Kvantumelektrodinamika és Kvantumoptika

4. ELŐADÁS
Koherens állapotok

Benedict Mihály

SZTE TTIK Elméleti Fizikai Tanszék, Szeged, 2015

„Ágazati felkészítés a hazai ELI projekttel összefüggő képzési és K+F feladatokra ”

TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0005 projekt

SZÉCHENYI 2020

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Strukturális és Beruházási Alapok

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Tartalom

A mező várható értéke számállapotokon

Az elektromágneses mező azon állapotai, amelyekkel általában a fizikai kísérletek során találkozunk, csak egészen kivételes esetben fotonszámsajátállapotok. Ezen állapotok nem sajátállapotai az elektromos térerősség operátorának, és azt is azonnal láthatjuk, hogy például, ha az elektromos térerősséget egy fotonszám-sajátállapotban mérjük, akkor annak várható értéke 0. Valóban az

$$\mathbf{E} = i\sum_i \mathcal{E}_{\omega_i} \boldsymbol{\epsilon}_i (a_i e^{i\mathbf{k}_i \mathbf{r}} - {a_i}^\dagger e^{-i\mathbf{k}_i \mathbf{r}}), \qquad \mathcal{E}_{\omega_i} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_i}{2\varepsilon_0 V}}$$

operátor várható értéke nem csak a vákuum állapotban, de minden fotonszám-sajátállapotban is eltűnik:

$$\langle 0|\mathbf{E}(\mathbf{r})|0\rangle = 0, \qquad \langle n|\mathbf{E}(\mathbf{r})|n\rangle = 0.$$

Ez következik abból, hogy a keltő és eltüntető operátoroknak a számállapotokon vett diagonális mátrixelemei eltűnnek.

A szórás számállapotban

Számítsuk ki most a térerősség operátorának

$$\Delta E^2(\mathbf{r}) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$$

szórását a vákuumállapotban. A második tag, mint láttuk, eltűnik. Az első tag kiszámításához vegyük figyelembe, hogy

$$\langle 0|a_i a_j|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|a_i{}^\dagger a_j{}^\dagger|0\rangle = 0,$$

$$\langle 0|a_i{}^\dagger a_j|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|a_i a_j{}^\dagger|0\rangle = \delta_{ij}.$$

$$\langle 0|E^2|0\rangle = \sum_i E^2_{\omega_i} = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2\varepsilon_0 L^3}.$$

Az összeg végtelen, mert a módusok száma végtelen, és az összegben tetszőlegesen nagy frekvenciák is megjelennek. Ha áttérünk a doboz kvantálás helyett a végtelen térre, akkor ez a következőképpen is látható:

$$\sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2\varepsilon_0 L^3} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\varepsilon_0}\int \hbar ck\, d^3\mathbf{k} =$$

$$= \frac{4\pi\hbar c}{(2\pi)^3 2\varepsilon_0}\int_0^\infty k^3\, dk = \frac{\hbar c}{2\varepsilon_0\pi^2}\int_0^\infty k^3\, dk = \infty.$$

A számállapotok nem mutatják a klasszikus mező tulajdonságait

Számállapotban tehát az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ operátor várható értéke minden pontban 0, szórása viszont végtelen. Ez utóbbi annak a következménye, hogy a mező értékét egy „geometriai pontban" vizsgáltuk. A szingularitás oka hasonló ahhoz, ahogyan pl. egy pontszerű töltés energiája is végtelen nagynak adódik.

A mezőt azonban soha nem egyetlen pontban, hanem egy térben véges tartományon mérjük. Ennek megfelelően alább megmutatjuk, hogy a szórásra kapott divergens kifejezést egy „levágási eljárással" kiküszöbölhetjük.

A térerősség várható értéke viszont továbbra is eltűnik akármilyen nagy is a fotonok száma. Ez viszont azt jelenti, hogy a klasszikus elektromos mezőről alkotott fogalomnak nem felelnek meg a számállapotok hiszen ha a laboratóriumban előállított fényhullámban a fotonok száma nagy, akkor a térerősségek is rendszerint nagyok.

