



# Kvantumelektrodinamika és Kvantumoptika

## 9. ELŐADÁS Klasszikus koherenciafüggvények

Benedict Mihály

SZTE TTIK Elméleti Fizikai Tanszék, Szeged, 2015



„Ágazati felkészítés a hazai ELI projekttel  
összefüggő képzési és K+F feladatokra ”

TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0005 projekt



MAGYARORSZÁG  
KORMÁNYA

**Európai Unió**  
Európai Strukturális  
és Beruházási Alapok



**BEFEKTETÉS A JÖVŐBE**

# Tartalom

- 1 Tartalom
- 2 Bevezetés
- 3 A klasszikus interferencia és koherencia
- 4 Kvantumos koherencia függvények
- 5 Magasabb rendű koherenciafüggvények
- 6 A másodrendű koherencia kvantumos tárgyalása
- 7 Ellenőrző kérdések

# Bevezetés

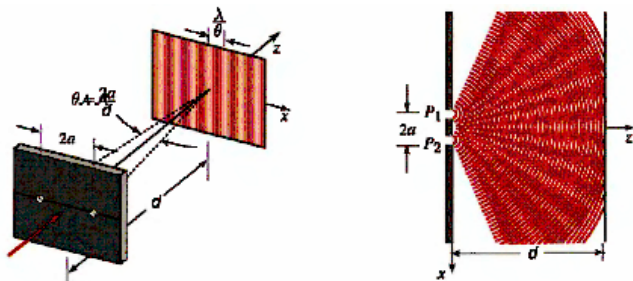
Ebben az előadásban a klasszikus és a kvantumos koherencia elméletét tárgyaljuk.

A koherencia más szóval **interferenciaképességet** jelent, s az interferencia – mint minden hullámjelenségnél – a fény esetében is akkor akkor lép föl, ha két hullám találkozik, és a klasszikus kép szerint a hullámok közötti fáziskülönbség állandó vagy csak lassan változik időben a hullám periódusidejéhez képest.

Az interferencia kérdése azért is alapvető a kvantumoptikában, mert ez a jelenség elsősorban a fény hullámtermészetéhez kapcsolódik, tehát külön kérdés, hogy hogyan nyilvánul meg a fény kettős természete az interferencia során.

# A Young-féle kísérlet

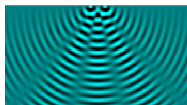
Tekintsük a kvantumfizika alapjainak szempontjából is alapvető Young-féle kétréses kísérletet.



9.1. ábra: A Young-féle kétréses kísérlet: A második ernyőn interferenciaképet észlelünk, aminek a magyarázata a klasszikus hullámkép alapján jól ismert.

# A Young-féle kísérlet szimulációi

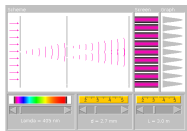
## Animáció:



Ezzel a java animációval egy virtuális hullámkádban játszhatunk. A beépített beállítások közt megtaláljuk a Young féle kétréses kísérletet is.

<http://www.falstad.com/ripple/>

## Animáció:



A Young féle kétréses kísérlet java szimulációja. Ennek segítségével tanulmányozhatjuk a létrejövő interferencia képet különböző beállítások (hullámhossz, rés méret, ...) esetén.

<http://vsg.quasihome.com/interfer.htm>

## Koherenciahossz, koherenciaidő

Egy interferencia-kísérletben a csíkok csak akkor látszanak jól, ha a két sugár közti  $\Delta s = |s_1 - s_2|$  útkülönbség kisebb mint egy – a forrás tulajdonságaitól függő –  $\ell_c$  hosszúság, a koherenciahossz:

$$\Delta s < \ell_c.$$

Egy elvben szigorúan monokromatikus forrás esetén a koherenciahossz végtelen lenne. Ám a kísérletekben használt fény sáv szélessége (a jelentős súllyal szereplő spektrális komponenseket tartalmazó  $\Delta\omega$  frekvenciaintervallum) mindig véges, többféle frekvenciát tartalmaz.

