



# Kvantumelektrodinamika és Kvantumoptika

## 10. ELŐADÁS A Jaynes–Cummings–Paul-modell

Benedict Mihály

SZTE TTIK Elméleti Fizikai Tanszék, Szeged, 2015



„Ágazati felkészítés a hazai ELI projekttel  
összefüggő képzési és K+F feladatokra ”

*TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0005 projekt*



MAGYARORSZÁG  
KORMÁNYA

**Európai Unió**  
Európai Strukturális  
és Beruházási Alapok



**BEFEKTETÉS A JÖVŐBE**

# Tartalom

- 1 Tartalom
- 2 Bevezetés
- 3 Kétnívós atom klasszikus mezőben
- 4 Kétnívós atom kvantumozott mezőben, a Jaynes–Cummings–Paul-modell Hamilton-operátora
- 5 Rezonáns eset, kollapszus és föléledés
- 6 Nemrezonáns eset, fölrüházott állapotok
- 7 Ellenőrző kérdések

# Bevezetés

A Jaynes–Cummings-modell (JC-modell) vagy helyesebben Jaynes–Cummings–Paul-modell (JCP-modell) az atomok és a mező kölcsönhatásának elvileg legegyszerűbb modellje.

Csak egyetlen atomot tekintünk egy állóhullámú üregben, és föltesszük, hogy az atomnak csak két kiválasztott stacionárius állapota közötti egyetlen átmenet játszik szerepet, az, amelyik az üregben kialakuló diszkrét állóhullámok közül az egyikkel rezonáns módon kölcsönhatásba tud lépni.

A JCP-modell nemtriviális kvantumoz mozgásegyenlete egzaktul megoldható.



E. T. Jaynes, F. W. Cummings Proc. IEEE, **51**, 89 (1963)

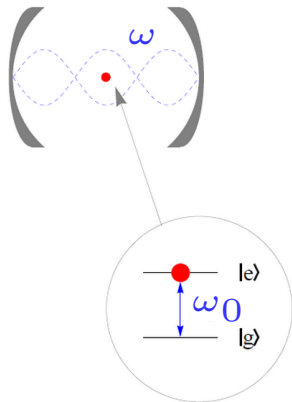


H. Paul, Annalen der Physik, **466**, 411 (1963)

Az 1980-as évek második felétől kezdve sikerült olyan kísérleteket végezni, ahol ezt a modellrendszert ténylegesen is megvalósították.



D. Meschede, H. Walther, G. Müller, Phys Rev. Lett. **54**, 551 (1985)



# E. T. Jaynes



10.1. ábra: Edwin Thompson Jaynes (1922 - 1998) amerikai fizikus.

## Kétnívós atom klasszikus mezőben

Tekintsük a mezőt és az azzal kölcsönhatásban lévő atomot, amelynek csak két stacionárius állapota közötti átmenetet vizsgálunk. Az atomok többi nívójával és az atom mint egész tömegközépponti mozgásával itt nem foglalkozunk, ezek figyelembevételéről a kísérletek elemzésénél lesz szó.

**A feladat félklasszikus változata:** az atomot kvantummechanikailag, a mezőt viszont klasszikusan kezeljük (optikai Rabi-probléma)

A Rabi-probléma, azaz a **klasszikus** mező hatására végbemenő atomi kvantumos dinamika vizsgálata módot ad majd arra, hogy ezt követően rá tudjunk világítani a mező **kvantumos** tulajdonságaiból származó lényeges különbségekre a klasszikus változattal szemben.

Egyetlen atom esetén legyen a két stacionárius állapot egyike  $|e\rangle$  a **fölső, gerjesztett**, a másik pedig a  $|g\rangle$  az **alsó, az alapállapot**, a köztük lévő energiakülönbség pedig  $\hbar\omega_0$ .

Ezek tehát az atomi Hamilton operátor sajátállapotai a

$$H_0 |e\rangle = \varepsilon_e |e\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2} |e\rangle, \quad H_0 |g\rangle = \varepsilon_g |g\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{2} |g\rangle$$

sajátértékegyenletnek megfelelően, ahol az energia nulla szintjét az atomban a két figyelembe vett atomi energianívó  $\varepsilon_e$  és  $\varepsilon_g$  számtani közepénél vesszük föl.  $|e\rangle$  és  $|g\rangle$  egymásra ortogonális és normálnak tekintjük őket.

# Kétnívós atom kölcsönhatása a klasszikus mezővel

Föltesszük, hogy az atom kölcsönhat az ebben a pontban klasszikusnak tekintett

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

lineárisan poláros monokromatikus mezővel, amely az atom méretein belül nem függ a helytől. Ez nagyon jó közelítéssel érvényes, mert

- az  $a$  atomi méret, amely nagyságrendileg a Bohr-sugárnak felel meg, optikai frekvenciák esetén általában három nagyságrenddel kisebb mint a mező  $\lambda = 2\pi c/\omega$  hullámhossza.
- Rydberg-atomokat mikrohullámú mezőben vizsgálva, az  $a$  atomi méret ugyan három nagyságrenddel nagyobb mint a Bohr-sugár, ám a  $\lambda$  itt már a cm-es tartományba esik.

Ilyenkor az atom–mező kölcsönhatást megadó operátor alakja

$$K = -DE_0 \cos \omega t,$$

ahol  $D$  az atomi dipólusmomentum operátora.

Föl fogjuk tenni, hogy a mező körfrekvenciája közel esik az atomi átmenet frekvenciájához:

$$\omega_0 - \omega =: \Delta \ll \omega_0 \quad (10.1)$$

Ahol a  $\Delta$ -t elhangolásnak nevezzük.

