



# Kvantumelektrodinamika és Kvantumoptika

## 12. ELŐADÁS

Spontán emisszió, Lamb eltolódás, Casimir-effektus

Benedict Mihály

SZTE TTIK Elméleti Fizikai Tanszék, Szeged, 2015



„Ágazati felkészítés a hazai ELI projekttel összefüggő képzési és K+F feladatokra ”

TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0005 projekt



MAGYARORSZÁG  
KORMÁNYA

**Európai Unió**  
Európai Strukturális  
és Beruházási Alapok



**BEFEKTETÉS A JÖVŐBE**

# Tartalom

- 1 Tartalom
- 2 Bevezetés
- 3 A spontán emisszió
- 4 A Lamb-eltolódás
- 5 A Casimir-effektus
- 6 Ellenőrző kérdések

# Bevezetés

Ebben a fejezetben három olyan effektust tárgyalunk, amelyek a mező nullaponti energiájának, vagy másképpen a vákuumfluktuációknak tulajdoníthatók.

- Az első ezek közül egy gerjesztett atomi állapot spontán lebomlása szabad térben, vagyis a **spontán emisszió**. Ennek során az atomi energia átadódik az atomot körülvevő mező energiájává, ahol kulcsszerepet játszik az a tény, hogy a Jaynes–Cummings–Paul-modellel szemben folytonosan sok olyan mező módus veheti át az energiát, amely az atomi átmenettel rezonanciában van.
- A második ilyen jelenség a **Lamb-féle eltolódás**, amelynek megfigyelése és értelmezése kulcsszerepet játszott a mező kvantumos elméletének megszületésében. Ez a jelenség az atomban az  $s$  típusú elektrópályák energiájának megnövekedése a gömbszimmetriát nem mutató, de egyébként azonos energiájú atomi állapotokhoz képest, ami a mező módusainak vákuumállapotaival való kölcsönhatás következménye.
- A harmadik jelenség a **Casimir-effektus**, amely szerint két elektromosan semleges párhuzamos vezető lemez között vákuumban egy vonzóerő lép föl.

## Emlékeztető a JCP modellre

A Jaynes–Cummings–Paul-modellben az egymástól  $\hbar\omega_0$  távolságra lévő két energianívós atom egyetlen  $\omega$  körfrekvenciájú módussal hat kölcsön.

- Ha a módus kezdeti állapota a vákuum, és az atom alapállapotban van, akkor nem történik semmi.
- Ha viszont a vákuumba helyezett atom a gerjesztett állapotban van, tehát  $C_{e,0}(0) = 1$ ,  $C_{g,1}(0) = 0$ , akkor az  $|e, n = 0\rangle$  állapotból indulva a csatolt rendszer a

$$C_{e,0}(t) = \cos \frac{\Omega_0}{2} t; \quad C_{g,1}(t) = -i \sin \frac{\Omega_0}{2} t$$

képleteknek megfelelően az  $\Omega_0$  vákuum Rabi-körfrekvenciával meghatározott módon elindul az alapállapot felé.

Ez **egyetlen módus esetén reverzibilis** folyamat, az atom vissza is veszi az energiát a mezőtől.

Ezzel szemben **a szabad térben lévő gerjesztett atom irreverzibilis módon veszti el azt a  $\hbar\omega_0$  energiát**, amit egy alkalmas gerjesztéssel belé tápláltunk, és ennek időbeli lefolyása exponenciális. A továbbiakban ezt a folyamatot fogjuk vizsgálni.

## Megoldás a Fermi-féle aranyszabállyal

Elemi perturbációs közelítést alkalmazva: mint a félklasszikus eljárás során az abszorpcióhoz, illetve az indukált emisszióhoz vezető megfontolásnál.

Tekintsük egyetlen módusra az általános megoldást, amelynek alakja Schrödinger-képben:

$$|\Psi(t)\rangle_S = \sum_n \left( C_{e,n}(t) e^{-i(\omega_e + n\omega)t} |e, n\rangle + C_{g,n+1}(t) e^{-i(\omega_g + (n+1)\omega)t} |g, n+1\rangle \right).$$

A gyorsan változó exponenciálisokat a  $|\Psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t/\hbar} |\Psi(t)\rangle_S$  transzformációval a kölcsönhatási képbe való áttéréssel kiküszöböljük, és a  $C_{e,1}(0) = 1$ ,  $C_{g,1}(0) = 0$  kezdőállapotból indítjuk a megoldást.

