Kvantumelektrodinamika és Kvantumoptika

2. ELŐADÁS
Egymódusú mező, állóhullám kvantálása

Benedict Mihály

SZTE TTIK Elméleti Fizikai Tanszék, Szeged, 2015

„Ágazati felkészítés a hazai ELI projekttel összefüggő képzési és K+F feladatokra ”

TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0005 projekt

SZÉCHENYI 2020

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Strukturális és Beruházási Alapok

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Tartalom

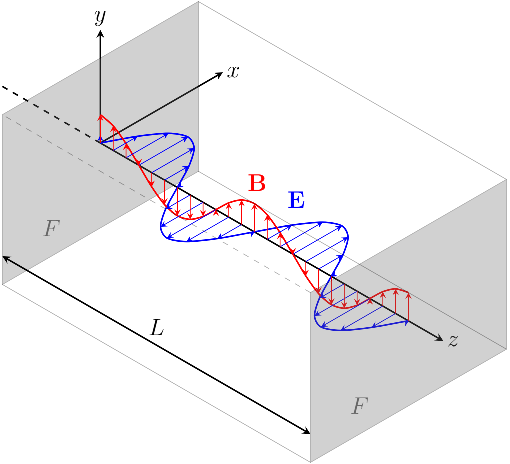
Állóhullám módus

Az elektromágneses mező (EM) egyetlen módusát tekintjük egy L hosszúságú F felületű dobozban, melynek térfogata $LF = V$. A klasszikus mező elektromos térerőssége:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}\, q(t) A \sin k_n z \tag{2.1}$$

ahol a $k_n = n\pi/L$, $n = 1, 2 \ldots$ biztosítja az $\mathbf{E}(L) = 0$ határföltétel teljesülését, míg $\mathbf{E}(0) = 0$ automatikus teljesül.
Ez egy transzverzális mező $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. $q(t)$ dimenziótlan, A térerősség dimenziójú.

Állóhullám módus



2.1. ábra: Az **E** és **B** mező az üregben.

A módus-oszcillátor egyenlete

A mágneses mező a Maxwell egyenletekből:

$$\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E} = -\hat{\mathbf{y}}\ q(t) A k \cos kz,$$

tehát sztatikus mezők nélkül:

$$\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{y}}\ A s(t) k \cos kz, \qquad \text{ahol} \qquad \dot{s}(t) = q.$$

a másik Maxwell egyenletből: $\dot{\mathbf{E}} = c^2 \nabla \times \mathbf{B}$

$$\hat{\mathbf{x}}\ \dot{q}(t) A \sin kz = -\hat{\mathbf{x}}\ c^2 s(t) A k^2 \sin kz,$$
$$\dot{q}(t) = -c^2 k^2 s(t) = -\omega^2 s(t),$$

így egy oszcillátor egyenletet kapunk:

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0, \tag{2.2}$$

melynek általános megoldása

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

A Lagrange- és Hamilton-függvény

A $\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$ egyenlet egy ω körfrekvenciájú és fiktív állandó M tömegű oszcillátor

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$$

Lagrange-függvényéből származtatható. Az ennek megfelelő klasszikus Hamilton-függvény:

$$H = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{M} + M\omega^2 q^2\right), \tag{2.3}$$

ahol a p hatás dimenziójú kanonikus impulzus:

$$p := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = M\dot{q} = -M\omega^2 s(t).$$

A mágneses mező:

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}\ Ap(t)\frac{k}{M\omega^2}\cos kz = \hat{\mathbf{y}}\ Ap(t)\frac{1}{M\omega c}\cos kz. \tag{2.4}$$

Azaz $\mathbf{E}$ a q kanonikus koordinátát, a $\mathbf{B}$ a kanonikus impulzust tartalmazza.

