



# Kvantumelektrodinamika és Kvantumoptika

## 5. ELŐADÁS A mező keverék állapotai

Benedict Mihály

SZTE TTIK Elméleti Fizikai Tanszék, Szeged, 2015



„Ágazati felkészítés a hazai ELI projekttel  
összefüggő képzési és K+F feladatokra ”

TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0005 projekt



MAGYARORSZÁG  
KORMÁNYA

**Európai Unió**  
Európai Strukturális  
és Beruházási Alapok



**BEFEKTETÉS A JÖVŐBE**

# Tartalom

- 1 Tartalom
- 2 A tiszta és keverék állapot
- 3 A sűrűségoperátor
- 4 Várható érték keverék állapotban
- 5 Időfejlődés.
- 6 Redukált sűrűségoperátor
- 7 Kétállapotú rendszer
- 8 Termikus állapot
- 9 Ellenőrző kérdések

# A tiszta állapotokról

Ha a mező egy vagy több módusa a környezetével **termikus egyensúlyban** van akkor – mint általában egy nyílt kvantumrendszer – már nem jellemezhető egyetlen állapotvektorral, azaz állapota **nem egy tiszta állapot**.

A kvantumrendszer tiszta állapota – amelyet egyetlen  $|\varphi\rangle$  Hilbert térbeli vektorral adunk meg – azt jelenti, hogy a kvantummechanika által egyáltalán hozzáférhetővé tett minden információnk megvan az állapotról, azaz elvégeztük rajta fölcserélhető operátorok egy teljes rendszerének megfelelő összes fizikai mennyiség mérését.

Mindazonáltal a megfelelő Hilbert térbeli vektor ekkor még mindig csak egy számmal való szorzás erejéig van meghatározva, (amely normált állapot esetén egységnyi abszolút értékű), mert egy ilyen szorzás a nem változtat azon, hogy ez az állapot mely operátorok sajátállapota.

Eszerint tehát a  $|\varphi\rangle$  és az  $e^{i\beta}|\varphi\rangle$  vektor, valós  $\beta$ -val, ugyanazt a normált állapotot adja meg. Azoknak vektoroknak a halmazát, amelyek csak egy ilyen  $e^{i\beta}$  szorzóban különböznek egymástól – és így a hosszuktól eltekintve valójában egy egydimenziós alteret jelentenek – a  **$\mathfrak{H}$  tér egy „sugarának”** szokás nevezni. Világos, hogy egy sugár és a neki megfelelő altérre vetítő projekciós operátor egyértelműen meghatározza egymást, így egy tiszta állapotot valójában egy  $|\varphi\rangle\langle\varphi|$  egydimenziós projekcióval, illetve az ennek megfelelő sugárral adunk meg.

# A keveréket leíró sűrűségoperátor

Van olyan eset azonban, amikor nem tudjuk pontosan, hogy milyen vektor jellemzi az állapotot, azt mégis matematikailag jellemezni akarjuk. Ez egy úgynevezett keverék állapot, amelyet a tiszta esetet jellemző

$$\hat{\rho} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$$

projekció helyett az ennél általánosabb

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad (5.1)$$

operátorral adunk meg, ahol a  $|\varphi_i\rangle$ -k száma legalább kettő, ezek **nem föltétlenül ortogonálisak**, de **normáltaknak** választjuk őket. A  $w_i$  itt annak a valószínűsége, hogy a rendszer az  $i$ -edik  $|\varphi_i\rangle$  tiszta állapotban van:  $0 \leq w_i \leq 1$ ,  $\sum_i w_i = 1$ . Ha csak egyetlen  $w$  nem nulla, akkor az szükségképpen 1, és akkor éppen egy tiszta állapotunk van. A  $\hat{\rho}$  neve **sűrűségoperátor**, néha  $W$ -vel jelölik.

**Megjegyzés:** Az (5.1) formulát a  $|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$  egydimenziós projekciók *konvex* lineáris kombinációjának nevezzük.

# A sűrűségoperátor fogalmának megalkotói



5.1. ábra: Neumann János (1903 - 1957) és Lev Davidovics Landau (1908 - 1968).