# A kétnívós atom Schrödinger-egyenlete

Az atomra vonatkozó időfüggő Schrödinger-egyenlet:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = (H_0 + K(t)) |\Psi(t)\rangle$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = (H_0 - DE_0 \cos \omega t) |\Psi(t)\rangle} \quad (10.2)$$

A megoldást keressük a két stacionárius állapot időfüggő szuperpozíciójaként:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= b_g(t) e^{-i\Delta t/2} e^{-i\varepsilon_g t/\hbar} |g\rangle + b_e(t) e^{i\Delta t/2} e^{-i\varepsilon_e t/\hbar} |e\rangle = \\ &= b_g(t) e^{-i\Delta t/2} e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} |g\rangle + b_e(t) e^{i\Delta t/2} e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} |e\rangle, \end{aligned} \quad (10.3)$$

ahol a  $H_0$ -nak megfelelő  $e^{-i\varepsilon_{g(e)} t/\hbar}$  stacionárius fázisfaktorokat és az elhangolás felét tartalmazó további  $e^{\pm i\Delta t/2}$  fázisszorzókat célszerűen leválasztottuk az időfüggő együtthatókból. A kölcsönhatásból származó időfüggő amplitúdókat itt  $b_{e(g)}$ -vel jelöltük.

**Megoldás keresése:** Írjuk be a  $|\Psi(t)\rangle$  eme alakját a (10.2) Schrödinger-egyenletbe, majd képezzük annak skaláris szorzatát balról  $\langle g|$ -vel, illetve  $\langle e|$ -vel.

# Diferenciál egyenlet az időfüggő amplitúdókra

Vegyük figyelembe a számítás során

- $H_0$  sajátértékegyenletét és az  $\langle e | g \rangle = 0$  ortogonalitási relációt.
- hogy a  $D$  operátor páratlan (tértükrözéskor előjelet vált), s így az atomi nívók közötti diagonális mátrixelemei eltűnnek (Laporte-szabály).

Így a  $D$  operátor mátrixelemei, mivel mind  $|g\rangle$ , mind  $|e\rangle$  határozott paritású:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e | D | e \rangle = \langle g | D | g \rangle, \\ d &:= \langle e | D | g \rangle, \quad d^* = \langle g | D | e \rangle. \end{aligned} \quad (10.4)$$

- a forgóhullám-közelítést (rotating wave approximation: RWA): azaz hagyjuk el a  $\cos \omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$  beírása után föllépő az  $\omega + \omega_0$  körfrekvenciával változó két úgynevezett **antirezonáns** tagot. Ezek egy idő szerinti integrálás során nagy nevezővel jelentkeznek, és így elhanyagolhatók az  $\omega_0 - \omega = \Delta$  frekvenciával történő változáshoz képest.

Így az időfüggő amplitúdókra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \dot{b}_g &= i \frac{\Delta}{2} b_g + i \frac{\Omega_r^*}{2} b_e, \\ \dot{b}_e &= -i \frac{\Delta}{2} b_e + i \frac{\Omega_r}{2} b_g, \end{aligned}$$

ahol  $\Omega_r = \frac{d}{\hbar} E_0$  az ún. klasszikus rezonáns Rabi-frekvencia.



# I. Rabi



10.2. ábra: Isidor Isaac Rabi (1898- 1988) amerikai fizikus .

## Az időfüggő amplitúdókra vonatkozó egyenlet megoldása

A (10.5-10.6) egyenletrendszernek a

$$b_g(0) = 1, \quad b_e(0) = 0,$$

kezdeti feltételhez tartozó megoldása

$$\dot{b}_g = i\frac{\Delta}{2}b_g + i\frac{\Omega_r^*}{2}b_e, \quad (10.5)$$

$$\dot{b}_e = -i\frac{\Delta}{2}b_e + i\frac{\Omega_r}{2}b_g, \quad (10.6)$$

ahol  $\Omega = \sqrt{|\Omega_r|^2 + \Delta^2}$  a (nemrezonáns) Rabi-frekvencia.

A megoldásból látható, hogy a felső nível betöltöttségének valószínűsége

$$|b_e|^2 = \frac{|\Omega_r|^2}{|\Omega_r|^2 + \Delta^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2} = \frac{|\Omega_r|^2}{|\Omega_r|^2 + \Delta^2} \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega t),$$

ami 0 és  $\frac{|\Omega_r|^2}{|\Omega_r|^2 + \Delta^2}$  között oszcillál  $\Omega$  körfrekvenciával.

**Megfigyelés:** Pontos rezonancia esetén  $\omega = \omega_0$ ,  $\Delta = 0$ , a felső nível populációja eléri az 1 értéket, az atom periodikusan  $\Omega_r$  körfrekvenciával teljesen invertálódik.

Az amplitúdókra vonatkozó egyenlet

$$\dot{b}_g = i\frac{\Delta}{2}b_g + i\frac{\Omega_r^*}{2}b_e,$$

$$\dot{b}_e = -i\frac{\Delta}{2}b_e + i\frac{\Omega_r}{2}b_g.$$

# A megoldás elemzése, korlátok

$$|b_e|^2 = \frac{|\Omega_r|^2}{|\Omega_r|^2 + \Delta^2} \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega t)$$

Egy állandó amplitúdójú külső mezőben, pontos rezonancia esetén

- az  $\Omega_r t_\pi = \pi$  föltételt teljesítő  $t_\pi$  időtartamig tartó impulzus éppen **invertálja az atomot**, ezért ezt  **$\pi$  impulzusnak** nevezzük.
- az  $\Omega_r t_{2\pi} = 2\pi$  egyenlőség teljesülése esetén viszont az alapállapotból induló atom  $t_{2\pi}$  idő múlva visszakerül az alapállapotba.
- a  $t_{\pi/2} = \pi/(2\Omega_r)$  úgynevezett  $\pi/2$  impulzus az eredetileg akár az alsó akár a felső stacionárius állapotban lévő atomot a két energiasajátállapot egyenlő súlyú szuperpozíciójába viszi.