A különböző frekvenciakomponensekre az erősítés (és a kioltás) feltétele viszont kissé más útkülönbségekre teljesül, ezért a koherenciahossz véges marad, és nagysága – mint kimutatható – legfőljebb  $\ell_c = c/\Delta\omega$ . A  $t_c$  koherenciaidő az ennek megfelelő idő:

$$t_c := \ell_c/c$$

## A klasszikus intenzitás

A Young kísérletnél a mező térerőssége az ernyő egy  $\mathbf{r}$  pontjában és a  $t$  időpillanatban olyan térerősség értékek szuperpozíciója, amelyet a mező az első rés  $\mathbf{r}_1$  helyén a  $t$ -nél korábbi  $t_1 = t - s_1/c$  illetve a második rés  $\mathbf{r}_2$  helyén a  $t_2 = t - s_2/c$  késleltetett (retardált) időpontokban vett föl:

$$E(\mathbf{r}, t) = K_1 E(\mathbf{r}_1, t_1) + K_2 E(\mathbf{r}_2, t_2).$$

A  $K_1$  és  $K_2$  terjedési konstansok a geometriától függenek és általában fordítva arányosak az  $s_1$  illetve  $s_2$  távolságokkal. Az egyszerűség kedvéért azonos polarizációjú azaz skaláris tereket tekintünk.

A detektorok válaszideje hosszú, így azok a térerősség abszolút értékének négyzetével arányos intenzitásnak a periódusidőnél jóval hosszabb időre vonatkoztatott fölülhúzással jelzett átlagát mérik:

$$I(\mathbf{r}) = \overline{|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |E(\mathbf{r}, t)|^2 dt$$

# Klasszikus Young-kísérlet

- Az átlag stacionárius: nem függ az időmérés kezdeti időpontjától.
- A kiszámított időátlag úgy is megadható, hogy az  $E(\mathbf{r}, t)$  mező értékét egy valószínűségi eloszlás által meghatározott időbeli folyamatnak tekintjük és az intenzitást az

$$I = \langle |E(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle$$

sokaságra vett átlag segítségével definiáljuk.

Így a Young-féle kísérletnél a detektornál mért intenzitás:

$$I(\mathbf{r}) = |K_1|^2 \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} [K_1^* K_2 \langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1) E(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle].$$

Az első két tag itt külön-külön az egyes résektől származó intenzitás, míg a harmadik tag írja le az interferenciát



# A normált koherenciafok

Legyen

$$I_1 = |K_1|^2 \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle, \quad I_2 = |K_2|^2 \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle$$

és vezessük be a klasszikus **elsőrendű normált koherenciafokot** a következő definícióval:

$$\gamma^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{\langle E^*(x_1) E(x_2) \rangle}{\sqrt{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}}.$$

Itt az  $x_i = (\mathbf{r}_i, t_i)$  jelölést alkalmaztuk. Az ernyőn mért intenzitás eszerint

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \left[ \frac{K_1^*}{\sqrt{|K_1|^2}} \frac{K_2}{\sqrt{|K_2|^2}} \gamma^{(1)}(x_1, x_2) \right].$$

## Koherenciafok időbeli késleltetés esetén

Egy fényhullám tiszta időbeli koherenciája mérhető egy **Mach-Zender-féle interferométerrel**, ahol a két karhoz tartozó idő  $t_1 = t - z_1/c$  és  $t_2 = t - z_2/c$ . Ha a forrás statisztikus tulajdonságai stacionáriusak, azaz a fluktuációk nem függenek az időtől, akkor az interferenciát az útkülönbség szabja meg, és  $\gamma^{(1)}$  csak a  $\tau = (z_2 - z_1)/c$  paramétertől függ:

$$\gamma^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle}$$

Megmutatható, hogy egy, egyébként  $\omega_0$  frekvenciájú monokromatikus forrásból származó fény esetén, amelynél a kibocsátó objektumok, atomok időnként, pl. ütközések következtében véletlen fázisugrást szenvednek, az elsőrendű koherencia foka az alábbi alakú:

$$\gamma^{(1)}(\tau) = \exp\{-i\omega_0\tau - |\tau|/\tau_C\}$$

ahol a  $\tau_C$ , a koherenciaidő éppen a jelzett véletlen fázisugrások között eltelt átlagos idő.

# Kvantumos koherencia függvények

Az előző pont klasszikus megfontolásai kiterjeszthetők a kvantumos leírásra, R. Glauber 1963 (Nobel díj 2005).

A mező intenzitásának mérésére fotodetektorokat használunk: a bennük lévő atomok a beérkező mezőből fotont nyelnek el, majd ennek nyomán gerjesztett vagy ionizált állapotba kerülnek.

Mivel a mező hullámhossza az optikai tartományokban jóval nagyobb mint az atom mérete, a hullám térbeli változását leíró  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  faktor helyettesíthető az  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}$  értékkel, ahol  $\mathbf{r}_0$  az atom tömegközéppontját jelenti. Más szóval **az atomon belül a mező értéke egy adott időpontban mindenütt azonosnak tekinthető.**

Ilyenkor a mezőt és az atomi töltéseket az atomi dipólmomentum csatolja össze, azaz a kölcsönhatás Hamilton-operátora:

$$H_I = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Ezért a mező helyfüggésének elhanyagolását **dipólus közelítésnek** nevezzük.

