Valószínűségelmélet

Pap Gyula
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, Sztochasztika Tanszék
papgy@math.u-szeged.hu

1 Mértékelméleti előkészítés

1.1 Definíció. *Legyen Ω nemüres halmaz. Az Ω bizonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{H}$ halmazrendszert* ***halmazalgebrának*** *nevezzük, ha*

(i) $\Omega \in \mathcal{H}$,

(ii) *zárt az unióképzésre, azaz tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \cup B \in \mathcal{H}$,*

(iii) *zárt a komplementerképzésre, azaz tetszőleges $A \in \mathcal{H}$ esetén $\overline{A} := \Omega \setminus A \in \mathcal{H}$.*

Az $\mathcal{A}$ halmazalgebrát ***σ-algebrának*** *nevezzük, ha* (ii) *következő erősebb változata teljesül:*

(ii') *zárt a megszámlálható unióképzésre, azaz ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Ekkor az $(\Omega, \mathcal{A})$ párt ***mérhetőségi térnek*** *nevezzük.*

1.2 Definíció. *Legyen Ω nemüres halmaz és $\mathcal{H}$ az Ω bizonyos részhalmazaiból álló halmazalgebra. Azt mondjuk, hogy a $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ halmazfüggvény*

- ***végesen additív****, ha tetszőleges $A, B \in \mathcal{H}$ diszjunkt halmazok esetén*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B);$$

- ***mérték****, ha $\nu(\emptyset) = 0$ és* ***σ-additív****, azaz*

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),$$

  ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$ páronként diszjunktak és $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H}$.

Azt mondjuk, hogy a $\nu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ mérték

- ***véges****, ha $\nu(\Omega) < \infty$;*
- ***valószínűségi mérték****, ha $\nu(\Omega) = 1$;*
- ***σ-véges****, ha léteznek olyan $\Omega_1, \Omega_2, \dots \in \mathcal{H}$ halmazok úgy, hogy $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$, és $\nu(\Omega_k) < \infty$.*

Azt mondjuk, hogy a $\nu : \mathcal{H} \to [-\infty, \infty]$ *halmazfüggvény* ***előjeles mérték****, ha előáll* $\nu = \nu_1 - \nu_2$ *alakban, ahol* ν_1, ν_2 *mértékek, és legalább az egyik véges.*

(Ha $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ végesen additív, akkor persze teljes indukcióval következik, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és tetszőleges $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazok esetén $\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$.)

1.3 Definíció. *Legyen* Ω *nemüres halmaz. Legyen minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $A_n \subset \Omega$.

Ha $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ *és* $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, *akkor azt írjuk, hogy* $A_n \uparrow A$ *ha* $n \to \infty$.

Ha $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *és* $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, *akkor azt írjuk, hogy* $A_n \downarrow A$ *ha* $n \to \infty$.

1.4 Állítás. *Legyen* Ω *nemüres halmaz és* $\mathcal{H}$ *az* Ω *bizonyos részhalmazaiból álló halmazalgebra. Legyen* $\mathrm{P} : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ *olyan végesen additív halmazfüggvény, melyre* $\mathrm{P}(\Omega) = 1$. *Ekkor*

(i) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$;

(ii) *tetszőleges* $A \in \mathcal{H}$ *esetén* $0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1$;

(iii) P ***monoton****, azaz tetszőleges* $A, B \in \mathcal{H}$, $A \subset B$ *esetén* $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$, *továbbá* $\mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$;

(iv) *tetszőleges* $A \in \mathcal{H}$ *esetén* $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$;

(v) *a következő állítások ekvivalensek:*

(a) P σ*-additív.*

(b) P ***alulról folytonos****, azaz tetszőleges* $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{H}$, $A_n \uparrow A$ *és* $A \in \mathcal{H}$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A)$.

(c) P ***felülről folytonos****, azaz tetszőleges* $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{H}$, $A_n \downarrow A$ *és* $A \in \mathcal{H}$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(A)$.

(d) P ***„felülről folytonos az üres halmazon”****, azaz tetszőleges* $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{H}$ *és* $A_n \downarrow \emptyset$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 0$.

1.5 Állítás. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A})$ *mérhető tér és* $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *valószínűségi mérték. Ekkor*

(i) P *végesen additív;*

(ii) P ***σ-szubadditív****, azaz tetszőleges* $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ *esetén* $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

1.6 Tétel. (Carathéodory kiterjesztési tétele) *Legyen* Ω *nemüres halmaz és* $\mathcal{H}$ *az* Ω *bizonyos részhalmazaiból álló halmazalgebra. Legyen* $\mu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ σ*-véges mérték. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott* $\nu : \sigma(\mathcal{H}) \to [0, \infty]$ σ*-véges mérték úgy, hogy tetszőleges* $A \in \mathcal{H}$ *esetén* $\nu(A) = \mu(A)$.

Nyilván σ-algebrák tetszőleges halmazának metszete σ-algebra.

1.7 Definíció. *Legyen Ω nemüres halmaz. Legyen Γ nemüres halmaz és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $A_\gamma \subset \Omega$. Az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazokat tartalmazó σ-algebrák metszetét* ***az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazrendszer által generált σ-algebrának*** *nevezzük. Jelölése: $\sigma(A_\gamma : \gamma \in \Gamma)$.*

(Tulajdonképpen $\sigma(A_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ az a legszűkebb σ-algebra, mely tartalmazza az $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ halmazokat.)

1.8 Definíció. *Legyenek Ω és Γ nemüres halmazok, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $g_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ tetszőleges függvény. A $\{g_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$* ***függvényrendszer által generált σ-algebra:***

$$\sigma(g_\gamma : \gamma \in \Gamma) := \sigma(g_\gamma^{-1}(B) : \gamma \in \Gamma,\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)).$$

Legyenek Ω nemüres halmaz. Ekkor a $g : \Omega \to \mathbb{R}^d$ függvény által generált σ-algebra nyilván

$$\sigma(g) = g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) := \{g^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\},$$

hiszen egyrészt $\{g^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\} \subset \sigma(g)$, másrészt a $\{g^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$ halmazok σ-algebrát alkotnak. (Ez a σ-algebra Ω éppen azon A részhalmazaiból áll, melyek esetén $g(\omega)$ megfigyelésével eldönthető, hogy $\omega \in A$ teljesül-e, vagy sem.)

1.9 Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér. Azt mondjuk, hogy a $g : \Omega \to \mathbb{R}^d$ függvény* ***mérhető****, ha tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén*

$$g^{-1}(B) := \{g \in B\} := \{\omega \in \Omega : g(\omega) \in B\} \in \mathcal{A},$$

vagyis $\sigma(g) \subset \mathcal{A}$.

Legyen továbbá $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész-σ-algebra. Azt mondjuk, hogy a $g : \Omega \to \mathbb{R}^d$ függvény ***$\mathcal{F}$-mérhető****, ha tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén*

$$g^{-1}(B) \in \mathcal{F},$$

vagyis $\sigma(g) \subset \mathcal{F}$.

Nyilván $\sigma(g)$ az a legszűkebb σ-algebra, melyre nézve a g függvény mérhető.

Hasonlóan, ha Ω és Γ nemüres halmazok, minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $g_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ tetszőleges függvény, akkor $\sigma(g_\gamma : \gamma \in \Gamma)$ az a legszűkebb σ-algebra, melyre nézve az összes $\{g_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ leképezés mérhető.

Ha $a, b \in \mathbb{R}^d$, akkor $a \leqslant b$ illetve $a < b$ azt jelenti, hogy minden $j = 1, \dots, d$ esetén $a_j \leqslant b_j$ illetve $a_j < b_j$ teljesül, és jelölje $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}^d : a < x \leqslant b\}$. A $g = (g_1, \dots, g_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ függvény akkor és csak akkor mérhető, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}^d$ esetén $\{\omega \in \Omega : g(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$, hiszen

$$\{\omega \in \Omega : g(\omega) \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega : g_1(\omega) \leqslant x_1, \dots, g_d(\omega) \leqslant x_d\} = g^{-1}\left(\times_{j=1}^d (-\infty, x_j]\right),$$

és a $\{\times_{j=1}^d(-\infty, x_j] : x \in \mathbb{R}^d\}$ téglák generálják a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ σ-algebrát, ezért ha ennek a generátorrendszernek az ősképe benne van az $\mathcal{A}$ σ-algebrában, akkor az egész $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ σ-algebra ősképe benne van $\mathcal{A}$-ban. (Ekkor ugyanis a „jó halmazok" módszerével: ha tekintjük azon $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ halmazokat, melyekre teljesül $g^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, akkor ezek σ-algebrát alkotnak, másrészt tartalmazzák a generátorrendszert, így tartalmazzák $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-t is.)

1.10 Definíció. ***Valószínűségi mező*** *alatt olyan* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *hármast értünk, ahol* $(\Omega, \mathcal{A})$ *mérhetőségi tér,* $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *valószínűségi mérték.*

1.11 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező. Azt mondjuk, hogy az* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvény* ***véletlen változó*** *(vagy valószínűségi változó), ha mérhető. Azt mondjuk, hogy az* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *függvény* ***véletlen vektor*** *(vagy valószínűségi vektorváltozó), ha mérhető.*

Az $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor* ***eloszlása*** *a* $\mathrm{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}_X(B) := \mathrm{P}(X \in B) = \mathrm{P}(X^{-1}(B)), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

halmazfüggvény, mely nyilván valószínűségi mérték az $(X, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *mérhetőségi téren.*

Azt mondjuk, hogy az $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor* ***diszkrét****, ha értékkészlete, a* $X(\Omega)$ *halmaz megszámlálható. Azt mondjuk, hogy az* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen elem* ***egyszerű****, ha értékkészlete véges halmaz.*

Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen elemek és* $\mathrm{P}(X = Y) = 1$, *akkor azt írjuk, hogy* $X = Y$ P-m.b. *(egyenlőek* P*-majdnem biztosan).*

Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ egyszerű véletlen vektor melynek értékkészlete $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_\ell\}$, akkor

$$X = \sum_{j=1}^{\ell} x_j \mathbb{1}_{A_j},$$

ahol $A_j := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\} \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, \ell$ diszjunkt halmazok, és $\bigcup_{j=1}^{\ell} A_j = \Omega$.

1.12 Lemma. *Tetszőleges* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *nemnegatív véletlen változó esetén létezik nemnegatív egyszerű véletlen változókból álló* $Y_1, Y_2, \dots$ *sorozat úgy, hogy tetszőleges* $\omega \in \Omega$ *esetén* $Y_n(\omega) \uparrow Y(\omega)$ *ha* $n \to \infty$.

Például az

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n2^n} (j-1)2^{-n} \mathbb{1}_{\{(j-1)2^{-n} \leqslant Y < j2^{-n}\}}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

sorozat megfelel.

1.13 Következmény. *Tetszőleges* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor esetén léteznek olyan* $X_1, X_2, \dots$ *egyszerű véletlen vektorok, hogy tetszőleges* $\omega \in \Omega$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.

1.14 Állítás. *Legyen* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor.*

(i) *Ha* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$ *mérhető függvény, akkor a* $g \circ X : \Omega \to \mathbb{R}^r$ *összetett függvény* $\sigma(X)$*-mérhető véletlen vektor, azaz* $\sigma(g \circ X) \subset \sigma(X)$.

(ii) *Ha* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^r$ $\sigma(X)$*-mérhető véletlen vektor, azaz* $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$, *akkor létezik olyan* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$ *mérhető függvény, hogy* $Y = g \circ X$.

Bizonyítás. (i) abból következik, hogy tetszőleges $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$ esetén $(g \circ X)^{-1}(D) = X^{-1}(g^{-1}(D)) \in \sigma(X)$, hiszen $g^{-1}(D) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

(ii). Nyilván elegendő $r = 1$ esetén bizonyítani. Ha $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ egyszerű véletlen változó, akkor

$$Y = \sum_{j=1}^{k} y_j \mathbb{1}_{A_j}$$

alakú, ahol $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$, és Y $\sigma(X)$-mérhetősége miatt

$$A_j \in \sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\},$$

így léteznek olyan $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ halmazok, hogy $A_j = X^{-1}(B_j)$. Nyilván

$$\mathbb{1}_{A_j}(\omega) = \mathbb{1}_{X^{-1}(B_j)}(\omega) = \mathbb{1}_{B_j}(X(\omega)),$$

azaz $\mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{B_j} \circ X$. Ezért $Y = g \circ X$ teljesül a $g := \sum_{j=1}^{k} y_j \mathbb{1}_{B_j} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mérhető függvénnyel. (Itt $B_1, \dots, B_k$ nem feltétlenül diszjunktak.)

Tetszőleges $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó esetén az 1.13 Lemma alapján létezik egyszerű véletlen változókból álló $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat úgy, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)$. Az előző rész alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $g_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, hogy $Y_n = g_n \circ X$. Tekintsük a

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : \lim_{n\to\infty} g_n(x) \text{ létezik}\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

mérhető halmazt és a $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) & \text{ha } x \in H, \\ 0 & \text{ha } x \notin H \end{cases}$$

mérhető függvényt. Tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $X(\omega) \in H$, ugyanis $g_n(X(\omega)) = Y_n(\omega) \to Y(\omega)$, ezért $g(X(\omega)) = \lim_{n\to\infty} g_n(X(\omega)) = \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)$. $\square$

1.15 Definíció. *Az* $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor* ***eloszlásfüggvénye*** $F_X = F_{X_1,\dots,X_d} : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$,

$$F_X(x) := \mathrm{P}(X \leqslant x) = \mathrm{P}(X_1 \leqslant x_1, \dots, X_d \leqslant x_d), \qquad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Jelölje $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}$, $u < v$ és $x \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\Delta_{u,v}^{(j)} g(x) := g(x_1, \dots, x_{j-1}, v, x_{j+1}, \dots, x_d) - g(x_1, \dots, x_{j-1}, u, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

1.16 Állítás. *Az* $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye valamely* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektornak, ha*

(i) F *minden változójában monoton növekvő,*

(ii) F *minden változójában jobbról folytonos,*

(iii) $\lim\limits_{\min\{x_1,\dots,x_d\} \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{\min\{x_1,\dots,x_d\} \to \infty} F(x) = 1,$

(iv) *tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$ *esetén* $\Delta_{a_1,b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_d,b_d}^{(d)} F \geqslant 0.$

(Ha $k = 1$, *akkor* (iv) *következik* (i)*-ből.)*

Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$ esetén

$$\mathrm{P}(X \in (a, b]) = \Delta_{a_1,b_1}^{(1)} \dots \Delta_{a_d,b_d}^{(d)} F_X \geqslant 0,$$

tehát P_X az F_X függvény által generált Lebesgue–Stieltjes mérték.

1.17 Állítás. *Legyenek* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektorok. Ekkor* $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_Y \iff F_X = F_Y$.