A szórás divergenciájának kiküszöbölése

Tekintsük a fönti egyszerű eljárás helyett az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektornak az $\mathbf{r}$-hez közeli pontokban vett átlagát. Az átlagolást egy $f(|\mathbf{r}'|)$ gömbszimmetrikus simító függvénnyel végezzük, amely csak egy r_0 sugarú tartományon belül különbözik lényegesen 0-tól, azon kívül exponenciálisan nullához tart:

$$\bar{\mathbf{E}} = \int d^3\mathbf{r}\,' f(|\mathbf{r}'|)\mathbf{E}(\mathbf{r}+\mathbf{r}').$$

Előírjuk még hogy $f(r')$ legyen normált $\int d^3\mathbf{r}\,' f(r') = 1$. Ekkor

$$\bar{\mathbf{E}} = i\sum_i \mathcal{E}_{\omega_i}\boldsymbol{\epsilon}_i g(\mathbf{k}_i)(a_i e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}} - {a_i}^\dagger e^{-i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}),$$

ahol $g(\mathbf{k})$ az $f(\mathbf{r}')$ Fourier transzformáltja:

$$g(k) = \int d^3\mathbf{r}\,' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}\,'} f(r').$$

Látható, hogy $g(0) = 1$, és hogy $g(\mathbf{k})$ csak $|\mathbf{k}|$-tól függ, és nullához tart, ha $|\mathbf{k}| \gg 1/r_0$. Ez azt jelenti, hogy csak azok a módusok adnak hozzájárulást a szóráshoz, amelyek hullámvektorainak hossza kisebb mint $1/r_0$. Azt szokás mondani, hogy egy levágást vezettünk be a $\mathbf{k}$ térben. Ekkor a szórásra a következő véges érték adódik:

$$\Delta\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})^2 = \frac{\hbar c}{2\varepsilon_0\pi^2}\int_0^\infty k^3 g^2(|\mathbf{k}|)\,dk.$$

A mező kváziklasszikus állapotai

A számállapotok helyett olyan kvantumállapotokat keresünk, amelyek leginkább megfelelnek egy klasszikus elektromágneses hullámról alkotott képnek. A klasszikus mezőt töltésektől mentes térben az α_i normál változókkal adtuk meg. Ha az α_i-ket ismerjük, ismert a mező energiája, impulzusa, térerőssége stb. mint az $\{\alpha_i\}$ halmaz függvénye:

$$H^{kl}_{\text{trans}} = \sum_i \hbar\omega_i \alpha_i^* \alpha_i = H^{kl}_{\text{trans}}(\{\alpha_i\}),$$

$$\mathbf{P}^{kl}_{\text{trans}} = \sum_i \hbar \mathbf{k}_i \alpha_i^* \alpha_i,$$

$$\mathbf{E}^{kl}_{\perp} = i \sum_i E_{\omega_i} \boldsymbol{\epsilon}_i (\alpha_i e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}} - \alpha_i^* e^{-i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}).$$

Kíséreljük meg megtalálni azt a $|\{\alpha_i\}\rangle$-vel jelölendő kvantumállapotot, amely a lehető legjobban visszaadja a klasszikus állapot, $\{\alpha_i\}$ tulajdonságait, olyan módon, hogy minden mennyiség: H, $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{B}$, stb operátorának várható értéke az $|\{\alpha_i\}\rangle$ állapotban éppen a megfelelő klasszikus mennyiség. Azaz olyan állapotokat keresünk, amelyre

$$\langle\{\alpha_i\}|H_{\text{trans}}|\{\alpha_i\}\rangle = H^{kl}_{\text{trans}}(\{\alpha_i\}).$$

itt a vákuum energiáját elhagyjuk, mert minden energiát ahhoz viszonyítunk.

$$\langle\{\alpha_i\}|\mathbf{P}_{\text{trans}}|\{\alpha_i\}\rangle = \mathbf{P}^{kl},$$

$$\langle\{\alpha_i\}|\mathbf{E}_\perp|\{\alpha_i\}\rangle = \mathbf{E}^{kl}_\perp.$$

