Y - \mathbf{E}(Y)$ változókra felírva kapjuk az állítást.

(ii) és (iii): Ha $|\rho(X, Y)| = 1$, akkor a (2) egyenlőtlenség $X - \mathbf{E}(X)$ és $Y - \mathbf{E}(Y)$ változókra egyenlőség, azaz a másodfokú p polinom diszkriminánsa 0. Ezek szerint

$$t_0 = -\frac{\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)]}{\mathbf{E}[(Y - \mathbf{E}Y)^2]} = -\rho(X, Y) \frac{\mathbf{D}(X)}{\mathbf{D}(Y)}$$

zérushely, vagyis

$$X - \mathbf{E}(X) + t_0(Y - \mathbf{E}(Y)) = 0,$$

ami éppen a bizonyítandó. □

Megjegyzés. Korreláció jelentése. Ha $\rho(X, Y) = 0$, akkor X és Y *korrelálatlanok*. A 12. Állítás (v) pontja szerint a függetlenségből következik a korrelálatlanság. Fordítva ez nem igaz, könnyű ellenpéldát gyártani. Mindenesetre, minél kisebb a korreláció annál gyengébb a két változó közötti függés. A 13. Állításból pedig azt látjuk, hogy minél közelebb van $|\rho(X, Y)|$ értéke 1-hez, annál erősebb a változók közötti függés.

Ha a korreláció pozitív, akkor ha X nagy, akkor Y is nagy, ha pedig negatív, akkor ha X nagy, akkor Y kicsi, és fordítva. Ezek a megállapítások persze nem tehetők nagyon precízzé, ez a szemléletes jelentés.

14. Állítás. Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n páronként független véletlen változók. Ekkor

$$\mathbf{D}^2 \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^2(X_i).$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás. □

Példa. Egy szabályos dobókockával n -szer dobunk. Jelölje X a hatosok, Y egyesek számát! Legyen $I_i = 1$, ha az i -edik dobás hatos, különben 0, $J_i = 1$, ha az i -edik dobás egyes, különben 0, $i = 1, 2, \dots, n$. Nyilván

$$X = \sum_{i=1}^n I_i \quad \text{és} \quad Y = \sum_{i=1}^n J_i. \quad (3)$$

Továbbá I_1, \dots, I_n függetlenek, és J_1, \dots, J_n is függetlenek.

Ekkor I_1, \dots, I_n független, *Bernoulli eloszlású* véletlen változók $1/6$ paraméterrel. A megfelelő eloszlás $\mathbf{P}(I_i = 1) = 1/6$, $\mathbf{P}(I_i = 0) = 5/6$. A J -kre hasonlóan. A hatosok száma X *binomiális eloszlású* véletlen változó ($n, 1/6$) paraméterrel. Eloszlása

$$\mathbf{P}(X = k) = b_k(n, 1/6) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

A várható értéket és a szórást a definíció alapján számolhatjuk. Valóban,

$$\mathbf{E}(I_1) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6},$$

és

$$\mathbf{D}^2(I_1) = \mathbf{E}(I_1^2) - (\mathbf{E}(I_1))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

És persze $\mathbf{E}(I_i) = \mathbf{E}(J_i) = \frac{1}{6}$, $\mathbf{D}^2(I_i) = \mathbf{D}^2(J_i) = \frac{5}{36}$, $i = 1, \dots, n$. Az $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{D}^2(X)$ értékek meghatározása számolásabb:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \cdot \mathbf{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n}{6} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n}{6}, \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 \cdot \mathbf{P}(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \\
 &= \frac{n(n-1)}{6^2} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} + \frac{n}{6} \\
 &= \frac{n(n-1)}{36} + \frac{n}{6}.
 \end{aligned}$$

Ezért

$$\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = n \frac{5}{36}.$$

Sok számolást megspórolunk, ha felhasználjuk a (3) egyenletet és a 10. (iv) és 14. Állításokat. Valóban,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(I_i) = \frac{n}{6},$$

és

$$\mathbf{D}^2(X) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^2(I_i) = n \frac{5}{36}.$$

Sőt, így az X és Y kovarianciáját is könnyen meghatározhatjuk. Vegyük észre, hogy ha $i \neq j$, akkor I_i és J_j függetlenek, azaz $\mathbf{Cov}(I_i, J_j) = 0$, különben $I_i J_i = 0$, ezért $\mathbf{Cov}(I_i, J_i) = \mathbf{E}(I_i J_i) - \mathbf{E}(I_i) \mathbf{E}(J_i) = -1/36$. Tehát

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{Cov}(I_i, J_j) = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{36} = -n \frac{1}{36},$$

korrelációjuk pedig

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbf{D}(X) \mathbf{D}(Y)} = \frac{-n \frac{1}{36}}{n \frac{5}{36}} = -\frac{1}{5}.$$

Látjuk, hogy a korreláció negatív, azaz ha sok hatost dobunk, akkor kevés egyest, és fordítva, ami teljesen természetes.

7.3. Ferdeség és lapultság

15. Definíció. Az X véletlen változó ferdesége

$$S(X) = \frac{\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^3]}{\mathbf{D}^3(X)},$$

amennyiben $\mathbf{E}|X|^3 < \infty$, lapultsága (csúcsossága)

$$K(X) = \frac{\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^4]}{\mathbf{D}^4(X)} - 3.$$

A ferdeség a véletlen változó várható értékére való szimmetriáját mutatja. Egy X véletlen változó szimmetrikus (a 0-ra), ha X és $-X$ eloszlása megegyezik, és X szimmetrikus c -re, ha $X - c$ és $c - X$ eloszlása megegyezik.