2 Függetlenség, Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye

2.1 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $\Gamma \neq \emptyset$ *nemüres halmaz. Legyen minden* $\gamma \in \Gamma$ *esetén* $\mathcal{F}_\gamma \subset \mathcal{A}$ *rész-σ-algebra. Azt mondjuk, hogy az* $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *rész-σ-algebrák* ***függetlenek****, ha a* Γ *különböző elemeiből álló minden* $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ *véges részhalmaz esetén és minden* $A_{\gamma_1} \in \mathcal{F}_{\gamma_1}, \ldots, A_{\gamma_n} \in \mathcal{F}_{\gamma_n}$ *választással teljesül*

$$\mathrm{P}(A_{\gamma_1} \cap \ldots \cap A_{\gamma_n}) = \mathrm{P}(A_{\gamma_1}) \cdots \mathrm{P}(A_{\gamma_n}).$$

Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ *esetén* $A_\gamma \in \mathcal{A}$. *Azt mondjuk, hogy az* $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *események* ***függetlenek****, ha a hozzájuk rendelt* $\big\{\{\emptyset,\, A_\gamma,\, \Omega \setminus A_\gamma,\, \Omega\} : \gamma \in \Gamma\big\}$ *rész-σ-algebrák függetlenek.*

Legyen minden $\gamma \in \Gamma$ *esetén* $X_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor. Azt mondjuk, hogy az* $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *véletlen vektorok* ***függetlenek****, ha a hozzájuk rendelt* $\big\{\sigma(X_\gamma) : \gamma \in \Gamma\big\}$ *rész-σ-algebrák függetlenek.*

2.2 Lemma. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező. Ha az* $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$ *és* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ *véletlen vektorok függetlenek, akkor tetszőleges* $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^r$, $h : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^p$ *mérhető függvények esetén a* $g \circ X : \Omega \to \mathbb{R}^r$ *és* $h \circ Y : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *véletlen vektorok is függetlenek.*

Valóban, az 1.14 Lemma alapján $\sigma(g \circ X) \subset \sigma(X)$ és $\sigma(h \circ Y) \subset \sigma(Y)$.

2.3 Lemma. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező. Ha az* $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{A}$ *és* $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{A}$ *részhalmazalgebrák függetlenek abban az értelemben, hogy tetszőleges* $A \in \mathcal{F}_0$ *és* $B \in \mathcal{G}_0$ *esetén*

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B),$$

akkor a generált $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{F}_0)$ *és* $\mathcal{G} := \sigma(\mathcal{G}_0)$ *rész-σ-algebrák is függetlenek.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $B \in \mathcal{G}_0$ eseményt. Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhetőségi téren a $\mu(A) := \mathrm{P}(A \cap B)$, $A \in \mathcal{F}$ és a $\nu(A) := \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$, $A \in \mathcal{F}$ nemnegatív halmazfüggvényeket. Ezek a P σ-additivitása miatt σ-additívak lesznek, és $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) = \mathrm{P}(B)$, továbbá μ és ν megegyezik az $\mathcal{F}_0$ halmazalgebrán, mely generálja $\mathcal{F}$-et, ezért a mértékek 1.6 kiterjesztési tétele alapján μ és ν megegyezik $\mathcal{F}$-en: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$, $A \in \mathcal{F}$. Rögzítsünk most egy $A \in \mathcal{F}$ eseményt; az előzőhöz hasonló gondolatmenettel teljesül $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$ minden $A \in \mathcal{F}$ és $B \in \mathcal{G}$ esetén. $\square$

2.4 Lemma. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező. Ha az* $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_\ell$ *rész-σ-algebrák függetlenek, akkor az*

$$\mathcal{F} := \sigma\left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i\right), \qquad \mathcal{G} := \sigma\left(\bigcup_{j=1}^{\ell} \mathcal{G}_j\right)$$

rész-σ-algebrák is függetlenek.

Bizonyítás. A $\mathcal{F}$ rész-σ-algebrát generálja az az $\mathcal{F}_0$ halmazalgebra, mely a $\bigcap_{i=1}^k A_i$ metszetek véges, diszjunkt unióiból áll, ahol $A_i \in \mathcal{F}_i$ ha $i \in \{1, \dots, k\}$. (Ugyanis ekkor nyilván $\bigcap_{i=1}^k A_i \in \mathcal{F}$ miatt ezeknek a metszeteknek a véges uniói is benne vannak $\mathcal{F}$-ben, másrészt ez a halmazrendszer megegyezik az ilyen metszetek nem feltétlenül diszjunkt, véges unióiból álló halmazrendszerrel, ezért halmazalgebrát alkotnak, hiszen a véges metszet- és unióképzésre nyilván zárt, minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén $\Omega \in \mathcal{F}_i$, így Ω is benne van, és $\Omega \setminus \bigcap_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k (\Omega \setminus A_i)$ miatt a komplementerképzésre is zárt.) Hasonlóan, a $\mathcal{G}$ rész-σ-algebrát generálja az a $\mathcal{G}_0$ halmazalgebra, mely a $\bigcap_{j=1}^\ell B_j$ metszetek véges, diszjunkt unióiból áll, ahol $B_j \in \mathcal{G}_j$ ha $j \in \{1, \dots, \ell\}$.

Tetszőleges $\bigcap_{i=1}^k A_i$ és $\bigcap_{j=1}^\ell B_j$ alakú metszetre (ahol $A_i \in \mathcal{F}_i$ ha $i \in \{1, \dots, k\}$ és $B_j \in \mathcal{G}_j$ ha $j \in \{1, \dots, \ell\}$) teljesül

$$\mathrm{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^\ell B_j\right)\right) = \left(\prod_{i=1}^k \mathrm{P}(A_i)\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^\ell \mathrm{P}(B_j)\right) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^\ell B_j\right).$$

A valószínűség additivitása miatt ez teljesül $\bigcap_{i=1}^k A_i$ és $\bigcap_{j=1}^\ell B_j$ helyett ilyen metszetek véges diszjunkt unióira is, vagyis teljesül $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$ minden $A \in \mathcal{F}_0$ és $B \in \mathcal{G}_0$ esetén. Tehát az állítás következik az 2.3 Lemma alapján. $\square$

Hasonlóan bizonyítható a következő állítás is.

2.5 Lemma. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező. Ha az $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \dots,$ rész-σ-algebrák függetlenek, akkor az*

$$\mathcal{F} := \sigma\left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{F}_i\right), \qquad \mathcal{G} := \sigma\left(\bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{G}_j\right)$$

rész-σ-algebrák is függetlenek.

2.6 Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ rész-σ-algebra.*

Azt mondjuk, hogy az $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ rész-σ-algebrákhoz tartozó ***farok-σ-algebra:***

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(\mathcal{F}_k : k \geqslant n).$$

2.7 Példák.

(i) Nyilván

$$\sigma(\mathcal{F}_k : k \geqslant n) \downarrow \mathcal{T} \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

(ii) Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $X_1, X_2, \dots$ véletlen változók, akkor a következő események benne vannak a $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \dots$ rész-σ-algebrákhoz rendelt farok-σ-al-

gebrában:

$$\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \ \text{ létezik}\right\},$$
$$\left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) \leqslant x\right\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \ \text{ létezik és } \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \leqslant x\right\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)}{n} \ \text{ létezik}\right\}.$$

(Éppen azok az események vannak benne ebben a farok-σ-algebrában, melyek bekövetkezését nem befolyásolja véges sok X_n értékének megváltoztatása.)

2.8 Tétel. (Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye) *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező. Legyen minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ *rész-σ-algebra, és jelölje* $\mathcal{T}$ *a hozzájuk tartozó farok-σ-algebrát. Ha az* $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *rész-σ-algebrák függetlenek, akkor tetszőleges* $A \in \mathcal{T}$ *esetén* $\mathrm{P}(A) = 0$ *vagy* $\mathrm{P}(A) = 1$.

Bizonyítás. A 2.5 Lemma alapján tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ esetén a $\sigma(\mathcal{F}_i : n \leqslant i \leqslant n+k-1)$ és $\sigma(\mathcal{F}_j : j \geqslant n+k)$ rész-σ-algebrák függetlenek. Mivel $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{F}_j : j \geqslant n+k)$, így a $\sigma(\mathcal{F}_i : n \leqslant i \leqslant n+k-1)$ és $\mathcal{T}$ rész-σ-algebrák is függetlenek. Mivel az $\cup_{k=1}^{\infty}\sigma(\mathcal{F}_i : n \leqslant i \leqslant n+k-1)$ halmazalgebra generálja a $\sigma(\mathcal{F}_i : i \geqslant n)$ σ-algebrát, így a 2.3 Lemma alapján a $\sigma(\mathcal{F}_i : i \geqslant n)$ és $\mathcal{T}$ rész-σ-algebrák is függetlenek. Megint használva azt, hogy $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{F}_i : i \geqslant n)$, így a $\mathcal{T}$ σ-algebra független önmagától: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$ minden $A, B \in \mathcal{T}$ esetén. Tehát minden $A \in \mathcal{T}$ esetén $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap A) = \mathrm{P}(A)^2$, amiből $\mathrm{P}(A) \in \{0, 1\}$. $\square$

2.9 Példa. Ha $X_1, X_2, \ldots$ független véletlen változók és

$$\overline{X}_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},$$

akkor

$$\mathrm{P}\left(\{\overline{X}_n\}_{n=1}^{\infty} \ \text{ konvergens}\right) \in \{0, 1\},$$

hiszen az $\left\{\omega \in \Omega : \{\overline{X}_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty} \ \text{ konvergens}\right\}$ esemény benne van a $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \ldots$ rész-σ-algebrákhoz rendelt farok-σ-algebrában, ezért alkalmazhatjuk Kolmogorov 0 vagy 1 törvényét. Továbbá tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén az $\left\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \overline{X}_n(\omega) \leqslant x\right\}$ események is benne vannak ebben a farok-σ-algebrában, ezért Kolmogorov 0 vagy 1 törvénye alapján $\mathrm{P}(\limsup_{n\to\infty} \overline{X}_n \leqslant x) \in \{0, 1\}$. Mivel az $x \mapsto \mathrm{P}(\limsup_{n\to\infty} \overline{X}_n \leqslant x)$ függvény monoton növekvő és jobbról folytonos, így létezik $b \in [-\infty, \infty]$ úgy, hogy $\mathrm{P}(\limsup_{n\to\infty} \overline{X}_n \leqslant x) = 0$ ha $x < b$ és $\mathrm{P}(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n \leqslant x) = 1$ ha $x \geqslant b$, amiből következik, hogy

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \overline{X}_n = b\right) = 1.$$

Hasonlóan, létezik $a \in [-\infty, \infty]$ úgy, hogy

$$\mathrm{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \overline{X}_n = a\right) = 1.$$

Ezért ha $\mathrm{P}\left(\{\overline{X}_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konvergens}\right) = 1$, akkor létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = c\right) = 1.$$

2.10 Definíció. *Ha $\Omega \neq \emptyset$ nemüres halmaz, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $A_n \subset \Omega$, akkor jelölje*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \ \textit{ végtelen sok } \ n \in \mathbb{N} \ \textit{ esetén}\},$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \ \textit{ véges sok } \ n \in \mathbb{N} \ \textit{ kivételével}\}.$$

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ független események, akkor $\mathrm{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) \in \{0, 1\}$, azaz vagy 1 valószínűséggel végtelen sok esemény bekövetkezik ezek közül, vagy pedig 1 valószínűséggel legfeljebb csak véges sok. Azt, hogy melyik eset áll fenn, a következő lemma alapján lehet eldönteni.

2.11 Lemma. (Borel–Cantelli lemma) *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ események.*

(i) *Ha* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty$, *akkor*

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$$

(vagyis ezen események közül 1 valószínűséggel legfeljebb csak véges sok következik be).

(ii) *Ha az $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ események függetlenek és* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \infty$, *akkor*

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$$

(vagyis ezen események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be).

Bizonyítás. (i). A P folytonossága és szub-σ-additivitása alapján

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(A_k) = 0.$$

(ii). Nyilván

$$\mathrm{P}\left(\overline{\limsup_{n\to\infty} A_n}\right) = \mathrm{P}\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k}\right).$$

Továbbá

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A_k}\right)=\lim_{N\to\infty}\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=n}^{N}\overline{A_k}\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}(1-\mathrm{P}(A_k))\leqslant\liminf_{N\to\infty}\exp\left\{-\sum_{k=n}^{N}\mathrm{P}(A_k)\right\}=0,$$

hiszen tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ esetén $1-x\leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Ezért

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=1-\mathrm{P}\left(\overline{\limsup_{n\to\infty}A_n}\right)=1.$$

$\square$

3 Várható érték

Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}$ egyszerű véletlen változó, és $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_\ell\}$, akkor

$$X = \sum_{j=1}^{\ell} x_j \mathbb{1}_{A_j},$$

ahol $A_j := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\} \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, \ell$ diszjunkt halmazok, és $\bigcup_{j=1}^{\ell} A_j = \Omega$.

3.1 Definíció. *Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ egyszerű véletlen változó, és $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_\ell\}$. Ekkor az*

$$\mathrm{E}(X) := \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{P}(\mathrm{d}\omega) := \sum_{j=1}^{\ell} x_j \, \mathrm{P}(X = x_j)$$

mennyiséget a X ***várható értékének*** *nevezzük.*

Nyilván a várható érték végesen additív és monoton az egyszerű véletlen változókon.

3.2 Állítás. *Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nemnegatív véletlen változó.*

(i) *Ha Z és $Y_1, Y_2, \dots$ nemnegatív egyszerű véletlen változók, és tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $Y_n(\omega) \uparrow X(\omega) \geqslant Z(\omega)$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) \geqslant \mathrm{E}(Z)$.*

(ii) *Ha $Y_1, Y_2, \dots$ és $Z_1, Z_2, \dots$ nemnegatív egyszerű véletlen változók, és tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $Y_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ és $Z_n(\omega) \uparrow X(\omega)$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Z_n)$.*

Bizonyítás. (i). Nyilván a $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n)$ határérték létezik, hiszen az $\mathrm{E}(Y_1), \mathrm{E}(Y_2), \dots$ sorozat monoton növekvő. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $A_n := \{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \geqslant Z(\omega) - \varepsilon\} \uparrow \Omega$, ezért $\mathrm{P}(A_n) \uparrow 1$ ha $n \to \infty$, amiből $\mathrm{P}(\overline{A}_n) \downarrow 0$ ha $n \to \infty$. Mivel $Y_n \geqslant Y_n \mathbb{1}_{A_n} \geqslant (Z - \varepsilon)\mathbb{1}_{A_n}$, így

$$\mathrm{E}(Y_n) \geqslant \mathrm{E}\left[(Z - \varepsilon)\mathbb{1}_{A_n}\right] = \mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}\left[Z \mathbb{1}_{\overline{A}_n}\right] - \varepsilon\, \mathrm{P}(A_n) \geqslant \mathrm{E}(Z) - \mathrm{P}(\overline{A}_n) \max_{\omega\in\Omega} Z(\omega) - \varepsilon,$$

amiből $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) \geqslant \mathrm{E}(Z) - \varepsilon$.