Az energiasűrűség és az energia

A módus energiája:

$$F\int_0^L\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\right)dz=F\frac{1}{2}A^2\left(q^2(t)\varepsilon_0\underbrace{\int_0^L\sin^2 kzdz}_{=L/2}+s^2(t)\frac{1}{\mu_0}\frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{\int_0^L\cos^2 kzdz}_{=L/2}\right)=$$

$$=\frac{FL}{2}A^2\frac{\varepsilon_0}{2}(q^2+\omega^2 s^2)=\frac{VA^2}{2}\frac{\varepsilon_0}{2}\left(q^2+\frac{p^2}{M^2\omega^2}\right),$$

ahol az M állandót úgy rögzítjük, hogy álljon fönn a $H=\left(p^2/M+M\omega^2q^2\right)/2$ egyenlőség:

$$\varepsilon_0 VA^2/2=M\omega^2. \tag{2.5}$$

Az oszcillátor kvantálása

A q és p kanonikus változókat ezek után egy $\mathcal{H}$ Hilbert téren értelmezett Q és P lineáris és önadjungált operátoroknak tekintjük és előírjuk a

$$[Q, P] = i\hbar$$

fölcserélési relációt. Itt Q dimenziómentes, míg P hatás dimenziójú, csakúgy mint a kommutátor. A $\hbar$, a 2π-vel osztott Planck állandó, és az értékét a tapasztalat rögzíti:

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\,.$$

Ezt először az üregsugárzás kísérletileg mért spektruma és az elméletileg levezetett Planck-törvény összehasonlításából számította ki Planck, később Millikan fotoelektromos kísérletei és az Einstein-féle fotoelektromos egyenlet összevetéséből ugyanezt az értéket kapták.

Amint az kiderült, éppen ez a matematikai lépés, vagyis a klasszikus kanonikus változók operátorokkal történő helyettesítése vezetett el az elektromágneses mező megfigyelt kvantumos tulajdonságainak a korrekt matematikai leírásához.

Minthogy Q és P most már operátorok, a Hamilton-függvényből kapható

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{P^2}{M} + M\omega^2 Q^2\right)$$

is operátornak tekintendő, ez a módus Hamilton-operátora.

Léptető operátorok és sajátérték-egyenlet

A szokásos módon bevezetjük az a és $a^\dagger$ lineáris és nem önadjungált operátorokat:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}Q + i\frac{P}{\sqrt{M\hbar\omega}}\right) = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}}\left(Q + i\frac{P}{M\omega}\right),$$
$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}}Q - i\frac{P}{\sqrt{M\hbar\omega}}\right) = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}}\left(Q - i\frac{P}{M\omega}\right).$$

Kommutátoruk:

$$\left[a, a^\dagger\right] = \frac{1}{2\hbar}\left([Q, -iP] + [iP, Q]\right) = 1. \tag{2.6}$$

A módus Hamilton operátora:

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2). \tag{2.7}$$

Amint az a harmonikus oszcillátor kvantummechanikájából jól ismert (a részletekről alább) az $a^\dagger a =: \hat{n}$ önadjungált operátor sajátértékei az $n = 0, 1, 2\ldots$ nemnegatív számok, ami azt jelenti, hogy a

$$H\left|\varphi_n\right\rangle = \varepsilon_n\left|\varphi_n\right\rangle$$

sajátértékegyenlet megoldásai a következők:

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2) \qquad n = 0, 1, 2\ldots\quad .$$

Térerősségek mint operátorok

Ha a q és p -vel kifejezett **E** és **B** (2.1), (2.4) térmennyiségekben végrehajtjuk a $q \to Q$, $p \to P$ operátorosítást, akkor az $\varepsilon_0 V A^2/2 = M\omega^2 M$ (2.5) definícióval és az $\frac{\varepsilon_0 V A^2}{2\omega^2} = M$ azonosítással, az elektromos és mágneses mezők is operátorok lesznek:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}\; Q(t) A \sin kz = \hat{\mathbf{x}}\; \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} A \sin kz = \hat{\mathbf{x}}\; (a + a^\dagger) \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \sin kz. \tag{2.8}$$

$$\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{y}}\; A S(t) k \cos kz = \hat{\mathbf{y}}\; A \frac{P}{M\omega^2} \frac{\omega}{c} \cos kz = \hat{\mathbf{y}}\; A \sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}} \frac{1}{M\omega^2} \frac{\omega}{c} i(a^\dagger - a) \cos kz =$$

$$= \hat{\mathbf{y}}\; A \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} \frac{1}{c} i(a^\dagger - a) \cos kz = \hat{\mathbf{y}}\; \frac{1}{c} i(a^\dagger - a) \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \cos kz.$$

E és **B** merőlegesek egymásra, de ezek a merőleges komponensek nem fölcserélhetők:

$$[E_x, B_y] = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \frac{1}{c} 2i \sin kz \cos kz = i \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V c} \sin 2kz. \tag{2.9}$$