## Fotonabszorpciós detektálás

Legyen az atom az  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$  helyen, s így a mező értéke ezen a helyen:

$$\mathbf{E} = i \sum_{k,s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \boldsymbol{\epsilon}_{ks} [a_{ks}(t) - a_{ks}^\dagger(t)].$$

Mivel a detektor egy foton abszorpciójával működik, a kölcsönhatás szempontjából elegendő a mezőnek az  $a$  **eltüntető** operátort tartalmazó

$$\mathbf{E}^+ = i \sum_{k,s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \boldsymbol{\epsilon}_{ks} a_{ks}(t)$$

úgynevezett **pozitív frekvenciás** részét figyelembe venni. Legyen a detektorként szolgáló atom kezdeti állapota a  $|g\rangle$  alapállapot, a mezőé pedig valamilyen később specifikálandó  $|i\rangle$  állapot. A detektálás végén kerüljön az atom az  $|e\rangle$ -vel jelölt gerjesztett (excited) atomi állapotba, míg a mező végállapota legyen  $|f\rangle$ . A csatolt rendszer állapota így kezdetben  $|I\rangle := |g\rangle |i\rangle$  végül pedig  $|F\rangle = |e\rangle |f\rangle$ .

## Abszorpciós mátrixelem

A kölcsönhatási operátor mátrixeleme a kezdeti és a végállapot között

$$\langle F | H_I | I \rangle = - \langle e | \mathbf{D} | g \rangle \langle f | \mathbf{E}^+ | i \rangle.$$

Az átmeneti valószínűség az abszolútérték négyzetével, a

$$| \langle F | H_I | I \rangle |^2$$

mennyiséggel arányos. Ez láthatóan tartalmazza az  $\langle e | \mathbf{D} | g \rangle$  átmeneti dipól mátrixelem négyzetét és a mezőállapot átmenetének

$$| \langle f | \mathbf{E}^+ | i \rangle |^2 \tag{9.1}$$

valószínűségét. A föltételezett **foton-abszorpciós detektálási mechanizmus** miatt az  $|f\rangle$  állapotban eggyel kevesebb fotonnak kell lennie mint  $|i\rangle$ -ben. A (9.1) mátrixelem így nem tűnik el, mert  $\mathbf{E}^+$  az  $a_{ks}$  eltüntető operátorokat tartalmazza, így az  $a_{ks} |i\rangle$  és  $|f\rangle$  azonos fotonszámnak megfelelő állapot. A negatív frekvenciás tagból származó  $a_{ks}^\dagger |i\rangle$  állapot viszont kettővel több foton tartalmaz mint  $|f\rangle$ , tehát ezek ortogonális állapotok, így  $| \langle f | \mathbf{E}^- | i \rangle |^2$  eltűnik.

## Összegzés a végállapotokra

A detektálás szempontjából azonban csak az atom végső állapota az érdekes, ezért a (9.1) mennyiségeket össze kell adni a mező **összes lehetséges**  $|f\rangle$  **végállapotára** vett összegzéssel. Ez utóbbiakat egy teljes ortonormált rendszernek tekinthetjük, amelyek tartalmazhatják a nem megengedett (nulla mátrixelemű) tagokat is, s így az átmenet valószínűsége a

$$\sum_f |\langle f | \mathbf{E}^+ | i \rangle|^2 = \sum_f \langle i | \mathbf{E}^- | f \rangle \langle f | \mathbf{E}^+ | i \rangle = \langle i | \mathbf{E}^- \mathbf{E}^+ | i \rangle \quad (9.2)$$

mennyiséggel arányos, ahol az  $\mathbf{E}^- = (\mathbf{E}^+)^\dagger$  adjungálási egyenlőséget használtuk.

Eszerint az átmenet valószínűsége az  $\mathbf{E}^- \mathbf{E}^+$  operátor várható értéke a mező kezdeti állapotában. Az eredmény láthatólag arra az esetre vonatkozik, amikor a kezdeti állapot **tiszta** a kvantummechanikai értelemben.