(ii). Az (i) alapján minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) \geqslant \mathrm{E}(Z_m)$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) \geqslant \lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{E}(Z_m)$. Hasonlóan $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(Z_n) \geqslant \lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{E}(Y_m)$. □

3.3 Definíció. *Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nemnegatív véletlen változó. Legyen $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemnegatív egyszerű véletlen változókból álló sorozat úgy, hogy tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ ha $n \to \infty$. (Ilyen az 1.12 tétel szerint létezik.) Ekkor az*

$$\mathrm{E}(X) := \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{P}(\mathrm{d}\omega) := \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n)$$

mennyiséget a X ***várható értékének*** *nevezzük.*

A 3.2 Állítás alapján $\mathrm{E}(X) \in [0, \infty]$ egyértelműen van definiálva. Továbbá

$$\mathrm{E}(X) = \sup \{\mathrm{E}(Y) : Y \text{ egyszerű véletlen változó melyre } 0 \leqslant Y \leqslant X\}.$$

Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó, akkor $X^+ := \max\{X, 0\}$ és $X^- := -\min\{X, 0\}$ is véletlen változók, és $X = X^+ - X^-$.

3.4 Definíció. *Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó. Azt mondjuk, hogy* ***X-nek létezik várható értéke (integrálja)****, ha az $\mathrm{E}(X^+)$ és $\mathrm{E}(X^-)$ várható értékek közül legalább az egyik véges, és ekkor*

$$\mathrm{E}(X) := \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{P}(d\omega) := \mathrm{E}(X^+) - \mathrm{E}(X^-).$$

Azt mondjuk, hogy ***X-nek véges a várható értéke (integrálható)****, ha az $\mathrm{E}(X^+)$ és $\mathrm{E}(X^-)$ várható értékek végesek.*

Mivel $|X| = X^+ + X^-$, így X-nek akkor és csak akkor véges a várható értéke, ha $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, azaz $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

3.5 Tétel. (Transzformációtétel) *Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor és $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, akkor*

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_\Omega g(X(\omega))\, \mathrm{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mathrm{P}_X(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mathrm{d}F_X(x)$$

abban az értelemben, hogy az integrálok ugyanakkor léteznek, és ha léteznek, egyenlőek.

3.6 Állítás. *A várható érték tulajdonságai:*

(i) *X akkor és csak akkor integrálható, ha $|X|$ integrálható.*

(ii) *Ha létezik $\mathrm{E}(X)$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor létezik $\mathrm{E}(cX)$, és $\mathrm{E}(cX) = c\,\mathrm{E}(X)$.*

(iii) *Ha létezik $\mathrm{E}(X) > -\infty$ és $X \leqslant Y$ P-m.b., akkor létezik $\mathrm{E}(Y)$ és $\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$.*

(iv) *Ha létezik $\mathrm{E}(X)$, akkor $|\,\mathrm{E}(X)| \leqslant \mathrm{E}(|X|)$.*

(v) *Ha létezik $\mathrm{E}(X)$, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén létezik $\mathrm{E}(X\mathbb{1}_A)$; ha X integrálható, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén $X\mathbb{1}_A$ is integrálható.*

(vi) *Ha $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ léteznek, és az $\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ kifejezés értelmes (azaz nem $\infty - \infty$ vagy $-\infty + \infty$ alakú), akkor $\mathrm{E}(X + Y)$ létezik és $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.*

(vii) *Ha $X = 0$ P-m.b., akkor $\mathrm{E}(X) = 0$.*

(viii) *Ha $X = Y$ P-m.b. és $\mathrm{E}(X)$ létezik, akkor $\mathrm{E}(Y)$ is létezik, és $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$.*

(ix) *Ha $X \geqslant 0$ P-m.b. és $\mathrm{E}(X) = 0$, akkor $X = 0$ P-m.b.*

(x) *Ha* X *integrálható és tetszőleges* $A \in \mathcal{A}$ *esetén* $\mathrm{E}(X\mathbb{1}_A) \geqslant 0$, *akkor* $X \geqslant 0$ P-m.b.

(xi) *Ha* X *és* Y *integrálhatóak és tetszőleges* $A \in \mathcal{A}$ *esetén* $\mathrm{E}(X\mathbb{1}_A) \leqslant \mathrm{E}(Y\mathbb{1}_A)$, *akkor* $X \leqslant Y$ P-m.b.

(xii) *Ha* X *és* Y *integrálhatóak és tetszőleges* $A \in \mathcal{A}$ *esetén* $\mathrm{E}(X\mathbb{1}_A) = \mathrm{E}(Y\mathbb{1}_A)$, *akkor* $X = Y$ P-m.b.

(xiii) *Ha* X *és* Y *integrálhatóak és* X, Y *függetlenek, akkor* XY *is integrálható és* $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.

(xiv) ***Monoton konvergenciatétel:*** *Ha* $X_1, X_2, \ldots$ *integrálhatók, tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $X_n \geqslant Y$ P-m.b., $\mathrm{E}(Y) > -\infty$, *és* $X_n \uparrow X$ P-m.b., *akkor* $\mathrm{E}(X_n) \uparrow \mathrm{E}(X)$ *ha* $n \to \infty$.

(xv) *Ha* $X_1, X_2, \ldots$ *nemnegatívak, akkor* $\mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_n)$.

(xvi) ***Fatou-lemma:*** *Ha tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $X_n \geqslant Y$ P-m.b. *és* $\mathrm{E}(Y) > -\infty$, *akkor* $\mathrm{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n)$.

(xvii) ***Majoráns konvergenciatétel:*** *Ha tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $|X_n| \leqslant Y$ P-m.b., $\mathrm{E}(Y) < \infty$ *és* $X_n \to X$ P-m.b., *akkor* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, $\mathrm{E}(X_n) \to \mathrm{E}(X)$ *és* $\mathrm{E}(|X_n - X|) \to 0$ *ha* $n \to \infty$.

(xviii) ***Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség:*** *Ha* $\mathrm{E}(X^2), \mathrm{E}(Y^2) < \infty$, *akkor* $\mathrm{E}(|XY|) \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)}$.

(xix) ***Jensen-egyenlőtlenség:*** *Ha* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, $I \subset \mathbb{R}$ *olyan nyitott (nem feltétlenül korlátos) intervallum, hogy* $\mathrm{P}(X \in I) = 1$, *és* $g : I \to \mathbb{R}$ *konvex, akkor* $\mathrm{E}(X) \in I$ *és* $g(\mathrm{E}(X)) \leqslant \mathrm{E}(g(X))$.

(xx) ***Hölder-egyenlőtlenség:*** *Legyenek* $p, q \in (1, \infty)$ *olyanok, hogy* $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Ha* $\mathrm{E}(|X|^p) < \infty$ *és* $\mathrm{E}(|Y|^q) < \infty$, *akkor* $\mathrm{E}(|XY|) \leqslant (\mathrm{E}(|X|^p))^{1/p} (\mathrm{E}(|Y|^q))^{1/q}$.

(xxi) ***Ljapunov-egyenlőtlenség:*** *Ha* $0 < s < t$, *akkor* $(\mathrm{E}(|X|^s))^{1/s} \leqslant (\mathrm{E}(|X|^t))^{1/t}$.

(xxii) ***Minkowski-egyenlőtlenség:*** *Legyen* $p \in [1, \infty)$. *Ha* $\mathrm{E}(|X|^p) < \infty$ *és* $\mathrm{E}(|Y|^p) < \infty$, *akkor* $(\mathrm{E}\,|X + Y|^p)^{1/p} \leqslant (\mathrm{E}(|X|^p))^{1/p} + (\mathrm{E}(|Y|^p))^{1/p}$.

3.7 Definíció. *Legyen* $(X, \mathcal{X})$ *mérhetőségi tér. Azt mondjuk, hogy a* $\mu : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ *halmazfüggvény* ***abszolút folytonos*** *a* $\nu : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ *halmazfüggvényre nézve, ha minden* $B \in \mathcal{X}$, $\nu(B) = 0$ *esetén* $\mu(B) = 0$. *Jelölése:* $\mu \ll \nu$.

Legyen $\nu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ *mérték. Azt mondjuk, hogy a* $X : \Omega \to X$ *véletlen változó* ***abszolút folytonos eloszlású a*** $\boldsymbol{\nu}$ ***mértékre nézve****, ha* $\mathrm{P}_X \ll \nu$. *Azt mondjuk, hogy a* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor* ***abszolút folytonos eloszlású****, ha abszolút folytonos eloszlású a* λ_d *Lebesgue-mértékre nézve.*

3.8 Tétel. (Sűrűségtétel) *Legyen* $(X, \mathcal{X})$ *mérhetőségi tér,* $\nu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ *mérték,* $g : X \to \mathbb{R}_+$ *nemnegatív mérhető függvény. Ekkor a* $\mu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$,

$$\mu(B) := \int_B g(x)\, \nu(\mathrm{d}x)$$

halmazfüggvény mérték, amely pontosan akkor véges, ha g *integrálható,* $\mu \ll \nu$, *és tetszőleges* $h : X \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény esetén*

$$\int_X h(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int_X h(x)g(x)\, \nu(\mathrm{d}x)$$

abban az értelemben, hogy a két oldal ugyanakkor létezik, és ha léteznek, egyenlőek.

3.9 Tétel. (Radon–Nikodym tétel) *Legyen* $(X, \mathcal{X})$ *mérhetőségi tér és* $\nu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ σ*-véges mérték. A* $\mu : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ *előjeles mérték akkor és csak akkor abszolút folytonos a* ν *mértékre nézve, ha létezik olyan* $g : X \to [-\infty, \infty]$ *mérhető függvény, hogy tetszőleges* $B \in \mathcal{X}$ *esetén*

$$\mu(B) = \int_B g(x)\, \nu(\mathrm{d}x).$$

A g *függvény* ν-m.m. *egyértelműen meg van határozva, azaz ha egy* $h : X \to [-\infty, \infty]$ *mérhető függvényre is teljesül*

$$\mu(B) = \int_B h(x)\, \nu(\mathrm{d}x)$$

minden $B \in \mathcal{X}$ *esetén, akkor* $\nu\{x \in X : g(x) \neq h(x)\} = 0$.

A Radon–Nikodym tételben létező (ν-m.m. egyértelműen meghatározott) g függvényt a μ mértéknek a ν mértékre vonatkozó Radon–Nikodym deriváltjának nevezzük, melynek jelölése $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$.

3.10 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *abszolút folytonos eloszlású véletlen vektor. Ekkor a* P_X *mértéknek a* λ *Lebesgue-mértékre vonatkozó* $f_X := \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{P}_X}{\mathrm{d}\lambda_d}$ *Radon–Nikodym deriváltját* ***sűrűségfüggvénynek*** *nevezzük.*

3.11 Állítás. *A* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *véletlen változó akkor és csak akkor abszolút folytonos, ha az* F_X *eloszlásfüggvény abszolút folytonos, azaz bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén létezik* $\delta > 0$ *úgy, hogy ha* $k \in \mathbb{N}$, $a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k < b_k$ *és* $\sum_{j=1}^k (b_j - a_j) < \delta$, *akkor* $\sum_{j=1}^k (F_X(b_j) - F_X(a_j)) < \varepsilon$.

A sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény kapcsolatát írja le a következő állítás.

3.12 Állítás. *Ha a* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor abszolút folytonos, akkor* $f_X(x) = \partial_1 \ldots \partial_d F_X(x)$ λ_d*-m.m.*

Abszolút folytonos véletlen vektor függvényének várható értékét a következő módon számolhatjuk.

3.13 Állítás. *Ha* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *abszolút folytonos véletlen vektor és* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény, akkor*

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

abban az értelemben, hogy a két oldal ugyanakkor létezik, és ha léteznek, egyenlőek.

Abszolút folytonos véletlen változó szigorúan monoton transzformáltja újra abszolút folytonos, melynek sűrűségfüggvényét a következő módon számolhatjuk.

3.14 Állítás. *Ha* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *abszolút folytonos véletlen változó,* $I \subset \mathbb{R}$ *olyan (nem feltétlenül korlátos) intervallum, hogy* $\mathrm{P}(X \in I) = 1$, $h : I \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton (növekvő vagy csökkenő) folytonosan differenciálható, és minden* $x \in I$ *esetén* $h'(x) \neq 0$, *akkor a* $h(X)$ *véletlen vektor is abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye*

$$f_{h(X)}(y) = \begin{cases} \frac{f(h^{-1}(y))}{|h'(h^{-1}(y))|}, & \text{ha } y \in h(I), \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol h^{-1} *a* h *inverzét jelöli.*

Független, abszolút folytonos eloszlású véletlen változók összegének, szorzatának és hányadosának sűrűségfüggvényét a következő módon számolhatjuk.

3.15 Állítás. *Ha* X *és* Y *független, abszolút folytonos eloszlású véletlen változók, akkor*

- *a* $X + Y$ *véletlen vektor is abszolút folytonos eloszlású, és*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

- *a* XY *véletlen vektor is abszolút folytonos eloszlású, és*

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{z}{y}\right) f_Y(y) \frac{\mathrm{d}y}{|y|}.$$

- *a* $\frac{X}{Y}$ *véletlen vektor is abszolút folytonos eloszlású, és*

$$f_{\frac{X}{Y}}(z) = \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y\left(\frac{x}{z}\right) |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(zy) f_Y(y) |y|\,\mathrm{d}y.$$

3.16 Definíció. *Legyen* $(X, \mathcal{X})$ *mérhetőségi tér,* $\mu : \mathcal{X} \to [-\infty, \infty]$ *mérték. Azt mondjuk, hogy a* μ *mérték* ***a*** $\boldsymbol{B \in \mathcal{X}}$ ***halmazba koncentrálódik,*** *ha* $\mu(X \setminus B) = 0$. *(Ez a halmaz nem egyértelműen definiált.)*

3.17 Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor* ***diszkrét (eloszlású),*** *ha létezik* $B \subset \mathbb{R}^d$ *megszámlálható halmaz úgy, hogy* P_X *a* B *halmazba koncentrálódik, azaz* $\mathrm{P}(X \in B) = 1$. *Az ilyen tulajdonságú halmazok metszetét (azaz a legszűkebb ilyen halmazt) a* P_X *mérték* ***tartójának*** *nevezzük. Jelölése:* $\mathrm{supp}(X)$.