A várható értékek a klasszikus értékeket adják

A H_{trans} illetve $\mathbf{E}_\perp$ kifejezését az $a_i^\dagger$ és a_i léptető operátorokkal megadva ez a:

$$\langle\{\alpha_i\}|a_i|\{\alpha_i\}\rangle = \alpha_i,$$

$$\langle\{\alpha_i\}|a_i^\dagger a_i|\{\alpha_i\}\rangle = \alpha_i^*\alpha_i$$

összefüggéseket írja elő minden i-re. Egy módus esetén ez azt jelenti, hogy a módus olyan $|\alpha\rangle$ állapotban van, amelyre:

$$\langle\alpha|a|\alpha\rangle = \alpha,$$

$$\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = \alpha^*\alpha.$$

Legyen $b = a - \alpha\mathbb{1}$, ahol $\mathbb{1}$ az egységoperátor. A b operátor várható értéke az $|\alpha\rangle$ állapotban 0:

$$\langle\alpha|b|\alpha\rangle = \langle\alpha|a-\alpha|\alpha\rangle = 0$$

Vizsgáljuk most a $b^\dagger b$ operátor várható értékét:

$$\langle\alpha|b^\dagger b|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a - a^\dagger\alpha - a\alpha^* + \alpha^*\alpha|\alpha\rangle = \underbrace{\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle}_{\alpha^*\alpha} - \alpha\underbrace{\langle\alpha|a^\dagger|\alpha\rangle}_{\alpha^*} - \alpha^*\underbrace{\langle\alpha|a|\alpha\rangle}_{\alpha} + \alpha^*\alpha = 0.$$

Mivel :

$$\langle\alpha|b^\dagger b|\alpha\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad b|\alpha\rangle = 0,$$

ezért a keresett $|\alpha\rangle$ állapotokra:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

A koherens állapot az eltüntető operátor sajátállapota

A módus azon $|\alpha\rangle$ állapota, amelyre

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle,$$

azaz amely az eltüntető operátor sajátállapota, teljesíti az adott módus esetén a fent kirótt kritériumot. Itt a ket előtt álló α egy komplex szám, hiszen a nem önadjungált, és magát a sajátállapotot is ezzel a komplex számmal szokás jelölni. (Vigyázat, ha az α véletlenül pozitív egész, azért $|\alpha\rangle$ nem azonos egy számállapottal, ez a jelölésrendszer inkonzisztenciája) Egyszerűen belátható, hogy általában pedig az

$$|\{\alpha_i\}\rangle = |\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle \dots$$

állapot teljesíti feltételünket, ahol $a_i|\alpha_i\rangle = \alpha_i|\alpha_i\rangle$. $|\alpha\rangle$ vagy $|\{\alpha_i\}\rangle$ neve kváziklasszikus, másnéven koherens állapot. Ebben az állapotban H, $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ várható értékei megegyeznek a megfelelő klasszikus kifejezésekkel.

Vegyük észre, hogy speciális esetként a vákuum is koherens állapot, ekkor $\alpha = 0$. Ez az egyetlen kivétel a fönti zárójeles megjegyzés alól.

A koherens állapotok kifejtése a számállapotokon

Vizsgáljuk most meg, hogy tényleg léteznek-e ilyen állapotok. Mivel a számállapotok bázist alkotnak a módushoz tartozó Hilbert téren, ezért a fönt definiált koherens állapotoknak kifejthetőknek kell lennie a számállapotok szerint. Ismét csak egyetlen módusra korlátozva számításainkat:

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle.$$

Keressük meg a $c_n = \langle\alpha|n\rangle$ kifejtési együtthatókat! Ehhez az $|n\rangle$ számállapotokat az $a^\dagger$ n-edik hatványával előállítjuk a vákuumból, majd kihasználjuk, hogy $a^\dagger$ adjungáltja a:

$$\langle n|\alpha\rangle = \langle\alpha|n\rangle^* = \langle\alpha|\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle^* = \langle 0|\frac{a^n}{\sqrt{n!}}|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle,$$

azaz:

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle.$$

Eszerint:

$$|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle|n\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.$$

A koherens állapotok normálása

$\langle 0|\alpha\rangle$-t a normálásból határozhatjuk meg. Legyen $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$. Akkor:

$$1 = \langle\alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{m;n} \frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{nm}} = \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |\langle 0|\alpha\rangle|^2 = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2}.$$

Ebből $\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$ ahol a fázistényezőt önkényesen 1-nek választottuk.