Módus energiája

Bevezetjük az

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \quad \text{és} \quad \mathcal{B}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}\frac{1}{c} = \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar\omega}{V}}$$

mennyiségeket, amelyeket az egy fotonhoz tartozó térerősségeknek nevezünk (ezt a terminológiát még finomítjuk), s így

$$E_x = \mathcal{E}_0(a + a^\dagger)\sin kz, \qquad B_y = i\mathcal{B}_0(a^\dagger - a)\cos kz.$$

A módus az energiája a dobozbeli energiasűrűség térfogati integráljaként adódik. A $\sin^2$ és $\cos^2$ integrálja $L/2$ -t ad, amit F-el szorozva a térfogat felét $V/2$ kapjuk, így:

$$\begin{aligned} H =& \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathcal{E}_0^2 \frac{V}{2}(a + a^\dagger)^2 - \frac{1}{2\mu_0}\mathcal{B}_0^2 \frac{V}{2}(a^\dagger - a)^2 = \\ =& \frac{V}{4}\varepsilon_0 \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a) - \frac{V}{4\mu_0}\frac{\mu_0\hbar\omega}{V}(a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a) = \\ =& \frac{\hbar\omega}{4} 2(aa^\dagger + a^\dagger a) = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

A számállapot bázis

- A föntiek alapján tehát a mezőt jellemző fizikai mennyiségek operátorok, amelyek egy a lineáris harmonikus oszcillátor elméletében szerepet játszó térrel analóg és szükségképpen végtelen dimenziós Hilbert tér fölött vannak értelmezve.
- A mező ezen módusának egy állapota ennek a vektortérnek valamilyen eleme.
- A H önadjungált operátor sajátvektorai ebben az esetben az $|n\rangle := |\varphi_n\rangle$ úgynevezett számállapotok, amelyek páronként ortogonális és teljes rendszert alkotnak.
- A módus tetszőleges kvantumállapotai ezeknek az állapotoknak a szuperpozíciójaként adódnak
$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n| \psi\rangle. \tag{2.10}$$
- A fizikai mennyiségek mérésekor az aktuális állapottól függően a megfelelő operátor sajátértékeit kapjuk a kvantummechanikában előírt valószínűséggel.

Egy másik jelölés

Bár az irodalom egy részében a fönt taglalt konvenciókat és jelöléseket használják, hasznos lesz megismerkedni egy másik szokásos jelölésmóddal, amely legalább annyira elterjedt mint az, amit a föntiekben megismertünk. Az itt bevezetett a és $a^\dagger$ operátorok helyett vezessük be a szintén nem önadjungált $\tilde{a}$ és $\tilde{a}^\dagger$ operátort, amelyek definíciója

$$\tilde{a} = ia, \qquad \tilde{a}^\dagger = -ia^\dagger.$$

Láthatólag ezek fölcserélési relációi azonosak azzal amit az a -ra és $a^\dagger$ -ra megismertünk:

$$\left[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger\right] = \left[a, a^\dagger\right] = 1.$$

Az $\hat{n} = a^\dagger a$ operátor pedig szintúgy az

$$\hat{n} = a^\dagger a = \tilde{a}^\dagger \tilde{a}$$

alakba írható. Az elektromos és a mágneses térerősség alakja az új operátorokkal

$$E = i\mathcal{E}_0(\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger), \qquad B = \mathcal{B}_0(\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger).$$

A fotonszám operátora

Ha töltések nincsenek jelen, akkor a mező módusának stacionárius állapotai a

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + 1/2\right)$$

operátor sajátállapotai és ezeket az állapotokat töltések jelenléte esetén is használhatjuk bázisként egy tetszőleges állapot kifejtéséhez. Az elmélet szempontjából ezek alapvető fontosságúak.
Ezek megkeresése az $a^\dagger a = \hat{n}$ operátor sajátállapotainak meghatározásával ekvivalens. $\hat{n}$ önadjungált és pozitív operátor, tehát sajátértékei csak nemnegatív valós számok lehetnek.
Ezek meghatározása céljából szorozzuk az