A főt tárgyalt Rabi-megoldás atomok optikai gerjesztéseinél csak akkor érvényes, ha az atom és a mező kölcsönhatása **koherens**, azaz teljesül az alábbi két föltétel:

- Az atomi állapotok a populációit a folyamatra jellemző  $\Omega_r^{-1}$  nagyságrendű időtartamon belül egyéb relaxációs folyamatok (pl. spontán emisszió, ütközések) nem változtathatják meg
- Ez alatt az időtartam alatt a (10.3) kifejtésben az  $|e\rangle$  és  $|g\rangle$  együtthatóinak egymáshoz viszonyított **fázisa** sem változhat meg más ok miatt (pl. ütközések) mint amit a (10.5, 10.6) egyenletek előírnak.

Ez az utóbbi előírás az, ami könnyebben sérül, és így nehezebb teljesíteni.

# Kétnívós atom kvantumos mezőben

Tekintsük a mezőt és az azzal kölcsönhatásban lévő atomot, amelynek csak két stacionárius állapota közötti átmenetet vizsgálunk. Az atomok többi nívójával és az atom mint egész tömegközépponti mozgásával itt nem foglalkozunk, ezek figyelembevételéről a kísérletek elemzésénél lesz szó.

**A feladat kvantumos változata:** Mind az atomot mind a mezőt kvantummechanikailag írjuk le. EZ Jaynes–Cummings–Paul-modell (JCP).

A rendszer Hamilton-operátora most is

$$H = H_0 + K,$$

ahol  $H_0 = H_a + H_f$  az egymástól független atom és a mező Hamilton-operátorának összege, míg  $K$  a kölcsönhatási operátor a két részrendszer között.

A következőkben levezetjük, hogy a keresett Hamilton operátor alakja:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3 + \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\Omega_0}{2}(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger).$$

# Az egymástól független atom és mező

Vezessük be a  $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$ ,  $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$  definícióval az atomi léptető operátorokat, amiből

$$\sigma_+|g\rangle = |e\rangle, \quad \sigma_+|e\rangle = 0, \quad \text{illetve} \quad \sigma_-|g\rangle = 0, \quad \sigma_-|e\rangle = |g\rangle,$$

és legyen  $\sigma_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$  a felső illetve az alsó állapotra való projekciók különbsége.

**Megjegyzés:** a fenti  $\sigma_k$  operátorok a spin elméletéből ismert Pauli operátorok (mátrixok) fölcserélési relációinak tesznek eleget.

Az energia nulla szintjét az atomban a két figyelembe vett atomi energianívó számtani közepénél vesszük föl  $\Rightarrow$  az **atom Hamilton-operátor** alakja  $H_a = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3$ , amelynek sajátállapotai  $|e\rangle$  és  $|g\rangle$ ,  $\pm \frac{\hbar\omega_0}{2}$  sajátértékekkel.

A **mező Hamilton-operátorát**, minthogy az most a föltételezés szerint egyetlen módusból áll  $H_f = \hbar\omega a^\dagger a$  alakba írjuk, ahol a  $\hbar\omega/2$  alapállapot energiát – minthogy az konstans – elhagyjuk.

Ezek szerint az egymástól független atom és mező Hamilton operátora:

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3 + \hbar\omega a^\dagger a.$$

$H_0$  sajátvektorait az atom és a mező energia-sajátállapotainak (tenzor)szorzataiból kapjuk.

$$H_0|e, n\rangle = \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar n\omega\right)|e, n\rangle, \quad H_0|g, n\rangle = \left(-\frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar n\omega\right)|g, n\rangle.$$

## Az atom és a mező kölcsönhatása

Vizsgáljuk most a  $K$  kölcsönhatási operátort. Ez az előzőekhez hasonlóan  $K = -DE$  alakú, ahol a  $D$  atomi dipólus-operátor. Ennek alakja az  $|e\rangle, |g\rangle$  bázisvektorokkal a (10.4) mátrixelemeknek megfelelően

$$D = d|e\rangle\langle g| + d^*|g\rangle\langle e| = d\sigma_+ + d^*\sigma_-.$$

A továbbiakban itt is föltesszük, hogy  $d = d^*$ .

Az egyetlen  $-\hat{\mathbf{x}}$  irányban polarizáltak föltételezett  $-$  módus elektromos térerősség operátorát vegyük az alábbi alakúnak:

$$E = (a + a^\dagger)\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \sin kz = \mathcal{E}_0 \sin kz (a + a^\dagger)$$

Tfh. a mező hullámhosszánál jóval kisebb méretű atom a módus duzzadó helyénél hat azzal kölcsön, azaz ahol  $|\sin kz| = 1$ . A számolás egyszerűbben kezelhető a  $\sin kz = -1$  választással, tehát ha a kölcsönhatási operátor alakja

$$K = \mathcal{E}_0(d\sigma_+ + d^*\sigma_-)(a + a^\dagger).$$

## Közelítés a $K$ kölcsönhatási operátorban (RWA)

$$K = \mathcal{E}_0(d\sigma_+ + d^* \sigma_-)(a + a^\dagger).$$

A mező operátorainak időfüggését szabad térben a harmonikus időfejlődés adja:

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t}, \quad a^\dagger(t) = a^\dagger(0)e^{i\omega t}.$$

Hasonlóan egyszerűen megmutatható, hogy a  $H_a = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3$  atomi Hamilton operátor hatására a  $\sigma_\pm$  léptető operátorok időfüggése Heisenberg-képben:

$$\sigma_\pm(t) = \sigma_\pm(0)e^{\pm i\omega_0 t}.$$

A  $K$ -beli szorzat kifejtésénél ennek megfelelően az operátorszorzatok közelítőleg a

$$\sigma_+ a \sim e^{+i(\omega_0 - \omega)t}, \quad \sigma_- a^\dagger \sim e^{-i(\omega_0 - \omega)t}, \quad (10.7)$$

$$\sigma_- a \sim e^{-i(\omega_0 + \omega)t}, \quad \sigma_+ a^\dagger \sim e^{i(\omega_0 + \omega)t} \quad (10.8)$$

képleteknek megfelelően változnak időben.