A keresett kifejtés tehát:

$$\boxed{|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.}$$

Ezek szerint $|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, ahol

$$c_n = \langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}.$$

A fotonszám Poisson eloszlást követ

A

$$|c_n|^2 = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \tag{4.1}$$

számok egy $|\alpha|^2$ paraméterű Poisson eloszlásnak felelnek meg. A kvantummechanika szokásos interpretációja szerint $|c_n|^2$ annak a valószínűségét adja, hogy az adott módusban, annak $|\alpha\rangle$ állapota esetén egy fotonszámláló berendezés n darab fotont mér, hiszen az $|n\rangle$ állapotok a fotonszám operátor sajátállapotai. Láthatólag $\sum_n |c_n|^2 = 1$. Szokatlan hogy az $|\alpha\rangle$ állapotok számossága a kontinuuméval megegyező, hiszen minden α komplex számhoz tartozik egy koherens állapot.

Vizsgáljuk meg mennyi a fotonszám $\langle\hat{n}\rangle_\alpha$ várható értéke az $|\alpha\rangle$ koherens állapotban:

$$\langle\hat{n}\rangle_\alpha = \langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \tag{4.2}$$

Ugyanez a valószínűségszámítás szokásos módszerével kissé hosszadalmasabb:

$$\langle\hat{n}\rangle_\alpha = \sum_n n|\langle n|\alpha\rangle|^2 = \sum_n n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}e^{-|\alpha|^2}.$$

Használjuk a $\lambda = |\alpha|^2$ jelölést. Ekkor az utóbbi összeget átírhatjuk a következő módon:

$$e^{-\lambda}\sum_n n\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_n\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda} = \lambda = |\alpha|^2.$$

Azaz a fotonszám várható értéke az előző (4.2) számítással összhangban $\langle\hat{n}\rangle_\alpha = |\alpha|^2$.

A fotonszám szórása

A fotontszám szórását az $|\alpha\rangle$ koherens állapotban a kvantummechanika szerint az

$$(\Delta\hat{n})^2_\alpha = \langle\hat{n}^2\rangle_\alpha - \langle\hat{n}\rangle^2_\alpha \tag{4.3}$$

szórásnégyzet négyzetgyöke adja. Az $\hat{n} = a^\dagger a$ segítségével:

$$(\Delta\hat{n})^2_\alpha = \langle\alpha|(a^\dagger a)^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle^2 = \langle\alpha|a^\dagger(a^\dagger a + 1)a|\alpha\rangle - |\alpha|^4 = |\alpha|^2.$$

Vagyis koherens állapotban szórás éppen megegyezik a várható értékkel:

$$(\Delta\hat{n})^2_\alpha = |\alpha|^2 = \langle\hat{n}\rangle_\alpha. \tag{4.4}$$

Ugyanez a szokásos valószínűségszámítási technikával, az $a^\dagger a$ nélkül is megkapható.

4.1. Feladat: Határozzuk meg közvetlenül a $\langle\hat{n}^2\rangle_\alpha = \sum_n n^2|\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-\lambda}\sum_n n^2\frac{\lambda^n}{n!}$ összeget és mutassuk meg, hogy ebből is a fönti eredmény adódik a szórásra.

A szub- és szuperpoisson eloszlásról

A

$$\frac{(\Delta\hat{n})^2}{\langle\hat{n}\rangle} = 1$$

kapcsolat a szórás és a várható érték között a Poisson-eloszlásra jellemző. Ezért ha valamilyen egyéb (nem koherens) állapotban:

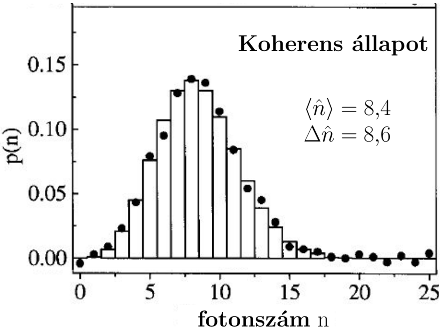
$$\frac{(\Delta\hat{n})^2}{\langle\hat{n}\rangle} < 1$$

akkor szub-Poisson állapotról beszélünk. Például ilyen az $|n\rangle$ számállapot, amelyre $\langle\hat{n}\rangle_n = n$ és $\Delta\hat{n} = 0$, lévén ez az $\hat{n}$ operátor sajátállapota. Fordítva, ha

$$\frac{(\Delta\hat{n})^2}{\langle\hat{n}\rangle} > 1$$

akkor szuper-Poisson állapotú a módus. Látni fogjuk, hogy pl. ilyen tulajdonságú egy a környezetével termikus egyensúlyban álló módus állapota.