Ekkor az állapot mindig ebben az altérben marad:

$$|\Psi(t)\rangle_I = C_{e,0}(t) |e, 0\rangle + C_{g,1}(t) |g, 1\rangle.$$

Az együtthatókra pedig a Schrödinger-egyenletből az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -i \frac{\Omega_0}{2} e^{i\Delta t} C_{g,1}(t), \quad (12.1)$$

$$\dot{C}_{g,1}(t) = -i \frac{\Omega_0}{2} e^{-i\Delta t} C_{e,0}(t). \quad (12.2)$$

## Megoldás a Fermi-féle aranyszabállyal

Szabad térben azonban, már sok olyan különböző irányú  $\mathbf{k}$  hullámvektorral megadott módus van, amelynek  $\omega = c|\mathbf{k}|$  frekvenciája közel esik az atomi átmenethez tartozó  $\omega_0$  Bohr frekvenciához, azaz amelyekre  $\Delta = \omega_0 - \omega \ll \omega_0$ .

A mező vákuum amplitúdójának megfelelő Rabi-frekvencia is függ az  $\omega$ -tól:  $\Omega_0 = \frac{2d}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}$ .

Az együtthatókra vonatkozó egyenletrendszert tetszőleges  $\Delta$ -ra a perturbációszámítás első közelítésében oldjuk meg. A (12.2) második egyenlet bal oldalára a 0-ik közelítésben érvényes  $C_{e,0}(t) = 1$ -et írunk, majd integráljuk ezt az egyenletet:

$$C_{g,1}^{(1)}(t) = \frac{\Omega_0}{2} \frac{e^{-i\Delta t} - 1}{\Delta}.$$

Ez első rendben az alábbi átmeneti valószínűségekre vezet:

$$\left| C_{g,1}^{(1)}(t) \right|^2 = \frac{\Omega_0^2}{4} \frac{\sin^2 \Delta t/2}{(\Delta/2)^2}.$$

Ezt az egyetlen  $\Delta$  esetére kapott eredményt most összegezzük az összes módusra.

## Megoldás a Fermi-féle aranyszabállyal

A térfogategységben a módusok sűrűségének frekvenciafüggése:  $g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$ .

A mező polarizációs irányának a kérdésével egyelőre nem törődve, az összes módus által befolyásolt valószínűséget az alábbi integrál adja

$$P_{e \rightarrow g} = \int \frac{\Omega_0^2}{4} t^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{[t(\omega_0 - \omega)/2]^2} g(\omega) d\omega.$$

A  $\frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{[t(\omega_0 - \omega)/2]^2}$  tényező gyorsan változó függvény, de a megfigyelési időtartamok tipikus értékeire csak az  $\omega_0 - \omega = 0$  körül ad releváns járulékot az integrálhoz. Pontosabban, használjuk a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{[t(\omega_0 - \omega)/2]^2} = 2\pi t \delta(\omega_0 - \omega)$  képletet, amiből, (s ez az, amit Fermi-féle aranyszabálynak nevezünk),

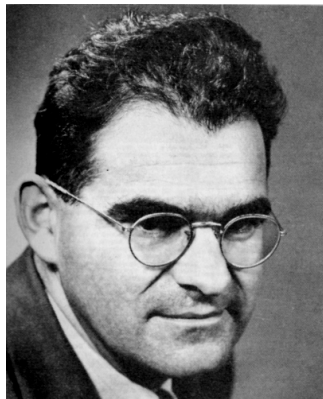
$$P_{e \rightarrow g} = \gamma_0 t,$$

ahol a spontán emisszió gyorsaságának  $\gamma_0$  mértéke (rátája):

$$\gamma_0 = \pi \frac{\Omega_0^2(\omega_0)}{2} g(\omega_0).$$

Ez az eredmény mutatja, hogy a  $\gamma_0$  a  $d^2\omega_0^3$ -el arányos, de nem veszi figyelembe az atomi dipólmomentum és a mező vektora közötti szög lehetséges irányait, továbbá azt föltételezi, hogy a gerjesztett atomi állapot valószínűsége végig közel marad az 1-hez, ami nyilvánvalóan nem érvényes.

# A spontán emisszió Weisskopf–Wigner elmélete



12.1. ábra: Victor Frederick Weisskopf (1908 - 2002) osztrák-amerikai fizikus.



# A spontán emisszió Weisskopf–Wigner elmélete

Egyetlen atom és sok módus kölcsönhatását a következő Hamilton-operátorral modellezzük:

$$H = \hbar \sum_s \omega_s a_s^\dagger a_s + \frac{\hbar \omega_0}{2} \sigma_3 + \hbar \sum_s \left( \Omega_s^* a_s^\dagger \sigma_- + \Omega_s a_s \sigma_+ \right), \quad (12.3)$$

ahol  $s$  az összes lehetséges móduson végigfutó index, és az utolsó kölcsönhatási tagot a forgóhullámú közelítésben adtuk meg, amelyben  $\Omega_s$  az  $s$ -edik módus vákuum Rabi-frekvenciája.