**A második sor antirezonáns tagjait elhanyagolhatjuk:** rezonáns vagy közel rezonáns esetben a második sorban szereplő tagok sokkal gyorsabban változnak mint az első kettő, és egy formális integrálásnál a nevezőben megjelenő  $\pm(\omega_0 + \omega)$  tényezők a második sor szorzatait elhanyagolhatóvá teszik az első sor tagjaihoz képest.

# A Jaynes–Cummings–Paul modell Hamilton operátora

## Az elhanyagolt tagok jelentése:

$\sigma_- a$ : az atom a felső nívóról az alsóra kerül miközben fotonot nyel el,

$\sigma_+ a^\dagger$ : az atom gerjesztését és azzal egyidejűleg egy foton kibocsátást írja le.

Ezek a folyamatok az elemi értelmezésben nem őrzik az energiát, ezért valószínűségük jóval kisebb mint az első két tag által leírt gerjesztés fotonabszorpcióval illetve legerjesztés fotonemisszióval.

Vezessük be az un. vákuum Rabi frekvenciát:  $\frac{2d\mathcal{E}_0}{\hbar} =: \Omega_0$ .

Mint láttuk a mező vákuum állapotában az elektromos térerősségnek nincs határozott értéke, csupán a várható értéke tűnik el. A szórás nagysága ugyanakkor éppen  $\mathcal{E}_0 \sin kz$ .

Tfh. a  $d$  átmeneti dipólusmomentum valós, így a Hamilton operátor alakja:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3 + \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\Omega_0}{2}(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger).$$

Ez a **Jaynes–Cummings–Paul modell Hamilton operátora**.

**Megjegyzés:** más konvencióval a kölcsönhatási tagot az  $i\frac{\hbar\Omega_0}{2}(\sigma_- a^\dagger - \sigma_+ a)$  alakba is szokták írni.



# Megoldás egzakt rezonancia esetén

Egzakt rezonancia esetén ( $\omega_0 = \omega$ ):

- Az  $|e, n\rangle$  és  $|g, n+1\rangle$  állapotok a  $H_0$  operátor  $\varepsilon_n = \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} + n\right)$  kétszer degenerált sajátértékéhez tartozó sajátvektorai.
- Egy további sajátállapot a  $|g, 0\rangle$  alapállapot, amelynek energiája  $-\hbar\frac{\omega_0}{2}$ , és ez nem degenerált.
- Ebből az alapállapotból a kölcsönhatási operátor nem visz ki, mivel

$$K |g, 0\rangle = 0.$$

- Ezen túlmenően a  $K$  kölcsönhatási operátor a fent említett degenerált állapotokat egymásba transzformálja,

$$K |e, n\rangle = \frac{\hbar\Omega_0}{2} (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) |e, n\rangle = \frac{\hbar\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} |g, n+1\rangle,$$

$$K |g, n+1\rangle = \frac{\hbar\Omega_0}{2} (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) |g, n+1\rangle = \frac{\hbar\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} |e, n\rangle.$$

**Összefoglalva:** ha a rendszer kezdetben a  $H_0$  valamelyik ilyen  $\varepsilon_n = \hbar\omega_0 (n + 1/2)$  sajátértékéhez tartozó – az  $|e, n\rangle$  és  $|g, n+1\rangle$  által kifeszített – sajátalterében volt, akkor ebben a kétdimenziós altérben is marad.

## Megoldás az $\varepsilon_n$ -hez tartozó sajátaltérben

Az előzőek szerint a Schrödinger egyenlet megoldása a fenti kétdimenziós térben kereshető a

$$|\Psi(t)\rangle_I = C_e(t) |e, n\rangle + C_g(t) |g, n+1\rangle$$

alakban, ahol a kölcsönhatási képet, azaz a  $|\Psi(t)\rangle_I = e^{iH_0t/\hbar} |\Psi(t)\rangle_S$  állapotvektort használjuk.

Beírva ezt a  $i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle_I}{\partial t} = K |\Psi(t)\rangle_I$  Schrödinger-egyenletbe (kölcsönhatási kép):

$$i\hbar \left( \dot{C}_e |e, n\rangle + \dot{C}_g(t) |g, n+1\rangle \right) = \frac{\hbar\Omega_0}{2} \left( C_e(t) \sqrt{n+1} |g, n+1\rangle + C_g(t) \sqrt{n+1} |e, n\rangle \right).$$

Szorozzunk balról  $\langle e, n|$ -nel, illetve  $\langle g, n+1|$ -el, így a két együtthatóra a

$$\dot{C}_e = -i \frac{\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} C_g = -i \frac{\Omega_n}{2} C_g, \quad \dot{C}_g = -i \frac{\Omega_0}{2} \sqrt{n+1} C_e = -i \frac{\Omega_n}{2} C_e$$

differenciálegyenlet-rendszert nyerjük, ahol bevezettük az  $\Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n+1}$  jelölést.