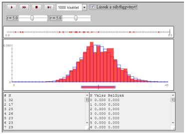
Példa: koherens állapot fotonszám eloszlása



4.1. ábra: A fotoneloszlás mérési eredménye egy jó közelítéssel koherens állapotú módusban. $|\alpha| \approx 2{,}9$.

Poisson-folyamat

Animáció:



Valószínűségelméleti szempontból tanulhatunk a Poisson-eloszlás és a Poisson-folyamat kapcsolatáról ezen magyarra lefordított interaktív oktató animáció segítségével.

http://nagysandor.eu/AsimovTeka/PoissonProcess/index.html

Belső szorzat

Tekintsük két koherens állapot belső szorzatát:

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \sum_n e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sum_m e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \frac{\beta^{*m}}{\sqrt{m!}} \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{mn}} =$$

$$= \sum_n \frac{(\alpha\beta^*)^n}{\sqrt{(n!)^2}} e^{\frac{-|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}} = e^{\alpha\beta^*} e^{\frac{-|\alpha|^2-|\beta|^2}{2}}.$$

Tehát

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = e^{\beta\alpha^*+\alpha\beta^*-|\alpha|^2-|\beta|^2} = e^{-|\alpha-\beta|^2}.$$

Látható, hogy a koherens állapotok nem ortogonálisak, de ha a két komplex szám, az α és β a komplex síkon elég messze esik egymástól, akkor a belső szorzat jó közelítéssel 0.

Túlteljesség I.

Most megmutatjuk, hogy az $|\alpha\rangle$ állapotok túlteljes (overcomplete) rendszert alkotnak. Ez azt jelenti, hogy bármely állapot kifejthető egy az $|\alpha\rangle$ állapotok szerinti „folytonos összegzéssel" , azaz integrálással (teljesség), de minthogy az $|\alpha\rangle$-k számossága nagyobb mint az egész számoké, (ezért is nem lehetnek ortogonálisak) egy túlságosan teljes rendszert alkotnak.

Az, hogy például az $|n\rangle$ állapotok rendszere teljes, azt jelenti, hogy tetszőleges $|\varphi\rangle$ állapotra vannak olyan c_n együtthatók, hogy $|\varphi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$. Ebből $\langle m|$ -el való szorzással $\langle m|\varphi\rangle = c_m$, és

$$|\varphi\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\varphi| \quad \text{azaz} \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1},$$

ahol $\mathbb{1}$ az egységoperátor. A teljesség egy másik megfogalmazása tehát az, hogy a megfelelő egydimenziós projektorok összege a teljes térre vetítő operátor, azaz az egységoperátor. Az $|\alpha\rangle$ állapotok folytonos halmazára a teljesség analóg módon azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{\pi}\int\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d(\mathrm{Re}\,\alpha)\, d(\mathrm{Im}\,\alpha) = \mathbb{1}.$$

Ezt az összefüggést olyan módon látjuk be, hogy visszavezetjük a számállapotok teljességére, és a fönti komplex síkra történő integrálban az $|\alpha\rangle$ állapotokat kifejtjük számállapotokon:

$$\frac{1}{\pi}\int\int \sum e^{-|\alpha|^2} \sum_{m,n} \frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle\langle m|\, d(\mathrm{Re}\,\alpha)\, d(\mathrm{Im}\,\alpha).$$

Túlteljesség II.

Áttérve az $|\alpha| = \varrho$, $\alpha = \varrho e^{i\varphi}$ változókra az integrál így írható:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \varrho^{n+m} e^{-\varrho^2} \varrho \, d\varrho \sum_{n,m} e^{i(n-m)\varphi} |n\rangle\langle m| \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \, d\varphi.$$

Most az

$$\int e^{i(n-m)\varphi} \, d\varphi = 2\pi\delta_{nm},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho^{2n+1} \cdot 2\pi \, d\varrho = n!$$

összefüggéseket és a számállapotok teljességét használva, a koherens állapotok teljességét kifejező

$$\frac{1}{\pi} \int \int |\alpha\rangle\langle\alpha| \, d(\mathrm{Re}\, \alpha) \, d(\mathrm{Im}\, \alpha) = \mathbb{1}$$

összefüggést nyerjük.