A probléma időfüggő megoldását a

$$|\Psi(t)\rangle = C_{e,0}(t) e^{-i\frac{\omega_0}{2}t} |e, \{0\}\rangle + \sum_s C_{g,\{1_s\}}(t) e^{i(\frac{\omega_0}{2} - \omega_s)t} |g, \{1_s\}\rangle \quad (12.4)$$

alakban keressük, a  $C_{e,0}(0) = 1$  kezdeti feltétellel, ahol az első tagban szereplő  $|e, \{0\}\rangle$  az az induló állapot, amikor az atom gerjesztett és minden módus a vákuum állapotban van. A másik tagban szereplő  $|g, \{1_s\}\rangle$  vektorok viszont az alapállapotú atom és a mező egy általános egyfotonos állapotának szorzatát jelentik.

# A spontán emisszió Weisskopf–Wigner elmélete

Írjuk be ezt a  $|\Psi(t)\rangle$ -t a (12.3) Hamilton-operátornak megfelelő Schrödinger-egyenletbe, majd a szokásos módon vetítsük a kapott eredményt az  $|e, \{0\}\rangle$  illetve a  $|g, \{1_s\}\rangle$  vektorokra, ekkor az együtthatókra az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -i \sum_s \Omega_s C_{g,\{1_s\}}(t) e^{-i(\omega_s - \omega_0)t}, \quad (12.5)$$

$$\dot{C}_{g,\{1_s\}}(t) = -i \Omega_s^* e^{i(\omega_s - \omega_0)t} C_{e,0}(t). \quad (12.6)$$

Integráljuk formálisan a (12.6) egyenletet és helyettesítsük vissza (12.5)-be. Így a  $C_{e,0}(t)$ -re egy integrodifferenciálegyenletet kapunk:

$$\dot{C}_{e,0}(t) = - \sum_s |\Omega_s|^2 \int_{t_0}^t e^{-i(\omega_s - \omega_0)(t-t')} C_{e,0}(t') dt'. \quad (12.7)$$

Eszerint az egyenlet szerint  $C_{e,0}(t)$  deriváltját a  $t$  időpontban annak korábbi időpillanatokban vett értékei határozták meg, azaz az egyenlet időben nemlokális.

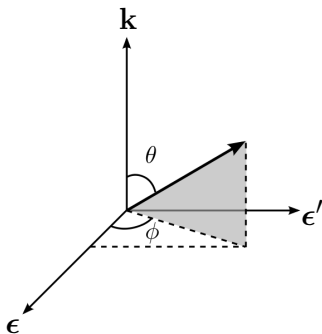
A mező és az atom közötti csatolásra jellemző  $\Omega_s \rightarrow \Omega(\omega, \theta) = \langle e | \mathbf{D} | g \rangle \mathcal{E}_\omega / \hbar$  belső szorzat függ  $\omega_s = \omega$ -tól, azaz a módus frekvenciájától és a módus polarizációs iránya és az atomi dipólus által bezárt szögtől.

# A spontán emisszió Weisskopf–Wigner elmélete

Legyen a módus  $\mathbf{k}$  hullámvektorának iránya a  $\hat{\mathbf{z}}$  irány,  $\mathcal{E}_\omega$  két polarizációs iránya az  $\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\mathbf{e}}_x$  és  $\boldsymbol{\epsilon}' = \hat{\mathbf{e}}_y$ , míg az  $\langle e | \mathbf{D} | g \rangle$  átmeneti dipólmomentum mutasson a  $\theta$  és  $\phi$  polár és azimutszögekkel jellemzett irányba. Ekkor

$$|\langle e | \mathbf{D} | g \rangle \mathcal{E}_\omega|^2 = \frac{d^2}{\hbar^2} \mathcal{E}_\omega^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \frac{d^2}{\hbar^2} \mathcal{E}_\omega^2 \sin^2 \theta,$$

ahol kihasználtuk, hogy az átmeneti dipólmomentum nagysága a két polarizációs irányra azonos.



**Ábra:** A  $\mathbf{k}$  vektor a  $\mathbf{D}$  vektor és a két polarizációs irány  $\boldsymbol{\epsilon}$ , illetve  $\boldsymbol{\epsilon}'$  térbeli helyzete.

# A spontán emisszió Weisskopf–Wigner elmélete

A sokmódusú tér kvantálásánál használt formalizmus szerint egy nagyméretű térfogatba zárt mező esetén a módusokra való  $\sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})$  összegzés helyére a  $\mathcal{V}/(2\pi)^3 \int f(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}$  alakú integrál lép.