A sűrűségoperátor fogalmát Neumann János illetve Lev Landau vezette be. Látni fogjuk, hogy tipikusan akkor használjuk, ha egy rendszer egy másik, nagyobb rendszer részrendszere.

# A sűrűségoperátor tulajdonságai

A  $\hat{\rho}$  önadjungált operátor, ez látható a definícióból, továbbá pozitív (nemnegatív) operátor, azaz tetszőleges  $|\psi\rangle$  esetén

$$\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle = \sum_i w_i \langle\psi|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\psi\rangle = \sum_i w_i |\langle\psi|\varphi_i\rangle|^2 \geq 0$$

és 0 akkor és csak akkor, ha  $\psi$  valamennyi előforduló  $\varphi_i$ -re ortogonális.

Számítsuk ki valamely diszkrét ortonormált  $|v_k\rangle$  bázisban a  $\hat{\rho}$  nyomát (spur, trace):

$$\text{Tr}\hat{\rho} = \sum_k \sum_i w_i \langle v_k|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|v_k\rangle = \sum_i \sum_k |\langle v_k|\varphi_i\rangle|^2 = 1.$$

$\hat{\rho}$  tehát egy ún. **trace-class operátor** (trace- osztályú operátor), mert a nyoma véges, és a nyom értéke éppen 1. Megmutatható ld. Neumann J. könyvét [1], hogy ekkor a spur független a bázistól, és  $\hat{\rho}$ -nak **pontspektruma** van. Ekkor pedig a véges dimenziós esethez hasonlóan létezik olyan **diszkrét**, ortonormált  $|u_i\rangle$  bázis amelyben  $\hat{\rho}$  diagonális, azaz szigorúan érvényes rá a spektráltétel:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |u_i\rangle\langle u_i|.$$



Neumann J. *A kvantummechanika matematikai alapjai*, Akadémiai kiadó, Bp. 1980.

# A sűrűségoperátor négyzetének spurja

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |u_i\rangle\langle u_i|$$

Az  $|u_i\rangle$  bázis nem föltétlenül egyértelmű, mert a  $p_i$  sajátértékek degeneráltak is lehetnek.

A diagonalizált alak hasonló ahhoz ami a (5.1) definícióban szerepel, de itt az  $|u_i\rangle$  állapotok általában mások mint az ott szereplő és nem föltétlenül ortogonális  $|\varphi_i\rangle$ -k, és így a  $p_i$ -k sem azonosak a  $w_i$  számokkal.

A  $\hat{\rho}$  pozitív volta miatt a  $p_i$  sajátértékek is mind nemnegatívak. Mivel a spur, ha létezik, akkor invariáns, így ha éppen a sajátbázisban számítjuk ki:

$$\sum_i p_i = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq p_i \leq 1.$$

Ha az állapot tiszta, akkor nyilván csak egyetlen  $p$  nem nulla, és akkor az szükségképpen 1. A többi sajátvektor a 0 sajátértékhez tartozik, amely a kétdimenziós eset kivételével ilyenkor degenerált, és az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorra ortogonális altérben elvben tetszőlegesen választható.

Valójában ilyenkor, tiszta állapotról lévén szó, nincs is szükség a sűrűségoperátorra. Ez utóbbi esetben a  $\hat{\rho}$  projekció, s így nyilvánvalóan idempotens hiszen  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ , ami miatt:

$$\text{Tr}\hat{\rho}^2 = \text{Tr}\hat{\rho}, \quad \text{azaz} \quad \text{Tr}\hat{\rho}^2 = 1.$$

# A négyzet spurja eldönti tiszta vagy kevert az állapot

Tiszta állapotra  $\text{Tr}\hat{\rho}^2 = 1$ , és a  $\hat{\rho}$  ismeretében éppen ezen tulajdonság alapján dönthetjük el egyszerűen, hogy az egy tiszta vagy kevert állapotot ad-e meg.

