A MECHANIKA témakör megajánló dolgozat:
2010. október 22., péntek 8:00
Helyszín: TIK Kongresszusi terem

Fizika mérnök informatikusoknak 1. FBNxE-1

Mechanika 3. előadás

Dr. Geretovszky Zsolt

2010. szeptember 22.

Ismétlés

Kinematikai alapfogalmak
- vonatkoztatási rendszer (Descartes-féle derékszögű)
- helyvektor, elmozdulás vektor, út
- átlagsebesség, pillanatnyi sebesség, sebességvektor, gyorsulásvektor

Alapvető mozgásfajták
- Egyenes Vonalú Egyenletes Mozgás (EVEM)
- Egyenes Vonalú Egyenletesen Változó mozgás (EVEV)
- Egyenletes és egyenletesen változó körmozgás
- Rezgőmozgás

Az elmozdulások függetlenségének elve

1) Az elmozdulások vektoriális összegzéssel összetehetőek egyetlen (eredő) elmozdulássá, mely független a részelmozdulások sorrendjétől.

2) Egyetlen elmozdulás, a vektori összegzés szabályainak betartása mellett, felbontható tetszőleges számú elemi elmozdulássá.

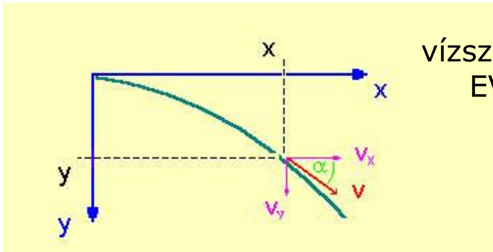
Hajítások

- Függőleges hajítás
- Vízszintes hajítás

(Film: vízszintes hajítás komponensei, 2:25-)

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{g}{2} t^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

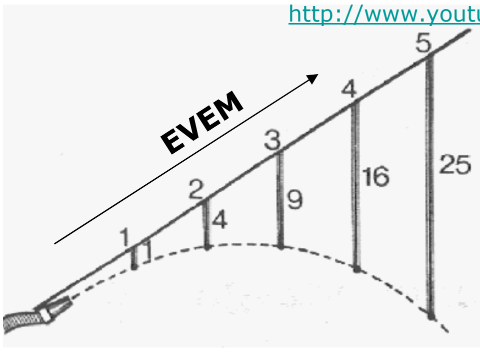


vízszintesen EVEM

függőlegesen EVEV

- Ferde hajítás

(Film: MIT Physics Demo_Monkey and a Gun.mp4 http://www.youtube.com/watch?v=cxvsHNRXLjw***)***



EVEV

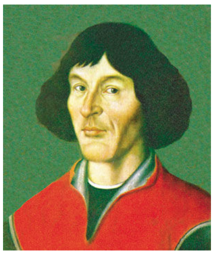
Bolygómozgás

Bolygómozgás régen és ma

http://hps.elte.hu/~kutrovatz/bolygomozgas.swf

Claudius Ptolemaiosz
i.sz. 150 körül

geocentrikus

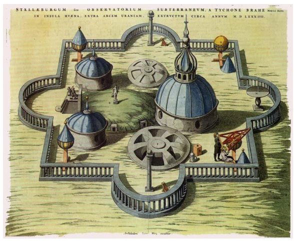


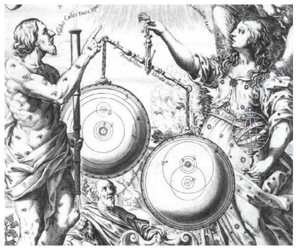
Nicholas Copernicus
(1473-1543)

heliocentrikus

Tycho Brahe
(1546 - 1601)

Johannes Kepler
(1571-1630)





http://hps.elte.hu/~kutrovatz/kozsuzsa_kopern_jegyzet.pdf

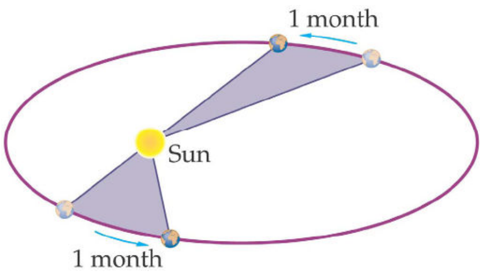
Az égitestek mozgásának leírása

Kinematikai megfigyeléseken nyugszik.