Itt a  $|\mathbf{k}| = \omega/c$  helyett rendszerint az  $\omega$  változót használjuk, a módusok iránya szerint pedig a  $\theta$  és  $\phi$  szerinti szokásos gömbi változókban kell integrálni.

**Megjegyzés:** Ha az integrandus a  $\mathbf{k}$  irányától illetve a polarizációtól nem függ, akkor ez egyszerűen a  $\mathcal{V}$  térfogatban található módusok  $\mathcal{V}g(\omega)d\omega = \mathcal{V}\omega^2/c^3\pi^2 d\omega$  sűrűségével szorzott függvény integrálását jelenti, amely már a szögek szerint ki van integrálva, esetünkben azonban nem ez a helyzet.

Így a  $C_{e,0}(t)$ -re vonatkozó egyenlet:

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -\frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3 c^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\Omega(\omega, \theta)|^2 \omega^2 d\omega \sin\theta d\theta d\phi \int_{t_0}^t e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} C_{e,0}(t') dt',$$

$$\text{ahol} \quad |\Omega(\omega, \theta)| = \frac{d}{\hbar} \mathcal{E}_\omega \sin\theta = \frac{d}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\mathcal{V}}} \sin\theta.$$

Az irányok ( $\theta$  és  $\phi$ ) szerinti integrálás eredménye  $2\pi \cdot 4/3 = 8\pi/3$ , és így

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -\frac{d^2}{8\pi^3 c^3 \hbar^2} \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \omega^2 d\omega \int_{t_0}^t e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} C_{e,0}(t') dt'.$$

# A spontán emisszió Weisskopf–Wigner elmélete

Most kihasználjuk, hogy  $C_{e,0}(t')$  az  $e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')}$ -hez képest lassan változó függvény az előforduló  $\omega$ -k túlnyomó többségére, így azt a  $t$  időpontbeli értékével helyettesítve kivisszük az integrál jel elé. A megmaradt exponenciális idő szerinti integrálját a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} dt' = \pi \delta(\omega - \omega_0) - i\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_0}$$

képlettel számíthatjuk ki, amelynek eredményében a Dirac-delta éppen azt jelenti, hogy a módusok frekvenciái közül lényegében csak az  $\omega_0$  rezonáns frekvencia játszik szerepet, éppen az amelynél  $e^{-i(\omega-\omega_0)t}$  változása lassú. A második tag amelyben a  $\mathcal{P}$  a főértéket jelenti, egy frekvenciaeltolódást eredményez, amely kapcsolatba hozható a Lamb féle eltolódással. Itt csak a valós részt figyelembe véve, az eredmény

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -\frac{\gamma_0}{2} C_{e,0}(t),$$

ahol

$$\gamma_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3} \frac{d^2\omega_0^3}{\hbar c^3}$$

a spontán emissziót jellemző állandó.

# A spontán emisszió Weisskopf–Wigner elmélete

Tehát

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -\frac{\gamma_0}{2} C_{e,0}(t), \quad \text{ahol} \quad \gamma_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3} \frac{d^2\omega_0^3}{\hbar c^3}.$$

A Weisskopf–Wigner féle elmélet **irreverzibilis** és **exponenciális lecsengésű** spontán emissziót mutat, itt nincs föléledés mint a Jaynes–Cummings–Paul-modellből következő dinamikában, ahol csupán egy módusnak adja át az energiát az atom, és azt abból vissza is tudja nyerni.

A szabad térben azoknak a folyamatoknak az amplitúdói, amelyek ezt a visszanyerést írják le a sok különböző módusfrekvencia miatt destruktíve interferálnak ezért a visszatérés nem lehetséges.

# A Lamb-eltolódás: Bevezetés

A mező kvantumosságának egy másik megnyilvánulása a Lamb-féle eltolódás.

Így nevezzük azt a kicsiny energiakülönbséget, amely bizonyos atomi nívók között lép föl, és amelyet az atom relativisztikus kvantummechanikája nem magyaráz, mert az az atom környezetét jelentő elektromágneses vákuum fluktuációinak tulajdonítható.

A relativisztikus kvantummechanika szerint a H atom két azonos  $j = 1/2$  kvantumszámhoz tartozó állapota a  $2S_{1/2}$  és  $2P_{1/2}$  azonos energiájúak. 1947-ben Lamb és Retherford mikrohullámú módszerrel kb. 1 GHz-nek megfelelő energiakülönbséget mértek a két energianívó között, amelynek magyarázatát a kvatumelektrodinamika segítségével ugyanabban az évben H. Bethe adta meg.