Általában  $\text{Tr}\hat{\rho}^2 \leq 1$ , és egyenlőség akkor és csak akkor van ha  $\hat{\rho}$  tiszta állapotot jellemez. A négyzetreemelés és a spurt a  $\hat{\rho}$  sajátbázisában számolva

$$\text{Tr}\hat{\rho}^2 = \sum_i p_i^2,$$

ugyanakkor

$$1 = (\text{Tr}\hat{\rho})^2 = \left(\sum_i p_i\right)^2 = \sum_i p_i^2 + \sum_{i < j} 2p_i p_j \geq \sum_i p_i^2 = \text{Tr}\hat{\rho}^2,$$

mert a  $p_i p_j$  szorzatok nemnegatívak (és egynél kisebbek).

Egyenlőség csak akkor van, ha csak egyetlen pozitív (nem nulla) sajátérték van, ami ilyenkor szükségképpen 1.

Ha egynél több pozitív  $p_i$  sajátérték van, akkor a kétszeres szorzatok között lesz olyan, amelyik nem nulla, így annak elhagyása csökkenti az összeget, azaz ha  $\text{Tr}\hat{\rho}^2 = 1$ , akkor az állapot tiszta, ha  $\text{Tr}\hat{\rho}^2 < 1$  akkor kevert.



# Várható érték keverék állapotban

Egy  $|\varphi\rangle$  tiszta állapotban az  $A$  operátorral megadott fizikai mennyiség várható értéke:

$$\langle A \rangle_{\varphi} = \langle \varphi | A | \varphi \rangle.$$

$\hat{\rho} = \sum_i w_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$  állapotban a megfelelő súlyokkal képezzük az egyes  $|\varphi_i\rangle$ -kben vett várható értékeket és ezzel azonosítjuk az  $A$  várható értékét, azaz:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\rho} &= \sum_i w_i \langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle = \sum_{ijk} w_i \langle \varphi_i | v_j \rangle \langle v_j | A | v_k \rangle \langle v_k | \varphi_i \rangle = \\ &= \sum_{jk} \langle v_k | \sum_i w_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| v_j \rangle \langle v_j | A | v_k \rangle = \\ &= \sum_{jk} \hat{\rho}_{kj} a_{jk} = \text{Tr}(\hat{\rho}A) = \text{Tr}(A\hat{\rho}). \end{aligned}$$

## A sűrűségoperátor időfejlődése

Föltesszük, hogy a rendszer egyes  $|\varphi_i\rangle$  tiszta állapotai valamely  $H$  Hamilton operátor hatására a Schrödinger egyenletnek megfelelően fejlődnek időben, azaz minden  $i$ -re

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_i\rangle = H |\varphi_i\rangle$$

a  $w_i$  súlyok viszont nem változnak, ekkor

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|) = H |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| - |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| H,$$

s így

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [H, \hat{\rho}],$$

amit **Neumann (von Neumann) egyenlet**nek szokás hívni.

**Megjegyzés:** A Neumann egyenlet ebben a formában a Schrödinger képen érvényes, Heisenberg képen az állapotot leíró sűrűségoperátor nem függ az időtől, viszont a fizikai mennyiségeket jellemző operátorok időfüggőek lesznek.

# Átlagolás a környezetre

Legyen egy nagy rendszer a  $|\Psi\rangle$  tiszta állapotban és tegyük föl hogy ennek egy kis részrendszere érdekel minket, amely a környezetével együtt adja a teljes zárt rendszert. Ekkor a teljes rendszer állapota a két részrendszer tenzori szorzatterében van, és kifejezhető a részrendszer ( $\mathcal{S}$ ) valamely  $|\psi_i\rangle$  és a környezet ( $\mathcal{E}$ )  $|v_j\rangle$  ortonormált bázisában, azaz

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |\psi_i\rangle |v_j\rangle.$$

A normáltság miatt itt  $\sum_{ij} |c_{ij}|^2 = 1$ . Előfordulhat, hogy  $|\Psi\rangle$  a két részrendszer  $\mathcal{S}$  és  $\mathcal{E}$  egy-egy tiszta állapotának tenzori szorzata:  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_{\mathcal{S}} |\phi\rangle_{\mathcal{E}}$ , azaz egy ún. **szorzat állapot**. De általában nem ez a helyzet, olyankor **összefonódott állapot**ról beszélünk.