$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1$$

fölcserélési relációt jobbról a-val, illetve balról $a^\dagger$-al. Átrendezés után:

$$\hat{n}a = a(\hat{n} - 1), \qquad \hat{n}a^\dagger = a^\dagger(\hat{n} + 1).$$

$$[\hat{n}, a] = -a, \qquad [\hat{n}, a^\dagger] = a^\dagger.$$

A számoperátor és a léptető operátorok

Teljes indukcióval belátható, hogy minden $m \geq 0$-ra

$$\hat{n}a^m = a^m(\hat{n} - m),$$
$$\hat{n}a^{\dagger m} = a^{\dagger m}(\hat{n} + m).$$

Vizsgáljuk ezután az $a^{\dagger m}a^m$ operátort. $\hat{n}$ definícióját és az előző formulát fölhasználva kapjuk, hogy

$$a^{\dagger m}a^m = a^{\dagger m-1}\hat{n}a^{m-1} = a^{\dagger m-1}a^{m-1}(\hat{n} - (m-1)).$$

Ezt az összefüggést ismételten alkalmazva a

$$a^{\dagger m}a^m = \hat{n}(\hat{n} - 1)(\hat{n} - 2)\ldots(\hat{n} - (m-1))$$

operátorazonossághoz jutunk. Ebből a képletből következik, hogy $\hat{n}$ spektrumának nem lehet folytonos része. Ha ugyanis lenne, akkor létezne olyan λ nem egész szám és olyan $|\varphi\rangle$ állapot, amelyre $\hat{n}|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$. Erre a $|\varphi\rangle$ állapotra az előző összefüggés szerint:

$$\langle\varphi|a^{\dagger m}a^m|\varphi\rangle = \lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - (m-1)).$$

A bal oldal minden $m \geq 1$-re nemnegatív, mert bármely, az adott módust jellemző $|\varphi\rangle$ állapotra $\langle\varphi|a^{\dagger m}a^m|\varphi\rangle = ||a^m\varphi|| \geq 0$. A jobb oldal viszont negatív lenne egy olyan (értelemszerűen egész) m-re, amelyre $\lambda + 1 < m < \lambda + 2$ teljesül. Ez az ellentmondás csak akkor nem lép föl, ha $\hat{n}$ sajátértékeire kikötjük, hogy csak nemnegatív egész számok lehetnek, ekkor u.i. mind a jobb mind a baloldal 0 lesz ha m egyenlő vagy nagyobb mint $\lambda + 1$ és ugyanakkor $a^m|\varphi\rangle = 0$.

A fotonszám sajátállapotok

Most posztuláljuk, hogy létezik legalább egy sajátvektor, amelyhez tartozó sajátérték (az előbbiek szerint szükségképpen) valamilyen nemnegatív egész: n. Ezt a sajátvektort jelöljük $|n\rangle$-el:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle.$$

Belátható, hogy $a^\dagger|n\rangle$ is sajátvektor $(n+1)$ sajátértékkel:

$$\hat{n}a^\dagger|n\rangle = a^\dagger a a^\dagger|n\rangle = a^\dagger(a^\dagger a + 1)|n\rangle = a^\dagger(n+1)|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle.$$

Hasonlóan:

$$\hat{n}a|n\rangle = (n-1)a|n\rangle, \tag{2.11}$$

tehát $a|n\rangle$ is sajátvektor $(n-1)$ sajátértékkel.
Ez utóbbi csak $n \geq 1$ esetén állhat fenn, mert N sajátértékei nemnegatívak, amiből az előző szerint az is látható, hogy ha $n = 0$, akkor $a|n\rangle$ a nulla vektor, mert másképpen a fenti összefüggés nem teljesülhet, azaz $a|0\rangle = 0$.

Megjegyzés: Itt, ahogyan az szokás, a tér nulla vektorát és a nulla számot nem különböztetjük meg, aminek az az oka, hogy tetszőleges $|\varphi\rangle$ vektorra $0|\varphi\rangle$ a nulla vektor.

A keltő és eltüntető operátor hatása a számállapotokon

Ilyen módon az $|n\rangle$ értelmezése szerint, amely az n sajátértékhez tartozó sajátvektor, következik, hogy

$$a^\dagger|n\rangle = c_+\,|n+1\rangle, \qquad a|n\rangle = c_-\,|n-1\rangle.$$

A sajátvektorokat normáltnak választva: $\langle n|n\rangle = \langle n+1|n+1\rangle = 1$ alapján:

$$|c_+|^2\langle n+1|n+1\rangle = \langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|a^\dagger a+1|n\rangle = n+1.$$