Koherens állapotú módus szabad időfejlődése

Az $|\alpha\rangle$ állapotok az alapállapottól eltekintve nem sajátállapotai az oszcillátor Hamilton operátorának, ezért a triviálistól különböző módon függenek az időtől. Fejtsük ki a koherens állapotokat egy adott időpillanatban a számállapotok szerint:

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle.$$

Abból, hogy minden állapot az időfüggő Schrödinger egyenlet szerint fejlődik, következik, hogy

$$|\alpha\rangle_t = \sum_n c_n(0)|n\rangle e^{-i\omega n t}$$

$$|\alpha\rangle_0 := |\alpha_0\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

Kihasználva most a kifejtési együtthatók korábban nyert alakját írhatjuk, hogy

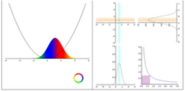
$$|\alpha\rangle_t = \sum_n e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle e^{-i\omega n t} = \sum_n e^{\frac{-|\alpha(t)|^2}{2}} \frac{(\alpha(t))^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,$$

ahol $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$. Ez viszont, azt jelenti, hogy

$$|\alpha\rangle_t = |\alpha_0\, e^{-i\omega t}\rangle.$$

Koherens állapotú módus szabad időfejlődése

Animáció:

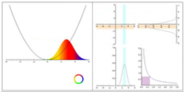


Az animáción a módus $|\alpha = 1\rangle$ koherens állpotát szemléltető hullámfüggvény időfejlődése látható. A függvény az elektromos térerősség nagyságának függvényében annak valószínűségi amplitúdóját ábrázolja. A függvény abszolút értékének alakja azonos az $|n = 0\rangle$ vákumállapothoz tartozó hullámfüggvény alakjával (lásd 2. Előadás végén), de ω körfrekvenciával rezeg az egyensúlyi helyzet körül. A szín a komplex valószínűségi amplitúdó fázisát kódolja.

`http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/videok/Harmonikus_oszcillator_koherens_allapota_1.flv`

Koherens állapotú módus szabad időfejlődése

Animáció:

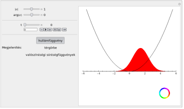


Az animáción a módus $|\alpha = 2\rangle$ koherens állpotát szemléltető hullámfüggvény időfejlődése látható. A függvény az elektromos térerősség nagyságának függvényében annak valószínűségi amplitúdóját ábrázolja. A függvény abszolút értékének alakja azonos az $|n = 0\rangle$ vákumállapothoz tartozó hullámfüggvény alakjával (lásd 2. Előadás végén), de ω körfrekvenciával rezeg az egyensúlyi helyzet körül. A szín a komplex valószínűségi amplitúdó fázisát kódolja.

`http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/videok/Harmonikus_oszcillator_koherens_allapota_2.flv`

Koherens állapotú módus szabad időfejlődése

Animáció:



Az interaktív animáció segítségével a módus koherens állapotait vizsgálhatjuk.

`http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/interactive/HarmonikusOszcillatorKoherensAllapot.nbp`

Az eltolási operátor definíciója

Vezessük be az úgynevezett eltolási (displacement) operátort az alábbi definícióval:

$$D(\alpha) := e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}.$$

A $D(\alpha)$ operátor unitér $D^\dagger(\alpha)D(\alpha) = D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = \mathbb{1}$, ami abból látható, hogy

$$D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha).$$

Az operátor neve arra utal, hogy hatására az $|\alpha = 0\rangle = |0\rangle$ vákuumállapot eltolódik az $|\alpha\rangle$ koherens állapotba:

$$D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle. \tag{4.5}$$

A fönti (4.5) egyenlőség igazolására tekintsük a Baker-Campbell-Hausdorff azonosságot, mely szerint, ha $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, akkor:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]},$$

amit egy későbbi dián bizonyítunk be. Legyen itt

$$A = \alpha a^\dagger \quad \text{és} \quad B = -\alpha^* a$$

$$[A,B] = -|\alpha|^2 \underbrace{[a^\dagger, a]}_{-1} = |\alpha|^2.$$

Így:

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}.$$

Az eltolási operátor tulajdonságai

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} (1 - \alpha^* a + \frac{(\alpha^* a)^2}{2!} + \dots)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger}|0\rangle =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} (1 + \alpha|1\rangle + \frac{\alpha^2}{2!}\sqrt{2!}|2\rangle + \dots) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.$$