Kepler törvények

I. A bolygók ellipszis pályán keringenek, melyeknek egyik gyújtópontjában a Nap áll.

II. A Naptól a bolygóhoz húzott rádiuszvektor egyenlő időközök alatt egyenlő területeket súrol.



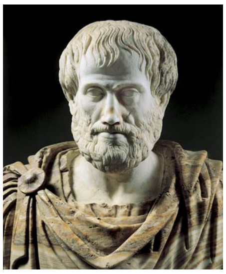
III. A bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint az ellipszispályák nagytengelyeinek köbei.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Dinamika

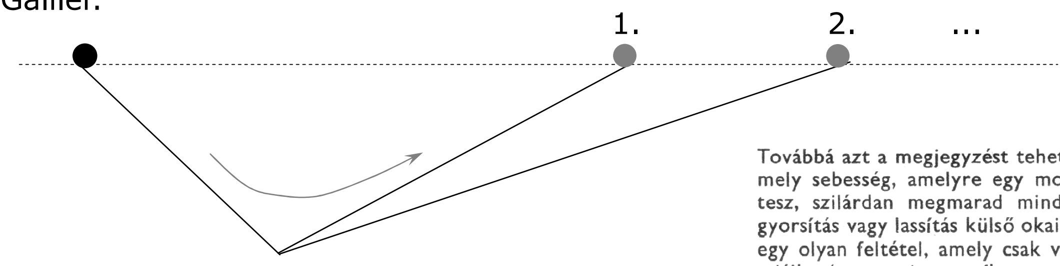
MIÉRT mozog a test (épp úgy, ahogy mozog)?
A test mely tulajdonsága van hatással a mozgásra?

Arisztotelész



peripatetikus mechanika:
1) a test természetes állapota a nyugalom
2) a mozgáshoz okra van szükség
koherens, de téves rendszer

Galilei:



Továbbá azt a megjegyzést tehetjük, hogy bármely sebesség, amelyre egy mozgó test szert tesz, szilárdan megmarad mindaddig, amíg a gyorsítás vagy lassítás külső okait távol tartjuk, egy olyan feltétel, amely csak vízszintes síkon található; ugyanis egy síkon, amely lefelé lejt, mindig jelen van a gyorsító ok, míg a felfelé haladásnál ott a lassítás; ebből következik, hogy a mozgás egy vízszintes síkon örökké tartó . . .
GALILEI: *Discorsi*

Newton axiómák

Az *axióma* olyan alapfeltevés, melyet bizonyítás nélkül igaznak fogadunk el.

(Film: légpárnás sín,** N_I_II.mpg**)

I. Létezik olyan vonatkoztatási rendszer, melyben minden test megtartja EVEM-át, vagy nyugalmi állapotát amíg más test hatása ennek megváltoztatására nem kényszeríti.

Erőhatás: Egy testnek egy másik testre gyakorolt olyan hatását, ami a test sebességének megváltozásában, azaz gyorsulásában nyilvánul meg erőhatásnak, vagy röviden erőnek nevezzük.

(Kísérlet: gyorsítás légpárnás sínen)

II. Amennyiben egy testre erő hat, akkor gyorsulni fog, még pedig úgy, hogy a gyorsulás az erővel azonos irányba mutat, nagysága pedig az erő nagyságával egyenesen, a test tehetetlen tömegével pedig fordítottan arányos.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

A fizikai egyenletek „iránya” ok-okozati kapcsolatot fejez ki!