15. Állítás. Ha X szimmetrikus $\mathbf{E}X$ -re, és $S(X)$ létezik, akkor $S(X) = 0$.

Bizonyítás. Mivel X szimmetrikus $\mathbf{E}X$ -re, ezért $X - \mathbf{E}X$ és $\mathbf{E}X - X$ eloszlása megegyezik. Speciálisan

$$\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^3] = \mathbf{E}[(\mathbf{E}X - X)^3],$$

ahonnan kapjuk, hogy $\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^3] = 0$. □

Ha $S(X) > 0$, akkor ez szemléletesen azt jelenti, hogy a változó nagy pozitív értékeket vehet fel, azaz a sűrűségfüggvénye / valószínűségeloszlása jobbra dől; ha $S(X) < 0$, akkor pedig balra.

16. Állítás. Ha a lapultság létezik, akkor $K(X) \geq -2$.

Bizonyítás. Az $Y = (X - \mathbf{E}X)^2$ jelölést bevezetve az állítás azt mondja, hogy

$$(\mathbf{E}(Y))^2 \leq \mathbf{E}(Y^2).$$

Ezt már láttuk. □

A lapultság a sűrűségfüggvény / valószínűségeloszlás alakját mutatja meg a várható érték körül. Ha $K(X)$ kicsi, akkor a sűrűségfüggvény tipikusan sima, lapos, ha pedig $K(X)$ nagy, akkor csúcsos.

17. Állítás. Mind a ferdeség, mind a lapultság eltolás- és skálainvariáns; azaz tetszőleges $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$ esetén

$$S(aX + b) = S(X), \quad K(aX + b) = K(X),$$

amennyiben a megfelelő mennyiségek léteznek.

8. Feltételes várható érték

Legyen X véletlen változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn, és legyen B egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor X B -re vonatkozó feltételes eloszlásfüggvénye

$$F_B(x) := \mathbf{P}(X \leq x|B) = \mathbf{P}_B(X \leq x) = \frac{\mathbf{P}(\{X \leq x\} \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

A feltételes valószínűség tulajdonságainál láttuk, hogy $\mathbf{P}_B(\cdot)$ valószínűségi mérték (Ω, \mathcal{A}) -n, tehát F_B valóban eloszlásfüggvény.

Ha X diszkrét, akkor (persze a B -re vonatkozó feltételes eloszlása is diszkrét) feltételes várható értéke

$$\mathbf{E}(X|B) = \sum_i \mathbf{P}(X = x_i|B)x_i,$$

feltéve, hogy $\sum_i \mathbf{P}(X = x_i|B)|x_i| < \infty$. Ha pedig van olyan f_B sűrűségfüggvény, melyre $F_B(x) = \int_{-\infty}^x f_B(y)dy$, akkor

$$\mathbf{E}(X|B) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_B(x)dx,$$

feltéve, hogy az integrál jóldefiniált, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f_B(x)dx < \infty$.

8.1. Diszkrét feltétel

Legyenek X, Y diszkrét véletlen változók x_1, x_2, \dots , és y_1, y_2, \dots lehetséges értékekkel. A korábbiak szerint

$$\mathbf{P}(X = x_k|Y = y_\ell) = \frac{\mathbf{P}(X = x_k, Y = y_\ell)}{\mathbf{P}(Y = y_\ell)},$$

és

$$\mathbf{E}(X|Y = y_\ell) = \sum_k \mathbf{P}(X = x_k|Y = y_\ell)x_k.$$

Jelölje $\mathbf{E}(X|Y)$ azt az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett véletlen változót, melynek értéke az $\{Y = y_\ell\}$ eseményen $\mathbf{E}(X|Y = y_\ell)$. Formálisan

$$\mathbf{E}(X|Y)(\omega) = \sum_i \mathbf{E}(X|Y = y_i)I(Y = y_i),$$

ahol $I(\cdot)$ az indikátorváltozót jelöli. Vegyük észre, hogy $\mathbf{E}(X|Y)$ egy olyan véletlen változó, mely függvénye Y -nak.

Teljes valószínűség és várható érték tétele diszkrét esetben. Legyenek X, Y diszkrét véletlen változók x_1, x_2, \dots , és y_1, y_2, \dots lehetséges értékekkel. Ekkor

$$\mathbf{P}(X = x_k) = \sum_i \mathbf{P}(X = x_k | Y = y_i) \mathbf{P}(Y = y_i)$$

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i \mathbf{E}(X | Y = y_i) \mathbf{P}(Y = y_i).$$

Bizonyítás. Az első egyenlőség egy teljes valószínűség tétele az $\{Y = y_i\}$ teljes eseményrendszerrel felírva. A második egyenlőség pedig az első és a definíció következménye. \square

8.2. Folytonos feltétel

Legyenek X, Y együttesen folytonos véletlen változók h sűrűségfüggvénnyel. Jelölje

$$f_X(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx$$

X és Y sűrűségfüggvényét. Ekkor az X véletlen változó Y -ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{h(x, y)}{f_Y(y)}, & \text{ha } f_Y(y) \neq 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy ha $f_Y(y) > 0$, akkor $f_{X|Y}(\cdot|y)$ valóban sűrűségfüggvény. Az X véletlen változó Y -ra vonatkozó feltételes várható értéke

$$\mathbf{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx,$$

amennyiben az integrál értelmes.

