Kvantumelektrodinamika és Kvantumoptika

3. ELŐADÁS
A sokmódusú mező és a töltésrendszer dinamikájának együttes kvantálása

Benedict Mihály

SZTE TTIK Elméleti Fizikai Tanszék, Szeged, 2015

„Ágazati felkészítés a hazai ELI projekttel összefüggő képzési és K+F feladatokra ”

TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0005 projekt

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Strukturális és Beruházási Alapok

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Tartalom

Bevezetés

A mező kvantumos tulajdonságainak matematikai megfogalmazása többféle módon is történhet. Itt a hagyományos utat követjük: a mező térbeli változását fölbontjuk normál módusokra, és az egyes módusokat mint harmonikus oszcillátorokat kvantáljuk a kvantummechanikából megismert módon. Lehetséges másfajta eljárás is, erre nézve lásd [1]

C. Cohen-Tannoudji, J. DuPont-Roc, G. Grynberg,
Photons and Atoms Vol 1. Wiley N.Y. 1989.

Tekintsük először azt az esetet, amikor az elektromágneses mezőt jellemző **E** elektromos és **B** mágneses térerősségekre olyan határföltételt írunk elő, hogy ezek a végtelenben elegendően gyorsan eltűnjenek. Ebben az esetben a Maxwell–Lorentz egyenletekben szereplő valamennyi mennyiségnek, a térerősségeknek és a töltéseknek illetve áramoknak továbbá az elektrodinamikában nagyon fontos szerepet játszó potenciáloknak létezik a térbeli Fourier- transzformáltja.

Fourier- transzformáció

A megfelelő reciprok tér változóját a szokásos módon $\mathbf{k}$-val jelöljük, míg ezek függvényeit a írott betűkkel, a Fourier- transzformációs hozzárendelést pedig egy kétvégű nyíllal fogjuk jelölni:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{r}\ \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\ e^{-i\mathbf{kr}},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\ \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k},t)\ e^{i\mathbf{kr}}.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{E} & \leftrightarrow & \boldsymbol{\mathcal{E}} & \qquad\qquad & \mathbf{A} & \leftrightarrow & \boldsymbol{\mathcal{A}}, \\ \mathbf{B} & \leftrightarrow & \boldsymbol{\mathcal{B}} & & U & \leftrightarrow & \mathcal{U}, \\ \varrho & \leftrightarrow & \rho & & \mathbf{J} & \leftrightarrow & \mathbf{j}. \end{array}$$

Az elektrodinamikában előforduló mennyiségek valós függvények, ezért

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r},t),$$

stb., amiből következik, hogy

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{k},t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}^*(-\mathbf{k},t). \tag{3.1}$$

Konvolúciós tétel

Másképpen $\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k},t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}(-\mathbf{k},t)$, ugyanis:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^* = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k},t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \boldsymbol{\mathcal{E}}^*(-\mathbf{k},t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

A továbbiakban gyakran használjuk a Fourier- transzformáltakra vonatkozó Plancherel – Parseval tételt, mely szerint:

$$\int d^3\mathbf{r} F^*(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{k} \mathcal{F}^*(\mathbf{k}) \mathcal{G}(\mathbf{k}). \tag{3.2}$$

Érvényes továbbá az úgynevezett konvolúciós tétel:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{r}' \; F(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{F}(\mathbf{k})\mathcal{G}(\mathbf{k}), \tag{3.3}$$

azaz

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathcal{F}(\mathbf{k})\mathcal{G}(\mathbf{k}).$$

Maxwell egyenletek reciprok térben

Egyszerű integrálással vagy táblázatok segítségével meggyőződhetünk arról, hogy

$$\frac{1}{4\pi r} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{k^2},$$

$$\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{-i\mathbf{k}}{k^2},$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\alpha}.$$

A föntiek alapján a Maxwell–Lorentz egyenleteket reciprok térben a következő alakba írhatjuk:

$$i\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad i\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0, \tag{3.4}$$

$$i\ \mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}, \qquad \mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{1}{c^2}\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j}. \tag{3.5}$$

Maxwell egyenletek reciprok térben

A kontinuitási egyenlet:

$$i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}+\dot{\rho}=0.$$

A potenciálok és a térerősségek kapcsolata pedig:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}=i\,\mathbf{k}\times\boldsymbol{\mathcal{A}},\qquad\qquad \boldsymbol{\mathcal{E}}=-\dot{\boldsymbol{\mathcal{A}}}-i\,\mathbf{k}\mathcal{U}.$$

ahol $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ és $\mathcal{U}$ a vektor- illetve a skalárpotenciál Fourier-transzformáltját jelenti.