A teljes zárt rendszer tiszta állapotának sűrűségoperátora:

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{ij} c_{ij} |\psi_i\rangle |v_j\rangle \sum_{kl} c_{kl}^* \langle\psi_k| \langle v_l|.$$

Általában a környezet részletei nem érdekesek, ekkor kiátlagolunk a környezet állapotaira, azaz képezzük a **parciális spurt** a következőképpen:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathcal{E}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) &= \sum_n \langle v_n | \Psi\rangle\langle\Psi| v_n \rangle = \sum_n \sum_{ij} \sum_{kl} c_{ij} c_{kl}^* \delta_{nj} \delta_{nl} |\psi_i\rangle\langle\psi_k| = \\ &= \sum_n \sum_{ik} c_{in} c_{kn}^* |\psi_i\rangle\langle\psi_k| = \hat{\rho}_{\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

# Redukált sűrűségoperátor

$$\hat{\rho}_S = \sum_n \sum_{ik} c_{in} c_{kn}^* |\psi_i\rangle\langle\psi_k|$$

már csak az  $\mathcal{S}$  részrendszerre jellemző úgynevezett redukált sűrűségoperátor, amely általában nem írható  $|\phi\rangle\langle\phi|$  alakba, mert ehhez az kellene, hogy  $|\phi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle$  miatt  $|\phi\rangle\langle\phi| = \sum_{ik} a_i a_k^* |\psi_i\rangle\langle\psi_k|$ -ban  $a_i a_k^* = \sum_n c_{in} c_{kn}^*$  teljesüljön minden  $i$ -re és  $k$ -ra, ami  $n^2$  db föltétel teljesülését kívánja az  $n$  db ismeretlenre az  $a_i$ -kre, és ezeket nem lehet egyszerre teljesíteni. Így általában redukált sűrűségmátrix keverék.

**5.1. Feladat:** Mutassuk meg, hogy a redukált sűrűségmátrix akkor és csak akkor jellemez tiszta állapotot, ha a kiinduló állapot nem összefonódott.

A rendszer és környezet egy összefonódottsági mértékének egyik lehetséges jellemzője a redukált sűrűségmátrixból megkapható **lineáris entrópia**:

$$S_E = 1 - \text{Tr} \hat{\rho}_S^2.$$

Egy másik lehetőség az **Neumann entrópia** (Shannon entrópia):

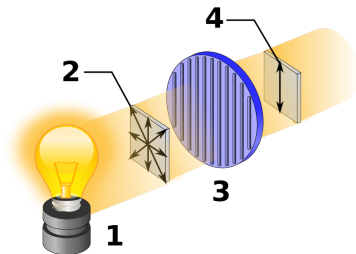
$$S_N = -\text{Tr} \hat{\rho}_S \log \hat{\rho}_S = -\sum_i p_i \log p_i,$$

amelyben  $p_i$ -k a  $\hat{\rho}_S$  sajátértékei, és amely szintén 0, ha  $\hat{\rho}_S$  tiszta, egyébként viszont pozitív.

## Példa: Kétállapotú rendszer

A klasszikus optikából ismert példa a polarizálatlan vagy csak részben polarizált fény, ahol nincs teljesen meghatározott polarizációs állapot.

Kvantumos jelleg: polarizált fotonról beszélünk, a polarizációs állapotot egyetlen részecskére vonatkoztatjuk.



**5.2. ábra:** Fotonok polarizációját vizsgálva az (1) izzólámpa (2) teljesen véletlen polarizációval bocsát ki fotonokat, amelyek sűrűség operátorát  $\hat{\rho} = 1/2 |n_+\rangle\langle n_+| + 1/2 |n_-\rangle\langle n_-|$  módon reprezentálhatjuk. Egy függőlegesen beállított (3) polarizátoron áthaladva a foton függőlegesen polarizált tiszta állapotba kerül, melynek állapotát a  $\hat{\rho} = |n_+\rangle\langle n_+|$  sűrűségoperátor írja le. Itt  $|n_{\pm}\rangle$  a vízszintes és függőleges polarizációs irányhoz tartozó bázist jelöli.