Newton axiómák, folyt.

III. Ha egy A testre B test $F_{A,B}$ erőt gyakorol, akkor az A test is hat B-re egy $F_{A,B}$-vel azonos nagyságú, de azzal ellentétes irányú $F_{B,A}$ erővel. *Kölcsönhatás, hatás-ellenhatás, akció-reakció elve.*

(Film: vízen úszó hajók mágnessel, TeleKolleg_7.flv http://www.youtube.com/watch?v=qHwaiaeOrdg***)***

IV. Két, ugyanabban a pontban támadó erő helyettesíthető egyetlen, paralelogrammam módszerrel meghatározott eredő erővel. Ha az anyagi pontra egyidejűleg több erő is hat, ezek együttes hatása egyenértékű vektori eredőjük hatásával. *Az erőhatások függetlenségének elve. A szuperpozíció elve. Stevin tétel.*

Mozgásegyenlet, vagy a dinamika alapegyenlete

Newton II. és IV. axiómák egyesítése:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

1db vektoregyenlet!

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = ma_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

3db skalár egyenletből álló – általában csatolt – (differenciál) egyenletrendszer

Analitikus megoldása sokszor nehéz, numerikusan viszont egyszerű kezelni.

Használhatjuk
1) a mozgás leírása révén *erőtörvények megfogalmazására*, vagy
2) az erőtörvények ismeretében *a mozgás pályájának meghatározására*.

A mozgásegyenlet numerikus megoldása

Vizsgáljunk egy olyan tömegpont 1 dimenziós mozgását, melyre egyetlen erő hat.

ismert: $F = ma_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ keressük: $x(t) = ?$

Ha egy időpillanatban (t_0) ismerjük a test helyzetét (x_0) és sebességét (v_0), akkor elegendően kicsiny Δt idő múlva újabb helyzete (x_1) és sebessége (v_1) megbecsülhető:

$$x_1 = x_0 + \Delta x = x_0 + v_0 \Delta t$$

$$v_1 = v_0 + \Delta v = v_0 + a_x \Delta t = v_0 + \frac{F}{m}\Delta t$$

újabb Δt idő elteltével a folyamat ismételhető:

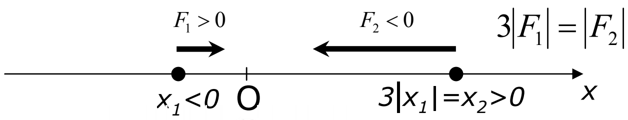
$$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t$$

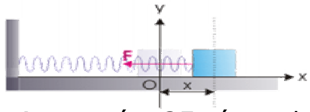
$$v_2 = v_1 + a_x \Delta t = v_1 + \frac{F}{m}\Delta t$$

A pálya pontjai (s egyszersmind a test sebessége), Δt csökkentésével, tetszőle-ges pontossággal meghatározhatóak!

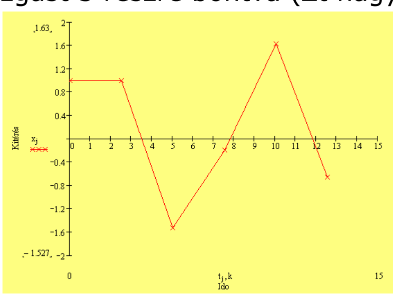
Pl.: lineáris erőtörvény

a rugóerő: $F = -Dx$

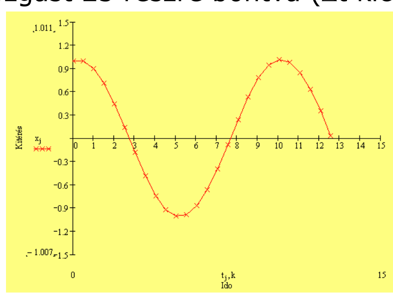




A mozgást 5 részre bontva (Δt nagy)



A mozgást 25 részre bontva (Δt kicsi)