Mi itt egy kevésbé egzakt, de jóval egyszerűbb megfontolásra támaszkodva mutatjuk meg a Lamb-eltolódás eredetét. Ez a gondolatmenet T. Weltontól származik.

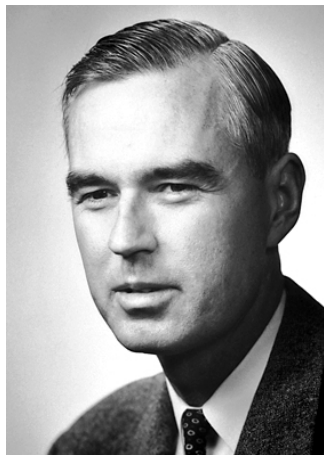
**Megjegyzés:** Az egzakt eredmény és annak levezetése megtalálható [1]:



V. B. Bereszteckij, E. M. Lifsic, L. M. Pitajevszkij:

*Relativisztikus kvantumelmélet*, Tankönyvkiadó, Budapest 1979.

# Willis Lamb



**12.3. ábra:** Willis Eugene Lamb, Jr. (1913 - 2008) amerikai fizikus. (1955-ben fizikai Nobel-díjat nyert a róla elnevezett Lamb-eltolódás kimutatásáért).



# Az elektron potenciális energiája sorbafejtve

Az elektron potenciális energiája az  $e_0$  töltésű mag terében

$$V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{|\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}|}$$

ahol a  $\delta\mathbf{r}$  amiatt lép föl, mert a mező vákuumfluktuációi befolyásolják az elektron helyzetét, beleértve a magtól mért térbeli távolságát is. A  $V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$  potenciális energiát sorba fejtve kapjuk, hogy

$$V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) = \delta\mathbf{r} \cdot \nabla V + \frac{1}{2}(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 V + \dots$$

Az elsőrendű tag átlaga eltűnik, mert a vákuumfluktuációk izotróp volta miatt  $\langle \delta\mathbf{r} \rangle_{\text{vac}} = 0$ . A másodrendű tag részletesebb alakja

$$\frac{1}{2}(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 V = \frac{1}{2} \sum_{ij} \delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V,$$

amelyből átlagolás után, ismét a  $\langle \delta x_i \rangle = 0$  miatt, csak a „diagonális”

$$\frac{1}{2} \sum_i (\delta x_i)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \frac{1}{6} \langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle \nabla^2 V$$

rész marad meg.

## A másodrendű tag kiszámítása

Egy  $|n, \ell, m_\ell\rangle$  atomi sajátállapotban a korrekció mértéke első rendben így

$$\Delta E = \frac{1}{6} \langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle \langle n, \ell, m_\ell | \nabla^2 V | n, \ell, m_\ell \rangle.$$

Tekintettel arra, hogy  $\nabla^2 \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}|} = -4\pi e_0^2 \delta(\mathbf{r})$ , ahol  $\delta(\mathbf{r})$  a Dirac-delta, a korrekció

$$\Delta E = \frac{e_0^2}{\epsilon_0} \frac{1}{6} \langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle \langle n, \ell, m_\ell | \delta(\mathbf{r}) | n, \ell, m_\ell \rangle.$$

Mivel a stacionárius állapotok koordináta hullámfüggvényei az  $\ell = 0$ -nak megfelelő  $s$  állapotok kivételével a Dirac-delta szingularitásának helyén vagyis az origóban eltűnnek, ezért a fenti várható érték csak az  $s$  állapotokban lesz nullától különböző, és azokra

$$\langle n, 0, 0 | \delta(\mathbf{r}) | n, 0, 0 \rangle = |\psi_{n,0,0}(r=0)|^2 = \frac{1}{\pi n^3 a_0^3}$$

az eredmény, ahol  $a_0$  a Bohr sugár. Láthatóan minél kisebb az  $n$  főkvantumszám ez az eltolódás annál nagyobb, és az  $s$  állapotokra pozitív, míg a  $p$  állapotokon nem jelentkezik, eszerint az energiaváltozás

$$\Delta E = \frac{1}{6\epsilon_0} \langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle \frac{e_0^2}{\pi n^3 a_0^3}.$$

## A másodrendű tag kiszámítása

Most vizsgáljuk meg a  $\langle (\delta \mathbf{r})^2 \rangle$  átlagot. Ha ez egy  $-e_0$  töltésű elektron és annak mozgását a vákuum térerősség hatására létrejövő klasszikus mozgásnak tekintjük, akkor a mozgásegyenlet

$$\frac{d^2(\delta \mathbf{r})_\omega}{dt^2} = -\frac{e_0}{m} \mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t},$$

és ennek megoldása

$$(\delta \mathbf{r})_\omega = \frac{e_0}{m\omega^2} \mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t}.$$