Teljes valószínűség és várható érték tétele folytonos esetben. Legyenek X, Y együttesen folytonos véletlen változók h sűrűségfüggvénnyel. Ekkor

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dy$$

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(X|Y = y) f_Y(y) dy.$$

Bizonyítás. Definíció. □

Innen adódik a Bayes-tétel folytonos változata.

Bayes-tétel folytonos változata. *Legyenek x, y olyanok, hogy $f_X(x) > 0$, $f_Y(y) > 0$. Ekkor*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|u)f_X(u)du}.$$

9. Nevezetes eloszlások

9.1. Bernoulli-eloszlás

Az X véletlen változó p paraméterű Bernoulli-eloszlású, $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, $p \in [0, 1]$, ha lehetséges értékei $0, 1$, és $\mathbf{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(X = 0)$. Várható értéke $\mathbf{E}(X) = p$, szórásnégyzete $\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

Tipikus példa egy A esemény I_A indikátorváltozója.

9.2. Binomiális eloszlás

Az X véletlen változó (n, p) paraméterű binomiális eloszlású, $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, $p \in [0, 1]$, ha lehetséges értékei $0, 1, \dots, n$, és $\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Ez tényleg eloszlás, hiszen a binomiális tétel szerint

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + (1 - p))^n = 1.$$

Várható értéke $\mathbf{E}(X) = np$, szórásnégyzete $\mathbf{D}^2(X) = np(1 - p)$. Ez ugyanúgy igazolható, mint a fenti példában.

Tipikus példa: egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát vizsgáljuk n független kísérlet során. Ekkor, ha

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j\text{-edik kísérletnél } A \text{ bekövetkezett,} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

akkor $I_j \sim \text{Bernoulli}(p)$, és $X = \sum_{i=1}^n I_i \sim \text{Bin}(n, p)$. Ebből az előállításból gyorsan adódik a várható értékre és a szórásnégyzetre adott formula.

9.3. Poisson-eloszlás

Binomiális határeloszlása, definíció, $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}^2(X)$.

Az X véletlen változó λ paraméterű Poisson-eloszlású, $X \sim \text{Poisson}(p)$, $\lambda \geq 0$, ha X lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots$, és

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ez valóban eloszlás, hiszen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}.$$

Várható értéke

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Második momentuma hasonlóan számolható

$$\mathbf{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda,$$

így szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \lambda.$$

Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás határeloszlásaként áll elő. Legyen $p = p_n = \lambda/n$, valamely $\lambda > 0$ számra. Ha $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$, akkor némi számolás után

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Ezek alapján azt látjuk, hogy akkor lép fel Poisson-eloszlás, ha egy kis valószínűségű eseményt sokszor „ismételünk”:

- téves telefonhívások száma;

- autóbalesetek száma;
- nyomdahubák száma egy oldalon;
- földrengések száma;
- csillagok száma egy adott térrészben;
- mazsolák száma a pudingban.

Az első példa Ladislaus Bortkiewicz (1868–1931) orosz közgazdásztól (statistikus) származik: halálos lórúgások száma egy év alatt a porosz hadseregben (20 évig figyelt 14 lovas ezredet). 1898: A kis számok törvénye (Bortkiewicz-eloszlás).

9.4. Geometriai eloszlás

Az X véletlen változó p paraméterű geometriai eloszlású, $X \sim \text{Geo}(p)$, ha a lehetséges értékek $1, 2, \dots$ és

$$\mathbf{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ez tényleg eloszlás, hiszen

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1 - p)^k = p \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} (x^k)' \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' \\ &= \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

ezért a várható érték

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1 - p)^k = \frac{1}{p}.$$

A második momentum hasonlóan számolható

$$\mathbf{E}(X^2) = \frac{2-p}{p^2},$$

és így

$$\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

Tipikus példa: addig ismétlünk egy kísérletet, amíg a vizsgált A esemény be nem következik.

A geometriai eloszlás a diszkrét örökifjú eloszlás, hiszen ha $k, \ell \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X > k + \ell | X > k) &= \frac{\mathbf{P}(X > k + \ell)}{\mathbf{P}(X > k)} \\ &= \frac{q^{k+\ell}}{q^k} \\ &= q^\ell \\ &= \mathbf{P}(X > \ell). \end{aligned}$$

Példa. Kuponyűjtő probléma. Egy N különböző elemből álló sokaságból visszatevéses mintát veszünk. Jelölje S_r azt a véletlen számot, ahány elemet kellett húznunk, hogy kapjunk r különböző elemet. Határozzuk meg S_r várható értékét, szórását, majd adjunk ezekre kezelhető aszimptotikus egyenlőséget!

Vezessük be az $X_k = S_{k+1} - S_k$ változót, ami azt jelöli, hogy a k -edik különböző elem kihúzása után hányszor húztunk a következő új elemig. Ekkor a jó elemek száma $N - k$, míg az összes elem száma még mindig N , ezért a siker valószínűsége $1 - k/N$. Tehát X_k geometriai eloszlást követ $1 - k/N$ paraméterrel. Ezek szerint $\mathbf{E}X_k = (1 - k/N)^{-1} = N/(N - k)$, így

$$\mathbf{E}S_k = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{E}X_j = N \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{N-j}.$$

A teljes minta kigyűjtéséhez szükséges várható húzások száma

$$\mathbf{E}S_N = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{E}X_j = N \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N-j} = N \sum_{j=1}^N \frac{1}{j},$$

ami $N \rightarrow \infty$ esetén $\sim N \log N$.