## A kezdeti állapot keverék

A valóságban a tiszta kezdőállapot igen ritka eset, a mező kezdeti állapota általában egy

$$\rho_M = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|$$

sűrűségoperátorral megadott keverék, ahol  $p_i$  az  $|i\rangle$  tiszta állapot valószínűsége a keverékben és  $\sum_i p_i = 1$ . Ez esetben az  $\langle i | \mathbf{E}^- \mathbf{E}^+ | i \rangle$  (9.2) formula helyére az általánosabb

$$\text{Tr}[\rho_M \mathbf{E}^- \mathbf{E}^+] = \sum_i p_i \langle i | \mathbf{E}^- \mathbf{E}^+ | i \rangle$$

képlet lép. Figyeljük meg, hogy a  $\text{Tr}$  mögött az operátorok **normálrendezett** módon jelennek meg, vagyis az  $a_{ks}^\dagger$  keltő operátorokat tartalmazó tagok megelőzik az  $a_{ks}$  eltüntető operátorokat, ami az általunk előírt fotonabszorpciós detektálás következménye.

Az intenzitás és a  $G(x_1, x_2)$  függvény

Vezessük be most a

$$G^{(1)}(x, x) = \text{Tr}[\rho_M E^-(x)E^+(x)] \quad (9.3)$$

jelölést. A  $\rho_M$  mögött itt a mezőnek ismét csak egyik polarizációs komponensét tekintjük, ezért a vektorjelölést elhagyjuk, és az  $x = (\mathbf{r}, t)$  jelölést használjuk a térbeli és időbeli koordináták összefoglalására. Minthogy ez a  $G^{(1)}$  a detektor megszólalásának valószínűségével arányos, ezt a mennyiséget fogjuk a kvantumozott mező intenzitásának tekinteni az  $x$  téridő pontban.

$$I(\mathbf{r}, t) := G^{(1)}(x, x). \quad (9.4)$$

A függvény argumentumának megkettőzésének oka és az (1) felső index jelentése az alábbiakból derül ki.



# Az elsőrendű kvantumkorrelációs függvény I

A Young-féle kísérlet során az interferáló mezők eredőjének pozitív frekvenciás részét az összetevők megfelelő részének összege adja, így:

$$E^+(\mathbf{r}, t) = K_1 E^+(\mathbf{r}_1, t_1) + K_2 E^+(\mathbf{r}_2, t_2).$$

Mostantól fölteszük, hogy rögzített és azonos polarizációjú mezők interferenciáját tekintjük, így az  $E$ -t skalárisnak vesszük. A mező intenzitása a (9.4) definíciónak és (9.3)-nek megfelelően

$$I(\mathbf{r}, t) = \text{Tr}[\varrho_{\mathbf{M}} E^-(r, t) E^+(r, t)] = |K_1|^2 G^{(1)}(x_1, x_1) + |K_2|^2 G^{(1)}(x_2, x_2) + 2\text{Re}[K_1^* K_2 G^{(1)}(x_1, x_2)],$$

ahol

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \text{Tr}[\varrho_{\mathbf{M}} E^-(x_1) E^+(x_2)]. \quad (9.5)$$

Ez utóbbi mennyiség az általános elsőrendű korrelációs függvény, amelynek a (9.3) speciális esete.

## Az elsőrendű kvantumkorrelációs függvény II

Ezek után definiálhatjuk a **normált elsőrendű (kvantum) korrelációs függvényt**:

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{G^{(1)}(x_1, x_2)}{[G^{(1)}(x_1, x_1)G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2}}, \quad (9.6)$$

amelyre bizonyíthatóan érvényes a  $0 \leq |g^{(1)}(x_1, x_2)| \leq 1$  egyenlőtlenség.

A koherencia mértékét a  $g^{(1)}(x_1, x_2)$  függvény abszolút értéke adja meg az alábbiak szerint:

$$|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1 \quad \text{teljes koherencia}$$

$$|g^{(1)}(x_1, x_2)| < 1 \quad \text{parciális koherencia}$$

$$|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 0 \quad \text{inkoherencia}$$

# Intenzitáskorrelációk

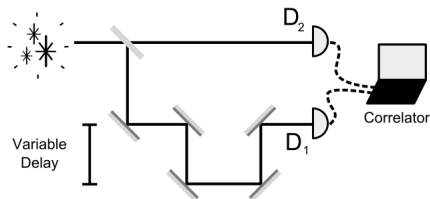
Az 1950-es években Jánossy Lajos és munkatársai, Ádám András és Varga Péter Budapesten, majd kicsit később tőlük függetlenül R. Hanbury Brown és R. Twiss Manchesterben újfajta korrelációs kísérleteket végeztek, amelyekben az amplitúdók korrelációi helyett a fényintenzitások korrelációit keresték.