A reciprok térben fölírt összefüggések az $\mathbf{r}$ térben tekintett egyenletekkel szemben közönséges, csak időderiváltakat tartalmazó differenciálegyenletek, más szóval az elektrodinamika a $\mathbf{k}$ térben lokális.

Longitudinális és transzverzális komponensek reciprok térben

Egy $\mathbf{V}_{\|}(\mathbf{r})$ vektormezőt longitudinálisnak nevezünk, ha

$$\nabla \times \mathbf{V}_{\|}(\mathbf{r}) = 0,$$

azaz reciprok térben

$$i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{V}}_{\|}(\mathbf{k}) = 0.$$

Egy $\mathbf{V}_{\perp}(\mathbf{r})$ vektormező pedig transzverzális, ha

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_{\perp}(\mathbf{r}) = 0,$$

azaz

$$i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}}_{\perp}(\mathbf{k}) = 0.$$

A feltételeknek minden $\mathbf{r}$ illetve $\mathbf{k}$ helyen érvényesnek kell lennie. Így a reciprok térben bármely $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{k})$ vektormező természetes és egyszerű módon fölbontható longitudinális és transzverzális komponensekre.

Longitudinális és transzverzális komponensek reciprok térben

A reciprok térben bármely $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{k})$ vektormező természetes és egyszerű módon fölbontható longitudinális és transzverzális komponensre. Bevezetve a

$$\boldsymbol{\kappa} := \frac{\mathbf{k}}{k}$$

egységvektort,

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mathcal{V}}_{\parallel}(\mathbf{k}) + \boldsymbol{\mathcal{V}}_{\perp}(\mathbf{k}), \qquad \text{ahol} \qquad \boldsymbol{\mathcal{V}}_{\parallel}(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}})$$

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_{\perp}(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{k}) - \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}}) = -\boldsymbol{\kappa} \times (\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\mathcal{V}}).$$

$\mathbf{V}_{\parallel}(\mathbf{r})$ és $\mathbf{V}_{\perp}(\mathbf{r})$ ezekből Fourier- transzformációval kaphatók meg.
A (3.4) „divergenciás” Maxwell egyenletek szerint

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\perp}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\parallel} \equiv 0,$$

$$i\mathbf{k}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\parallel} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\perp}) = i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\parallel} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho,$$

$$\text{amiből} \qquad \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\parallel} = -\frac{i}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{k})\frac{\mathbf{k}}{k^2}. \tag{3.6}$$

A longitudinális térerősség

Mivel az itt szereplő Fourier- transzformáltakra fennáll, hogy

$$\frac{-i}{\varepsilon_0}\frac{\mathbf{k}}{k^2} \quad \leftrightarrow \quad \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \qquad \rho(\mathbf{k}) \quad \leftrightarrow \quad \varrho(\mathbf{r}),$$

ezért a (3.3) konvolúciós tétel szerint:

$$\mathbf{E}_{\|}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{r}'\varrho(\mathbf{r}',t)\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{3.7}$$

Pontszerű töltéseket föltételezve a töltéssűrűség és az áramsűrűség kifejezése:

$$\varrho(\mathbf{r}',t) = \sum_\alpha q_\alpha \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_\alpha(t)), \qquad \mathbf{J}(\mathbf{r}',t) = \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_\alpha(t)),$$

ahol az α a pontszerűnek feltételezett töltéseket indexeli. Így (3.7) alakja

$$\mathbf{E}_{\|}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_\alpha q_\alpha \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t)|^3}. \tag{3.8}$$

A longitudinális elektromos mező egy t időpillanatban olyan, mintha a $\varrho(\mathbf{r},t)$ töltéseloszlás sztatikus lenne, mert az $\mathbf{E}_{\|}$ ennek instantán értékétől függ, azaz nincs késleltetve. Ez azonban nem jelenti azt, hogy létezik a fénysebességnél gyorsabb jel, mert fizikai jelentése csak az $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\|} + \mathbf{E}_{\perp}$ teljes térerősségnek van, amelyről viszont kimutatható hogy retardált.