3.18 Állítás. *A* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *diszkrét véletlen vektor tartója a* P_X *mérték* ***atomjaiból*** *áll, azaz*

$$\operatorname{supp}(X) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \mathrm{P}_X(\{x\}) > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \mathrm{P}(X = x) > 0\right\}.$$

3.19 Állítás. *A* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *diszkrét véletlen vektor eloszlásfüggvénye*

$$F_X(x) = \sum_{\{y \in \operatorname{supp}(X) \,:\, y \leqslant x\}} \mathrm{P}(X = y), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

3.20 Állítás. *Legyen* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *diszkrét véletlen vektor és* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény. A* $g(X)$ *véletlen változó akkor és csak akkor integrálható, ha*

$$\mathrm{E}[|g(X)|] = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} |g(x)|\, \mathrm{P}(X = x) < \infty,$$

és ekkor

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_{x \in \operatorname{supp}(X)} g(x)\, \mathrm{P}(X = x).$$

3.21 Definíció. *Legyen* $(X, \mathcal{X})$ *mérhetőségi tér. Azt mondjuk, hogy a* $\mu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ *és* $\nu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$ *mértékek* ***szingulárisak egymásra (nézve),***
ha léteznek olyan diszjunkt $A, B \in \mathcal{X}$ *halmazok, hogy* μ *az* A *halmazba,* ν *pedig a* B *halmazba koncentrálódik. Jelölése:* $\mu \perp \nu$.

3.22 Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor* ***szinguláris,*** *ha* $\mathrm{P}_X \perp \lambda$, *azaz* $\exists\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *úgy, hogy* $\lambda(B) = 0$ *és* $\mathrm{P}(X \in B) = 1$.

A diszkrét véletlen vektorok nyilván szingulárisak.

3.23 Állítás. *A* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *véletlen változó akkor és csak akkor szinguláris, ha* $F_X'(x) = 0$ *m.m.*

3.24 Tétel. *Tetszőleges* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *eloszlásfüggvény egyértelműen felbontható*

$$F = p_1 F_{\mathrm{d}} + p_2 F_{\mathrm{af}} + p_3 F_{\mathrm{fs}}$$

alakban, ahol $p_1, p_2, p_3 \geqslant 0$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, F_{d} *diszkrét,* F_{af} *abszolút folytonos,* F_{fs} *folytonos szinguláris eloszlásfüggvény.*

3.25 Definíció. *Legyen* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *véletlen változó.*

- *Legyen* $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *A* X ***α-adik abszolút momentuma:*** $\mathrm{E}(|X|^\alpha)$.
- *Ha* $k \in \mathbb{N}$, *és* X *k-adik abszolút momentuma véges, akkor*
  X ***k-adik momentuma:*** $\mathrm{E}(X^k)$,
  X ***k-adik centrális momentuma:*** $\mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X))^k\right]$.

- *Ha* X *második abszolút momentuma véges, akkor* X *második centrális momentumát* X ***varianciájának (szórásnégyzetének)*** *nevezzük. Jelölése:* $\mathrm{Var}(X) := \mathsf{D}^2(X) := \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X))^2\right]$.

3.26 Definíció. *Legyen* $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor. Ha* $\mathrm{E}(|X_1|) < \infty$, $\dots$ $\mathrm{E}(|X_d|) < \infty$, *akkor* X ***várható érték vektora***

$$\mathrm{E}(X) := (\mathrm{E}(X_1), \dots, \mathrm{E}(X_d)) \in \mathbb{R}^d.$$

3.27 Definíció. *Legyen* $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor. Ha* $\mathrm{E}(\|X\|^2) < \infty$, *azaz* $\mathrm{E}(X_1^2) < \infty$, $\dots$ $\mathrm{E}(X_d^2) < \infty$, *akkor* X ***kovarianciamátrixa***

$$\mathrm{Cov}(X) := \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}(X))(X - \mathrm{E}(X))^\top\right] \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

melynek elemei $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) := \mathrm{E}\left[(X_i - \mathrm{E}(X_i))(X_j - \mathrm{E}(X_j))\right]$, $1 \leqslant i, j \leqslant d$.

A kovarianciamátrix tulajdonságait írja le a következő állítás.

3.28 Állítás. *Legyen* $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor,* $\mathrm{E}(\|X\|^2) < \infty$.

- $\mathrm{Cov}(X)$ *szimmetrikus:* $\mathrm{Cov}(X)^\top = \mathrm{Cov}(X)$.
- $\mathrm{Cov}(X)$ *pozitív szemidefinit, azaz* $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$ *esetén*

$$x^\top \mathrm{Cov}(X) x = \langle \mathrm{Cov}(X) x, x \rangle = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) x_i x_j \geqslant 0.$$

- *Ha* $A \in \mathbb{R}^{r \times d}$ *és* $b \in \mathbb{R}^r$, *akkor* $\mathrm{E}(AX + b) = A\,\mathrm{E}(X) + b$ *és* $\mathrm{Cov}(AX + b) = A\,\mathrm{Cov}(X) A^\top$.

4 Karakterisztikus függvény, generátorfüggvény

4.1 Definíció. *A* $X : \Omega \to \mathbb{C}$, $X = \operatorname{Re} X + \mathrm{i} \operatorname{Im} X$ *komplex értékű véletlen változónak véges a* ***várható értéke (integrálható)****, ha az* $\mathrm{E}(\operatorname{Re} X)$ *és* $\mathrm{E}(\operatorname{Im} X)$ *várható értékek végesek, és ekkor*

$$\mathrm{E}(X) := \mathrm{E}(\operatorname{Re} X) + \mathrm{i}\,\mathrm{E}(\operatorname{Im} X).$$

Nyilván a $X : \Omega \to \mathbb{C}$ komplex értékű véletlen változónak akkor és csak akkor véges a várható értéke, ha $\mathrm{E}(|X|) < \infty$.

4.2 Állítás. *Ha* $X : \Omega \to \mathbb{C}$ *komplex értékű véletlen változó és* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, *akkor* $|\,\mathrm{E}(X)| \leqslant \mathrm{E}(|X|)$.

Bizonyítás. Nyilván

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{E}(X)| = |\,\mathrm{E}(\operatorname{Re} X) + \mathrm{i}\,\mathrm{E}(\operatorname{Im} X)| &= \sqrt{[\mathrm{E}(\operatorname{Re} X)]^2 + [\mathrm{E}(\operatorname{Im} X)]^2} \\ &\leqslant \mathrm{E}\left(\sqrt{(\operatorname{Re} X)^2 + (\operatorname{Im} X)^2}\right) = \mathrm{E}(|X|), \end{aligned}$$

hiszen a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény konvex, így alkalmazhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget. □

4.3 Definíció. *Legyen* $\Gamma \neq \emptyset$ *nemüres halmaz, és minden* $\gamma \in \Gamma$ *esetén* $X_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ *komplex értékű véletlen változó. Azt mondjuk, hogy a* $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *komplex értékű véletlen változók* ***függetlenek****, ha a* $\{(\operatorname{Re} X_\gamma, \operatorname{Im} X_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ *véletlen vektorok függetlenek.*

Nyilván ha $X : \Omega \to \mathbb{C}$ és $Y : \Omega \to \mathbb{C}$ független komplex értékű véletlen változók és $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, $\mathrm{E}(|Y|) < \infty$, akkor $\mathrm{E}(|XY|) < \infty$ és $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.

4.4 Definíció. *A* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor* ***karakterisztikus függvénye*** $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_X(t) := \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, X\rangle}), \qquad t \in \mathbb{R}^d.$$

4.5 Állítás. *A karakterisztikus függvény tulajdonságai:*

(i) $|\varphi_X| \leqslant 1$, *és* $\varphi_X(0) = 1$.

(ii) φ_X *egyenletesen folytonos.*

(iii) *Tetszőleges* $t \in \mathbb{R}^d$ *esetén* $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.

(iv) ***Bochner-tétel:*** *A* $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *függvény akkor és csak akkor karakterisztikus függvénye valamely véletlen vektornak, ha folytonos és* ***pozitív szemidefinit****, azaz tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *és tetszőleges* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^d$ *esetén a* $\big(\varphi(t_j - t_\ell)\big)_{j,\ell=1,\ldots,n}$ *mátrix pozitív szemidefinit, azaz tetszőleges* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *esetén*

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \varphi(t_j - t_\ell) z_j \overline{z_\ell} \geqslant 0.$$

(v) *Tetszőleges* $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $b \in \mathbb{R}^d$ *és* $t \in \mathbb{R}^d$ *esetén* $\varphi_{AX+b}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,b\rangle}\varphi_X(A^\top t)$.

(vi) $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_Y$ *akkor és csak akkor, ha* $\varphi_X = \varphi_Y$.

(vii) $X_1, \dots, X_\ell : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *akkor és csak akkor függetlenek, ha tetszőleges* $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}^d$ *esetén*

$$\varphi_{X_1,\dots,X_\ell}(t_1, \dots, t_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} \varphi_{X_j}(t_j).$$

(viii) *Ha* $\mathrm{E}(\|X\|^n) < \infty$ *valamely* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, akkor* φ_X *n-szer folytonosan differenciálható, és tetszőleges* $r_1, \dots, r_d$, $r_1 + \dots + r_d \leqslant n$ *nemnegatív egészek esetén*

$$\begin{aligned}
\partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} \varphi_X(t) &= \mathfrak{i}^{r_1+\dots+r_d}\, \mathrm{E}(X_1^{r_1} \cdots X_d^{r_d}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,X\rangle}),\\
\mathrm{E}(X_1^{r_1} \cdots X_d^{r_d}) &= \frac{\partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d}\, \varphi_X(0)}{\mathfrak{i}^{r_1+\dots+r_d}},\\
\varphi_X(t) &= \sum_{r_1+\dots+r_d \leqslant n} \frac{\mathfrak{i}^{r_1+\dots+r_d}\, t_1^{r_1} \cdots t_d^{r_d}}{r_1! \cdots r_d!}\, \mathrm{E}(X_1^{r_1} \cdots X_d^{r_d}) + R_n(t),
\end{aligned}$$

ahol $R_n(t) = \mathrm{O}(\|t\|^n)$ *és* $R_n(t) = \mathrm{o}(\|t\|^n)$ *ha* $t \to 0$, *mégpedig*

$$|R_n(t)| \leqslant 3\frac{\|t\|^n}{n!}\, \mathrm{E}(\|X\|^n), \qquad \lim_{t\to 0} \frac{R_n(t)}{\|t\|^n} = 0.$$

(ix) *Ha* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *véletlen változó és* $\varphi_X^{(2n)}(0)$ *létezik és véges valamely* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, akkor* $\mathrm{E}(X^{2n}) < \infty$.

(x) *Ha tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathrm{E}(\|X\|^n) < \infty$, *és*

$$R := \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{E}(\|X\|^n)/n!}}.$$

akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$, $\|t\| < R$ *esetén*

$$\varphi_X(t) = \sum_{r_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{r_d=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{i}^{r_1+\dots+r_d}\, \mathrm{E}(X_1^{r_1} \cdots X_d^{r_d})}{r_1! \cdots r_d!} t_1^{r_1} \cdots t_d^{r_d}.$$

(xi) ***Inverziós formula sűrűségfüggvényre:*** *Ha* $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *azaz* $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_X(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$, *akkor* X *eloszlása abszolút folytonos, és a sűrűségfüggvénye*

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,x\rangle} \varphi_X(t)\, \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Bizonyítás. (i). Nyilván $|\varphi_X(t)| = |\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,X\rangle})| \leqslant \mathrm{E}(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,X\rangle}|) = 1$.

(ii). Tetszőleges $t, h \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| = \big|\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t+h,X\rangle} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,X\rangle})\big| = \big|\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,X\rangle}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle h,X\rangle} - 1))\big| \leqslant \mathrm{E}(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle h,X\rangle} - 1|).$$

A majoráns konvergencia-tétel alapján $\lim_{h\to 0} \mathrm{E}(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle h,X\rangle} - 1|) = 0$.

(iii). $\varphi_X(-t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle t,X\rangle}) = \overline{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,X\rangle})} = \overline{\varphi_X(t)}$.

(iv). Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen változó, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, tetszőleges $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d$, és tetszőleges $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ esetén

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \varphi(t_j - t_\ell) z_j \overline{z_\ell} &= \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t_j - t_\ell, X\rangle}) z_j \overline{z_\ell} \\ &= \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t_j,X\rangle} z_j \sum_{\ell=1}^n \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t_\ell,X\rangle} z_\ell}\right) = \mathrm{E}\left(\left|\sum_{j=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t_j,X\rangle} z_j\right|^2\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

A másik irányt nem bizonyítjuk.

(v). $\varphi_{AX+b}(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, AX+b\rangle}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,b\rangle}\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle A^\top t, X\rangle}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,b\rangle}\varphi_X(A^\top t)$.

(vi). Csak $k = 1$ esetén bizonyítjuk. Ha $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_Y$, akkor a definíció alapján nyilván $\varphi_X = \varphi_Y$. Most tegyük fel, hogy $\varphi_X = \varphi_Y$. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$f^{(\varepsilon)}(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha } t < a - \varepsilon \text{ vagy } t > b + \varepsilon, \\ (t-a)/\varepsilon + 1 & \text{ha } a - \varepsilon \leqslant t < a, \\ 1 & \text{ha } a \leqslant t \leqslant b, \\ (b-t)/\varepsilon + 1 & \text{ha } b < t \leqslant b + \varepsilon. \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy $\mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) = \mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(Y))$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset [-n, n]$. Mivel $f^{(\varepsilon)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, így a Stone–Weierstrass-tétel szerint létezik $f_n^{(\varepsilon)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trigonometrikus polinom (azaz $f_n^{(\varepsilon)}(t) = \sum_k a_{n,k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi tk/n}$, ahol a szumma véges sok tagot tartalmaz és $a_{n,k} \in \mathbb{C}$) úgy, hogy

$$\sup_{|t|\leqslant n} |f^{(\varepsilon)}(t) - f_n^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant 2^{-n}.$$

Mivel tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $f^{(\varepsilon)}(t) \in [0, 1]$, így tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $|f_n^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant |f_n^{(\varepsilon)}(t) - f^{(\varepsilon)}(t)| + |f^{(\varepsilon)}(t)| \leqslant 2^{-n} + 1 \leqslant 2$. A $\varphi_X = \varphi_Y$ feltétel alapján

$$\mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X)) = \sum_k a_{n,k}\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi Xk/n}) = \sum_k a_{n,k}\varphi_X(\pi k/n) = \sum_k a_{n,k}\varphi_Y(\pi k/n) = \mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y)).$$

Ezért

$$\begin{aligned}&|\,\mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) - \mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(Y))| = \left|\mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(X)\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant n\}}) - \mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(Y)\mathbb{1}_{\{|Y|\leqslant n\}})\right| \\ &\leqslant \left|\mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(X)\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant n\}}) - \mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X)\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant n\}})\right| + \left|\mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X)\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant n\}}) - \mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y)\mathbb{1}_{\{|Y|\leqslant n\}})\right| \\ &\quad + \left|\mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y)\mathbb{1}_{\{|Y|\leqslant n\}}) - \mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(Y)\mathbb{1}_{\{|Y|\leqslant n\}})\right| \\ &\leqslant 2^{-n} + \left|\mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X)\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant n\}}) - \mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X))\right| + \left|\mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(X)) - \mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y))\right| \\ &\quad + \left|\mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y)) - \mathrm{E}(f_n^{(\varepsilon)}(Y)\mathbb{1}_{\{|Y|\leqslant n\}})\right| + 2^{-n} \\ &\leqslant 2^{-n+1} + 2\,\mathrm{P}(|X| > n) + 2\,\mathrm{P}(|Y| > n),\end{aligned}$$

amiből $n \to \infty$ esetén azt kapjuk, hogy $\mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) = \mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(Y))$. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $f^{(\varepsilon)}(t) \downarrow \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$ ha $\varepsilon \downarrow 0$, ezért a monoton konvergencia-tétellel $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(X)) =$

$\mathrm{E}(\mathbb{1}_{[a,b]}(X)) = \mathrm{P}(X \in [a,b])$, és hasonlóan $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathrm{E}(f^{(\varepsilon)}(Y)) = \mathrm{P}(Y \in [a,b])$, így végül is tetszőleges $[a,b] \subset \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{P}(X \in [a,b]) = \mathrm{P}(Y \in [a,b])$, amiből következik, hogy $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_Y$.