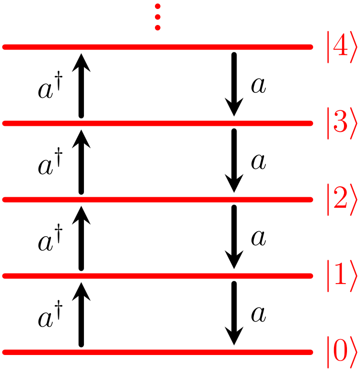
Így

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \tag{2.12}$$

és hasonlóan

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle. \tag{2.13}$$

A keltő és eltüntető operátor hatása a számállapotokon



2.2. ábra: Az $a^\dagger$ és a operátorok végiglépegetnek a számállapotokon.

$$\boxed{a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle.}$$

A számállapotok a vákuumból

Az $|n=0\rangle$ állapotot vákuum állapotnak nevezzük amelyet az $a\,|0\rangle = 0$ összefüggés definiál. Ebből a további számállapotokat az $\frac{a^\dagger|n\rangle}{\sqrt{n+1}} = |n+1\rangle$ formulának megfelelően a következőképpen lehet generálni

$$
\begin{aligned}
|1\rangle &= a^\dagger\,|0\rangle\,,\\
|2\rangle &= \frac{a^\dagger}{\sqrt{2}}\,|1\rangle = \frac{(a^\dagger)^2}{\sqrt{2}}\,|0\rangle\,,\\
|3\rangle &= \frac{a^\dagger}{\sqrt{3}}\,|2\rangle = \frac{(a^\dagger)^3}{\sqrt{3\cdot 2}}\,|0\rangle \quad \cdots
\end{aligned}
$$

A normált sajátvektorok ezek szerint előállíthatók $|0\rangle$-ból az alábbi módon:

$$
|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle. \tag{2.14}
$$

Az elfajulásról

Tegyük fel, hogy pl. a $|0\rangle$ állapot még elfajult, azaz valójában a $|0, l\rangle$ $(l = 1, 2, \dots L)$ állapotok mindegyike az $\hat{n}$-nek a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektora: $\hat{n}|0, l\rangle = 0$.

Akkor az előzőek szerint minden n esetén ez lenne a helyzet, tehát a sajátvektorok rendszere valójában az $|n, l\rangle = (a^\dagger)^n \frac{1}{\sqrt{n!}}|0, l\rangle$ vektorok összessége lenne.

Az a és $a^\dagger$ operátorok nem keverik különböző l-hez tartozó sajátvektorokat, ezért ha feltesszük, hogy minden releváns operátor az a és az $a^\dagger$ függvénye, akkor ilyen elfajulás nem lehetséges.

Egy módus Hamilton operátorának sajátértékei ezek szerint az

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

energiák, amelyek nemelfajultak, a módus megfelelő állapotai pedig az $|n\rangle$ foton-számállapotoknak vagy röviden csak számállapotoknak nevezett energiasajátállapotok.

Időfüggés Schrödinger-képben

Beszédmód:

- Ha a mező módusának állapota $|n\rangle$, akkor a módusban n számú foton van, ennek megfelelően a módus energiája $(n+1/2)\hbar\omega$.
- Az $a^\dagger$ operátor egy fotont kelt a módusban, míg
- az a operátor egy fotont tüntet el a módusból.

A különböző $|n\rangle$-ek ortogonálisak egymásra , mert egy önadjungált operátor, az $\hat{n}$ különböző sajátértékeihez tartoznak: $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$.

Miután megállapítottuk a mező Hamilton operátorának sajátállpotait, azaz a stacionárius állapotokat, most már tetszőleges kezdőállapotnak a módus oszcillátor Hamilton operátorának hatására bekövetkező változását is fölírhatjuk.

A kvantummechanika szerint ennek általános alakja:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i(n+1/2)\omega t} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\omega t} |n\rangle \langle n|\Psi(0)\rangle , \qquad (2.15)$$

ahol $|\Psi(0)\rangle$ tetszőleges kezdőállapot, és így $c_n = \langle n|\Psi(0)\rangle$.

A téroperátorok időfüggése Heisenberg képben

A (2.15) formula az időfüggésre a Schrödinger képnek felel meg. A kvantumoptikában és általában a kvantumtérelméletben gyakorta a Heisenberg képet használjuk az időfejlődés megadására.
Ez esetben az állapot időben állandó, megegyezik a kezdőállapottal, az időfejlődést az operátorok hordozzák. A megfelelő mozgásegyenletekből a léptető operátorokra az

$$a = a(0)e^{-i\omega t}, \qquad a^\dagger = a^\dagger(0)e^{i\omega t}$$

időfüggés adódik.