A transzverzális térerősség

Levezetésünkből látható, hogy $\mathbf{E}_{\|}(\mathbf{r},t)$ fenti kifejezése független a mértéktől (bár néhány könyvben a Coulomb-mérték segítségével vezetik be), hiszen a potenciálokat nem is használtuk.

Az $\mathbf{E}$ és a potenciálok kapcsolatára érvényes:

$$\mathbf{E}_{\perp} = -\dot{\mathbf{A}}_{\perp}, \qquad \mathbf{E}_{\|} = -\dot{\mathbf{A}}_{\|} - \nabla U,$$

mivel $\nabla \times \nabla U = 0$. Látható, hogy Coulomb mértékben, (ahol $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, azaz $\mathbf{A}_{\|} = 0$) $\mathbf{E}_{\|} = -\nabla U$, amiből következik, hogy

$$U(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{d^3\mathbf{r}'\,\varrho(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Ezért is nevezik a $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ föltételt Coulomb-mértéknek, mert ekkor a skaláris potenciál időben változó töltések esetén is a Coulomb törvénynek megfelelő alakú.

A föntiekből egyébként az is egyszerűen látható, hogy $\mathbf{A}_{\perp}$ mértékinvariáns, a mértéktranszformáció csak $\mathbf{A}_{\|}$-t változtatja.

A mező energiája

Az elektrodinamikából ismeretes, hogy a töltések és a mező teljes energiája:

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2(t) + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r}\, (\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2). \tag{3.9}$$

A Maxwell egyenletekből és a töltések mozgásegyenletével kimutatható, hogy H állandó, ha egy végtelenbe kiterjesztett felületen az $\mathbf{S} := \varepsilon_0 c^2(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ Poynting-vektor integrálja nulla. A (3.9) energiából a (3.2) Plancherel-tétel segítségével leválasztható az $\mathbf{E}_\parallel$-hoz tartozó rész:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2\, d^3\mathbf{r} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\boldsymbol{\mathcal{E}}_\parallel(\mathbf{k})|^2\, d^3\mathbf{k} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp(\mathbf{k})|^2\, d^3\mathbf{k},$$

mert $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\parallel \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp \equiv 0$.

Legyen

$$\boxed{H_{\mathrm{long}} := \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{k}\, |\boldsymbol{\mathcal{E}}_\parallel(k)|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E_\parallel^2\, d^3\mathbf{r}} \quad \text{és} \quad \boxed{H_{\mathrm{trans}} := \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_\perp^2 + c^2\mathbf{B}^2) d^3\mathbf{r}.}$$

A mező teljes energiája a longitudinális és transzverzális rész összege:

$$H = H_{\mathrm{long}} + H_{\mathrm{trans}}.$$

Transzverzális és Coulomb energia

Mivel az (3.6) Gauss törvény szerint $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\parallel}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{\varepsilon_0}\frac{\rho(\mathbf{k})\mathbf{k}}{k^2}$, a longitudinális energia

$$H_{\text{long}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\mathbf{k}\,|\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\parallel}(k)|^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{\rho^*(\mathbf{k})\rho(\mathbf{k})}{k^2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}\,'\,\frac{\varrho(\mathbf{r})\varrho(\mathbf{r}\,')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|}$$

így H_{long} a töltések Coulomb-féle elektrosztatikus energiája, melyet a továbbiakban V_{Coul}-bal jelölünk.

A teljes energia tehát

$$\begin{aligned} H =& H_{\text{trans}} + V_{\text{Coul}} + \sum_{\alpha}\frac{1}{2}m_\alpha\mathbf{v}_\alpha^2 = \\ =& \frac{\varepsilon_0}{2}\int(\mathbf{E}_\perp^2 + c^2\mathbf{B}^2)d^3\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int d^3\mathbf{r}\,d^3\mathbf{r}\,'\,\frac{\varrho(\mathbf{r})\varrho(\mathbf{r}\,')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|} + \sum_{\alpha}\frac{1}{2}m_\alpha\mathbf{v}_\alpha^2. \end{aligned}$$