(vii). Ha $X_1, \dots, X_\ell : \Omega \to \mathbb{R}^d$ függetlenek, akkor tetszőleges $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\varphi_{X_1,\dots,X_\ell}(t_1,\dots,t_\ell) = \mathrm{E}\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{\ell}\langle t_j, X_j\rangle\right\} = \mathrm{E}\left(\prod_{j=1}^{\ell} e^{\mathrm{i}\langle t_j, X_j\rangle}\right) = \prod_{j=1}^{\ell}\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t_j, X_j\rangle}) = \prod_{j=1}^{\ell}\varphi_{X_j}(t_j).$$

Ha $X_1, \dots, X_\ell : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektorok, és tetszőleges $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\varphi_{X_1,\dots,X_\ell}(t_1,\dots,t_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell}\varphi_{X_j}(t_j),$$

akkor legyenek $Y_1, \dots, Y_\ell : \Omega \to \mathbb{R}^d$ olyan független véletlen vektorok, hogy $\mathrm{P}_{Y_j} = \mathrm{P}_{X_j}$, $j = 1, \dots, \ell$. Ekkor tetszőleges $t_1, \dots, t_\ell \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\varphi_{Y_1,\dots,Y_\ell}(t_1,\dots,t_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell}\varphi_{Y_j}(t_j) = \prod_{j=1}^{\ell}\varphi_{X_j}(t_j) = \varphi_{X_1,\dots,X_\ell}(t_1,\dots,t_\ell),$$

így $\mathrm{P}_{X_1,\dots,X_\ell} = \mathrm{P}_{Y_1,\dots,Y_\ell}$, ezért tetszőleges $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$F_{X_1,\dots,X_\ell}(x_1,\dots,x_\ell) = F_{Y_1,\dots,Y_\ell}(x_1,\dots,x_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell}F_{Y_j}(x_j) = \prod_{j=1}^{\ell}F_{X_j}(x_j),$$

amiből következik, hogy $X_1, \dots, X_\ell : \Omega \to \mathbb{R}^d$ függetlenek.

(viii). Ha $k = n = 1$, akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén a majoráns konvergencia-tétellel

$$\frac{\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)}{h} = \mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}tX}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}hX} - 1}{h}\right)\right] \to \mathrm{E}\left(\mathrm{i}X\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right) \qquad \text{ha } h \to 0,$$

hiszen tetszőleges $u \in \mathbb{R}$ esetén $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - 1| \leqslant |u|$, így tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX(\omega)}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}hX(\omega)} - 1}{h}\right)\right| \leqslant |X(\omega)|.$$

Ezért $\varphi_X'(t) = \mathrm{E}(\mathrm{i}X\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})$. Az általános eset teljes indukcióval bizonyítható.

Tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y = \sum_{r=0}^{n-1}\frac{(\mathrm{i}y)^r}{r!} + \frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!}(\cos(\vartheta_1(y)y) + \mathrm{i}\sin(\vartheta_2(y)y)),$$

ahol $\vartheta_1(y), \vartheta_2(y) \in (0,1)$. Így tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, X\rangle}) = \sum_{r=0}^{n-1}\mathrm{E}\left(\frac{(\mathrm{i}\langle t, X\rangle)^r}{r!}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{(\mathrm{i}\langle t, X\rangle)^n}{n!}(\cos(\widetilde{\vartheta}_1\langle t, X\rangle) + \mathrm{i}\sin(\widetilde{\vartheta}_2\langle t, X\rangle))\right),$$

ahol $\widetilde{\vartheta}_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\vartheta}_j(\omega) := \vartheta_j(\langle t, X(\omega)\rangle) \in (0,1)$ ha $j = 1, 2$, ezért

$$\varphi_X(t) = \sum_{r=0}^{n}\mathrm{E}\left(\frac{(\mathrm{i}\langle t, X\rangle)^r}{r!}\right) + R_n(t),$$

ahol

$$R_n(t) := \mathrm{E}\left(\frac{(\mathrm{i}\langle t, X\rangle)^n}{n!}(\cos(\widetilde{\vartheta}_1\langle t, X\rangle) + \mathrm{i}\sin(\widetilde{\vartheta}_2\langle t, X\rangle) - 1)\right).$$

Nyilván $|R_n(t)| \leqslant 3\|t\|^n\,\mathrm{E}(\|X\|^n)/n!$, és

$$\frac{R_n(t)}{\|t\|^n} \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{\|X\|^n}{n!}\left|\cos(\widetilde{\vartheta}_1\langle t, X\rangle) + \mathrm{i}\sin(\widetilde{\vartheta}_2\langle t, X\rangle) - 1\right|\right) \to 0 \qquad \text{ha } t \to 0,$$

a majoráns konvergencia-tétel alapján.

(ix). Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 1$, akkor

$$\varphi_X''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_X'(2h) - \varphi_X'(0)}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_X'(0) - \varphi_X'(-2h)}{2h}$$

alapján

$$\varphi_X''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_X'(2h) - \varphi_X'(0)}{2h} + \frac{\varphi_X'(0) - \varphi_X'(-2h)}{2h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_X'(2h) - \varphi_X'(-2h)}{4h},$$

így a L'Hospital-szabállyal

$$\varphi_X''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi_X(2h) - 2\varphi_X(0) + \varphi_X(-2h)}{4h^2},$$

ezért

$$\varphi_X''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}hX}) - 2 + \mathrm{E}(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}hX})}{4h^2} = \lim_{h\to 0}\mathrm{E}\left[\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}hX} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}hX}}{2h}\right)^2\right] = -\lim_{h\to 0}\mathrm{E}\left[\left(\frac{\sin(hX)}{h}\right)^2\right].$$

A Fatou-lemmával:

$$\varphi_X''(0) \leqslant -\mathrm{E}\left[\liminf_{h\to 0}\left(\frac{\sin(hX)}{h}\right)^2\right] = -\mathrm{E}(X^2),$$

tehát $\mathrm{E}(X^2) \leqslant -\varphi''(0) < \infty$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re, és $\varphi_X^{(2n+2)}(0)$ létezik és véges. Ekkor az indukciós feltevés miatt $\mathrm{E}(X^{2n}) < \infty$. Ha $\mathrm{E}(X^{2n}) = 0$, akkor $X = 0$ P-m.b., így $\mathrm{E}(X^{2n+2}) = 0$. Legyen most $\mathrm{E}(X^{2n}) > 0$. Legyen $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$F(y) := \frac{\mathrm{E}(X^{2n}\mathbb{1}_{\{X\leqslant y\}})}{\mathrm{E}(X^{2n})}.$$

Ekkor $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy eloszlásfüggvény. Legyen $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye $F_Y = F$. Nyilván tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{P}_Y((-\infty, y]) = F_Y(y) = \frac{1}{\mathrm{E}(X^{2n})}\int_{-\infty}^{y} x^{2n}\ \mathrm{P}_X(\mathrm{d}x),$$

ezért a mérték kiterjesztési tételével tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén

$$\mathrm{P}_Y(B) = \frac{1}{\mathrm{E}(X^{2n})}\int_B x^{2n}\ \mathrm{P}_X(\mathrm{d}x),$$

tehát $\mathrm{P}_Y \ll \mathrm{P}_X$ és $\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{P}_Y}{\mathrm{d}\,\mathrm{P}_X}(x) = \frac{1}{\mathrm{E}(X^{2n})} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$. Mivel (viii) alapján tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi_X^{(2n)}(t) = \mathrm{E}\left[(\mathrm{i}X)^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right]$, ezért a sűrűségtétellel

$$\frac{(-1)^n \varphi_X^{(2n)}(t)}{\mathrm{E}(X^{2n})} = \frac{\mathrm{E}(X^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})}{\mathrm{E}(X^{2n})} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\ \mathrm{P}_X(\mathrm{d}x)}{\mathrm{E}(X^{2n})} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\ \mathrm{P}_Y(\mathrm{d}x) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tY}) = \varphi_Y(t).$$

Alkalmazva az állítást $n = 1$ esetén az Y valószínűségi változóra: $\mathrm{E}(Y^2) < \infty$. Mivel

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\mathrm{d}F_Y(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 x^{2n}\,\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{E}(X^{2n})} = \frac{\mathrm{E}(X^{2n+2})}{\mathrm{E}(X^{2n})},$$

így $\mathrm{E}(X^{2n+2}) < \infty$.

(x). Csak $k = 1$ esetén bizonyítjuk. Egyrészt (viii) alapján

$$\varphi_X(t) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\mathrm{i}^r\,\mathrm{E}(X^r)}{r!} t^r + R_n(t),$$

ahol

$$|R_n(t)| \leqslant 3\frac{|t|^n}{n!}\,\mathrm{E}(|X|^n).$$

Másrészt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy bármely $n \geqslant n_0$ esetén

$$\left(\frac{n!}{\mathrm{E}(|X|^n)}\right)^{1/n} \geqslant R - \varepsilon,$$

ezért ekkor

$$\mathrm{E}(|X|^n) \leqslant \frac{n!}{(R-\varepsilon)^n},$$

így

$$|R_n(t)| \leqslant 3\left(\frac{|t|}{R-\varepsilon}\right)^n \to 0 \qquad \text{ha } n \to \infty,$$

amennyiben $|t| < R - \varepsilon$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges lehet, így $\lim_{n\to\infty} R_n(t) = 0$ bármely $t \in \mathbb{R}$, $|t| < R$ esetén. Továbbá a

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^r\,\mathrm{E}(X^r)}{r!} t^r$$

hatványsor konvergenciasugara

$$R' = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,\mathrm{E}(X^n)|/n!}} \geqslant R.$$

□

4.6 Definíció. *Legyenek* $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *és* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektorok. Azt mondjuk, hogy* ***a*** $\boldsymbol{(X_n)_{n\geqslant 1}}$ ***sorozat eloszlásban konvergál*** X*-hez, ha* $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ *az* F_X *minden* x *folytonossági pontjában. Jelölése:* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

4.7 Tétel. (Folytonossági tétel) *Legyenek* $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$ *véletlen vektorok.*

(i) *Ha létezik olyan* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor, hogy* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, *akkor* $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ *minden korlátos intervallumon egyenletesen.*

(ii) *Ha tetszőleges* $t \in \mathbb{R}^d$ *esetén létezik* $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) =: \varphi(t)$, *és* φ *folytonos a* $0 \in \mathbb{R}^d$ *pontban, akkor létezik olyan* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor, hogy* $\varphi_X = \varphi$, *és* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.

4.8 Definíció. *Ha a* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor koordinátái nemnegatív egész értékeket vesznek fel, azaz* X *a* $\mathbb{Z}_+^d$ *halmazba koncentrálódik, vagyis* $\mathrm{P}(X \in \mathbb{Z}_+^d) = 1$, *akkor* $\boldsymbol{X = (X_1, \dots, X_d)}$ ***generátorfüggvénye*** *a*

$$\begin{aligned} G_X(z) &:= G_{X_1,\dots,X_d}(z_1, \dots, z_d) := \mathrm{E}(z^X) := \mathrm{E}(z_1^{X_1} \cdots z_d^{X_d}) \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_d=0}^{\infty} \mathrm{P}(X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d)\, z_1^{k_1} \cdots z_d^{k_d} \end{aligned}$$

d-változós komplex hatványsor összegfüggvénye.

Ez a hatványsor abszolút konvergens a

$$\{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| \leqslant 1, \dots, |z_d| \leqslant 1\}$$

halmazon, és X karakterisztikus függvénye a

$$\varphi_X(t) = \varphi_X(t_1, \dots, t_d) = G_X(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1}, \dots, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_d}), \qquad t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$$

periodikus függvény.

A generátorfüggvény tulajdonságait foglalja össze a következő állítás.