Egy további érdekes tulajdonság, hogy a D operátor az a operátorokon is eltolásként hat a következő értelemben:

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha.$$

Ennek kimutatására használjuk a szintén a fejezet végén bizonyítandó (4.8) $e^A B e^{-A} = B + [A, B]$ operátorazonosságot az

$$A = \alpha^* a - \alpha a^\dagger \qquad \text{és} \quad B = a$$

operátorokkal. Így kapjuk, hogy

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + [\alpha^* a - \alpha a^\dagger, a] = a + \alpha.$$

Hasonlóan:

$$D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*.$$

Kvadratúra operátorok, Heisenberg egyenlőtlenség

Tekintsük ismét a dimenziótlan X és Y önadjungált kvadratúra operátorokat az

$$X := \frac{a + a^\dagger}{2} \qquad Y := \frac{a - a^\dagger}{2i}$$

definícióval. Amint azt az egyetlen szinuszos állóhullám módus kvantálásánál láttuk a X éppen az elektromos mező Y pedig a mágneses mező operátorával arányosak, illetve az ott használt Q illetve P operátorokkal a következő kapcsolatban állnak:

$$X = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}}\, Q, \quad \text{és} \quad Y = \sqrt{\frac{1}{2M\omega\hbar}}\, P. \tag{4.6}$$

X és Y fölcserélési relációja az $[a, a^\dagger] = 1$ kommutátorból következően:

$$[X, Y] = \frac{i}{2}. \tag{4.7}$$

A szórásaikra vonatkozóan a mező tetszőleges ψ állapotában így fönnáll a Heisenberg egyenlőtlenség:

$$(\Delta X)_\psi (\Delta Y)_\psi \geq \frac{1}{4}.$$

4.2. Feladat: Mutassuk meg a (4.6) és a (4.7) egyenlőséget az 1. fejezetben látottak alapján.

Szemléltetés a fázistéren

Legyen az $|\alpha\rangle$ koherens állapotot indexelő α komplex szám alakja:

$$\alpha = x + iy.$$

Ha kiszámítjuk az X és Y várható értékét egy $|\alpha\rangle$ állapotban az eredmény egyszerűen láthatóan:

$$\langle\alpha| X |\alpha\rangle = x, \qquad \langle\alpha| Y |\alpha\rangle = y$$

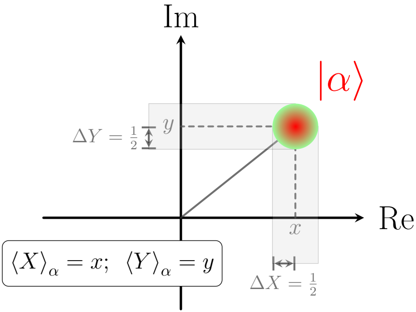
míg a szórásnégyzetükre α tól függetlenül a

$$(\Delta X)^2_\alpha = \langle\alpha| (X - x)^2 |\alpha\rangle = \frac{1}{4}, \quad (\Delta Y)^2_\alpha = \langle\alpha| (Y - y)^2 |\alpha\rangle = \frac{1}{4}$$

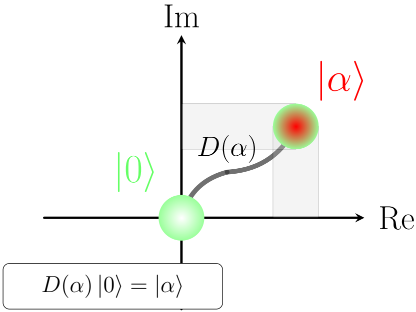
értékek adódnak.

A szórások értéke mindkét kvadratúrára egyformán $\frac{1}{2}$, és ebből is láthatóan a koherens állapotok minimalizálják a Heisenberg egyenlőtlenséget, amely ezeken az állapotokon egyenlőségbe megy át. Emiatt az $|\alpha\rangle$ állapotot szokás úgy szemléltetni a komplex α számok síkján, hogy pontként jelöljük meg az α síkon az x valós és y képzetes részű számot, majd köré egy $\frac{1}{2}$ sugarú kört rajzolunk. Ez arra utal, hogy ebben az állapotban mérve az X illetve az Y operátort, a mérési eredmények az x illetve az y körül szóródnak és a mért eredmények eloszlását az $1/2$ szórás jellemzi.