A mező impulzusa

Az elektrodinamika szerint a töltések és a mező együttes impulzusa:

$$\mathbf{P} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + \varepsilon_0 \int \mathbf{E} \times \mathbf{B}\, d^3\mathbf{r},$$

amelyről kimutatható, hogy állandó, ha a Maxwell féle feszültségi tenzor felületi integrálja egy elegendően nagy felületen eltűnik. A mező impulzusa a következő két tag összegére bontható:

$$\mathbf{P}_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int \mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}\, d^3\mathbf{r} = \varepsilon_0 \int \boldsymbol{\mathcal{E}}^*_\perp(\mathbf{k}) \times \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k})\, d^3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{P}_{\text{long}} = \varepsilon_0 \int \mathbf{E}_\parallel \times \mathbf{B}\, d^3\mathbf{r} = \varepsilon_0 \int \boldsymbol{\mathcal{E}}^*_\parallel(\mathbf{k}) \times \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k})\, d^3\mathbf{k}.$$

$\boldsymbol{\mathcal{E}}_\parallel = -\frac{i\rho(\mathbf{k})\mathbf{k}}{k^2}$ és $\boldsymbol{\mathcal{B}} = i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{A}}$ kihasználásával:

$$\mathbf{P}_{\text{long}} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{k}\, \frac{i\rho^*}{\varepsilon_0} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \times (i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{A}}) = \int d^3\mathbf{k}\, \rho^*(\mathbf{k})(\boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}})) = \int d^3\mathbf{k}\, \rho^*(\mathbf{k}) \boldsymbol{\mathcal{A}}_\perp(\mathbf{k}).$$

Így $\mathbf{P}_{\text{long}} = \int d^3\mathbf{r}\, \varrho \mathbf{A}_\perp = \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\alpha)$.

$\mathbf{P}_{\text{long}}$ mértékfüggetlen, mert $\mathbf{A}_\perp$ is mértékfüggetlen.

A mező impulzusa és a Hamilton függvény

A teljes impulzus tehát:

$$\mathbf{P} = \sum_\alpha (m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha + q_\alpha \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\alpha)) + \mathbf{P}_{\text{trans}}.$$

Az egyes részecskékre

$$\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha + q_\alpha \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\alpha), \qquad \text{azaz} \quad \mathbf{P} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{P}_{\text{trans}}.$$

A teljes energia így a

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha} (\mathbf{p}_\alpha - q_\alpha A_\perp(\mathbf{r}_\alpha))^2 + V_{\text{Coul}} + H_{\text{trans}}$$

alakba is írható. Erről a H-ról kimutatható, hogy az a mező és a részecskék együttes rendszerének Hamilton függvénye Coulomb mértékben (amikor $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp$), azaz a belőle származó kanonikus egyenletek éppen a mező és a töltések mozgásegyenleteit adják.

A töltések és a mező állapothatározói

A korábbiak szerint a “rotációs" Maxwell egyenletek alakja a $\mathbf{k}$ térben

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = -i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp, \tag{3.10}$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp = ic^2\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{j}_\perp. \tag{3.11}$$

Az (3.10) összefüggést $\mathbf{k}$-val való vektori szorzással úgy is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = ik^2\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp. \tag{3.12}$$

Ezen elsőrendű differenciálegyenletek megoldását az egyes mennyiségek $t = 0$-ban vett értékei teljesen meghatározzák, ezért a a mező és a töltések állapotát t_0-ban az

$$\{\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp(\mathbf{k},\ t_0), \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, t_0),\ \mathbf{r}_\alpha(t_0),\ \dot{\mathbf{r}}_\alpha(t_0)\}$$

mennyiségek adják meg. Vegyük észre, hogy a mezőnek csak a transzverzális része állapothatározó, a longitudinális részt (csak $\mathbf{E}$-nek van) ugyanis a töltések helye az $\mathbf{E}_\parallel(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_\alpha q_\alpha \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t)|^3}$ összefüggéssel már egyértelműen meghatározza.