A korrelátor a két detektor áramának szorzatát méri, ahol az egyik karban egy késleltető  $\tau$  idővel késlelteti a mező értékét a másik karbeli értékhez képest.

A koincidenkiákat számláló korrelátor a **klasszikus** értelmezés szerint a

$$C(\tau) = \langle I(t)I(t + \tau) \rangle$$

átlagot méri, ahol  $I(t)$  és  $I(t + \tau)$  a detektoroknál vett pillanatnyi klasszikus intenzitásokat jelenti.



## Klasszikus normált másodrendű korreláció

Tegyük föl, hogy a nyalábosztó 50-50-es tehát magának az intenzitásnak az átlaga azonos a két detektornál. Vezessük be ennek megfelelően a **klasszikus** normált másodrendű korrelációs függvényt a

$$\gamma^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle^2} \quad (9.7)$$

definícióval, ahol a második egyenlőséget az amplitúdó és az intenzitás közti kapcsolatnak megfelelően írtuk föl. Ha a detektorok különböző távolságra vannak a nyalábosztótól, akkor ezt koordinátafüggő amplitúdókkal kell venni és a

$$\gamma^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\langle E^*(x_1)E^*(x_2)E(x_2)E(x_1) \rangle}{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}$$

definícióval lehet figyelembe venni.

## A másodrendű koherencia föltétele

Azt mondjuk, hogy a mező másodrendben koherens, ha

$$|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| = 1 \quad \text{és} \quad \gamma^{(2)}(x_1, x_2) = 1.$$

A második föltételhez az szükséges, hogy teljesüljön a

$$\langle E^*(x_1)E^*(x_2)E(x_2)E(x_1) \rangle = \langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle$$

faktorizációs föltétel.

Egyszerű belátni, hogy egy monokromatikus síkhullám esetén, amikor a komplex írásmód szerint  $E(x) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$  valós amplitúdóval, akkor

$$\langle E^*(t)E^*(t + \tau)E(t + \tau)E(t) \rangle = E_0^4,$$

és így  $\gamma^{(2)}(\tau) = 1$ . Tetszőleges állandó, nem fluktuáló nyalábra ugyanez az eredmény.

## Másodrendű koherencia függvény tulajdonságai

A másodrendű koherencia függvény azonban szemben az elsőrendűvel nincs korlátozva az 1-nél kisebb értékekre. Ezt belátandó tekintsük a nulla késleltetésű koherencia függvényt:

$$\gamma^{(2)}(0) = \frac{\langle I^2(t) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}.$$

A  $t_1, t_2, \dots, t_N$  időpontokban végzett  $N$  számú sorozat mérése esetén a jelzett átlagok:

$$\langle I(t) \rangle = \frac{I(t_1) + I(t_2) + \dots + I(t_N)}{N} \quad \text{és} \quad \langle I^2(t) \rangle = \frac{I^2(t_1) + I^2(t_2) + \dots + I^2(t_N)}{N}.$$

Mint hogy bármely méréspárra érvényes a  $2I(t_1)I(t_2) \leq I^2(t_1) + I^2(t_2)$  egyenlőtlenség így

$$\langle I(t) \rangle^2 \geq \langle I^2(t) \rangle,$$

amiből:

$$1 \leq \gamma^{(2)}(0) < \infty. \tag{9.8}$$

## Egy klasszikus egyenlőtlenség

A kapott  $1 \leq \gamma^{(2)}(0) < \infty$  (9.8) egyenlőtlenség szerint nincs felső határ, másrészt a 0 késleltetésnél a másodrendű koherencia függvény mindig legalább 1. Mivel az intenzitás értéke mindig nemnegatív a (9.7) összefüggés számlálójában és természetesen a nevezőjében is nemnegatív mennyiségek átlaga szerepel, így nyilvánvalóan  $0 \leq \gamma^{(2)}(\tau) < \infty$ , ha  $\tau \neq 0$ . És mivel

$$2I(t_1)I(t_1 + \tau) \leq I^2(t_1) + I^2(t_1 + \tau)$$

így érvényes a

$$[I(t_1)I(t_1 + \tau) + \dots + I(t_N)I(t_N + \tau)]^2 \leq [I^2(t_1) + \dots + I^2(t_N)] [I^2(t_1 + \tau) + \dots + I^2(t_N + \tau)]$$

egyenlőtlenség is, és ha elég sok mérést végzünk, akkor a két tényező a jobboldalon megegyezik, így azt kapjuk, hogy

$$\gamma^{(2)}(\tau) \leq \gamma^{(2)}(0). \quad (9.9)$$

A (9.8) és (9.9) egyenlőtlenségek tipikusan klasszikus mezőkre érvényesek, amint az a levezetésből is kiderül. Ennek azért van nagy jelentősége, mert bizonyos kvantumozott mezők esetén ezek az egyenlőtlenségek sérülnek.