A megoldás analóg a klasszikus Rabi-problémával, az ottani  $\Omega_r = \frac{d}{\hbar} E_0$  helyett itt  $\Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n+1}$  szerepel:

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= C_{e,n}(0) \cos \frac{\Omega_n}{2} t - i C_{g,n+1}(0) \sin \frac{\Omega_n}{2} t \\ C_{g,n+1}(t) &= C_{g,n+1}(0) \cos \frac{\Omega_n}{2} t - i C_{e,n}(0) \sin \frac{\Omega_n}{2} t \end{aligned} \quad (10.9)$$

## A megoldás elemzése

Mint említettük, az alapállapotból nem történik átmenet. Viszont az  $|e, n = 0\rangle$  állapotból indulva, azaz amikor kezdetben a mező vákuumállapotban az atom pedig a gerjesztett állapotában van, tehát  $C_{e,0}(0) = 1$  és  $C_{g,1}(0) = 0$ , akkor a csatolt rendszer a

$$C_{e,0}(t) = \cos \frac{\Omega_0}{2} t, \quad C_{g,1}(t) = -i \sin \frac{\Omega_0}{2} t$$

képleteknek megfelelően  $\Omega_0$  körfrekvenciával oszcillál a gerjesztett és az alapállapot között, miközben a mező foton száma 0 és 1 között változik.

A megfelelő valószínűségek

$$P_e(t) = \cos^2 \frac{\Omega_0}{2} t = \frac{1}{2}(1 + \cos \Omega_0 t), \quad P_g(t) = \sin^2 \frac{\Omega_0}{2} t = \frac{1}{2}(1 - \cos \Omega_0 t).$$

**Ez a folyamat egy „reverzibilis spontán emisszió”:**

- Az atom először,  $t = \pi/\Omega_0$  időtartam alatt a vákuumba emittálja a fotont, amit néha ebben az esetben is szokás spontán emisszióknak nevezni.
- Ezután egy újabb  $\pi/\Omega_0$  időtartam múlva azt újra abszorbeálja, ezért  $\Omega_0$  neve a vákuum Rabi frekvenciája.

**A két folyamat közötti különbség az atomot körülvevő mező módusstruktúrájában van.** Szemben az üregbe zárt atommal, a szabadon álló atom nagyon sok – az  $\omega_0$  átmeneti frekvenciájával megegyező frekvenciájú – módusnak adhatja át az energiát, emiatt az nem tud visszakerülni az egyetlen kitüntetett szabadsági fokra: az atom gerjesztett állapotába.

## A megoldás elemzése

Ha a rendszer az  $|e, 0\rangle$  kezdőállapotból indul, akkor  $t_{\pi/2} = \pi/(2\Omega_0)$  idő múlva az állapota:

$$|\Psi\rangle_I = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, 0\rangle - i|g, 1\rangle).$$

Kísérletileg is megvalósítható, hogy az atom éppen a jelzett  $\pi/2\Omega_0$  időtartamig tartózkodjék az üregben  $\Rightarrow$  kvantumos  $\pi/2$  impulzus.

Ekkor az atom és a mező láthatóan egy **összefonódott állapot**ba kerül: a fönti  $|\Psi\rangle$  nem írható az atom illetve a módus állapotának szorzataként.

A mezőn való áthaladás után az üreget elhagyó atom állapotát mérni lehet. Ha az  $|e\rangle$ , akkor a mérési posztulátum szerint a mező éppen az  $|n = 0\rangle$  állapotba kerül, míg ha az atomot a  $|g\rangle$  állapotban mérjük, akkor ez a mezőt az  $|n = 1\rangle$  egyfotonos állapotba viszi, s ez akkor történik, amikor az atom már nincs is közvetlen kölcsönhatásban a mezővel. Ez a kísérlet tehát az EPR paradoxon egy ténylegesen megvalósított változata.

Ha a kvantumos móduossal szemben a mezőt **klasszikusan** írjuk le, akkor **külső mező hiányában**, azaz klasszikus vákuumban, **nincs Rabi oszcilláció**, amint az az előző szakasz eredményeiből az  $\Omega_r = 0$  esetben azonnal látszik.

Itt természetesen föltettük, hogy **a rendszer zárt**, nincs veszteség, azaz a mező egyetlen figyelembe vett módusa megtartja a fotont, és az atom is csak ezzel a móduossal hat kölcsön, más szabadsági fokoknak nem ad át energiát.

# Megoldás tetszőleges tiszta kezdőállaputra

## Megfigyelések:

- A kezdetben számállapotban lévő mező esetén a megoldás ugyanúgy periodikus mint a klasszikus esetben, pedig a mező számállapotai igencsak távol állnak attól amit egy klasszikus mező jelent.
- Ha a mező kezdetben koherens állapotban van, akkor a JCP-modell több tekintetben másfajta eredményt ad, mint amit a klasszikus megoldás alapján várnánk.
- Egy adott  $n$ -hez tartozó számállapotot mint kezdőállapotot nem egyszerű előállítani, egy kísérletben a mező induló állapota rendszerint termikus állapot vagy valamilyen viszonylag kis  $\alpha$ -hoz tartozó koherens állapot.

## Az atomot és a mezőt kezdetben független:

$$\text{Atomi állapot: } |\psi(0)\rangle_{at} = C_g(0) |g\rangle + C_e(0) |e\rangle$$

$$\text{Mező módus állapota: } |\psi(0)\rangle_f = \sum_n C_n(0) |n\rangle$$

Tetszőleges tiszta kezdőállapot a független állapotok szorzata:

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle_a \otimes |\psi(0)\rangle_f = \sum_n C_n(0) \{C_g(0) |g, n\rangle + C_e(0) |e, n\rangle\}.$$

Ezt alkalmas  $C_n(0)$  együtthatókkal kísérletileg is meg lehet valósítani.

## Megoldás tetszőleges tiszta kezdőállaptra

A  $\{C_g(0)|g, n\rangle + C_e(0)|e, n\rangle\}$  állapot időfejlődését már ismerjük (10.9), (a  $|g, n\rangle$  esetén a korábbi  $|g, n+1\rangle$ -nél  $n$  helyett  $n-1$  írandó). Ilyen módon a megfelelő megoldás:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \left\{ \left[ C_e(0)C_n(0) \cos \frac{\Omega_n t}{2} - iC_g(0)C_{n+1}(0) \sin \frac{\Omega_n t}{2} \right] |e\rangle + \left[ -iC_e(0)C_{n-1}(0) \sin \frac{\Omega_{n-1} t}{2} + C_g(0)C_n(0) \cos \frac{\Omega_{n-1} t}{2} \right] |g\rangle \right\} |n\rangle,$$

ahol  $\Omega_{-1} = 0$ .