Normálkoordináták

A fönti (3.11) és (3.12) egyenleteket átírhatjuk a következő módon:

$$\boldsymbol{\kappa} \times \dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = ik\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp,$$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\perp = ic^2 k\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{j}_\perp.$$

Az első egyenletet c-vel szorozva az egyenletek különbsége és összege:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp \mp c\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) = \mp i\omega(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp \mp c\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{j}_\perp,$$

$$\text{itt} \qquad \omega := c|\mathbf{k}|$$

a $\mathbf{k}$-val jellemzett módus körfrekvenciája, csak $|\mathbf{k}|$-tól függ, így ω nem adja a módus egyértelmű jellemzését.

$$-\frac{i}{2}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp - c\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) =: \mathcal{N}(k)\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \tag{3.13}$$

definícióval bevezetjük a mező $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})$ normákoordinátáit, melyek az idő függvényei. $\mathcal{N}(k)$ egyelőre szabadon választott állandó, melyet később alkalmas módon határozunk meg. A térerősségek valós voltából (3.1) egyszerűen következik, hogy

$$\boldsymbol{\alpha}^*(\mathbf{k}) = \frac{i}{2\mathcal{N}(k)}(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_\perp(\mathbf{k}) - c\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}^*(\mathbf{k}) = \frac{i}{2\mathcal{N}(k)}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp(-\mathbf{k}) + c(-\boldsymbol{\kappa}) \times \boldsymbol{\mathcal{B}}(-\mathbf{k})),$$

$$\text{azaz} \qquad \mathcal{N}(k)\boldsymbol{\alpha}^*(-\mathbf{k}) = \frac{i}{2}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp(\mathbf{k}) + c\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{k})).$$

A normálkoordináták differenciálegyenlete

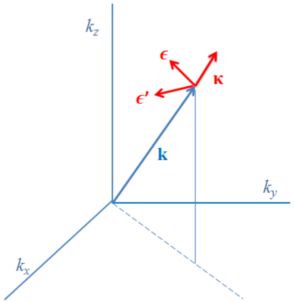
Így előbbi (3.13) definícióink alakja:

$$-\frac{i}{2\mathcal{N}(k)}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp - c\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k},t), \quad -\frac{i}{2\mathcal{N}(k)}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp + c\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}) = -\alpha^*(\mathbf{k},t).$$

Az $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp$ és $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ időderiváltjaira vonatkozó (3.11, 3.10) egyenletekből:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} + i\omega\boldsymbol{\alpha} = \frac{i}{2\varepsilon_0\mathcal{N}}\mathbf{j}_\perp(\mathbf{k}), \qquad \text{ahol} \qquad \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = 0,$$

tehát $\boldsymbol{\alpha}$ is transzverzális.



A $\mathbf{k}$ térben a $\mathbf{k}$-ra merőlegesen derékszögű bázis: $\boldsymbol{\epsilon}$ és $\boldsymbol{\epsilon}'$:

$$\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{k} = \boldsymbol{\epsilon}'\mathbf{k} = \boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}' = 0$$

Ábra: A $\mathbf{k} = k\,\boldsymbol{\kappa}$-ra merőleges vektorok fölbontása polarizációs komponensekre.

Polarizáció és normálás

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k},t) = \boldsymbol{\epsilon}\alpha_\epsilon + \boldsymbol{\epsilon}'\alpha_{\epsilon'} = \sum_{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\epsilon}\alpha_\epsilon(\mathbf{k},t), \quad \text{ahol} \quad \alpha_\epsilon = \boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\alpha}$$

Eszerint

$$\dot{\alpha}_\epsilon + i\omega\alpha_\epsilon = \frac{i}{2\varepsilon_0\mathcal{N}(k)}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{j}_\perp = \frac{i}{2\varepsilon_0\mathcal{N}(k)}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{j}.$$

Az $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})$ definíciójából kifejezhetjük $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp$-et és $\boldsymbol{\mathcal{B}}$-t

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp = i\mathcal{N}(k)(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_-^*), \qquad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{i\mathcal{N}(\mathbf{k})}{c}(\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{\alpha}_-^*),$$

ahol $\boldsymbol{\alpha}_- = \boldsymbol{\alpha}(-\mathbf{k},t)$. Válasszuk a normálási tényezőt a következőképpen:

$$\mathcal{N}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\hbar kc}{2\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}, \tag{3.14}$$

mert ez lesz összhangban a következőben tárgyalandó kvantumos formalizmussal.