## Korreláció Lorentz spektrumra

A  $1 \leq \gamma^{(2)}(0) < \infty$  és  $\gamma^{(2)}(\tau) \leq \gamma^{(2)}(0)$  egyenlőtlenségek tipikusan klasszikus mezőkre érvényesek, amint az a levezetésből is kiderül. Ennek azért van nagy jelentősége, mert bizonyos kvantumos mezők esetén ezek az egyenlőtlenségek sérülnek.

Nagyszámú független forrásból származó fény esetén meg lehet mutatni, hogy az első és másodrendű koherencia függvények a

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + |\gamma^{(1)}(\tau)|^2$$

kapcsolatban vannak egymással, így ekkor a  $|\gamma^{(1)}(\tau)| \leq 1$  korlát miatt klasszikus mezőre  $1 \leq \gamma^{(2)}(\tau) \leq 2$ . Pl. Lorentz-spektrumú forrás esetén:

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + \exp\{-2|\tau|/\tau_C\}.$$

tehát  $\tau \rightarrow \infty$  esetén  $\gamma^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$ , ez felel meg a független fényintenzitásoknak, míg  $\gamma^{(2)}(0) = 2$ .



## A Hanbury-Brown–Twiss-kísérlet

Valóban Hanbury-Brown és Twiss mérései mutatták a  $\gamma^{(2)}(0) = 2$  effektust, azaz egyenlő úthosszak más szóval  $\tau = 0$  esetén a detektorok áramának szorzatának átlaga (normálva az egyes áramok átlagával) kétszerese volt a nagy késleltetéssel mért megfelelő átlaghoz képest.

(Jánossy csoportjának az effektus kimutatása nem sikerült, az 1950-es években a Magyarországon elérhető – detektorként szolgáló – fotoelektronsokszorozók érzékenysége nem volt elegendő ehhez.)

Látható, hogy a mérés a késleltetés változtatásának révén alkalmas a koherenciaidő meghatározására.

## Másodrendű kvantumosság korrelációs függvény

Az  $|\langle f | \mathbf{E}^+ | i \rangle|^2$  (9.1) formulához hasonlóan megadhatjuk annak a kétfotonos folyamatnak a valószínűségét, hogy a mezőből az  $\mathbf{r}_1$  pontban a  $t_1$  időpontban és az  $\mathbf{r}_2$  pontban a  $t_2$  időpillanatban egy-egy foton elnyelődik:

$$|\langle f | E^+(\mathbf{r}_2, t_2) E^+(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle|^2.$$

Itt is csak a térerősség operátorok pozitív frekvenciás része szerepel a mátrixelemben, mert az tartalmazza az eltüntető operátort, ami fotonabszorpcióval működő detektorokat feltételez. A végállapotok teljes rendszerére összegezve a (9.2) összefüggéshez vezető átalakításhoz hasonlóan adódik a valószínűsége:

$$\langle i | E^-(\mathbf{r}_1, t_1) E^-(\mathbf{r}_2, t_2) E^+(\mathbf{r}_2, t_2) E^+(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle.$$

A mező  $\varrho_M$  sűrűségoperátorral megadható keverék állapotait is megengedve kapjuk a **másodrendű kvantumosság korrelációs függvény** általános definícióját:

$$G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) := \text{Tr}[\varrho_M E^-(x_1) E^-(x_2) E^+(x_2) E^+(x_1)].$$

## Másodrendű kvantumos koherencia függvény

A normálrendezett argumentum itt is lényeges. A **másodrendű kvantumos koherencia függvény** ebből a következő normálással kapjuk:

$$g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) := \frac{G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1)}{G^{(1)}(x_1, x_1)G^{(1)}(x_2, x_2)}.$$

Ez a mennyiség az  $x_1$  és  $x_2$  téridőpontokban észlelt egy-egy foton detektálásának együttes valószínűséggel arányos mennyiségként értelmezhető. Egyszerűen látható, hogy  $g^{(2)}$  mindig nemnegatív.