Ez a konkrét probléma analitikusan is megoldható:

$$-Dx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

az $x(t)$ függvény olyan kell legyen, hogy idő szerinti második deriváltja önmagától csak egy konstansban térjen el

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t + \varphi\right)$$ harmonikus rezgőmozgás

(Film: rugón rezgő test, simple_harmonic_motion_animation.flv http://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg***)***

Erőtörvények

Nehézségi erő: $\vec{F} = m\vec{g}$

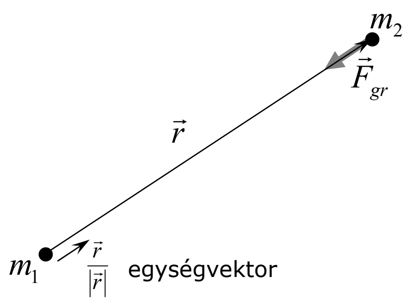
Lineáris erőtörvény (rugók): $F_x = -Dx$

Tapadási surlódási erő: $F_t \leq \mu_0 F_{ny}$

Surlódási erő: $F_{cs} = \mu F_{ny}$ vagy vektori alakban $\vec{F}_s = -\mu \left|\vec{F}_{ny}\right| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Gravitációs erőtörvény:

$$\vec{F}_{gr} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



... még bővül majd a paletta

(közegellenállás, felhajtóerő, elektromos és mágneses terekben ébredő erők)

A gravitáció törvénye

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a bolygópálya körrel közelíthető (ez a Naprendszer bolygóira igen jól teljesül).

Ilyenkor a bolygó állandó sebességgel kering a Nap körül. (K-II)

$$F = ma = mr\omega^2 = mr\frac{4\pi^2}{T^2}$$

szorozzuk meg r^2-tel

$$Fr^2 = mr^3\frac{4\pi^2}{T^2} = 4\pi^2 m \frac{r^3}{T^2}$$

K-III miatt állandó

$$F \propto r^{-2} = \frac{1}{r^2}$$

a kölcsönható testek tömegére nézve szimmetrikus kell legyen $F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$

$$\vec{F}_{gr} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

univerzalitás (a Földön és azon kívül ugyanazok az erők/törvények érvényesek)