4.9 Tétel. (i) $G_X(1, \dots, 1) = 1$

(ii) G_X *analitikus a* $\{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| < 1, \dots, |z_d| < 1\}$ *halmazon*

(iii) *Tetszőleges* $k_1, \dots, k_d$ *nemnegatív egészek esetén*

$$\mathrm{P}(X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d) = \frac{\partial_1^{k_1} \dots \partial_d^{k_d} G_X(0, \dots, 0)}{r_1! \cdots r_d!}$$

(iv) $\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_Y \iff \forall\, x \in [-1, 1]^d$ *esetén* $G_X(x) = G_Y(x)$

(v) *Ha* X *és* Y *függetlenek, akkor* $G_{X+Y}(z) = G_X(z) G_Y(z)$ *a* $\{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_1| \leqslant 1, \dots, |z_d| \leqslant 1\}$ *halmazon*

(vi) *Tetszőleges* $r_1, \dots, r_d$ *nemnegatív egészek esetén*

$$\mathrm{E}(X_1^{r_1} \cdots X_d^{r_d}) < \infty \quad \iff \quad \partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} G_X(1-, \dots, 1-) < \infty,$$

és

$$\begin{aligned} &\partial_1^{r_1} \dots \partial_d^{r_d} G_X(1-, \dots, 1-) \\ &\qquad = \mathrm{E}(X_1(X_1 - 1) \cdots (X_1 - r_1 + 1) \cdots X_d(X_d - 1) \cdots (X_d - r_d + 1)) \end{aligned}$$

5 Nevezetes eloszlások

6 Többdimenziós normális eloszlás

6.1 Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor* ***standard normális eloszlású****, ha* $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$*, ahol* $Y_1, \dots, Y_d : \Omega \to \mathbb{R}$ *független, standard normális eloszlású valószínűségi változók.*

Azt mondjuk, hogy a $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor* ***normális eloszlású****, ha* X *eloszlása megegyezik* $AY+m$ *eloszlásával, ahol* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *standard normális eloszlású,* $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$*, és* $m \in \mathbb{R}^d$*.*

6.2 Tétel. *Egy* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha karakterisztikus függvénye*

$$\varphi_X(t) = \exp\left\{ \mathrm{i}\langle m, t\rangle - \frac{1}{2}\langle Dt, t\rangle \right\}, \qquad t \in \mathbb{R}^d$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}^d$*, és* $D \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix, azaz* $D^\top = D$*, valamint tetszőleges* $t \in \mathbb{R}^d$ *esetén* $\langle Dt, t\rangle \geqslant 0$*. Továbbá* $m = \mathrm{E}(X)$*,* $D = \mathrm{Cov}(X)$*.*

Ha D *invertálható, akkor* X *abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(D)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\langle D^{-1}(x-m), x-m\rangle \right\}, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Bizonyítás. Ha $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ standard normális eloszlású, akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\varphi_Y(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1Y_1+\dots+t_dY_d)}) = \prod_{j=1}^d \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_jY_j}) = \prod_{j=1}^d \mathrm{e}^{-t_j^2/2} = \mathrm{e}^{-\|t\|^2/2}.$$

Ezért ha $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ normális eloszlású, akkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, X\rangle}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, AY+m\rangle}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, m\rangle}\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle A^\top t, Y\rangle}) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, m\rangle}\varphi_Y(A^\top t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, m\rangle}\mathrm{e}^{-\|A^\top t\|^2/2} = \exp\left\{ \mathrm{i}\langle t, m\rangle - \frac{1}{2}\langle AA^\top t, t\rangle \right\},\end{aligned}$$

tehát φ_X valóban a tételben szereplő alakú, ahol $D := AA^\top$ valóban szimmetrikus: $D^\top = (AA^\top)^\top = AA^\top = D$, és pozitív szemidefinit: tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\langle Dt, t\rangle = \langle AA^\top t, t\rangle = \langle A^\top t, A^\top t\rangle = \|A^\top t\|^2 \geqslant 0.$$

Továbbá $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(AY+m) = A\,\mathrm{E}(Y) + m = m$, és

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X) &= \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}(X))(X-\mathrm{E}(X))^\top] = \mathrm{E}[(AY)(AY)^\top] \\ &= \mathrm{E}(AYY^\top A^\top) = A\,\mathrm{E}(YY^\top)A^\top = AA^\top = D.\end{aligned}$$

Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ olyan valószínűségi változó, melynek karakterisztikus függvénye a tételben megadott alakban áll elő, akkor először is létezik olyan $O \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ortogonális mátrix (azaz $O^{-1} = O^\top$), hogy $O^{-1}DO = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, ahol $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ olyan diagonális mátrix, melynek főátlójában a $\lambda_1, \dots, \lambda_d \geqslant 0$ számok állnak. Ezért $D =$

$O\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_d)O^{-1} = OBB^\top O^\top$, ahol $B := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_d})$, így $D = AA^\top$ alakú, ahol $A := OB$. Az első rész alapján ha $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ standard normális eloszlású, akkor $AY+m$ karakterisztikus függvénye is a tételben megadott, és így a karakterisztikus függvény egyértelműsége miatt X normális eloszlású.

Végül ha $x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $H := \{y \in \mathbb{R}^d : y_1 \leqslant x_1,\dots,y_d \leqslant x_d\}$, X eloszlásfüggvényét F_X jelöli, Y sűrűségfüggvényét pedig f_Y, akkor

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathrm{P}(X_1 \leqslant x_1,\dots,X_d \leqslant x_d) = \mathrm{P}(X \in H) = \mathrm{P}(AY+m \in H) = \mathrm{P}(Y \in A^{-1}(H-m)) \\
&= \int_{A^{-1}(H-m)} f_Y(u)\,\mathrm{d}u = \int_{A^{-1}(H-m)} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \mathrm{e}^{-\|u\|^2/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_H \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\det(A)|} \mathrm{e}^{-\|A^{-1}(v-m)\|^2/2}\,\mathrm{d}v,
\end{aligned}$$

ahol az $u = A^{-1}(v-m)$ helyettesítést hajtottuk végre, melynek Jacobi-mátrixa A^{-1}. Nyilván $\det(D) = \det(A)\det(A^\top) = (\det(A))^2$, és

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}(v-m)\|^2 &= \langle A^{-1}(v-m), A^{-1}(v-m)\rangle = \langle (A^{-1})^\top A^{-1}(v-m), v-m\rangle \\
&= \langle (AA^\top)^{-1}(v-m), v-m\rangle = \langle D^{-1}(v-m), v-m\rangle,
\end{aligned}$$

így le lehet olvasni, hogy X-nek létezik sűrűségfüggvénye, mely a tételben adott alakú. □

6.3 Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor* ***normális eloszlású*** $\boldsymbol{(m, D)}$ ***paraméterekkel****, ha X karakterisztikus függvénye a 6.2 Tételben adott alakú. Jelölése: $X \overset{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(m, D)$.*

Az alábbi következmény szerint tetszőleges normális eloszlású véletlen vektor lineáris transzformáltjai is normális eloszlású véletlen vektorok.

6.4 Következmény. *Ha $X \overset{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(m, D)$ d-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, $a \in \mathbb{R}^\ell$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times d}$, akkor $a+BX \overset{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(a+Bm, BDB^\top)$ ℓ-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor.*

Bizonyítás. Minden $t \in \mathbb{R}^\ell$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi_{a+BX}(t) &= \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, a+BX\rangle}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,a\rangle}\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle B^\top t, X\rangle}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,a\rangle}\varphi_X(B^\top t) \\
&= \exp\left\{\mathrm{i}\langle t,a\rangle + \mathrm{i}\langle m, B^\top t\rangle - \frac{1}{2}\langle DB^\top t, B^\top t\rangle\right\} = \exp\left\{\mathrm{i}\langle a+Bm, t\rangle - \frac{1}{2}\langle BDB^\top t, t\rangle\right\},
\end{aligned}$$

amiből következik az állítás. □

Az alábbi következmény karakterizálja a többdimenziós normális eloszlásokat.

6.5 Következmény. *Egy $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha minden $c \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén a $c^\top X$ véletlen változó normális eloszlású.*

Bizonyítás. Ha a X véletlen vektor normális eloszlású, akkor az előző következmény szerint tetszőleges $c \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén $c^\top X \overset{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(c^\top m, c^\top Dc)$ normális eloszlású véletlen változó.

Fordítva: ha valamely $c \in \mathbb{R}^d$ vektor esetén a $c^\top X$ véletlen változó normális eloszlású, akkor karakterisztikus függvénye

$$\varphi_{c^\top X}(s) = \exp\left\{ \mathrm{i} m_c s - \frac{1}{2}\sigma_c^2 s^2 \right\}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

ahol $m_c = \mathrm{E}(c^\top X) = c^\top \mathrm{E}(X)$ és $\sigma_c^2 = \mathrm{Var}(c^\top X) = c^\top \mathrm{Cov}(X)c$, ezért a X véletlen vektor karakterisztikus függvénye

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t, X\rangle}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^\top X}) = \varphi_{t^\top X}(1) &= \exp\left\{ \mathrm{i}t^\top \mathrm{E}(X) - \frac{1}{2} t^\top \mathrm{Cov}(X) t \right\} \\ &= \exp\left\{ \mathrm{i}\langle \mathrm{E}(X), t\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathrm{Cov}(X)t, t\rangle \right\},\end{aligned}$$

amiből következik, hogy a X véletlen vektor normális eloszlású. □

6.6 Következmény. *Legyen* $(X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_\ell)$ *$d+\ell$-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, és tegyük fel, hogy bármely* $i \in \{1, \dots, d\}$ *és* $j \in \{1, \dots, \ell\}$ *esetén* $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0$. *Ekkor* $(X_1, \dots, X_d)$ *és* $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ *függetlenek.*

Bizonyítás. A feltételek szerint $Z := (X_1, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_\ell)$ szórásmátrixa

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} \Sigma_X & 0 \\ 0 & \Sigma_Y \end{bmatrix}$$

alakú, ahol Σ_X és Σ_Y a $X := (X_1, \dots, X_d)$, illetve $Y := (Y_1, \dots, Y_\ell)$ szórásmátrixa. A Z várható érték vektora $m_Z = (m_X, m_Y)$ alakú, ahol m_X és m_Y a $(X_1, \dots, X_d)$, illetve $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ várható érték vektora. Így Z karakterisztikus függvénye tetszőleges $t = (u, v)$ $(u \in \mathbb{R}^d,\ v \in \mathbb{R}^\ell)$ pontban

$$\begin{aligned}\varphi_Z(t) &= \exp\left\{ \mathrm{i}\langle m_Z, t\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma_Z t, t\rangle \right\} \\ &= \exp\left\{ \mathrm{i}\langle m_X, u\rangle + \mathrm{i}\langle m_Y, v\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma_X u, u\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma_Y v, v\rangle \right\} = \varphi_X(u)\varphi_Y(v),\end{aligned}$$

ezért X és Y függetlenek. □

6.7 Következmény. *Legyenek* $X_1, \dots, X_d$ *független, standard normális eloszlású véletlen változók. Az* $a_1X_1 + \dots + a_dX_d$ *és* $b_1X_1 + \dots + b_dX_d$ *lineáris kombinációk akkor és csak akkor függetlenek, ha az* $(a_1, \dots, a_d)$ *és* $(b_1, \dots, b_d)$ *vektorok merőlegesek egymásra.*

Bizonyítás. A $(a_1X_1 + \dots + a_dX_d, b_1X_1 + \dots + b_dX_d)$ kétdimenziós véletlen vektor normális eloszlású, hiszen a $X := (X_1, \dots, X_d)$ standard d-dimenziós véletlen vektor lineáris traszformáltja. Az előző következmény szerint az $a_1X_1 + \dots + a_dX_d$ és $b_1X_1 + \dots + b_dX_d$ véletlen változók akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok. Az $a := (a_1, \dots, a_d)$, $b := (b_1, \dots, b_d)$ jelöléssel

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(a^\top X, b^\top X) &= \mathrm{E}\big[(a^\top X - \mathrm{E}(a^\top X))(b^\top X - \mathrm{E}(b^\top X))\big] \\ &= \mathrm{E}(a^\top X X^\top b) = a^\top \mathrm{E}(XX^\top) b = a^\top \mathrm{Cov}(X) b = a^\top b = \langle a, b\rangle,\end{aligned}$$

hiszen $\mathrm{Cov}(X)$ az egységmátrix. □

7 Véletlen vektorok sorozatának konvergenciafajtái

7.1 Definíció. *Legyenek* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *és* $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *véletlen vektorok. Azt mondjuk, hogy* ***az*** $\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots}$ ***sorozat*** $\boldsymbol{X}$***-hez konvergál***

- ***majdnem biztosan*** *(jelölése* $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ *vagy* $X_n \to X$ P*-m.b.), ha*

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = \mathrm{P}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1;$$

- ***sztochasztikusan*** *(jelölése* $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$*), ha bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\|X_n - X\| \geqslant \varepsilon) = 0;$$

- ***eloszlásban*** *(jelölése* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$*), ha*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

  minden olyan $x \in \mathbb{R}$ *pontban, ahol* F_X *folytonos;*

- ***r-edik momentumban****, ahol* $r > 0$ *(jelölése* $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$*), ha*

$$\mathrm{E}(\|X\|^r) < \infty, \qquad \mathrm{E}(\|X_n\|^r) < \infty, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\|X_n - X\|^r\right) = 0.$$

A majdnem biztos, sztochasztikus és r-edik momentumbeli konvergenciák kapcsolatáról szól a következő tétel.

7.2 Tétel. *Legyenek* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *és* $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *véletlen vektorok.*

(i) *Ha* $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, *vagy valamely* $r > 0$ *esetén* $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$, *akkor* $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$.

(ii) *Ha* $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ *valamely* $r > 0$ *esetén, akkor tetszőleges* $s \in (0, r)$ *esetén* $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_s} X$.

Bizonyítás. (i). Nyilván

$$X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \mathrm{P}(\|X_k - X\| > \varepsilon \ \text{ végtelen sok } \ k \in \mathbb{N} \ \text{ esetén}) = 0. \tag{7.3}$$

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\{\|X_n - X\| > \varepsilon\} \subset A_n(\varepsilon) := \left\{\sup_{k \geqslant n} \|X_k - X\| > \varepsilon\right\} = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\|X_k - X\| > \varepsilon\}.$$

Mivel $A_n \downarrow$, ezért

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \leqslant \mathrm{P}(A_n(\varepsilon)) \to \mathrm{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m(\varepsilon)\right) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} \{\|X_k - X\| > \varepsilon\}\right) \\ &= \mathrm{P}(\|X_k - X\| > \varepsilon \ \text{ végtelen sok } \ k \in \mathbb{N} \ \text{ esetén})\end{aligned}$$

amint $n \to \infty$, tehát ha $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, akkor $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$.

A Markov-egyenlőtlenség szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$0 \leqslant \mathrm{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) = \mathrm{P}(\|X_n - X\|^r > \varepsilon^r) \leqslant \frac{\mathrm{E}\left(\|X_n - X\|^r\right)}{\varepsilon^r},$$

tehát ha $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$, akkor $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$.

(ii). A Ljapunov-egyenlőtlenség szerint tetszőleges $s \in (0, r)$ esetén

$$0 \leqslant \mathrm{E}\left(\|X_n - X\|^s\right) \leqslant \left[\mathrm{E}\left(\|X_n - X\|^r\right)\right]^{\frac{s}{r}},$$

tehát ha $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$, akkor $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_s} X$. □

A határérték egyértelműségéről szól a következő tétel.

7.4 Tétel. *Ha* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *és* $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *véletlen vektorok úgy, hogy* $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, $Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$, *és* $X_n = Y_n$ P-*m.b. minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, akkor* $X = Y$ P-*m.b.*

Bizonyítás. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{\|X_n - X\| \leqslant \varepsilon\} \cap \{\|Y_n - Y\| \leqslant \varepsilon\} \cap \{X_n = Y_n\} \subset \{\|X - Y\| \leqslant 2\varepsilon\},$$

ezért

$$\{\|X - Y\| > 2\varepsilon\} \subset \{\|X_n - X\| > \varepsilon\} \cup \{\|Y_n - Y\| > \varepsilon\} \cup \{X_n \neq Y_n\}.$$

Mivel $\mathrm{P}(X_n \neq Y_n) = 0$, így

$$\mathrm{P}(\|X - Y\| > 2\varepsilon) \leqslant \mathrm{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) + \mathrm{P}(\|Y_n - Y\| > \varepsilon) \to 0 \qquad \text{amint } n \to \infty,$$

tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\mathrm{P}(\|X - Y\| > 2\varepsilon) = 0$. A mérték folytonossága szerint

$$\mathrm{P}(\|X - Y\| > 0) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\|X - Y\| > \frac{1}{n}\right) = 0,$$

vagyis $\mathrm{P}(\|X - Y\| = 0) = 1$. □

A majdnem biztos és sztochasztikus konvergencia további kapcsolatairól szól a következő tétel.