Ha egy szabályos dobókockával dobálunk, akkor várhatóan

$$\mathbf{E}S_6 = 6 \sum_{j=1}^6 \frac{1}{j} = 14,7$$

dobás után jön ki mind a 6 szám.

9.5. Egyenletes eloszlás

Az X véletlen változó *egyenletes eloszlású* az (a, b) intervallumon, $X \sim \text{Egy}(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } y \in (a, b), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez tényleg sűrűségfüggvény, hiszen $f \geq 0$, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$.

Vegyük észre, hogy ez ugyanaz a definíció, mint korábban, a geometriai valószínűségi mezőnél. Valóban, ha $(c, d) \subset (a, b)$ egy tetszőleges részintervallum, akkor

$$\mathbf{P}(X \in (c, d)) = \int_c^d f(y)dy = \frac{d-c}{b-a}.$$

Eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b], \\ 1, & \text{ha } x \geq b. \end{cases}$$

Momentumai, $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y)dy \\ &= \int_a^b y^k \frac{1}{b-a} dy \\ &= \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a}. \end{aligned}$$

Speciálisan

$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbf{D}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

9.6. Exponenciális eloszlás

Az X véletlen változó λ -paraméterű *exponenciális eloszlású*, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Ez tényleg sűrűségfüggvény. A megfelelő eloszlásfüggvény

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Momentumai

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X^k) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y)dy \\ &= \int_0^{\infty} y^k \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= \lambda^{-k} \int_0^{\infty} z^k e^{-z} dz \\ &= \lambda^{-k} \Gamma(k+1) \\ &= \frac{k!}{\lambda^k}. \end{aligned}$$

Itt fölhasználtuk, hogy a

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy, \quad \alpha > 0,$$

Gamma-függvényre teljesül, hogy $\Gamma(k) = (k-1)!$, azaz a függvény a faktoriális folytonos kiterjesztése. Ez az azonosság következik a

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

azonosságból, ami parciális integrálással könnyen adódik.

Ezek szerint

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{D}^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Az exponenciális eloszlás karakterizálja az ún. *örökifjú tulajdonság, vagy emlékezet nélküliség*. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x, y > 0$ esetén

$$\mathbf{P}(X \geq x+y | X \geq x) = \mathbf{P}(X \geq y). \quad (4)$$

Ez valóban azt jelenti, hogy az eloszlás nem öregszik.

Ha $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, akkor ez teljesül, hiszen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \geq x+y | X \geq x) &= \frac{\mathbf{P}(X \geq x+y)}{\mathbf{P}(X \geq x)} \\ &= e^{-\lambda y} \\ &= \mathbf{P}(X \geq y), \end{aligned}$$

ami éppen (4). A fordított irány, logaritmust véve, a Cauchy-féle függvényegyenlet megoldásából következik.

Tipikus példák: telefonhívás hossza, várakozási idő, alkatrészek élettartama, üvegpohár élethossza.

9.7. Normális eloszlás

Az X véletlen változó *normális eloszlású* μ és σ^2 paraméterekkel, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, ha sűrűségfüggvénye

$$f_{\mu, \sigma}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

A $\mu = 0$ és $\sigma = 1$ paraméterekhez tartozó eloszlást *standard normális eloszlásnak* nevezzük. A normális eloszlást nevezik Gauss-eloszlásnak is.

Könnyen látható, hogy $f_{\mu, \sigma}$ függvény μ -re szimmetrikus, azaz $f_{\mu, \sigma}(\mu+y) = f_{\mu, \sigma}(\mu-y)$, $y \in \mathbb{R}$, μ -ben van a maximuma, és $\mu \pm \sigma$ inflexiós pontok.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy $f_{\mu, \sigma}$ sűrűségfüggvény, először az alábbi lemmát igazoljuk.

1. Lemma. *Az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$ integrál létezik mint improprius Riemann-integrál és értéke $\sqrt{2\pi}$.*

Bizonyítás. Legyen $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$ és $I_n = \int_{-n}^n e^{-t^2/2} dt$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $I_n \rightarrow I$, amint $n \rightarrow \infty$. Jelölje $R_n = \{(x, y) : |x| \leq n, |y| \leq n\}$ a $2n$ élhosszúságú négyzetet és $B_n = \{(x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq n\}$ az n sugarú körlapot. A szukcesszív integrálás szabálya szerint

$$I_n^2 = \iint_{R_n} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

Vezessük be a $J_n^2 = \iint_{B_n} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ jelölést. Ekkor $J_n^2 \leq I_n^2 \leq J_{2n}^2$, hiszen $B_n \subset R_n \subset B_{2n}$, ezért elegendő belátni, hogy $J_n^2 \rightarrow 2\pi$, amint $n \rightarrow \infty$. Áttérve polárkoordinátákra az $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ helyettesítéssel a

$$J_n^2 = \int_0^n \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^n r e^{-r^2/2} dr = 2\pi (1 - e^{-n^2/2})$$

egyenlőséget kapjuk, amiből $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n^2 = 2\pi$ adódik. □

Az $f_{\mu,\sigma}$ függvény nemnegatív. A $t = (y - \mu)/\sigma$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma}(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1,\end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőségnél az 1. Lemmát használtuk. Azaz $f_{\mu,\sigma}$ valóban sűrűség.