~60x

$l_{FH} = 350000km$

$R_F = 6350km$

$T_H = 27nap\ 7óra\ 13perc$

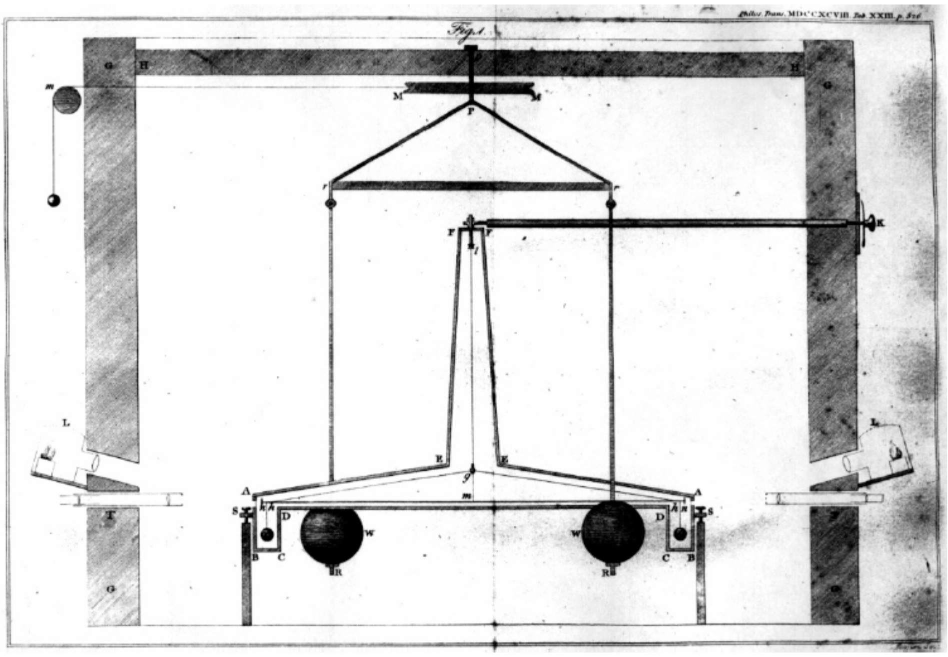
$\omega = 2.66 \cdot 10^{-6} s^{-1}$

$a_{cp,H} = l_{FH}\omega^2 = 2.72 \cdot 10^{-3} ms^{-2}$

$g = 9.81 ms^{-2}$

$\frac{g}{a_{cp,H}} \approx 3600 = 60^2$

A gravitációs állandó mérése 1/2



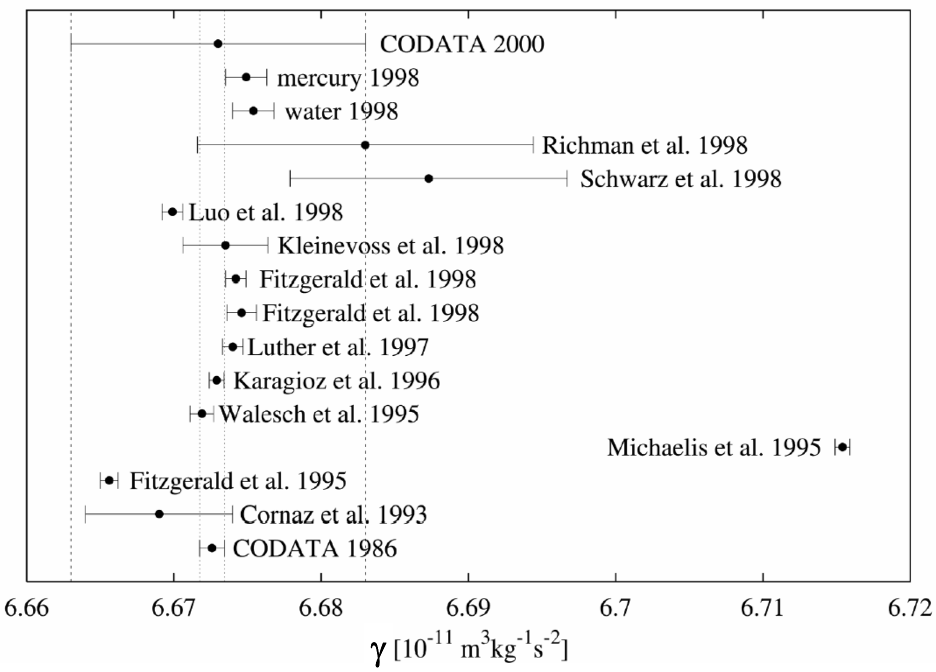
Henry CAVENDISH
1731-1810

Henry Cavendish, 1797

(Film: Cavendish kísérlet, Cavendish_inga.mpg
http://www.youtube.com/watch?v=EE9TMwXnx-s***)***

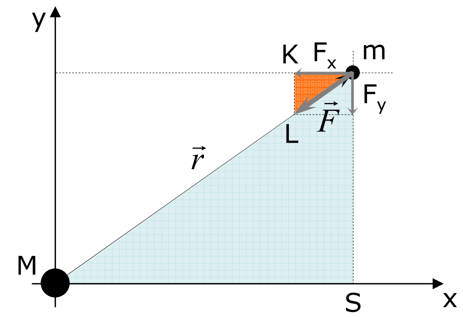
A gravitációs állandó mérése 2/2

elfogadott értéke: $\gamma = (6{,}674\ 28 \pm 0{,}00067) \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$



Próbálkozzanak, programozzanak!!!