Szemléltetés a fázistéren



4.2. ábra: A koherens állapot szemléltetése a komplex számsíkon.



4.3. ábra: A $D(\alpha)$ eltolási (displacement) operátor hatásának szemléltetése a komplex számsíkon vákuum állapotra.

Feladatok

4.3. Feladat: A koherens állapot időfejlődésének $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$ képlete alapján mutassuk meg hogy a koherens állapot időfejlődése során az $|\alpha|$ modulusú komplex számot jelző vektor ω szögsebességgel forog az origó körül a komplex számsíkon, míg a szórást jellemző kör mérete változatlan és követi a kör középpontjának mozgását.

Egy későbbi előadásban látni fogjuk, hogy ez az intuitív kép egzakttá tehető az állapothoz tartozó úgynevezett Wigner-függvény segítségével.

4.4. Feladat: Mutassuk meg, hogy egy kvantummechanikai oszcillátor koherens állapotának a koordinátareprezentációs alakja az $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_0 + i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}p_0$ komplex számmal jellemzett állapotban $\varphi_\alpha(x) = Ce^{-m\omega(x-x_0)^2/2\hbar}e^{ip_0x}$, ahol C ugyanaz a normálási állandó, ami az $x_0 = 0$, $p_0 = 0$ alapállapothoz is tartozik.

1. azonosság

$$\boxed{e^{A}Be^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \ldots} \tag{4.8}$$

Bizonyítás:
Tekintsük az $F(t) = e^{At}Be^{-At}$ operátort, ahol t egy valós paraméter. Fejtsük $F(t)$-t MacLaurin sorba:

$$F(t) = \sum_k \left.\frac{d^kF(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \frac{t^k}{k!}; \qquad F(0) = B,$$

$$\frac{dF}{dt} = AF - FA = [A,F], \qquad t=0: \qquad \left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=0} = [A,B],$$

$$\frac{d^2F}{dt^2} = A[A,F] - [A,F]A = [A,[A,F]], \qquad t=0: \qquad \left.\frac{d^2F}{dt^2}\right|_{t=0} = [A,[A,B]]$$

$$\ldots$$

Így

$$F(t) = B + [A,B]t + \frac{t^2}{2!}[A,[A,B]] + \ldots,$$

amiből $t=1$-re kapjuk a bizonyítandó összefüggést.

Speciális esetben, ha $[A,[A,B]] = 0$ akkor $\boxed{e^{A}Be^{-A} = B + [A,B]}$.

2. A Baker-Campbell-Hausdorff azonosság:

Ha

$$[A,[A,B]] = [B,[B,A]] = 0,$$

akkor

$$\boxed{e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} = e^B e^A e^{-\frac{1}{2}[B,A]}.}$$

Bizonyítás: Tekintsük a $G(t) = e^{At}e^{Bt}$ függvényt, és deriváljuk t szerint.

$$\frac{dG}{dt} = AG + GB = AG + e^{At}e^{Bt}B = AG + e^{At}Be^{-At}e^{At}e^{Bt} =$$

$$= AG + e^{At}Be^{-At}G = (A + B + [A,B]t)G.$$

Ezt integrálva:

$$G(t) = e^{(A+B)t+\frac{1}{2}t^2[A,B]}G(0).$$

Figyelembe véve, hogy $G(0) = \mathbb{1}$, a $t = 1$ helyen véve a fenti egyenlőséget kapjuk a bizonyítandó képletet:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{4.9}$$

Ellenőrző kérdések

1. Mennyi a mező-operátorok várható értéke a fotonszám állapotokban?
2. Hogyan regularizálhatjuk a mező-operátorok szórását a számállapotokban?
3. Milyen előírások vezetnek a koherens állapot fogalmához?
4. Hogyan fejthetők ki a koherens állapotok a számállapotok bázisán?
5. Milyen eloszlást követ a fotonszám mérése koherens állapotban?
6. Mennyi a fotonszám várható értéke és szórása koherens állapotban?
7. Ortogonálisak-e a különböző koherens állapotok?
8. Mit jelent a koherens állapotok túlteljessége?
9. Hogyan fejlődnek időben a koherens állapotok szabad térben?
10. Hogyan definiáljuk az eltolási operátort?
11. Mit jelent a fázistér egy optikai módus esetén?
12. Hogyan szemléltetünk egy koherens állapotot a fázistéren?