## Példa: Kétállapotú rendszer

Speciális reprezentánsa az úgynevezett kvantumbitnek, azaz egy olyan fizikai objektumnak, amelynek tiszta állapotai egy kétdimenziós komplex Hilbert tér elemeivel – pontosabban sugaraival egyeznek meg. Két bázisvektor:  $|+\rangle$  és  $|-\rangle$ .

Fotonok polarizációja esetén rendszerint a pozitív illetve negatív helicitású fotonállapotokat választjuk, de lehetnek ezek pl. a függőleges és a vízszintes polarizációs irányok is.

Feles spin, mint kétállapotú rendszer esetén pedig valamely fizikai mennyiség (pl. mágneses mező) által kijelölt irányba mutató impulzusnyomaték vetület  $|+\rangle$  illetve  $|-\rangle$  sajátállapotai, rendszerint ezt választjuk  $z$  iránynak, azaz  $S_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$ .

Az önadjungált sűrűségoperátor általános alakja ebben a kétdimenziós térben:

$$\hat{\rho} = \rho_{++} |+\rangle\langle +| + \rho_{--} |-\rangle\langle -| + \rho_{+-} |+\rangle\langle -| + \rho_{-+} |-\rangle\langle +|,$$

ahol az önadjungáltság miatt  $\rho_{++}$  és  $\rho_{--}$  valós,  $\rho_{+-} = \rho_{-+}^*$  továbbá  $\rho_{++} + \rho_{--} = 1$  a spurra vonatkozó kikötés miatt.

Vezessük be a  $\rho_{++} - \rho_{--} = s_3$ , és  $\rho_{+-} + \rho_{-+} = s_1$ ,  $i(\rho_{+-} - \rho_{-+}) = s_2$ , jelöléseket, akkor egyszerűen láthatóan a  $\hat{\rho}$  mátrixa a  $|+\rangle, |-\rangle$  bázisban

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & 1 - s_3 \end{pmatrix} \quad \text{azaz} \quad \boxed{\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{s} \cdot \hat{\sigma})},$$

ahol  $\hat{\sigma}$  a három Pauli mátrixból képzett vektort jelenti.

## Példa: Kétállapotú rendszer

Magát a  $\hat{\rho}$  operátort pedig írhatjuk a  $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{\sigma} \cdot \langle \hat{\sigma} \rangle)$  alakba is, ahol  $\hat{\sigma}$  a Pauli mátrixoknak megfelelő operátorokat jelöli, vagyis

$$\hat{\sigma}_1 = |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|, \quad \hat{\sigma}_2 = -i(|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|), \quad \hat{\sigma}_3 = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|.$$

Láthatóan  $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$  míg  $\text{Tr}\hat{\rho}^2 = \frac{1}{2}(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{2}(1 + s^2)$ , ahol

$$s^2 := s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leq 1$$

míg  $\det \varrho = \frac{1}{4}(1 - s^2)$  amiből

$$\text{Tr}\hat{\rho}^2 = \frac{1}{2}(1 + 1 - 4 \det \varrho) = 1 - 2 \det \varrho$$

és ez invariáns mennyiség.

## Példa: Kétállapotú rendszer

Az egyes  $s_i$ -k a megfelelő irányokban mért polarizáció fokok, ezek lényegében a klasszikus optikából is ismert **Stokes paraméterek**, itt azonban ezek egyetlen fotonra vannak vonatkoztatva. Az

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = s \quad (5.2)$$

invariáns mennyiség pedig a polarizáció foka.

**5.2. Feladat:** Keressük meg a  $\rho$  mátrixának sajátértékeit és sajátvektorait.

A megfelelő két sajátvektor  $|n_+\rangle$  és  $|n_-\rangle$  adja meg azt a  $\hat{\sigma}_n = |n_+\rangle\langle n_+| - |n_-\rangle\langle n_-|$ -e, amelynek a polarizációja éppen  $s$ .