Az átlagos négyzetes eltérés egy módus hatására

$$(\delta \mathbf{r})_\omega^2 = \frac{e_0^2}{2m^2\omega^4} \mathcal{E}_\omega^2$$

és figyelembe véve az  $\mathcal{E}_\omega = \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\mathcal{V}} \right)^{1/2}$  vákuum amplitúdót, összes módus hatására bekövetkező energiaeltolódás

$$\Delta E = \frac{1}{6\epsilon_0} \frac{e_0^2}{\pi n^3 a_0^3} \sum_k \frac{e_0^2}{2m^2 k^4 c^4} \frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}$$

ahol  $k = |\mathbf{k}| = \omega/c$ , és  $\mathcal{V}$  egy nagyméretű normálási térfogat, amely a mező módusait és a kisméretű atomot tartalmazza.

## Összegzés a módusokra

Az összegzés helyett integrálunk a módusokra, a  $\mathcal{V}$  térfogatban található módusok számára vonatkozó módussűrűség  $\mathcal{V}g(\omega)d\omega = \mathcal{V}\omega^2/c^3\pi^2d\omega$  képletét használva. Így a kiszámítandó energiaeltolódás

$$\Delta E = \frac{1}{24\epsilon_0^2} \frac{e_0^2}{\pi n^3 a_0^3} \int \frac{e_0^2}{m^2} \frac{\hbar\omega}{\omega^4} \frac{\omega^2}{c^3\pi^2} \frac{d\omega}{c} = \frac{2}{3} \frac{\hbar}{\pi n^3 a_0^3} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{\hbar c} \right)^2 \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 \int \frac{1}{\omega} d\omega.$$

Itt  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{\hbar c} = \alpha$  a Sommerfeld-féle finomstruktúra állandó,  $\frac{\hbar}{mc} = \lambda_c$  pedig az elektron redukált ( $2\pi$ -vel osztott) Compton-hullámhossza.

Az integrációs határok első látásra a 0 és  $\infty$  között veendőek, így azonban az eredmény logaritmikusan divergens lenne a frekvenciaspektrum mindkét végén.

### Természetes levágás:

- Az  $n$  főkvantumszámhoz tartozó  $|E_n| = \frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}$  energiájú állapothoz tartozó  $\omega_B = |E_n|/\hbar = \frac{mc^2\alpha^2}{2n^2\hbar}$  körfrekvencia a Bohr-elmélet szerint az elektron szögsebességének a fele.
- Kézenfekvő a föltételezés, hogy ennél kisebb körfrekvenciákra a töltés nem reagál. A fölső levágási határt pedig az elektron nyugalmi energiájának megfelelő az  $\omega_c = mc^2/\hbar = c/\lambda_c$  Compton-körfrekvencia adja, ettől kezdve ugyanis a nemrelativisztikus dinamika amúgy is érvényét veszti.

# A Lamb-eltolódás

Így az eredmény:

$$\Delta E = \frac{2}{3} \frac{\hbar}{\pi n^3 a_0^3} \alpha^2 \lambda_c^2 \ln \frac{\omega_c}{\omega_B} = \frac{2}{3} \frac{\hbar}{\pi n^3 a_0^3} \alpha^2 \lambda_c^2 \ln \frac{2n^2}{\alpha^2}.$$

Ha itt még figyelembe vesszük az  $a_0 = (\hbar/mc)/\alpha = \lambda_c/\alpha$  kapcsolatot, akkor a

$$\Delta E = \frac{2}{3\pi} \frac{mc}{n^3} \alpha^5 \ln \frac{2n^2}{\alpha^2}$$

eredményt kapjuk.

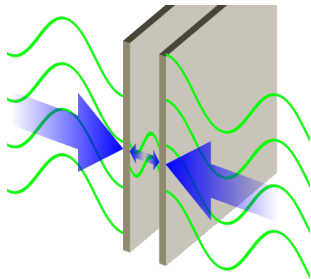
Az  $n = 2$  esetén a  $2S_{1/2}$  állapot energiája körülbelül ennyivel adódott magasabbnak mint a  $2P_{1/2}$  állapoté, amit a két nívó közötti energiakülönbségnek megfelelő frekvencia  $\Delta E/(2\pi\hbar) \approx 1$  GHz-es abszorpció kimutatásával sikerült megmérnie Lambnek.

# A Casimir-effektus: Bevezetés

Ebben a szakaszban egy harmadik érdekes effektust tárgyalunk, amely szintén az elektromágneses vákuummal kapcsolatos.

H. B. G. Casimir 1948-ban mutatott rá arra, hogy két tökéletes vezető, de töltéssel nem bíró sík között vákuumban is vonzó erő lép föl.