A várható érték

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\mu,\sigma}(y) dy \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y - \mu}{\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma} dy \right) \\ &= \mu,\end{aligned}$$

a szórásnégyzet pedig

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(X) &= \mathbf{E}((X - \mu)^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu)^2 f_{\mu,\sigma}(y) dy \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu) \cdot \frac{y - \mu}{\sigma^2} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \left[-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (y - \mu) e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \sigma^2.\end{aligned}$$

Tehát a definícióban szereplő két paraméter az a várható érték és a szórásnégyzet.

Az X eloszlásfüggvénye a következőképpen számolható:

$$\begin{aligned}F(x) &= \mathbf{P}(X \leq x) \\ &= \int_{-\infty}^x f_{\mu,\sigma}(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \Phi((x - \mu)/\sigma),\end{aligned}\tag{5}$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ebből a számolásból világos, hogy elég a Φ függvény értékeit ismerni, és ebből tetszőleges paraméterű normális eloszlás eloszlásfüggvénye számolható.

Ugyancsak (5) egyszerű következménye az alábbi állítás.

18. Állítás. *Ha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, akkor $(X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.*

Sőt, ez kicsit általánosabban is igaz: ha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, és a, b valós állandók, $a \neq 0$, akkor $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

A normális eloszlás nagyon erősen koncentrálódik a várható értéke körül. Valóban, ha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ és $Z \sim N(0, 1)$, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X - \mu| \leq \lambda\sigma) &= \mathbf{P}(|Z| \leq \lambda) \\ &= \Phi(\lambda) - \Phi(-\lambda) \\ &= 2\Phi(\lambda) - 1 \\ &= \begin{cases} 0,6827, & \lambda = 1, \\ 0,9545, & \lambda = 2, \\ 0,9973, & \lambda = 3, \\ 0,9999, & \lambda = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

10. Véletlen változók konvergenciája

10.1. Markov és Csebisev egyenlőtlenségei

Markov-egyenlőtlenség. *Legyen X egy véletlen változó $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn, melynek véges a várható értéke. Ekkor tetszőleges pozitív c konstansra*

$$\mathbf{P}(|X| \geq c) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{c}.$$

Bizonyítás. Ha X diszkrét x_1, x_2, \dots lehetséges értékekkel, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X| \geq c) &= \sum_{i:|x_i| \geq c} \mathbf{P}(X = x_i) \\ &\leq \sum_{i:|x_i| \geq c} \frac{|x_i|}{c} \mathbf{P}(X = x_i) \\ &\leq \sum_i \frac{|x_i|}{c} \mathbf{P}(X = x_i) \\ &= \frac{\mathbf{E}(|X|)}{c}. \end{aligned}$$

Ha X folytonos f sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X| \geq c) &= \int_{|y| \geq c} f(y) dy \\ &\leq \int_{|y| \geq c} \frac{|y|}{c} f(y) dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|}{c} f(y) dy \\ &= \frac{\mathbf{E}(|X|)}{c}. \end{aligned}$$

□

A Markov-egyenlőtlenség egyszerű alkalmazásával adódik a

Csebisev-egyenlőtlenség. *Legyen X egy véletlen változó $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn, melynek véges a szórása. Ekkor tetszőleges pozitív c konstansra*

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq c) \leq \frac{\mathbf{D}^2(X)}{c^2}.$$

Bizonyítás. A Markov-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq c) &= \mathbf{P}((X - \mathbf{E}(X))^2 \geq c^2) \\ &\leq \frac{\mathbf{D}^2(X)}{c^2}. \end{aligned}$$

□

10.2. Nagy számok gyenge törvénye

Csebisev-féle nagy számok gyenge törvénye. *Legyenek X_1, X_2, \dots páronként független, véges szórású véletlen változók, melyek közös várható értéke μ és szórásnégyzete σ^2 . Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

Bizonyítás. A páronkénti függetlenség miatt

$$\mathbf{D}^2(X_1 + \dots + X_n) = n\sigma^2.$$

A Csebisev-egyenlőtlenséget az $X = X_1 + \dots + X_n$ változóra fölírva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right) &\leq \frac{\mathbf{D}^2(X_1 + \dots + X_n)}{n^2\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

ami tart 0-hoz. □

A bizonyításból látjuk, hogy a páronkénti függetlenség helyett elég korrelátlanságot feltenni.

Speciális esetként adódik a

Bernoulli-féle nagy számok gyenge törvénye (1713). *Jelölje S_n egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát egy kísérlet n független ismétlése során. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

A tétel szerint a relatív gyakoriságok a fenti értelemben konvergálnak az igazi valószínűséghez. Mivel a valószínűség definícióját a relatív gyakoriságok tulajdonságai motiválták (additivitás), ezért a fenti tétel szerint a valószínűség tényleg az, amit akarunk.

A fenti tételekben szereplő konvergencia a sztochasztikus konvergencia, melynek általános definíciója a következő.

16. Definíció. Az $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata *sztochasztikusan konvergál X -hez*, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} (|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Megjegyzés. A fenti tételekben szereplő gyenge jelző arra utal, hogy a konvergencia sztochasztikusan teljesül. Erős konvergenciáról akkor beszélünk, ha a véletlen változók majdnem biztosan konvergálnak. Pontosabban, az

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata *majdnem biztosan, vagy egy valószínűséggel konvergál X -hez*, ha

$$\mathbf{P} \left(\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} \right) = \mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1.$$

Itt persze már az is magyarázatra szorul, hogy az $\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$ halmaz valóban esemény, azaz eleme a megfelelő σ -algebrának. Ez a σ -algebra tulajdonságaiból következik. Erre részletesebben nem térünk ki.