A tömegvonzás:



$M >> m$

A M nyugvó, s ehhez rögzítjük
a vonatkoztatási rendszerünket.

$$\boxed{MmS\ \Delta} \approx \boxed{mKL\ \Delta}$$

$$\frac{F_x}{F} = \frac{x}{r} \qquad \vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$F_x = -\gamma \frac{mM}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} x \qquad a_x = -\gamma \frac{M}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} x$$

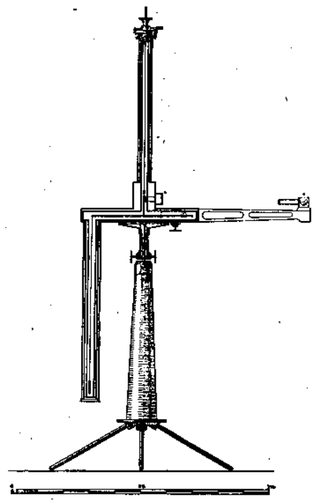
$$F_y = -\gamma \frac{mM}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} y \qquad a_y = -\gamma \frac{M}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} y$$

Kíséreljék meg a bolygók mozgását a lineáris erőtörvényhez hasonló módon numerikusan modellezni!

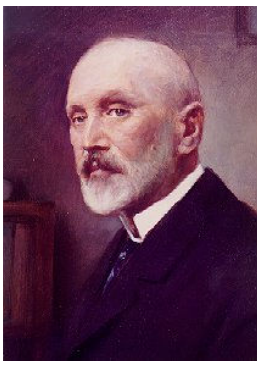
Valóban inverz négyzetes a függés?

Id. Budó I. 55§

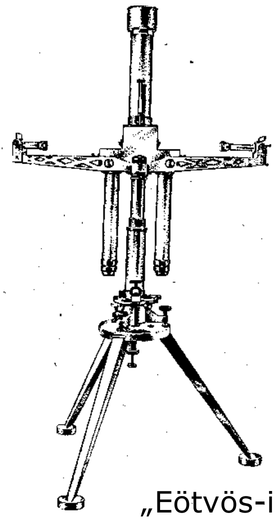
Eötvös Loránd



horizontális variométer

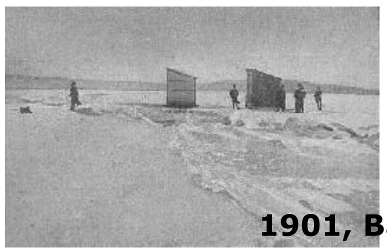


1848-1919



„Eötvös-inga"

1891, Ság-hegy



1901, Balaton

„ Egyszerű egyenes vessző az az eszköz, melyet én használtam, végein különösen megterhelve és fémtokba zárva, hogy ne zavarja se a levegő háborgása, se a hideg és meleg váltakozása. E vesszőre minden tömeg a közelben és a távolban kifejti irányító hatását, de a drót, melyre fel van függesztve, e hatásnak ellenáll és ellenállva megcsavarodik, e csavarodásával a reá ható erőknek biztos mértéket adván. A Coulomb-féle mérleg különös alakban, annyi az egész. Egyszerű, mint Hamlet fuvolája, csak játszani kell tudni rajta, és miként abból a zenész gyönyörködtető változásokat tud kicsalni, úgy ebből a fizikus, a maga nem kisebb gyönyörűségére, kiolvashatja a nehézségnek legfinomabb változásait. Ilymódon a földkéreg oly mélységeibe pillanthatunk be, ahová szemünk nem hatolhat és fúróink el nem érnek."

A tehetetlen és súlyos tömeg

Arányuk függ-e az anyagi minőségtől?

Newton: (inga)	10^{-3} pontosság	NEM függ
Bessel: (inga)	10^{-5} pontosság	
Eötvös Loránd: (az inga két K-Ny beállításait használva)	5×10^{-9} pontosság	
Braginsky és Panov: (módosított Eötvös-inga)	10^{-12} pontosság	