Ennek szemléletes oka, hogy a síkok között az elektromágneses vákuum módusstruktúrája más lesz mint síkok nélkül és ez erő vonzóerőhöz vezet.



## A mező négyzetes hasáb alakú dobozban

Tekintsünk egy négyzetes hasáb alakú dobozt, amelynek méretei  $L_x = L_y = L$ , és  $L_z = d$ .

Ha az elektromos térerősségre minden falon 0 értékű érintő irányú határföltételt írunk elő, az a megfelelő  $E_x \sim \cos(l\pi x/L) \sin(\pi m y/L) \sin(n\pi z/d)$  stb. módusfüggvényekben előforduló  $l, m, n$  nemnegatív egész számokból a módus körfrekvenciájára:

$$\omega_{lmn} = \pi c \left( \frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{d^2} \right)^{1/2}.$$

**Megjegyzés:** Az  $l, m, n$  számok közül egyszerre csak egyikük lehet 0.

A pozitív számhármassok két polarizációs irányú módust jelentenek, viszont ha a három szám közül az egyik 0, akkor csak egy polarizációs módus lehetséges.

A doboz esetén a nullaponti energia:

$$E_0(d) = \sum'_{lmn} 2 \left( \frac{1}{2} \hbar \omega_{lmn} \right),$$

ahol a 2-es tényező a módusonkénti két független polarizációs irány miatt lép föl. A vessző pedig arra utal, hogy ha az egészek közül valamelyik 0, akkor csak egy polarizációs módus lehetséges, így a 2-es szorzó nem lép föl.

# Hendrik Casimir



12.4. ábra: Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909 - 2000), holland fizikus.



## A két lemez alkotta rendszer potenciális energiája

Tfh.  $L \gg d$ , s ekkor az  $l$  és  $m$  szerinti összegzés integrálással helyettesíthető a  $\frac{\pi l}{L} = k_x$ ,  $\frac{\pi m}{L} = k_y$  és az ennek megfelelő  $\sum_l = \int \frac{L}{\pi} dk_x$ ,  $\sum_m = \int \frac{L}{\pi} dk_y$ , képletek szerint:

$$E_0(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \sum_n \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{1/2}.$$

Ezzel szemben, ha **szabad térben** vagyunk, akkor  $d$  **tetszőlegesen nagy lehet**, és akkor ugyanez a helyettesítés az  $n$  szerinti összegzéssel is megtehető, a  $\frac{\pi n}{d} = k_z$ , és  $\sum_n = \int \frac{d}{\pi} dk_z$  formulákkal. Eszerint a  $d = \infty$  esetre:

$$E_0(\infty) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}.$$

A főnti eredmények mindkét esetben divergensnek, de a különbséget végessé tudjuk tenni. Az

$$U(d) = E_0(d) - E_0(\infty)$$

mennyiséget azonosíthatjuk a **két lemez alkotta rendszer potenciális energiájával**, amelyre

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \left[ \sum_n \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{1/2} - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \right].$$

## Levágás a potenciális energiában

**Hengerkoordináták** az  $k_x, k_y$  síkon:  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  és  $\phi = \arctan(k_y/k_x)$ . Ahol  $k_x, k_y > 0$  miatt csak 0 és  $\pi/2$  között kell integrálni. Ezt a  $\phi$  szerinti integrálást már elvégezve:

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \frac{\pi}{2} \left[ \sum_n \int_0^\infty k dk \left( k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{1/2} dr - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty dk_z \left( k^2 + k_z^2 \right)^{1/2} dr \right].$$

Most az első tagban emeljük ki az  $n$  együtthatóját a gyök alól és végezzük el a  $w = (d^2/\pi^2)k^2$ , helyettesítést, míg a második tagban ezen túlmenően a  $\tilde{z} = \frac{d}{\pi}k_z$  változócsere is. Ekkor

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2}{4} \frac{\pi^2}{d^3} \left[ \sum_n \int_0^\infty (w + n^2)^{1/2} dw - \int_0^\infty d\tilde{z} \int_0^\infty (w + \tilde{z}^2)^{1/2} dw \right].$$

Ezek az **integrálok divergens**ek. Casimir azonban rámutatott arra, hogy a frekvenciák fizikailag valójában nem lehetnek végtelenek, mert nagyon rövid hullámhosszokra a lemezek nem képeznek akadályt számukra. Ezért **levágást alkalmazott**, azaz egy olyan – közelebről nem meghatározott –  $f(\omega/\omega_c)$  függvénnyel szorozta az integrandusokat, amely  $\omega/\omega_c \ll 1$  esetén nem befolyásolja az eredményt, azaz  $f(\omega/\omega_c) = 1$ , (tehát a deriváltjai eltűnnek a 0 közelében), viszont  $\omega/\omega_c \rightarrow \infty$  esetén elegendően gyorsan nullához tart.