Ekkor az energia:

$$H_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{k}\,\mathcal{N}^2(\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}_-\boldsymbol{\alpha}_-^*) = \int d^3\mathbf{k}\,\frac{\hbar\omega}{2}(\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}_-\boldsymbol{\alpha}_-^*).$$

Térerősség és energia normálkoordinátákkal

A második tagban egy $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$ helyettesítéssel a

$$H_{\mathrm{trans}} = \int d^3\mathbf{k}\, \frac{\hbar\omega}{2} (\boldsymbol{\alpha}^* \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{\alpha}^*)$$

alakba is írható. A két tagot így össze is lehetne vonni, azonban ezt itt, alább tárgyalandó okok miatt, még nem tesszük meg.

Az elektromos térerősség alakja ezzel a normálással:

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = i \int d^3\mathbf{k} \sum_\epsilon \mathcal{E}_\omega \boldsymbol{\epsilon} (\alpha_\epsilon e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \alpha_\epsilon^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}), \quad \text{ahol} \quad \mathcal{E}_\omega = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3}}.$$

Áttérés diszkrét módusokra

Mind elméleti, mind kísérleti szempontból fontos a mező normál módusokra való fölbontásának az a változata, amikor az elektromágneses teret egy üregben vizsgáljuk. Az egyszerűség kedvéért az üreget egy L oldalhosszúságú kockának tekintjük. Ebben az esetben a térerősséget Fourier integrál helyett Fourier sorba fejthetjük, vagyis a $\mathbf{k}$ vektorra vonatkozó integrálok helyett a

$$k_{x,y,z} = \frac{2\pi}{L} n_{x,y,z}$$

diszkrét indexekre való sorokat használunk. Az $\alpha_\epsilon(\mathbf{k}, t)$ változókat ekkor az $\alpha_{k\epsilon}(t)$ diszkrét mennyiségek helyettesítik, amelyeket még tömörebben α_i-vel jelölhetünk, ahol az i index a $(k_i\,\epsilon_i)$ indexek helyett áll. A kétfajta előállítás között a kapcsolat a következő:

$$\int d^3\,\mathbf{k} \sum_\epsilon f(\mathbf{k}, \epsilon) \longleftrightarrow \sum_i \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 f(k_i, \epsilon_i).$$

A térerősségek, az energia és az impulzus diszkrét módusok esetén

Az egyes fizikai mennyiségek alakja a diszkrét változat esetén a következő:

$$H_{\text{trans}} = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2}(\alpha_i^*\alpha_i + \alpha_i\alpha_i^*),$$

$$\mathbf{P}_{\text{trans}} = \sum_i \frac{\hbar\mathbf{k}_i}{2}(\alpha_i^*\alpha_i + \alpha_i\alpha_i^*),$$

$$\mathbf{A}_\perp = \sum_i A_{\omega_i}\boldsymbol{\epsilon}_i(\alpha_i e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}} + \alpha_i^* e^{-i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}),$$

$$\mathbf{E}_\perp = i\sum_i \mathcal{E}_{\omega_i}\boldsymbol{\epsilon}_i(\alpha_i e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}} - \alpha_i^* e^{-i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}), \tag{3.15}$$

$$\mathbf{B} = i\sum_i \mathcal{B}_{\omega_i}(\alpha_i\boldsymbol{\kappa}_i \times \boldsymbol{\epsilon}_i e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}} - \alpha_i^*\boldsymbol{\kappa}_i \times \boldsymbol{\epsilon}_i e^{-i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}), \tag{3.16}$$

ahol

$$\mathcal{E}_{\omega_i} = \left(\frac{\hbar\omega_i}{2\varepsilon_0 L^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathcal{B}_{\omega_i} = \frac{\mathcal{E}_{\omega_i}}{c}, \qquad A_{\omega_i} = \frac{\mathcal{E}_{\omega_i}}{\omega_i}.$$

A normálás jelentése

Az $\mathcal{N}(k)$ normálási tényező (3.14) szerinti választása így annak felel meg, hogy az i-edik módusban az elektromágneses energiasűrűség egy periódusra vett átlaga:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0(\mathcal{E}_{\omega_i}^2 + c^2\mathcal{B}_{\omega_i}^2)|\alpha_i|^2 = \frac{1}{L^3}\frac{\hbar\omega_i}{2}|\alpha_i|^2,$$

vagyis az L^3 térfogatban $|\alpha_i|^2 = 1$ amplitúdó esetén éppen $\frac{\hbar\omega_i}{2}$ energia van.