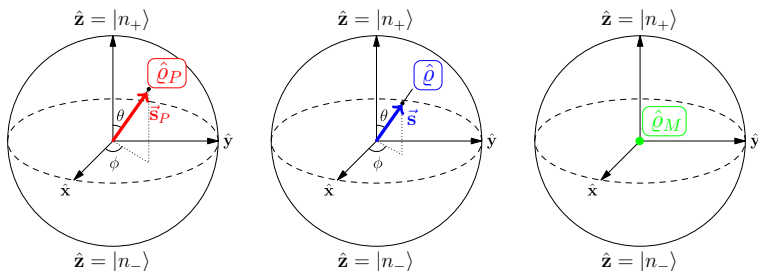
Az  $s = 0$  esetben a foton teljesen polarizálatlan, az állapot a polarizáció szempontjából maximálisan kevert, míg az  $s = 1$  tiszta állapotot jelent, a foton teljesen polarizált.

$\rho$ -t diagonalizálva a sajátértékek éppen  $\frac{1}{2}(1+s)$  és  $\frac{1}{2}(1-s) \Rightarrow$  a sűrűségoperátor bázistól függetlenül  $\hat{\rho} = s \hat{\rho}_P + (1-s) \rho_M$  alakba írható, ahol

- $\hat{\rho}_M = \frac{1}{2} \mathbb{1}$  a **teljesen kevert** állapot sűrűségoperátora,
- $\hat{\rho}_P$  pedig olyan, amelyiknek a determinánsa 0, azaz **teljesen polarizált**.



## Példa: Kétállapotú rendszer



**5.3. ábra:** Kétállapotú rendszer esetén a  $\hat{\rho}$  keverék állapot egy egységsugarú gömb (Bloch-gömb) segítségével szemléltethető. Az első ábrán a gömb felszínét elérő (piros)  $\vec{s}_P$  polarizáció fok vektor egy  $\hat{\rho}_P$  teljesen polarizált (tiszta) állapotot ír le. A második ábrán az  $\vec{s}$  (kék) polarizáció fok vektor már nem éri el a gömb felszínét, ez egy  $\hat{\rho}$  keverék állapotot ír le. A harmadik ábrán az origóban lévő (zöld) pont a teljesen kevert  $\hat{\rho}_M = \frac{1}{2} \mathbb{1}$  állapotot szemlélteti. Érvényes továbbá, hogy  $\hat{\rho} = s \hat{\rho}_P + (1 - s) \hat{\rho}_M$

## Példa: Termikus állapot

A gyakorlatban előforduló állapotok nagyon sokszor az úgynevezett **termikus állapotok**, amelyek egy a környezetével termikus egyensúlyban lévő módusban alakulnak ki.

A termikus rendszer energiát cserélhet a környezetével  $\Rightarrow$  nem lehet zárt  $\Rightarrow$  a kvantumállapota csak sűrűségoperátorral írható le.

A termikus állapotról a statisztikus fizikában levezetik, hogy ebben a rendszer energiaállapotainak betöltési valószínűségeit a **Boltzmann-faktor** adja meg, továbbá, hogy a nemdiagonális elemek által reprezentált koherenciák az egyensúly elérése során eltűnnek.

Tehát ha a rendszer most az elektromágneses mező egy módusa, amely a környezetével (beleértve ebbe a többi módust is)  $T$  hőmérsékleten termikus egyensúlyban van, akkor a módus állapotát leíró sűrűségoperátor alakja:

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |n\rangle\langle n|,$$

ahol

$$p_n = \frac{e^{-\hbar\omega(n+1/2)/kT}}{Z}, \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega(n+1/2)/kT}.$$

Másképpen ezt úgy is írhatjuk, hogy

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)/kT}}{Z}.$$

## Példa: Termikus állapot

Az állapotösszeget ki tudjuk számítani

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega(n+1/2)/kT} = e^{-\hbar\omega/2kT} \frac{1}{1-x}, \quad x := e^{-\hbar\omega/kT} < 1,$$

így

$$p_n = (1-x)x^n.$$

A fotonszám várható értéke:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{n}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = (1-x) x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \\ &= (1-x) x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = x(1-x) \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x} = \frac{e^{-\hbar\omega/kT}}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \end{aligned}$$

ez egy speciális Bose-Einstein eloszlás, ahol a kémiai potenciál  $\mu = 0$ .