## Becslés sorfejtéssel: Euler–McLaurin-képlet

Vezessük be ezután az

$$F(u) := \int_0^\infty dw (w + u^2)^{1/2} f(\pi c(w + u^2)^{1/2}/\omega_c)$$

jelölést. Figyelembe véve, hogy az  $n = 0$  módushoz csak egy polarizációs irány tartozik:

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2}{4} \frac{\pi^2}{d^3} \left[ \frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^\infty F(z) dz \right].$$

A zárójelben szereplő kifejezést az úgynevezett Euler–McLaurin-képlettel lehet megbecsülni, amely szerint

$$\sum_{n=1}^N F(n) - \int_0^N F(z) dz \approx \frac{1}{2} (F(N) - F(0)) + \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} (F^{(2k-1)}(N) - F^{(2k-1)}(0)),$$

ahol a  $B_{2k}$  együtthatók az úgynevezett Bernoulli-számok:  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = 1/2$ ,  $B_2 = 1/6$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = -1/30$ , ... és a közelítés annál jobb minél tovább megyünk az összegzésben, azaz minél nagyobb a  $p$ .

# A Casimir-erő

Ha itt  $N \gg N_0$ , akkor a függvényérték és a deriváltak értékei a felső határon eltűnnek, továbbá egyszerűen megmutathatóan  $F'(u) = -2u^2$ , tehát  $F'(0) = 0$ , míg  $F'''(u) = -4$ , a magasabb deriváltak pedig eltűnnek. Így az eredmény

$$U(d) = -\frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4} \frac{1}{d^3} \frac{1}{24 \cdot 30} = -\frac{\hbar c L^2 \pi^2}{720 d^3}.$$

A felületegységre ható erő, azaz a vákuum energiától származó  $P$  nyomás a potenciális energia  $d$  szerinti negatív deriváltja osztva  $L^2$ -el, amiből

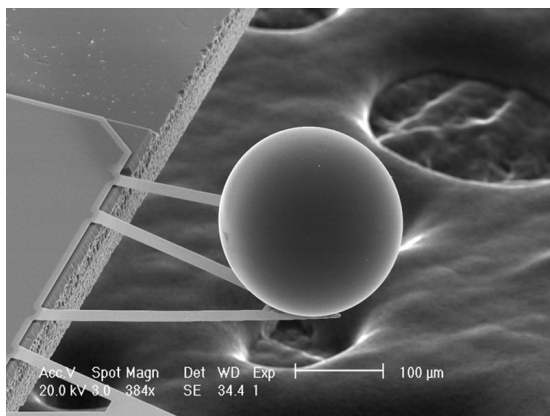
$$P = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 d^4}$$

a **Casimir-erőnek** nevezett nyomás.

Egymástól  $1 \mu\text{m}$  távolságban lévő lemezek esetén ez a nyomás  $1,3 \times 10^{-5} \text{ N/cm}^2$ .

Az effektus létezését kísérletileg először 1958-ban M. Sparnaay mutatta ki, 2002-ben G. Ruoso és munkatársai pontosabb kísérleti eljárással az elmélettel kb. 15%-os hibahatáron belüli egyezést mértek.

## A Casimir-erő



12.5. ábra: A Casimir effektus méréséről készült kép az „Astronomy Picture of the Day” honlapon.

# Ellenőrző kérdések

- 1 Mi a spontán emisszió jelensége, és miért nem magyarázza azt a félklasszikus elmélet?
- 2 Mi a különbség a gerjesztett állapot  $\rightarrow$  alapállapot átmenet során a JCP modell és a spontán emisszió között?
- 3 Milyen értelemben pontosabb a Weisskopf-Wigner elmélet az egyszerű perturbatív megoldásnál?
- 4 Milyen mennyiségek határozzák meg egy átmenethez tartozó spontán emisszió valószínűségét?
- 5 Mit nevezünk Lamb-féle eltolódásnak, mekkora ennek nagyságrendje a finomszerkezet-hez képest?
- 6 Hogyan magyarázza a vákuumfluktuáció a Lamb-féle eltolódást?
- 7 Miért csak az  $s$  állapotok esetén jelentkezik az eltolódás?
- 8 Mit nevezünk Casimir-effektusnak?
- 9 Milyen két energia különbségét kell figyelembe venni a Casimir-effektus nagyságának kiszámításához?
- 10 Hogyan származtatható a Casimir energiából a lemezekre ható nyomás?