A téroperátorok időfüggése ezzel egyetlen állóhullám módusra az

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}\left(a(0)e^{-i\omega t} + a^\dagger(0)e^{i\omega t}\right)\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}\sin kz,$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}\frac{1}{c}i\left(a^\dagger(0)e^{i\omega t} - a(0)e^{-i\omega t}\right)\cos kz$$

formulákkal adható meg.

Kvadratúra operátorok

Vezessük be a Q és P alábbi dimenziótlan változatát az

$$X = \frac{a + a^\dagger}{2}, \qquad Y = \frac{a - a^\dagger}{2i}.$$

definíciókkal, amelyek önadjungáltak és amelyeket kvadratúra operátoroknak szoktunk nevezni.

Ezek fölcserélési relációja láthatólag a következő:

$$[X, Y] = \frac{i}{2}.$$

Szemléltetés hullámfüggvénnyel

Az X és Y kvadratúra operátorok segítségével, a módus állapotainak reprezentálására illetve szemléltetésére használhatjuk a mechanikai kvantumoszcillátor szokásos koordináta- illetve impulzus-reprezentációbeli hullámfüggvényeit.

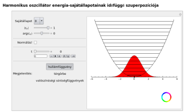
A módus egy $|\psi\rangle$ állapotát ennek megfelelően jellemezhetjük olyan komplex értékű függvényekkel, amelyek megadják, hogy mekkora $\langle x\,|\psi\rangle =: \psi(x)$ valószínűségi amplitúdóval találjuk az X operátor x sajátértékben a módust.

Ezen $\psi(x)$ függvények terén az X operátornak a szokásos kvantummechanikai szabályoknak megfefelően az x-el való szorzás, az Y-nak pedig az $1/(2i)\partial_x$ művelet felel meg. Minthogy az elektromos térerősség nagysága (2.8) szerint az X operátorral arányos, a $|\psi(x)|^2$ függvény az elektromos térerősség amplitúdójának valószínűségi sűrűségfüggvényét, míg a $\psi(x)$ Fourier transzformáltjaként kapható $\tilde{\psi}(y)$ a mágneses mező valószínűségi amplitúdóját adja meg.

Szemléltetés hullámfüggvénnyel

A fotonszám sajátállapotokhoz tartozó amplitúdókat a harmonikus oszcillátor elméletéből jól ismerjük, és az alábbi animáció a fotonszámsajátállapotok ilyen ábrázolását valósítja meg. A lényeges különbség a mechanikai oszcillátorhoz képest abban áll, hogy itt a vízszintes tengely mentén a térerősség lehetséges értékeit mérjük föl.

Animáció:



Az interaktív animáció segítségével az egydimenziós harmonikus oszcillátor energia-sajátállapotainak szuperpozicióit hozhatjuk létre, majd a normálás után az így létrehozott kvantumállapot időbeli változását vizsgálhatjuk. Először alaposan figyeljük meg az alapállapot fázisának időbeli változását.

`http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/interactive/HarmonikusOszcillatorIdofuggoSzuperpozicio.nbp`

Ellenőrző kérdések

1. Mit jelent a módus fogalma?
2. Milyen irányúak az **E** és **B** és mezők egy állóhullám módusban?
3. Milyen klasszikus mechanikai rendszerrel egyenértékű egy elektromágneses módus?
4. Milyen matematikai lépés vezet a kvantumelméleti leíráshoz?
5. Mekkorák a stacionárius állapotokhoz tartozó energiaértékek?
6. Hogyan vezetjük-be a léptető operátorokat?
7. Hogyan fejezzük ki a térerősségeket a léptető operátorokkal?
8. Önadjungáltak-e a léptető operátorok?
9. Önadjungáltak-e a térerősség operátorok?
10. Mik azok a kvadratúra operátorok?
11. Milyen értelmet ad a foton fogalmának a kvantálási eljárás?
12. Milyen mátrixok írják le a releváns fizikai mennyiségeket egy módus esetén?
13. Hogyan változik időben a módus egy tetszőleges állapota?
14. Mit mondhatunk a stacionárius állapotok elfajultságáról?