A nagy számok erős törvénye a következő.

Nagy számok erős törvénye. *Legyenek X, X_1, X_2, \dots független, azonos eloszlású véletlen változók, véges $\mathbf{E}(X)$ várható értékkel. Ekkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \mathbf{E}(X) \quad \text{majdnem biztosan.}$$

10.3. Centrális határeloszlás-tétel

A nagy számok törvénye azt állítja, hogy független, azonos eloszlású véletlen változók átlagai közel vannak a várható értékhez. Az alábbiakban ezt a közelséget tesszük precízzé.

Centrális határeloszlás-tétel. *Legyenek X, X_1, X_2, \dots független, azonos eloszlású véletlen változók közös $\mathbf{E}(X) = \mu$ várható értékkel, és véges $\mathbf{D}(X) = \sigma$ szórással. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right) = \Phi(x),$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

A tétel bizonyítása már komolyabb eszközökkel, a karakterisztikus függvények módszerével történik.

A tétel indikátorváltókra vonatkozó speciális esete a

de Moivre–Laplace tétel. *Jelölje S_n egy p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek a számát egy kísérlet n független ismétlése során. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right) = \Phi(x).$$

Valóban, korábban láttuk, hogy a p -paraméterű Bernoulli-eloszlás várható értéke p és szórása $\sqrt{p(1-p)}$. A speciális eset bizonyítása a binomiális együtthatók pontos aszimptotikájának meghatározásával történhet.

Példa. A és B polgármesterjelöltek. 40000 szavazó egymástól függetlenül, $1/2-1/2$ valószínűséggel szavaz a két jelölt egyikére. Mi a valószínűsége, hogy a két jelöltre leadott szavazatok száma között legfeljebb 20 lesz a különbség?

Ekkor tehát $n = 40000$, $p = \mathbf{P}(\text{A-ra szavaz valaki}) = 1/2$. Legyen S_n az A-ra szavazók száma, ekkor $n - S_n$ a B-re szavazók száma. A kérdés $\mathbf{P}(|S_n - (n - S_n)| \leq 20)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|S_n - (n - S_n)| \leq 20) &= \mathbf{P}(-20 \leq 2S_n - n \leq 20) \\ &= \mathbf{P}\left(-0,1 \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq 0,1\right) \\ &\approx \Phi(0,1) - \Phi(-0,1) \\ &= 2\Phi(0,1) - 1 \approx 0,0797. \end{aligned}$$

Galton deszkája. *Sir Francis Galton (1822–1911): polihisztor, Darwin unokatestvére.* A centrális határeloszlás szemléltetése. Az első sorban 1 ék van, alatta 2, ..., a n -edik sorban n . Az n -edik éksor alatt van $n + 1$ tartály, 0-tól n -ig sorszámozva. Egy golyót elindítunk az első éknél, és a golyót minden ék $1/2 - 1/2$ val-gel téríti el jobbra vagy balra. Annak a valószínűsége, hogy a golyó a k -edik tartályban landol $= \frac{1}{2^n} \cdot$ azon útvonalak száma, ahol a golyó k -szor megy jobbra és $(n - k)$ -szor balra $= \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$. Másként, ha S_n a golyó jobbra eltérítéseinek száma, akkor S_n binomiális eloszlású $(n, 1/2)$ paraméterekkel. Ha sok golyót engedünk le, akkor a haranggörbe rajzolódik ki a tartályokban.

11. Konvolúció

A konvolúciós formulák független véletlen változók összegének eloszlását adják meg.

11.1. Diszkrét eset

Legyenek X, Y független diszkrét véletlen változók $\{x_1, x_2, \dots\}$, ill. $\{y_1, y_2, \dots\}$ lehetséges értékekkel. Ekkor $Z = X + Y$ véletlen változó is diszkrét, lehetsé-

ges értékei $\{z_1, z_2, \dots\} = \{x_i + y_j : i, j \in \mathbb{N}\}$. Továbbá, Z eloszlása

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = z) &= \mathbf{P}(X + Y = z) \\ &= \sum_i \mathbf{P}(X = x_i, Y = z - x_i) \\ &= \sum_i \mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = z - x_i). \end{aligned}$$

Speciálisan, ha X, Y nemnegatív egész értékűek, akkor $X + Y$ is nemnegatív egész értékű, és

$$\mathbf{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = n - k).$$

Z valószínűségeloszlását X és Y valószínűségeloszlások konvolúciójának nevezzük.

Példa. Legyenek X és Y független Poisson eloszlású véletlen változók λ ill. μ paraméterrel. Ekkor $Z = X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$. Valóban,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = n) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu} \\ &= \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} e^{-(\lambda + \mu)}. \end{aligned}$$

11.2. Folytonos eset

19. Állítás. *Legyenek X és Y független, folytonos véletlen változók f és g sűrűségfüggvénnyel. Ekkor $Z = X + Y$ folytonos véletlen változó, melynek sűrűségfüggvénye*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy.$$

A h függvény az f és g konvolúciója.