A kvantumos mezőt másodrendig koherensnek nevezünk, ha mind a (9.6)-ben definiált elsőrendű koherencia függvény abszolút értéke, mind az itt definiált másodrendű koherencia függvény értéke egységnyi:

$$|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1, \quad g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = 1. \quad (9.10)$$

Ez láthatólag megköveteli, hogy a  $G^{(2)}$  függvény faktorizálható legyen:

$$G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = G^{(1)}(x_1, x_1)G^{(1)}(x_2, x_2).$$

## Az együttes detektálás valószínűsége

Egy azonos rögzített helyen, ami a nyalábosztó egy pontja,  $g^{(2)}$  csak a két karhossz különbségével meghatározott  $\tau$  időkülönbségtől függ:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle E^-(t)E^-(t+\tau)E^+(t+\tau)E^+(t) \rangle}{\langle E^-(t)E^+(t) \rangle \langle E^-(t+\tau)E^+(t+\tau) \rangle},$$

ami annak a föltételes valószínűségével arányos, hogy ha egy foton detektálódik a  $t$  időpontban, akkor egy másik detektálódik a  $t + \tau$  időpillanatban is.

## Koherens állapot korrelációi

Tekintsünk most egy egyetlen haladóhullámú módust tartalmazó monokromatikus mezőt, amelynek pozitív frekvenciás operátora  $E^+ = a e^{i(kz - \omega t)}$ , s így  $E^- = a^\dagger e^{-i(kz - \omega t)}$ . Betéve ezeket a fenti formulába, a

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle \langle a^\dagger a \rangle} = \frac{\langle \hat{n}(\hat{n} - 1) \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} = 1 + \frac{(\Delta \hat{n})^2 - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}$$

eredmény adódik. Itt  $\hat{n} = a^\dagger a$  a módus számoperátora  $\langle \hat{n} \rangle$  a fotonszám várható értéke,  $(\Delta \hat{n})^2$  a fotonszám szórásnégyzete. Látható, hogy az eredmény független a  $\tau$  késleltetéstől.

Az eredmény azt mutatja, hogy egy  $|\alpha\rangle$  koherens állapotban, ahol mint tudjuk  $\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2$  és  $(\Delta \hat{n})^2 = |\alpha|^2$ ,

$$g^{(2)}(\tau)|_{|\alpha\rangle} = 1.$$

Ez az állapot a fenti (9.10) definíció szerint másodrendben koherens.

## Termikus állapot foton­sűrűsödést mutat

Ezzel szemben egy termikus állapot egyetlen  $\omega$  körfrekvenciájú kiszűrt módusában mint tudjuk  $\langle \hat{n} \rangle_T = 1 / [\exp(-\hbar\omega/k_B T) - 1]$  illetve  $(\Delta \hat{n})_T^2 = \langle \hat{n} \rangle_T + \langle \hat{n} \rangle_T^2$ , s így

$$g^{(2)}(\tau)|_T = 2.$$

Megmtatható, hogy egy sokmódusú, nem szűrt, termikus állapotban a klasszikus esethez hasonlóan

$$g^{(2)}(\tau)|_T = 1 + |g^{(1)}(\tau)|_T|^2,$$

ami szintén a 1 és 2 közé esik.

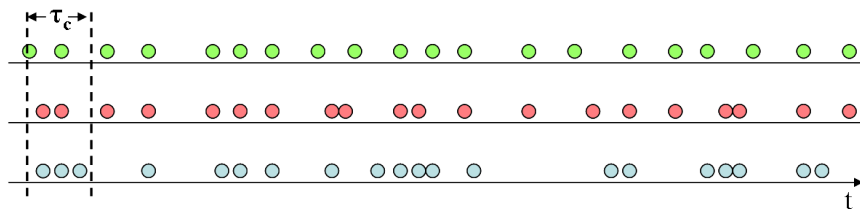
Egy Lorentz-spektrummal rendelkező forrás esetén hasonlóan a klasszikus eredményhez

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \exp\{-2|\tau|/\tau_C\},$$

azaz  $g^{(2)}(0) = 2$ , és  $g^{(2)}(\infty) = 1$ .  $\Rightarrow$  annak a valószínűsége, **hogy rövid időn belül két foton detektálunk, nagyobb mint az egyetlen foton detektálásának valószínűsége.**

## Termikus állapot fotonsűrűsödést mutat

A jelenséget szokás **foton sűrűsödésnek** (photon bunching) nevezni, és ezt az effektust figyelte meg Hanbury-Brown és Twiss, amikor a korrelátorok áramának szorzata maximálisnak bizonyult a nulla időkülönbség esetén.