Legyen speciálisan ismét  $C_e(0) = 1$ ,  $C_g(0) = 0$ , ilyenkor:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n(0) \cos \frac{\Omega_n t}{2} |e, n\rangle - iC_{n+1}(0) \sin \frac{\Omega_n t}{2} |g, n+1\rangle.$$

Annak a  $P_e$  valószínűségét, hogy az atom az  $|e\rangle$  állapotban van a **módus állapotára való tekintet nélkül** az  $|e\rangle\langle e| \otimes \mathbb{1}$  operátor várható értéke adja, ahol  $\mathbb{1}$  a módus állapotterének egységoperátora:

$$P_e = \sum_n |C_n(0)|^2 \cos^2 \frac{\sqrt{n+1}\Omega_0 t}{2} = \sum_n |C_n(0)|^2 \frac{1}{2} (1 + \cos \sqrt{n+1}\Omega_0 t).$$

## Kezdetben koherens állapotban lévő módus esete

$$P_e = \sum_n |C_n(0)|^2 \cos^2 \frac{\sqrt{n+1}\Omega_0 t}{2} = \sum_n |C_n(0)|^2 \frac{1}{2} (1 + \cos \sqrt{n+1}\Omega_0 t).$$

**Tfh. a mező klasszikus:** abban az értelemben, hogy azt kezdetben egy  $|\alpha\rangle$  koherens állapot írja le, és az ennek megfelelő  $|C_n(0)|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}$  Poisson-eloszlás várható értéke, vagyis az  $\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2$  átlagos fotonszám, jóval nagyobb mint 1.

Ekkor az eloszlás szórása a várható értékhez képest kicsi lesz:  $\langle n \rangle^{1/2} \ll \langle n \rangle$ , s így az összegben a sokféle  $\Omega_n$  közül egyetlen, az  $n = \langle n \rangle$ -hez tartozó lesz a domináns.

Ilyenkor  $\Omega_{\langle n \rangle} = \sqrt{\langle n \rangle + 1} \Omega_0$  azonosítható  $\Omega_r$ -el a klasszikus rezonáns Rabi-frekvenciával, s így a kvantumos Rabi-oszcillációk átmennek a klasszikusba.

**Cummings-féle kollapszus:** A fenti szummában különböző, irracionális arányú diszkrét frekvenciákkal változó harmonikus jelek  $|C_n|^2$ -tel súlyozott összege szerepel. Ez az összeg a destruktív interferencia miatt hamar 0-vá válik.

## Becslés a kollapszus idejére

Az összegben azokhoz a diszkrét Rabi-frekvenciákhoz tartozó tagok járulékaik lesznek jelentősek amelyekre  $n$  a szórási tartományon azaz az  $\langle n \rangle + \Delta n$  és  $\langle n \rangle - \Delta n$  intervallumon belülre esnek.

A Fourier-transzformáció tulajdonságait (frekvencia-idő határozatlansági reláció) használva, az a  $t_C$  időtartam amíg az egyes frekvenciákhoz tartozó rezgések nem oltják ki egymást nagyjából a

$$t_C(\Omega_{\langle n \rangle + \Delta n} - \Omega_{\langle n \rangle - \Delta n}) \simeq \pi \quad (10.10)$$

egyenletből kapható meg.

Koherens kezdőállapotnál azaz Poisson-eloszlásnál a fotonszám szórása  $\Delta n = \langle n \rangle^{1/2}$ .

Vizsgáljuk az  $\langle n \rangle \gg 1$  esetet, amikor  $\Omega_{\langle n \rangle} = \Omega_0 \sqrt{\langle n \rangle + 1} \approx \Omega_0 \sqrt{\langle n \rangle}$ . Sorfejtést használva

$$\begin{aligned} \Omega_{\langle n \rangle \pm \Delta n} &= \Omega_0 \sqrt{\langle n \rangle \pm \langle n \rangle^{1/2}} = \Omega_0 \langle n \rangle^{1/2} \left(1 \pm 1/\langle n \rangle^{1/2}\right)^{1/2} \\ &\approx \Omega_0 \langle n \rangle^{1/2} \left(1 \pm \frac{1}{2\langle n \rangle^{1/2}}\right) = \Omega_0 \langle n \rangle^{1/2} \pm \frac{\Omega_0}{2}. \end{aligned}$$

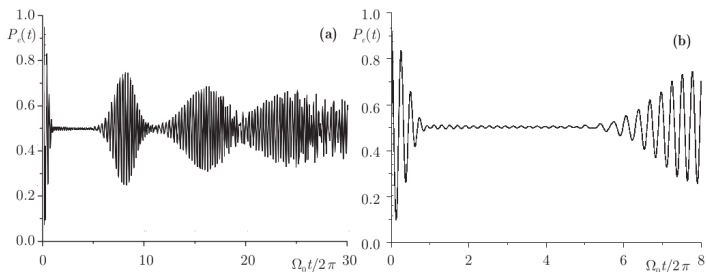
Így (10.10)-ből  $t_C \simeq \pi \Omega_0^{-1}$  és ez független  $\langle n \rangle$ -től.