7.5 Tétel. *Legyenek* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *és* $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *véletlen vektorok.*

(i) $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ *akkor és csak akkor, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{k \geqslant n} \|X_k - X\| \geqslant \varepsilon\right) = 0,$$

azaz $\sup\limits_{k \geqslant n} \|X_k - X\| \xrightarrow{\text{P}} 0$, *amint* $n \to \infty$.

(ii) $\mathrm{P}((X_n)_{n\geqslant 1}$ *konvergens*$) = 1$ *akkor és csak akkor, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{k\geqslant n} \|X_k - X_n\| \geqslant \varepsilon\right) = 0,$$

azaz $\sup\limits_{k\geqslant n} \|X_k - X_n\| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, *amint* $n \to \infty$.

(iii) *Ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\|X_k - X\| \geqslant \varepsilon) < \infty$, *akkor* $X_n \xrightarrow{\mathrm{m.b.}} X$.

(iv) $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ *akkor és csak akkor, ha pozitív egészek bármely* $n_1 < n_2 < \dots$ *sorozatának van olyan* $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ *részsorozatata, hogy* $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\mathrm{m.b.}} X$, *amint* $i \to \infty$.

Bizonyítás. (i). A 7.2 Tétel (i) részének bizonyítása során beláttuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mathrm{P}\left(\sup_{k\geqslant n} \|X_k - X\| \geqslant \varepsilon\right) \to \mathrm{P}(\|X_k - X\| > \varepsilon \text{ végtelen sok } k \in \mathbb{N} \text{ esetén}),$$

amiből (7.3) alapján következik az (i) állítás.

(ii). Hasonlóan bizonyítható, mint (i).

(iii). Megint (7.3) alapján (iii) következik az első Borel–Cantelli-lemmából.

(iv). Tegyük fel, hogy $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, és tekintsük pozitív egészek tetszőleges $n_1 < n_2 < \dots$ sorozát. A sztochasztikus konvergencia definíciója szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ számokhoz van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\mathrm{P}(\|X_n - X\| \geqslant \varepsilon) \leqslant \delta$ bármely $n \geqslant n_0$ esetén. Ezért tetszőleges $i \in \mathbb{N}$ számhoz van olyan $k_i \in \mathbb{N}$, hogy

$$\mathrm{P}\left(\|X_{n_k} - X\| \geqslant \frac{1}{i}\right) \leqslant \frac{1}{2^i} \qquad \text{bármely } k \geqslant k_i \text{ esetén.}$$

Tehát az $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozatra teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(\|X_{n_{k_i}} - X\| \geqslant \frac{1}{i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \infty,$$

így az első Borel–Cantelli-lemma szerint a $\left\{\|X_{n_{k_i}} - X\| \geqslant \frac{1}{i}\right\}$, $i \in \mathbb{N}$, események közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be, azaz 1 valószínűséggel véges sok $i \in \mathbb{N}$ index kivételével $\|X_{n_{k_i}} - X\| < \frac{1}{i}$, ezért $\|X_{n_{k_i}} - X\| \xrightarrow{\mathrm{m.b.}} 0$, amint $i \to \infty$, amiből $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\mathrm{m.b.}} X$, amint $i \to \infty$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $X_n \overset{\mathrm{P}}{\nrightarrow} X$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\mathrm{P}(\|X_n - X\| \geqslant \varepsilon) \nrightarrow 0$, azaz megadható olyan $\varepsilon_0 > 0$ és pozitív egészek olyan $n_1 < n_2 < \dots$ sorozata, hogy $\mathrm{P}(\|X_{n_k} - X\| \geqslant \varepsilon_0) \geqslant \varepsilon_0$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Ezért tetszőleges $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozatat esetén $X_{n_{k_i}} \overset{\mathrm{P}}{\nrightarrow} X$ amint $i \to \infty$, így $X_{n_{k_i}} \overset{\mathrm{m.b.}}{\nrightarrow} X$ amint $i \to \infty$. $\square$

Véletlen vektorok folytonos függvényének konvergenciájáról szól a következő tétel.

7.6 Tétel. *Legyenek* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, *és* $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *véletlen vektorok és* $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$ *folytonos függvény.*

(i) *Ha* $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ *és* $Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} Y$, *akkor* $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{m.b.}} g(X, Y)$.

(ii) *Ha* $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ *és* $Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$, *akkor* $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{P}} g(X, Y)$.

Bizonyítás. (i). Tekintsük az

$$\Omega_1 := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\} \in \mathcal{A}, \qquad \Omega_2 := \{\omega \in \Omega : Y_n(\omega) \to Y(\omega)\} \in \mathcal{A}$$

eseményeket. A g függvény folytonossága miatt

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \subset \{\omega \in \Omega : g(X_n(\omega), Y_n(\omega)) \to g(X(\omega), Y(\omega))\} \in \mathcal{A}.$$

A feltétel szerint $\mathrm{P}(\Omega_1) = 1 = \mathrm{P}(\Omega_2)$, amiből $\mathrm{P}(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$, ezért $\mathrm{P}(g(X_n, Y_n) \to g(X, Y)) = 1$.

(ii). Legyen $n_1 < n_2 < \dots$ pozitív egészek tetszőleges sorozata. Az $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ konvergencia alapján a 7.5 Tétel (iii) pontja szerint van olyan $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ részsorozat, hogy $X_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ amint $i \to \infty$. Az $Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$ konvergencia alapján megint a 7.5 Tétel (iii) pontja szerint ennek a részsorozatnak van olyan $n_{k_{i_1}} < n_{k_{i_2}} < \dots$ részsorozata, hogy $Y_{n_{k_{i_j}}} \xrightarrow{\text{m.b.}} Y$ amint $j \to \infty$. Az (i) pont szerint ebből $g(X_{n_{k_{i_j}}}, Y_{n_{k_{i_j}}}) \xrightarrow{\text{m.b.}} g(X, Y)$ amint $j \to \infty$. Összefoglalva: pozitív egészek tetszőleges $n_1 < n_2 < \dots$ sorozatának van olyan $n_{k_{i_1}} < n_{k_{i_2}} < \dots$ részsorozata, hogy $g(X_{n_{k_{i_j}}}, Y_{n_{k_{i_j}}}) \xrightarrow{\text{m.b.}} g(X, Y)$ amint $j \to \infty$, ezért újra a 7.5 Tétel (iii) pontja szerint $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{P}} g(X, Y)$. □

A konvergencia és műveletek kapcsolatáról szól a következő tétel.

7.7 Tétel. *Legyenek* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, *és* $Y_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *véletlen vektorok.*

(i) *Ha* $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$ *és* $Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} Y$, *akkor* $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X + Y$ *és* $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{\text{m.b.}} \langle X, Y \rangle$.

(ii) *Ha* $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$ *és* $Y_n \xrightarrow{\text{P}} Y$, *akkor* $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{P}} X + Y$ *és* $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{\text{P}} \langle X, Y \rangle$.

(iii) *Ha* $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ *és* $Y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} Y$ *valamely* $r \geqslant 1$ *esetén, akkor* $X_n + Y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X + Y$.

Bizonyítás. Mivel az $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}^d$ és $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ függvények folytonosak, így (i) és (ii) következik a 7.6 Tétel (i) és (ii) állításából.

(iii). A Minkowski-egyenlőtlenséggel

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\|(X_n + Y_n) - (X + Y)\|^r) &= \mathrm{E}(\|(X_n - X) + (Y_n - Y)\|^r) \\ &\leqslant \left((\mathrm{E}(\|X_n - X\|^r))^{\frac{1}{r}} + (\mathrm{E}(\|Y_n - Y\|^r))^{\frac{1}{r}} \right)^r \to 0, \end{aligned}$$

amint $n \to \infty$. □

7.8 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $\Gamma \neq \emptyset$ *nemüres halmaz, és minden* $\gamma \in \Gamma$ *esetén* $X_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor. Azt mondjuk, hogy az* $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *véletlen vektorok* ***egyenletesen integrálhatók****, ha*

$$\lim_{K \to \infty} \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\| \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\| > K\}} \right) = 0.$$

Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ integrálható véletlen vektor, akkor a majoráns konvergenciatétel alapján $\lim_{K\to\infty} \mathrm{E}\left(\|X\|\mathbb{1}_{\{\|X\|>K\}}\right) = 0$, tehát az X vektor egyenletesen integrálható. Fordítva, ha az $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ vektor egyenletesen integrálható, akkor $\lim_{K\to\infty} \mathrm{E}\left(\|X\|\mathbb{1}_{\{\|X\|>K\}}\right) = 0$ alapján van olyan $K_0 > 0$, hogy $\mathrm{E}\left(\|X\|\mathbb{1}_{\{\|X\|>K_0\}}\right) < \infty$, ezért

$$\mathrm{E}(\|X\|) = \mathrm{E}\left(\|X\|\mathbb{1}_{\{\|X\|\leqslant K_0\}}\right) + \mathrm{E}\left(\|X\|\mathbb{1}_{\{\|X\|>K_0\}}\right) \leqslant K_0 + \mathrm{E}\left(\|X\|\mathbb{1}_{\{\|X\|>K_0\}}\right) < \infty,$$

tehát az X vektor integrálható. Hasonlóan bizonyítható, hogy ha $\Gamma \neq \emptyset$ nemüres véges halmaz, és minden $\gamma \in \Gamma$ esetén $X_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, akkor az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletes integrálhatósága azzal ekvivalens, hogy $\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|X_\gamma\|) < \infty$. Végtelen számosságú Γ halmaz esetén a következő tétel szolgáltat szükséges és elégséges feltételt.

7.9 Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $\Gamma \neq \emptyset$ *nemüres halmaz, és minden* $\gamma \in \Gamma$ *esetén* $X_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor. Az* $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *véletlen vektorok akkor és csak akkor egyenletesen integrálhatók, ha*

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|X_\gamma\|) < \infty \tag{7.10}$$

és

$$\lim_{\mathrm{P}(A)\to 0} \sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_A\right) = 0 \tag{7.11}$$

(azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ *esetén van olyan* $\delta > 0$*, hogy* $\mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_A\right) < \varepsilon$ *minden* $\gamma \in \Gamma$ *és minden olyan* $A \in \mathcal{A}$ *esemény esetén, melyre* $\mathrm{P}(A) < \delta$*).*

Bizonyítás. Ha $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ egyenletesen integrálhatók, akkor van olyan $K_0 > 0$, hogy $\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K_0\}}\right) < \infty$, ezért

$$\begin{aligned}\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|X_\gamma\|) &= \sup_{\gamma\in\Gamma}\left(\mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|\leqslant K_0\}}\right) + \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K_0\}}\right)\right)\\ &\leqslant K_0 + \sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K_0\}}\right) < \infty,\end{aligned}$$

tehát teljesül (7.10). Továbbá tetszőleges $\gamma \in \Gamma$, $A \in \mathcal{A}$ és $K > 0$ esetén

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_A\right) &= \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{A\cap\{\|X_\gamma\|>K\}}\right) + \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{A\cap\{\|X_\gamma\|\leqslant K\}}\right)\\ &\leqslant \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K\}}\right) + K\,\mathrm{P}(A).\end{aligned}$$

A $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatósága miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $K_0 > 0$, hogy $\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K_0\}}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, így ha $A \in \mathcal{A}$ olyan esemény, hogy $\mathrm{P}(A) < \frac{\varepsilon}{2K_0}$, akkor $\mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_A\right) < \varepsilon$, tehát teljesül (7.11).

Fordítva: tegyük fel, hogy teljesülnek a (7.10) és (7.11) feltételek. A (7.11) feltétel szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy $\mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_A\right) < \varepsilon$ minden $\gamma \in \Gamma$ és minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathrm{P}(A) < \delta$. Ezt $\{\|X_\gamma\| > K\}$, $K > 0$ alakú eseményekre szeretnénk alkalmazni. A Markov-egyenlőtlenséggel

$$\mathrm{P}(\|X_\gamma\| > K) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\|X_\gamma\|)}{K} \leqslant \frac{\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|X_\gamma\|)}{K},$$

tehát ha $K > \frac{\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|X_\gamma\|)}{\delta}$, akkor $\mathrm{P}(\|X_\gamma\| > K) < \delta$, így $\mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K\}}\right) < \varepsilon$ minden $\gamma \in \Gamma$ esetén, tehát $\lim_{K\to\infty} \sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K\}}\right) = 0$. □

A következő tétel elégséges feltételeket tartalmaz az egyenletes integrálhatóságra.

7.12 Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $\Gamma \neq \emptyset$ *nemüres halmaz, és minden* $\gamma \in \Gamma$ *esetén* $X_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $Y_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektorok.*

(i) *Ha létezik olyan* $r > 1$, *hogy* $\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|X_\gamma\|^r) < \infty$, *akkor az* $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók.*

(ii) *Ha az* $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *és* $\{Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók, akkor az* $\{X_\gamma + Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *véletlen vektorok is egyenletesen integrálhatók.*

(iii) *Ha az* $\{Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók és minden* $\gamma \in \Gamma$ *esetén* $\|X_\gamma\| \leqslant \|Y_\gamma\|$ P-m.b., *akkor az* $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *véletlen vektorok is egyenletesen integrálhatók.*

Bizonyítás. (i). Tetszőleges $\gamma \in \Gamma$, $K > 0$ és $\omega \in \Omega$ esetén

$$\|X_\gamma(\omega)\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K\}}(\omega) \leqslant \|X_\gamma(\omega)\| \left(\frac{\|X_\gamma(\omega)\|}{K}\right)^{r-1} \mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K\}}(\omega) \leqslant \frac{\|X_\gamma(\omega)\|^r}{K^{r-1}},$$

így

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K\}}\right) \leqslant \frac{1}{K^{r-1}} \sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|^r\right) \to 0,$$

amint $K \to \infty$, tehát az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók.

(ii). Elegendő megmutatni, hogy a 7.9 Tétel (7.10) és (7.11) feltételei teljesülnek az $\{X_\gamma + Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorokra.

A 7.9 Tétel szerint $\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|X_\gamma\|) < \infty$ és $\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|Y_\gamma\|) < \infty$, így

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|X_\gamma + Y_\gamma\|) \leqslant \sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|X_\gamma\|) + \sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}(\|Y_\gamma\|) < \infty,$$

tehát a 7.9 Tétel (7.10) feltétele teljesül az $\{X_\gamma + Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorokra.

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén újra a 7.9 Tételt alkalmazva vannak olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$ számok, hogy $\mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_A\right) < \varepsilon/2$ minden $\gamma \in \Gamma$ és minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathrm{P}(A) < \delta_1$, és $\mathrm{E}\left(\|Y_\gamma\|\mathbb{1}_A\right) < \varepsilon/2$ minden $\gamma \in \Gamma$ és minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathrm{P}(A) < \delta_2$. Ezért $\mathrm{E}\left(\|X_\gamma + Y_\gamma\|\mathbb{1}_A\right) \leqslant \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_A\right) + \mathrm{E}\left(\|Y_\gamma\|\mathbb{1}_A\right) < \varepsilon$ minden $\gamma \in \Gamma$ és minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathrm{P}(A) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tehát a 7.9 Tétel (7.11) feltétele is teljesül az $\{X_\gamma + Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorokra.