## Példa: Termikus állapot

**Következmény** a Planck törvény.

Egy foton energiája  $\hbar\omega$ : tehát az átlagos energia egy módusban  $\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ .

A módusok száma térfogategységben  $\omega^2$ -el arányos, a statisztikus fizikában vagy a szilárdtestfizikában tanult állapotossűrűség számításához hasonló megfontolás szerint a módussűrűség  $g(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{c^3\pi^2} d\omega$ , azaz

$$w_T(\omega) d\omega = \hbar\omega \langle \hat{n} \rangle g(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{c^3\pi^2} \frac{d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

A fentiek alapján a termikus állapot sűrűségoperátora az alábbi alakba is írható:

$$\hat{\rho} = (1 - e^{-\hbar\omega/kT}) e^{-\hbar\omega a^\dagger a/kT}.$$

A  $p_n = (1 - x)x^n$  valószínűségekből szereplő  $x = e^{-\hbar\omega/kT}$ -t ki szokás fejezni az  $\langle n \rangle = \frac{x}{1-x}$  összefüggésből. Ez utóbbi szerint  $x = \frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle}$ , s így

$$p_n = (1 - x)x^n = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^n} = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}}.$$

## Példa: Termikus állapot

A fotonszám szórásának kiszámítása:

$$\begin{aligned}\langle \hat{n}^2 \rangle &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{n}^2) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n n^2 = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) + n] x^n = \\ &= (1-x) \left( x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} \right) \sum_{n=0}^{\infty} x^n.\end{aligned}$$

Itt mint láttuk  $\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ , és  $\frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$ .

Eszerint

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = (1-x)x^2 \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)} = \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)} = 2 \langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{n} \rangle.$$

Így

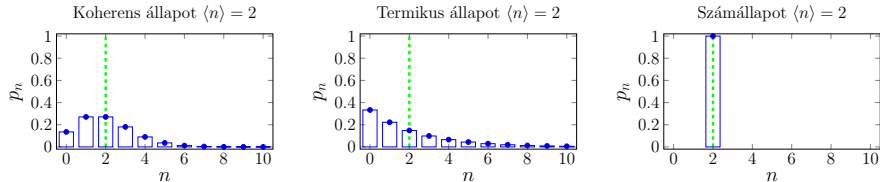
$$(\Delta \hat{n})^2 = \langle \hat{n} \rangle^2 - \langle \hat{n} \rangle^2 = \langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{n} \rangle.$$

## Példa: Termikus állapot

Mint láttuk a koherens állapot esetén  $(\Delta \hat{n})^2 = \langle \hat{n} \rangle$ , ami a Poisson-eloszlásra jellemző. Mivel a termikus állapotra a fotonszám szórásnégyzete nagyobb mint a várható értéke:

$$\frac{(\Delta \hat{n})^2}{\langle \hat{n} \rangle} > 1$$

a termikus állapot fotonszámeloszlását **szuper-Poissoninak** nevezzük.



**5.4. ábra:** A koherens, a termikus és a szám állapotok fotonszám eloszlásának összehasonlítása. Mind a három állapot esetén a fotonszám várhatóértéke 2.

# Ellenőrző kérdések

- 1 Milyen állapotokat kell sűrűségoperátorral megadni?
- 2 Mi a sűrűségoperátor általános definíciója?
- 3 Mik a sűrűségoperátor tulajdonságai?
- 4 Hogyan számítjuk ki egy operátor várható értékét a sűrűségoperátorral?
- 5 Mi a redukált sűrűségoperátor fogalma és mikor használjuk?
- 6 Hogyan jellemezzük egy foton általános polarizációs állapotát?
- 7 Mi egy módus termikus állapotának sűrűségoperátora?
- 8 Milyen eloszlást követ a fotonszám termikus állapotban?
- 9 Mennyi a fotonszám várható értéke és szórása termikus állapotban?
- 10 Mit értünk azon, hogy a termikus állapot szuper-Poisson típusú állapot?