Bizonyítás. Mivel X és Y függetlenek, ezért az (X, Y) véletlen vektorváltozó sűrűségfüggvénye $f(x)g(y)$. Legyen $A_z = \{(x, y) : x + y \leq z\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z \leq z) &= \mathbf{P}((X, Y) \in A_z) \\ &= \int \int_{A_z} f(x)g(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x)g(y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^z g(u-x) du dx \\ &= \int_{-\infty}^z \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(u-x) dx \right) du. \end{aligned}$$

A sűrűségfüggvény definíciójából következik az állítás. □

Példa. Legyenek X_1, X_2, \dots független exponenciális véletlen változók λ paraméterrel. Ekkor $X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $n \geq 1$, sűrűségfüggvénye

$$h_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Ezt az eloszlást (n, λ) paraméterű gamma eloszlásnak nevezik.

Az állítás nyilván igaz $n = 1$ esetén. Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy a formula teljesül n -re. Mivel $X_1 + \dots + X_n$ és X_{n+1} függetlenek, ezért használhatjuk a konvolúciós formulát. Eszerint

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x-y)h_n(y) dy \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)} \frac{\lambda^n}{n!} y^{n-1} e^{-\lambda y} dy \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó formula $n + 1$ esetén.

12. A valószínűségi módszer

12.1. Weierstrass approximációtétele

Most a Csebisev-egyenlőtlenség analízisbeli alkalmazására adunk egy szép példát. Weierstrass approximációtétele szerint a polinomok szuprémum normában sűrűn vannak a zárt intervallumon folytonos függvények terében. Az

alábbiakban erre adunk egy konstruktív bizonyítást. Legyen f folytonos függvény a $[0, 1]$ intervallumon. A hozzátartozó n -edik *Bernstein-polinom* $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Ekkor $B_n(f)$ egyenletesen konvergál az f függvényhez, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| = 0.$$

Ennek igazolásához vegyük észre, hogy $B_n(f)(x) = \mathbf{E}f(S_n/n)$, ahol $S_n = X_1 + \dots + X_n$, és X_1, \dots, X_n független azonos eloszlású Bernoulli(x) véletlen változók (azaz $\mathbf{P}(X_1 = 1) = x = 1 - \mathbf{P}(X_1 = 0)$). A Csebisev-egyenlőtlenség szerint $\mathbf{P}(|S_n/n - x| > c) \leq \mathbf{D}^2(S_n)/(n^2c^2) = x(1-x)/(nc^2)$. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Mivel folytonos függvény zárt intervallumon egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|u-v| \leq \delta$ esetén $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$. Így

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= |\mathbf{E}[f(x) - f(S_n/n)]| \leq 2M\mathbf{P}(|S_n/n - x| > \delta) + \varepsilon \\ &\leq 2M \frac{\mathbf{D}^2(S_n)}{n^2\delta^2} + \varepsilon \leq \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} + \varepsilon, \end{aligned}$$

ahol M az $|f|$ maximuma a $[0, 1]$ intervallumon. A kapott becslés x -ben egyenletes, ezért az állítást beláttuk.

12.2. Ramsey számok

Adott $k \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $R(k)$ a legkisebb olyan n számot, melyre igaz, hogy egy n csúcsú teljes gráf (K_n) éleit tetszőleges módon pirossal és kézzel színezve a gráfban található egyszínű teljes k csúcsú részgráfot.

Megmutatjuk, hogy $R(k) \leq 2^{2^k}$. Ehhez nem lesz szükség véletlenre. Tekintsük egy $n = 2^{2^k}$ csúcsú teljes gráf egy tetszőleges színezését. A következőkben megadunk egy egyszínű K_k -t. Legyen x_1 egy tetszőleges csúcs. Neki $2^{2^k} - 1$ szomszédja van, ezért a skatulya elv szerint van legalább $2^{2^{k-1}}$ olyan szomszédja, akivel ugyanolyan színű éllel van összekötve. Jelölje A_2 ezen szomszédok halmazát. Most válasszunk egy tetszőleges $x_2 \in A_2$ csúcst. Az A_2 halmazban neki legalább $2^{2^{k-1}} - 1$ szomszédja van, ezért skatulya elv szerint van legalább $2^{2^{k-2}}$ olyan szomszédja, akivel ugyanolyan színű éllel van összekötve (ez a szín persze nem biztos, hogy ugyanolyan, mint ami a x_1x_2 él színe). Ezt folytatva, kapunk egy $\{x_1, x_2, \dots, x_{2^k}\}$ sorozatot, melyre az teljesül, hogy az x_ix_j , $i < j$, él színe csak i -től függ. Ismét a skatulya elv szerint van k olyan csúcs, melyekre ez a szín azonos. Találtunk egy egyszínű K_k -t.

Most belátjuk, hogy $R(k) \geq 2^{k/2}$. A bizonyítás *Erdős Páltól* származik 1947-ből. Vegyünk egy n csúcsú teljes gráfot és színezzük ki az éleit egymástól

függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel pirosra vagy kékre. Azaz minden egyes élre földobunk egy érmét. Annak a valószínűsége, hogy rögzített $\{x_1, \dots, x_k\}$ csúcsok által meghatározott gráf egyszínű K_k az $2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}$, hiszen vagy minden él piros, vagy minden él kék, és pontosan $\binom{k}{2}$ él van. Tehát annak a valószínűsége, hogy lesz egyszínű K_k legfeljebb $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$. Némi számolással kapjuk, hogy ha $n \leq 2^{k/2}$, akkor ez az érték kisebb, mint 1. Azaz, pozitív valószínűséggel nem lesz egyszínű K_k , ami éppen azt jelenti, hogy van olyan színezés, amiben nincs egyszínű K_k . Így $R(k) \geq 2^{k/2}$.