**9.2. ábra:** A foton detektálás időbeli lefolyása a) antibunching (azaz egyetlen atomból kibocsátott fény) esetén, b) random (azaz koherens állapot, vagy lézernyaláb) esetén, és c) bunching (kaotikus fény) esetén.  $\tau_c$  a koherencia időt jelöli.

## Számállapot korrelációs függvénye

Tekintsünk most egy számállapotot. Ebben  $(\Delta\hat{n})^2 = 0$  minden  $|n\rangle$ -re és  $\langle\hat{n}\rangle = n$ . Ennek megfelelően

$$g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 0, 1; \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{ha } n \geq 2. \end{cases}$$

Láthatólag  $g^{(2)}(0) < 1$ , azaz a klasszikus esetre vonatkozó  $\gamma^{(2)}(0) \geq 1$  egyenlőtlenség a kvantumosság koherencia függvényre már ebben az állapotban nem érvényes. A  $g^{(2)}(0) < 1$  teljesül, ha  $(\Delta\hat{n})^2 < \langle\hat{n}\rangle$ , ezeket az állapotokat sub-Poisson állapotoknak neveztük korábban.



## Fotonrikulás

Egyetlen két-nívós atom erős rezonáns gerjesztése esetén az atom által szórt fényt rezonancia fluoreszcenciának nevezzük. A gerjesztéskor az atom  $\Omega_r$  körfrekvenciával Rabi oszcillációkat végez, de közben a spontán emisszió, melynek időállandóját itt  $\gamma$ -val jelöljük, minduntalan csökkenti a felső nívó populációját. A folyamat leírása kívül esik a jegyzet keretén, de a keletkező mező másodrendű koherenciafüggvénye a következő:

$$g^{(2)}(\tau) = [1 - \exp(-\gamma\tau/2)]^2, \quad \text{ha } \Omega_r \ll \gamma,$$

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - \exp(-3\gamma\tau/4) \cos \Omega_r t, \quad \text{ha } \Omega_r \gg \gamma.$$

Mindkét esetben  $g^{(2)}(0) = 0$ , és nyilván

$$g^{(2)}(0) \leq g^{(2)}(\tau).$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy **fotonritkulás** (photon antibunching) lépett föl, azaz annak a valószínűsége, hogy röviddel egy foton beérkezése után még egy fotont detektálunk kicsi, két foton egyidejű detektálásának valószínűsége pedig 0. Ez azzal kapcsolatos hogy a forrás egyetlen atomból áll, és miután a felső nívóról az alsóra kerülve egy fotont emittált idő kell ahhoz, hogy még egy fotont emittáljon. Ez a jelenség ismét a foton mint energiakvantum oszthatatlanságának kísérleti bizonyítéka.

## Magasabb rendű kvantumos korrelációs függvények

Megemlítjük még, hogy az első és másodrendű korrelációs függvényhez hasonlóan be lehet vezetni az  $n$ -edrendű függvényt is a

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n \dots x_1) := \text{Tr}[\rho_M E^-(x_1) \dots E^-(x_n) E^+(x_n) \dots E^+(x_1)],$$

illetve a megfelelő koherenciafüggvényt a

$$g^{(n)}(x_1, x_2 \dots x_n; x_n \dots x_2, x_1) := \frac{G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n \dots x_1)}{G^{(1)}(x_1, x_1) \dots G^{(1)}(x_n, x_n)}$$

definíciókkal. A mező  $n$ -ed rendben koherens, ha  $|g^{(k)}| = 1$  minden  $k \leq n$  esetén. Ennek szükséges és elégséges feltétele a másodrendhez hasonló faktorizáció érvényessége. Egyszerűen belátható, hogy egy  $|\alpha\rangle$  koherens állapot tetszőleges  $n$  esetén  $n$ -ed rendben koherens.

# Ellenőrző kérdések

- 1 Vázolja a Young-féle kétréses kísérletet.
- 2 Hogyan definiáljuk az elsőrendű normált koherenciafokot?
- 3 Fotonabszorpcióval működő detektor esetén mi határozza meg a mező intenzitását?
- 4 Mit nevezünk normált elsőrendű kvantumkorrelációs függvénynek?
- 5 Mennyi a normált kvantumkorrelációs függvény értéke koherens illetve számállapotok esetén?
- 6 Hogyan vezetjük be a magasabb rendű klasszikus koherenciafüggvényeket?
- 7 Mi a jelentése a másodrendű kvantumos normált koherenciafüggvénynek?
- 8 Milyen különbség van a másodrendű koherenciafüggvényben a termikus, a koherens és a számállapot között?
- 9 Mit nevezünk fotonritkulásnak?