Az α_i-re vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\dot{\alpha_i} + i\omega_i\alpha_i = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0\hbar\omega_i}}\int\frac{1}{\sqrt{L^3}}\boldsymbol{\epsilon}_i\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_i}d^3\mathbf{r}.$$

Megjegyezzük még, hogy az α_i diszkrét változók dimenziótlanok, tehát dimenziójuk más, mint az $\alpha_\epsilon(\mathbf{k})$ folytonos változóké:

$$\alpha_i = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{3/2}\alpha_{\epsilon_i}(\mathbf{k}_i).$$

Kvantálás

A töltések és a mező együttesét úgy tekintjük mint pontszerű részecskékből és harmonikus oszcillátorokból álló kölcsönható rendszert. A kvantálás legegyszerűbb módja, hogy a részecskék $r_{\alpha i}$ hely- illetve $p_{\alpha i}$ impulzuskomponenseit a szokásos módon operátoroknak tekintjük, és ugyanezt tesszük az oszcillátorok α_i és α_i^* normál változói helyett bevezetett

$$\alpha_i \to a_i, \qquad \alpha_i^* \to a_i^\dagger \tag{3.17}$$

mennyiségekkel is, az alábbi fölcserélési relációkat írva elő rájuk:

$$[r_{\alpha i}, r_{\beta j}] = 0, \qquad [p_{\alpha i}, p_{\beta j}] = 0, \qquad [r_{\alpha i}, p_{\beta j}] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}, \tag{3.18}$$

$$[a_i, a_j] = 0, \qquad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \qquad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \tag{3.19}$$

Az eljárás megalapozható a mező és a töltések rendszerére alkalmazott egzakt kanonikus formalizmussal is, ahol a teljes Hamilton-függvény Coulomb-mérték esetén azonosnak adódik a föntebb már H-val jelölt teljes energiával. Az eljárást lerövidítve ezt most egyszerűen posztuláljuk: előírjuk, hogy a Hamilton függvény éppen a teljes energiára kapott kifejezés, a változóit a fönti kommutátoroknak eleget tevő operátoroknak tekintjük, így H maga is operátor lesz:

$$H := \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}(\mathbf{p}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}_\alpha))^2 + V_{\mathrm{Coul}} + H_{\mathrm{trans}}, \quad \text{ahol}$$

$$H_{\mathrm{trans}} = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2}(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger), \qquad V_{\mathrm{Coul}} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{q_\alpha q_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}.$$

A szabad tér stacionárius állapotai

Eljárásunkat az indokolja, hogy ha a H operátorral fölírjuk az $\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{p}_\alpha$ mennyiségekre vonatkozó kvantumdinamikai mozgásegyenleteket (Heisenberg képben), akkor a töltések mozgásegyenleteinek kvantumos változatát nyerjük, ha pedig az a_i illetve $a_i^\dagger$ operátorok időderiváltját számítjuk ki, akkor a mező dinamikáját leíró Mawell egyenletek kvantumos megfelelőit kapjuk a (3.15) és (3.16) egyenletekben megadott elektromos és mágneses téroperátrokra.

H_{trans} fönti kifejezése a tradicionális alak, amelyet az $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ fölcserélési reláció alapján átírhatunk:

$$H_{\text{trans}} = \sum_i \hbar\omega_i (a_i^\dagger a_i + 1/2).$$

Ezen pont kiemelése miatt nem vontuk össze korábban a klasszikusan megegyező $\alpha_i^* \alpha_i$ és $\alpha_i \alpha_i^*$ tagokat.

Most már vizsgálhatjuk a teljes mező, azaz az összes módus együttes állapotterét. A mező állapottere az egyes módusokhoz tartozó állapotterek tenzorszorzata:

$$\mathcal{H}_{\text{mező}} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots$$

Egy lehetséges ortonormált bázis minden $\mathcal{H}_i$-ben a számállapotok rendszere, amelyet az előző fejezetben alkalmazott eljárással minden módusra bevezethetünk. Így $\mathcal{H}_{\text{mező}}$ egy lehetséges bázisa a fotonszám bázis:

$$\{|n_1\rangle|n_2\rangle \dots |n_i\rangle \dots\} =: |n_1, n_2, \dots n_i, \dots\rangle.$$