## Becslés a kollapszus idejére

Egy pontosabb, de jóval bonyolultabb számolás szerint a kollapszus során a gerjesztett állapot valószínűségének burkolóját egy Gauss-függvény adja meg:

$$P_e = \frac{1}{2} + \frac{e^{-|\Omega_0 t|^2}}{2} \cos(2|\alpha|\Omega_0 t).$$



**10.3. ábra:** Kollapszus és föléledés. A gerjesztett állapot valószínűsége  $P_e$  mint az idő függvénye. Kezdetben az atom az  $|e\rangle$  gerjesztett állapotban van, a mező kezdeti állapota pedig az  $|\alpha\rangle$  koherens állapot, ahol a fotonszám várható értéke  $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 15$ . Az (b) ábrán a folyamat kezdete nagyobb fölbontásban.

## Főléledés

$$P_e = \frac{1}{2} + \frac{e^{-|\Omega_0 t|^2}}{2} \cos(2|\alpha|\Omega_0 t)$$

Jóval később, 1980 körül fedezték föl numerikus szimulációkkal, hogy hosszabb idő múlva  $P_e$  úgynevezett föléledést is mutat.

A föléledés annak a következménye, hogy egy idő múlva a **szomszédos** frekvenciájú rezgések fázisa közelítőleg éppen  $2\pi$  valamilyen egész számú többszörösével különbözik egymástól.

A kollapszusnál használt egyszerű közelítés szerint erre olyan  $t_R$  időpontokban kerülhet sor, amelyekre

$$t_R(\Omega_{\langle n \rangle + 1} - \Omega_{\langle n \rangle}) \simeq 2\pi k,$$

ami nagyjából az alábbi időpontokra vezet:

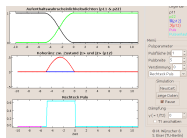
$$t_R = (4\pi/\Omega_0) \langle n \rangle^{1/2} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A kísérletileg is megfigyelt föléledés egy jóval erősebb bizonyíték a diszkrét Rabi-frekvenciák, azaz a **mező diszkrét szerkezeté mellett** mint a kollapszus.

**Megjegyzés:** A mező amplitúdójában megjelenő bármely folytonos eloszlása esetén annak szórása is irreverzibilis kollapszust eredményezne. A föléledés viszont nyilvánvalóan csak diszkrét fázisok azaz diszkrét Rabi-frekvenciák esetén léphet föl.

# Főléledés

## Animáció:



Ez az interaktív animáció lézerrel gerjesztett kétállapotú rendszert mutat be. Különböző impulzus alak és hossz esetén tanulmányozhatjuk az alap és a gerjesztett állapot betöltöttségének alakulását. Többek között kipróbálhatjuk egy  $\pi$  vagy  $\pi/2$  impulzus hatását. (Lásd ellenőrző kérdések.)

<http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/quantenmechanik/zweiniveau/parameter/en/>

## A stacionárius állapotok megkeresése

A JCP-modell egy másik módszerrel történő megoldása **nemrezonáns** esetben:

- Megkeressük a teljes  $H$  sajátértékeit és sajátállapotait, amelyek időfejlődése  $H$  szempontjából stacionárius.
- Ezután tetszőleges kezdőállapot esetén, annak a  $H$  stacionárius állapotai szerinti kifejtésében a szuperpozíció minden tagját az  $e^{-i\varepsilon t/\hbar}$  fázistényezővel szorozva megkapjuk a megoldást.

Keressük meg tehát a JCP-féle

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3 + \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\Omega_0}{2}(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger)$$

Hamilton operátor stacionárius állapotait úgy, hogy az atomi átmenet és a módus körfrekvenciája közötti elhangolás nem tűnik el, azaz  $\Delta = \omega_0 - \omega \neq 0$ .

A  $H_0 + K$  operátor mátrixa a  $H_0$  operátor  $|e, n\rangle$ ,  $|g, n+1\rangle$  ortogonális sajátállapotaiban az előző pontban tárgyalt esethez hasonlóan (az alapállapot kivételével) most is  $2 \times 2$ -es blokkokra esik szét:

$$H_n = \hbar \begin{bmatrix} \omega_0/2 + n\omega & 0 \\ 0 & -\omega_0/2 + (n+1)\omega \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Omega_0\sqrt{n+1} \\ \Omega_0\sqrt{n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

ahol az első mátrix a  $H_0$  a második a  $K$  operátor mátrixa, az  $n$ -nel indexelt egyes blokkokban.

# A sajátérték probléma megoldása: fölrüházott állapotok

Figyelembe véve a  $\Delta = \omega_0 - \omega$  elhangolást, kiküszöbölve  $\omega_0$ -t, majd leválasztva egy az egyiségmátrixszal arányos tagot kapjuk, hogy

$$H_n = \hbar \begin{bmatrix} (n + 1/2)\omega & 0 \\ 0 & (n + 1/2)\omega \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} +\Delta & \Omega_0 \sqrt{n+1} \\ \Omega_0 \sqrt{n+1} & -\Delta \end{bmatrix}.$$

A  $H_n$  sajátértékeinek meghatározásához nyilván elegendő a fönti második mátrix diagonalizálása. Ennek eredményeképpen a sajátértékek a  $\hbar/2$  tényezőtől eltekintve a  $-(\Delta^2 - \lambda^2) - \Omega_0^2(n+1) = 0$  egyenlet gyökei azaz a  $H_n$  sajátértékei:

$$\varepsilon_{\pm}(n) = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \hbar \Omega_n(\Delta), \quad \text{ahol } \Omega_n(\Delta) := (\Delta^2 + \Omega_0^2(n+1))^{1/2},$$

és korábbi jelölésünk szerint  $\Omega_n(\Delta = 0) = \Omega_n$ .