13. Generátorfüggvények

A következőkben kizárólag nemnegatív egész értékű véletlen változókkal foglalkozunk.

17. Definíció. Az X nemnegatív egész értékű véletlen változó generátorfüggvénye

$$g(s) = \mathbf{E}(s^X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X = n) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n.$$

A generátorfüggvény egy végtelen hatványsor, melynek a konvergenciasugara legalább 1, hiszen $p_n \leq 1$. Tehát a függvény folytonos $(-1, 1)$ -en. Megjegyezzük, hogy a konvergenciasugár lehet éppen 1.

20. Állítás. Legyenek X és Y függetlenek g_1, g_2 generátorfüggvénnyel.

(i) A generátorfüggvény egyértelműen meghatározza az eloszlást.

(ii) g folytonos $[-1, 1]$ -en, és $g(1) = 1$.

(iii) $\mathbf{E}(X) = g'(1)$ (pontosabban $\lim_{s \rightarrow 1^-} g'(s)$).

(iv) $\mathbf{D}^2(X) = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$, feltéve, hogy $\mathbf{E}(X^2) < \infty$.

(v) Az $X + Y$ generátorfüggvénye $\mathbf{E}(s^{X+Y}) = g_1(s)g_2(s)$.

Bizonyítás. (i) Hát persze, hiszen $p_n = \frac{g^{(n)}}{n!}$.

(ii) Következik abból, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

(iii) Hatványsor a konvergenciaintervallumán belül tagonként deriválható, ezért

$$g'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n s^{n-1} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \mathbf{E}(X)$$

amint $s \rightarrow 1-$. Itt lehet $\mathbf{E}(X) = \infty$.

(iv) Az előzőhöz hasonlóan

$$g''(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_n = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X).$$

(v) Mivel X és Y függetlenek, ezért

$$\mathbf{E}(s^{X+Y}) = \mathbf{E}(s^X s^Y) = \mathbf{E}(s^X) \mathbf{E}(s^Y).$$

□

Példa.

1. Legyen $I \sim \text{Bernoulli}(p)$. Ekkor

$$\mathbf{E}(s^I) = 1 - p + ps, \quad s \in \mathbb{R}.$$

2. Legyenek I_1, \dots, I_n független $\text{Bernoulli}(p)$ véletlen változók. Ekkor $S_n = \sum_{k=1}^n I_k \sim \text{Binomiális}(n, p)$. Így az előző állítás szerint

$$\mathbf{E}(s^{S_n}) = \prod_{k=1}^n \mathbf{E}(s^{I_k}) = (1 - p + ps)^n.$$

3. Legyen $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Ekkor

$$\mathbf{E}s^X = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda(1-s)}.$$

4. Legyen $X \sim \text{Geometriai}(p)$. Ekkor

$$\mathbf{E}s^X = \sum_{n=1}^{\infty} s^n p(1-p)^{n-1} = \frac{sp}{1 - (1-p)s}.$$

Láttuk, hogy független Poisson-eloszlású véletlen változók összege Poisson. Ezt megkaphatjuk a 20. Állítás következményeként. Valóban, ha X és Y független, Poisson-eloszlású véletlen változók λ és μ paraméterekkel, akkor

$$\mathbf{E}_s^{X+Y} = \mathbf{E}_s^X \mathbf{E}_s^Y = e^{-(\lambda+\mu)(1-s)},$$

ami éppen a $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson-eloszlás generátorfüggvénye. Az egyértelműségi tétel szerint $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$.

A következő tétel rávilágít a generátorfüggvények igazi hasznára.

2. Tétel. *Folytonossági tétel* Legyen (X_n) nemnegatív egészértékű véletlen változók sorozata, és legyen g_n az X_n generátorfüggvénye. Ekkor a következők ekvivalensek:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = k) = p_k \text{ létezik minden } k \geq 0 \text{ esetén.}$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(s) = g(s) \text{ létezik minden } s \in (0, 1) \text{ esetén.}$$

$$\text{Továbbá, } g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

Vigyázat, (p_k) nem feltétlenül valószínűségeloszlás. Valóban, legyen például $X_n \equiv n$. Ekkor persze teljesül (i) és (ii) a $p_k \equiv 0$, $g(s) \equiv 0$, $s \in (0, 1)$ határértékekkel. Vagyis a tömeg kiszaladhat a végtelenbe.

3. Tétel. *Poisson konvergenciatétel* Legyenek $(X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{nn})_n$ független véletlen változókból álló vektorok, ahol $X_{in} \sim \text{Bernoulli}(p_{in})$. Tegyük föl, hogy $\max_{1 \leq i \leq n} p_{in} \rightarrow 0$ amint $n \rightarrow \infty$, és $\sum_{i=1}^n p_{in} = \lambda$. Ekkor S_n határeloszlása λ paraméterű Poisson-eloszlás, azaz tetszőleges $k = 0, 1, \dots$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Bizonyítás. A függetlenség miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{S_n} &= \prod_{i=1}^n \mathbf{E}_s^{X_{in}} \\ &= \prod_{i=1}^n (1 - p_{in}(1-s)) \\ &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \log(1 - p_{in}(1-s)) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n (p_{in}(1-s)) + o(p_{in}) \right\} \\ &= \exp \{ -\lambda(1-s) + o(\lambda) \}. \end{aligned}$$

A folytonossági tételből következik az állítás.

□