A számállapotok bázist alkotnak

A mező vákuumállapota definíció szerint az a $|0\rangle$-val jelölt állapot, amelyben minden módusra $n_i = 0$, ekkor azt mondhatjuk, hogy a mezőben nincs foton. A fotonszám bázisvektorok a vákuumból az $a_i^\dagger$ operátorok ismételt alkalmazásával nyerhetők:

$$|n_1, n_2, \dots n_i \dots\rangle = \frac{(a_1{}^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \dots \frac{(a_i{}^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \dots |0\rangle.$$

Az $|n_1, \dots n_i \dots\rangle$ állapot, amely a teljes fotonszám operátor $N = \sum_i \hat{n}_i = \sum_i a_i{}^\dagger a_i$ sajátállapota $\sum_i n_i$ sajátértékkel, olyan állapot ahol az i-edik módusban n_i foton van.

A mező tetszőleges állapota ezen bázisvektorok lineáris kombinációja.

Ebben az állapotban a mező energiája pontosan $\sum_i \hbar\omega_i(n_i + 1/2)$, impulzusa $\sum_i \hbar\mathbf{k}_i(n_i + 1/2)$.

A mező egy általános állapota, ahol a fotonszám nincs föltétlenül meghatározva:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_i=0}^{\infty} \dots c_{n_1, n_2, \dots n_i, \dots} |n_1, n_2, \dots n_i, \dots\rangle.$$

Általános egyfotonos állapotok

Ha egyetlen módusban pl. az ℓ-edikben van egy foton, akkor annak alakja $|0,0,\dots 0, n_\ell = 1, 0, \dots\rangle$. Azonban világos, hogy tekinthetjük ilyen állapotok tetszőleges szuperpozícióját, amelynek alakja

$$|\mathbf{1}\rangle = \sum_\ell c_\ell |0,0,\dots 0, n_\ell = 1, 0, \dots\rangle = \sum_\ell c_\ell \, |1_\ell\rangle \,,$$

ahol $\sum\limits_\ell |c_\ell|^2 = 1$. Ezek az állapotok 1 sajátértékkel sajátállapotai az

$$\mathbf{N} = \sum_\ell a_\ell^+ a_\ell = \sum_\ell \hat{n}_\ell$$

operátornak, ezért ezeket általános egyfotonos állapotoknak nevezzük. Ezek nem sajátállapotai az egyes $\hat{n}_\ell$ operátoroknak, mivel $\hat{n}_\ell \, |\mathbf{1}\rangle = c_\ell |0,0,\dots 0, n_\ell = 1, 0, \dots\rangle$ azaz nem kapjuk vissza az eredeti $\sum\limits_\ell c_\ell \, |1_\ell\rangle$ állapot számszorosát, csak annak vetületét a ℓ-edik módusra. Különböző módusuk általában különböző frekvenciájúak, s így az összegben minden tag a saját ω_ℓ körfrekvenciájával változik időben, így ezek összege nem stacionárius.

Egy sokmódusú mező általános egyfotonos állapotának időfüggése tehát:

$$|\mathbf{1}(t)\rangle = \sum_\ell c_\ell e^{-i\omega_\ell t} |0,0,\dots 0, n_\ell = 1, 0, \dots\rangle.$$

Ellenőrző kérdések

1. Milyen matematikai eljárással vezetjük be a reciprok tér fogalmát?
2. Mit mond ki a Parseval-Plancherel tétel?
3. Két Fourier-transzformált szorzatának mi az inverz transzformáltja?
4. Mi a Coulomb-törvény alakja a reciprok térben?
5. Mi a Faraday-féle indukciós törvény alakja a reciprok térben?
6. Hogyan bontunk föl egy vektormezőt transzverzális és longitudinális részre?
7. Milyen tagokból tevődik össze a mező és a töltések együttes energiája?
8. Milyen adatok határozzák meg a mező és a töltések együttes állapotát?
9. Mik a mező normálkoordinátái és milyen mozgásegyenletnek tesznek eleget?
10. Hogyan térünk át diszkrét változókra?
11. A kvantálás után hogyan adhatók meg a szabad mező stacionárius állapotai?
12. Hogyan definiáljuk az általános egyfotonos állapotokat?