A sajátvektorok az  $|e, n\rangle$ ,  $|g, n+1\rangle$  alábbi lineáris kombinációi („fölrüházott” állapotok):

$$\begin{aligned} |+, n\rangle &= \cos \frac{\theta_n}{2} |e, n\rangle + \sin \frac{\theta_n}{2} |g, n+1\rangle \\ |-, n\rangle &= -\sin \frac{\theta_n}{2} |e, n\rangle + \cos \frac{\theta_n}{2} |g, n+1\rangle \end{aligned} \quad (10.11)$$

ahol a  $\theta_n$  (Stückelberg-szög) a  $\tan \theta_n = \frac{\Omega_n}{\Delta}$  összefüggéssel definiált. A  $\Delta = 0$  esetben ez a szög éppen  $\theta_n = \pi/2$ , és az (10.11) kifejezésben szereplő minden együttható  $1/\sqrt{2}$ .

# Az időfüggés megadása fölrüházott állapotokkal

**Legyen először a kezdő állapot speciálisan éppen  $|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle$ :**

Fejezzük ezt ki a teljes  $H$  sajátállapotaival, azaz a fölrüházott állapotokkal. (10.11)-ből azonnal láthatóan:

$$|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle = \cos \frac{\theta_n}{2} |+, n\rangle - \sin \frac{\theta_n}{2} |-, n\rangle$$

Ennek időfejlődése

$$|e, n\rangle \rightarrow \cos \frac{\theta_n}{2} |+, n\rangle e^{-i\varepsilon_+(n)t/\hbar} - \sin \frac{\theta_n}{2} |-, n\rangle e^{-i\varepsilon_-(n)t/\hbar}$$

Ha a mező kezdőállapota nem egy fotonszám sajátállapot, hanem egy tetszőleges  $\sum_n C_n |n\rangle$  szuperpozíció de kikötjük, hogy az atom a gerjesztett állapotából indul, akkor  $|\Psi(0)\rangle = |e\rangle \otimes \sum_n C_n |n\rangle = \sum_n C_n |e, n\rangle$ . Ennek minden tagja megint csak kifejezhető a fölrüházott állapotokkal az előző képletnek megfelelően, és mint tudjuk az egyes stacionárius állapotok egymástól függetlenül a megfelelő  $e^{-i\varepsilon t/\hbar}$  fázisfaktorial szorozva fejlődnek időben. Így

$$\sum_n C_n |e, n\rangle \rightarrow \sum_n C_n \left( \cos \frac{\theta_n}{2} |+, n\rangle e^{-i\varepsilon_+(n)t/\hbar} - \sin \frac{\theta_n}{2} |-, n\rangle e^{-i\varepsilon_-(n)t/\hbar} \right).$$

## Az időfüggés megadása fölrüházott állapotokkal

**Tetszőleges kezdő állapot esetén:** végtelen összegként egzaktul fölrüházható az időfejlesztett állapot.

**Egzakt rezonancia esete:**  $\Delta = 0$ , azaz a  $\theta_n = \Omega_n$  esetet kell tekintenünk. Ez esetben a korábbi formulából a következő adódik:

$$\begin{aligned} \sum_n C_n |e, n\rangle &\rightarrow \sum_n \frac{1}{\sqrt{2}} C_n \left( |+, n\rangle e^{-i\Omega_n t/2} - |-, n\rangle e^{+i\Omega_n t/2} \right) = \\ &= \sum_n C_n \left\{ \left( \frac{|+, n\rangle - |-, n\rangle}{\sqrt{2}} \right) \cos \frac{\Omega_n t}{2} - i \left( \frac{|+, n\rangle + |-, n\rangle}{\sqrt{2}} \right) \sin \frac{\Omega_n t}{2} \right\}. \end{aligned}$$

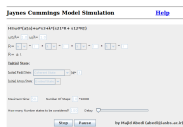
A két eredmény azonossága abból látható, hogy a fölrüházott állapotokat kifejezzük a csupasz állapotokkal, s ez egzakt rezonancia esetén  $(|+, n\rangle - |-, n\rangle)/\sqrt{2} = |e, n\rangle$ , és  $(|+, n\rangle + |-, n\rangle)/\sqrt{2} = |g, n+1\rangle$ . Így az eredmény

$$\begin{aligned} \sum_n C_n |e, n\rangle &\rightarrow \sum_n C_n \left\{ |e, n\rangle \cos \frac{\Omega_n t}{2} - i |g, n+1\rangle \sin \frac{\Omega_n t}{2} \right\} = \\ &= \sum_n C_n \left\{ |e, n\rangle \cos \frac{\Omega_n t}{2} - i |g, n\rangle \sin \frac{\Omega_{n-1} t}{2} \right\} \end{aligned}$$

megegyezésben az előző pontban kapott megoldással.

# JCP-modellen alapuló animáció

## Animáció:



Ezen az interaktív animáción a Jaynes-Cummings modellt tanulmányozhatjuk. A mező és az atom esetén is különböző kezdőállapotokat választhatunk. Állíthatjuk a kölcsönhatás és az elhanyagolás mértékét. Illetve játszhatunk az operátor struktúrájával is. Részletes leírást a Help link alatt találunk.

<http://wwwpub.zih.tu-dresden.de/~adebi/programming/jc/>



# Ellenőrző kérdések

- 1 Milyen rendszert ír le a JCP modell és milyen egyszerűsítéseket tételéz föl?
- 2 Milyen feltételek indokolják a két nívójú rezonáns közelítést?
- 3 Mit jelent az RWA rövidítés?
- 4 Milyen mennyiségek határozzák meg a klasszikus rezonáns Rabi frekvenciát és mi a Rabi oszcilláció jelensége?
- 5 Egy kezdetben alapállapotban lévő atom milyen állapotba jut egy  $\pi$  impulzus hatására, és mi történik egy  $\pi/2$  impulzus esetén?
- 6 Milyen tagokból áll a JCP Hamilton operátor?
- 7 Miben hasonlít és miben különbözik a klasszikus és a kvantum Rabi probléma megoldása?
- 8 Mit nevezünk kollapszusnak és föléléedésnek, és mie ezen jelenségek szemléletes oka?
- 9 Mit nevezünk csupasz illetve fölruházott állapotoknak?