(iii). Tetszőleges $\gamma \in \Gamma$ és $K > 0$ esetén $\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K\}} \leqslant \|Y_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|Y_\gamma\|>K\}}$ P-m.b., ezért

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}\left(\|X_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|X_\gamma\|>K\}}\right) \leqslant \sup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{E}\left(\|Y_\gamma\|\mathbb{1}_{\{\|Y_\gamma\|>K\}}\right) \to 0$$

amint $K \to \infty$, tehát az $\{X_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ véletlen vektorok egyenletesen integrálhatók. □

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad az r-edik momentumbeli konvergenciára.

7.13 Tétel. (Momentum konvergenciatétel) *Legyenek* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *és* $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *véletlen vektorok, és* $r \geqslant 1$. *Ekkor* $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ *akkor és csak akkor, ha* $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ *és a* $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ *véletlen változók egyenletesen integrálhatók.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$. Az 7.2 Tétel (i) pontja szerint ekkor $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$. Továbbá tetszőleges $K > 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén a Minkowski-egyenlőtlenséggel

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\|X_n\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\right) &= \mathrm{E}\left(\|X_n \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\|^r\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\|(X_n - X)\mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}} + X\mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\|^r\right) \\
&\leqslant \left(\left(\mathrm{E}(\|(X_n - X)\mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\|^r)\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\mathrm{E}(\|X\mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\|^r)\right)^{\frac{1}{r}}\right)^r \\
&\leqslant \left((\mathrm{E}(\|X_n - X\|^r))^{\frac{1}{r}} + \left(\mathrm{E}(\|X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}})\right)^{\frac{1}{r}}\right)^r.
\end{aligned}$$

Mivel $\|X\|^r$ integrálható, ezért egyenletesen integrálható, így a 7.9 Tétel szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, hogy $\mathrm{E}\left(\|X\|^r \mathbb{1}_A\right) < \varepsilon$ minden olyan $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén, melyre $\mathrm{P}(A) < \delta$. Ezt $\{\|X_n\|^r > K\}$, $n \in \mathbb{N}$, $K > 0$ alakú eseményekre szeretnénk alkalmazni. Mivel

$$\{\|X_n\|^r > K\} = \{\|X_n\| > K^{\frac{1}{r}}\} \subset \{\|X_n - X\| > K^{\frac{1}{r}}/2\} \cup \{\|X\| > K^{\frac{1}{r}}/2\},$$

ezért

$$\mathrm{P}(\|X_n\|^r > K) \leqslant \mathrm{P}(\|X_n - X\| > K^{\frac{1}{r}}/2) + \mathrm{P}(\|X\| > K^{\frac{1}{r}}/2).$$

A mérték folytonossága miatt van olyan $K_1 > 0$, hogy $\mathrm{P}(\|X\| > K^{\frac{1}{r}}/2) < \delta/2$ minden $K \geqslant K_1$ esetén. Az $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ konvergencia miatt van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\mathrm{P}(\|X_n - X\| > K_1^{\frac{1}{r}}/2) < \delta/2$ minden $n \geqslant n_1$ esetén, így $\mathrm{P}(\|X_n - X\| > K^{\frac{1}{r}}/2) < \delta/2$ minden $K \geqslant K_1$ és $n \geqslant n_1$ esetén. Ezért $\mathrm{P}(\|X_n\|^r > K) < \delta$ minden $K \geqslant K_1$ és $n \geqslant n_1$ esetén, így ekkor $\mathrm{E}\left(\|X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\right) < \varepsilon$. A $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_r} X$ konvergencia miatt van olyan $n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\mathrm{E}(\|X_n - X\|^r) < \varepsilon$ minden $n \geqslant n_2$ esetén. Összefoglalva: $\mathrm{E}\left(\|X_n\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\right) \leqslant (\varepsilon^{\frac{1}{r}} + \varepsilon^{\frac{1}{r}})^r = 2^r\varepsilon$ minden $K \geqslant K_1$ és $n \geqslant n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ esetén. Az $\|X_1\|^r, \ldots, \|X_{n_0-1}\|^r$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók, ezért van olyan $K_2 > 0$, hogy $\mathrm{E}\left(\|X_n\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\right) < 2^r\varepsilon$ teljesül minden $K \geqslant K_2$ és $n = 1, \ldots, n_0 - 1$ esetén. Végül is $\mathrm{E}\left(\|X_n\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n\|^r > K\}}\right) < 2^r\varepsilon$ teljesül minden $K \geqslant K_0 := \max\{K_1, K_2\}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, tehát az $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók.

Fordítva: tegyük fel, hogy $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ és az $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók. Először megmutatjuk, hogy $\mathrm{E}(\|X\|^r) < \infty$. Mivel az $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók, a 7.9 Tétel szerint $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}(\|X_n\|^r) < \infty$. Mivel az $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \|x\|^r \in \mathbb{R}$ függvény folytonos, így a 7.6 Tétel (ii) pontja szerint $\|X_n\|^r \xrightarrow{\mathrm{P}} \|X\|^r$. Ezért a 7.5 Tétel (iii) pontja szerint van pozitív egészek olyan $n_1 < n_2 < \ldots$ sorozata, hogy $\|X_{n_k}\|^r \xrightarrow{\mathrm{m.b.}} \|X\|^r$, amint $k \to \infty$. Így a Fatou-lemmával $\mathrm{E}(\|X\|^r) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(\|X_n\|^r) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}(\|X_n\|^r) < \infty$.

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|X_n - X\|^r \leqslant (\|X_n\| + \|X\|)^r \leqslant 2^r(\|X_n\|^r + \|X\|^r)$, ugyanis tetszőleges $a, b > 0$ esetén $\frac{a+b}{2} \leqslant \left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}$ a hatványközepek közötti egyenlőtlenség

szerint. Ezért a 7.12 Tétel (ii) és (iii) pontjai alapján a $\{\|X_n - X\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletesen integrálhatók, hiszen az $\|X\|$ véletlen változó integrálható, és a $\{\|X_n\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók is egyenletesen integrálhatók. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\|X_n - X\|^r) &= \mathrm{E}(\|X_n - X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n - X\|^r \leqslant \varepsilon\}}) + \mathrm{E}(\|X_n - X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n - X\|^r > \varepsilon\}}) \\ &\leqslant \varepsilon + \mathrm{E}(\|X_n - X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n - X\|^r > \varepsilon\}}).\end{aligned}$$

Az $\{\|X_n - X\|^r : n \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók egyenletes integrálhatósága szerint van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\mathrm{E}(\|X_n - X\|^r \mathbb{1}_{\{\|X_n - X\|^r > \varepsilon\}}) < \varepsilon$ minden $n \geqslant n_0$ esetén. Így $\mathrm{E}(\|X_n - X\|^r) < 2\varepsilon$ minden $n \geqslant n_0$ esetén, tehát $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\|X_n - X\|^r) = 0$. □

7.14 Definíció. *Legyenek $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ valószínűségi mértékek az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren.*
Azt mondjuk, hogy a $\mu_1, \mu_2, \ldots$ sorozat ***gyengén konvergál*** *μ-höz (jelölése: $\mu_n \Rightarrow \mu$), ha $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ minden olyan $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén, melyre $\mu(\partial A) = 0$, ahol ∂A az A halmaz határát jelöli.*

7.15 Tétel. (Portmanteau tétel) *Legyenek $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ valószínűségi mértékek az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren. A következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, \mu_n(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, \mu(\mathrm{d}y)$ *minden $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény esetén.*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, \mu_n(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, \mu(\mathrm{d}y)$ *minden $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ korlátos, egyenletesen folytonos függvény esetén.*

(iii) $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqslant \mu(F)$ *minden $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zárt halmaz esetén.*

(iv) $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(G) \geqslant \mu(G)$ *minden $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nyitott halmaz esetén.*

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$ *minden $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén, melyre $\mu(\partial A) = 0$.*

Bizonyítás. (i)$\Longrightarrow$(ii) triviális.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Legyen $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ zárt halmaz, és legyen minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$g_k(x) := 1 - \left(\frac{\varrho(x,F)}{1+\varrho(x,F)}\right)^{1/k}, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

ahol $\varrho(x,F) := \inf\{\varrho(x,y) : y \in F\}$. Először megmutatjuk, hogy g_k egyenletesen folytonos függvény. A $h_k(x) := 1 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^{1/k}$, $x \in \mathbb{R}_+$ függvény egyenletesen folytonos, hiszen folytonos, és $\lim_{x\to\infty} h_k(x) = 0$. Így elegendő azt belátni, hogy az $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto \varrho(x,F)$ függvény egyenletesen folytonos. Ez pedig abból következik, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^d$ esetén $|\varrho(x,F) - \varrho(y,F)| \leqslant \varrho(x,y)$. Ehhez azt elég ellenőrízni, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}^d$

esetén $\varrho(x,F) \leqslant \varrho(x,y)+\varrho(y,F)$. A háromszög-egyenlőtlenség szerint tetszőleges $x,y,z \in \mathbb{R}^d$ esetén $\varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y)+\varrho(y,z)$, így

$$\begin{aligned}\varrho(x,F) = \inf\{\varrho(x,z) : z \in F\} &\leqslant \inf\{\varrho(x,y)+\varrho(y,z) : z \in F\} \\ &= \varrho(x,y) + \inf\{\varrho(y,z) : z \in F\} = \varrho(x,y)+\varrho(y,F).\end{aligned}$$

Tehát beláttuk, hogy g_k egyenletesen folytonos függvény.

Nyilván

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \varrho(x,F)=0, \\ 0 & \text{ha } \varrho(x,F)>0, \end{cases}$$

és F zártsága miatt $\varrho(x,F)=0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in F$. Így tetszőleges $x \in E$ esetén $1 \geqslant g_k(x) \downarrow \mathbb{1}_F(x)$ ha $k \uparrow \infty$. Ezért a monoton konvergencia-tétellel és (ii) felhasználásával

$$\mu(F) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_F(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} g_k(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} g_k(x)\,\mu_n(\mathrm{d}x).$$

Nyilván tetszőleges $k,n \in \mathbb{N}$ esetén $g_k \geqslant \mathbb{1}_F$ miatt $\int_{\mathbb{R}^d} g_k(x)\,\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_F(x)\,\mu_n(\mathrm{d}x)$, így $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} g_k(x)\,\mu_n(\mathrm{d}x) \geqslant \limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_F(x)\,\mu_n(\mathrm{d}x) = \limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)$, tehát $\mu(F) \geqslant \limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)$, azaz teljesül (iii).

(iii)$\Longleftrightarrow$(iv) triviális a komplementerre való áttéréssel.

(iv)$\Longrightarrow$(v). Jelölje A^- és A° az A halmaz lezártját, illetve belsejét. Mivel már beláttuk, hogy (iv)$\Longrightarrow$(iii), így

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A) \leqslant \limsup_{n\to\infty}\mu_n(A^-) \leqslant \mu(A^-).$$

Az $A^- = A \cup (A^- \setminus A)$ diszjunkt felbontás alapján $\mu(A^-) = \mu(A) + \mu(A^- \setminus A)$, ahol $A^- \setminus A \subset \partial A$ miatt $\mu(A^- \setminus A) \leqslant \mu(\partial A) = 0$, tehát $\limsup_{n\to\infty}\mu_n(A) \leqslant \mu(A)$.

Továbbá (iv) felhasználásával

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A) \geqslant \liminf_{n\to\infty}\mu_n(A^\circ) \geqslant \mu(A^\circ).$$

Az $A = A^\circ \cup (A \setminus A^\circ)$ diszjunkt felbontás alapján $\mu(A) = \mu(A^\circ) + \mu(A \setminus A^\circ)$, ahol $A \setminus A^\circ \subset \partial A$ miatt $\mu(A \setminus A^\circ) \leqslant \mu(\partial A) = 0$, így $\liminf_{n\to\infty}\mu_n(A) \geqslant \mu(A)$, tehát következik (v).

(v)$\Longrightarrow$(i). Legyen $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény. Legyen $K > 0$ olyan, hogy $\sup\limits_{x\in E}|g(x)| < K$. Legyen

$$D := \left\{t \in \mathbb{R} : \mu\left\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = t\right\} > 0\right\}.$$

Mivel $F(t) := \mu\left\{x \in \mathbb{R}^d : g(x) < t\right\}$, $t \in \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény, és D éppen azon $t \in \mathbb{R}$ pontok halmaza, ahol F nem folytonos, így D megszámlálható halmaz. Tekintsük a $[-K,K]$ intervallumnak egy olyan $-K = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = K$ beosztását, melyre $t_j \notin D$, $j = 1,\ldots,k$. Jelölje $j = 1,\ldots,k$ esetén $B_j := \{x \in \mathbb{R}^d : t_{j-1} \leqslant g(x) < t_j\}$.

Ekkor $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j=1}^k B_j$ diszjunkt felbontás. Mivel $\{x \in \mathbb{R}^d : t_{j-1} < g(x) < t_j\}$ nyitott halmaz, így

$$\partial B_j \subset \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = t_{j-1} \text{ vagy } g(x) = t_j\},$$

ezért $t_{j-1}, t_j \notin D$ miatt $\mu(\partial B_j) = 0$, így (v) felhasználásával $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B_j) = \mu(B_j)$ teljesül minden $j = 1, \dots, k$ esetén. Továbbá

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mu_n(\mathrm{d}x) - \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mu(\mathrm{d}x) \right| \\
&\leqslant \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mu_n(\mathrm{d}x) - \sum_{j=1}^k t_j \mu_n(B_j) \right| + \left| \sum_{j=1}^k t_j \mu_n(B_j) - \sum_{j=1}^k t_j \mu(B_j) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{j=1}^k t_j \mu(B_j) - \int_E g(x)\, \mu(\mathrm{d}x) \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^k \int_{B_j} |g(x) - t_j|\, \mu_n(\mathrm{d}x) + \left| \sum_{j=1}^k t_j \mu_n(B_j) - \sum_{j=1}^k t_j \mu(B_j) \right| + \sum_{j=1}^k \int_{B_j} |t_j - g(x)|\, \mu(\mathrm{d}x) \\
&\leqslant 2 \max_{1 \leqslant j \leqslant k} (t_j - t_{j-1}) + \left| \sum_{j=1}^k t_j \mu_n(B_j) - \sum_{j=1}^k t_j \mu(B_j) \right|,
\end{aligned}$$

ezért

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mu_n(\mathrm{d}x) - \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mu(\mathrm{d}x) \right| \leqslant 2 \max_{1 \leqslant j \leqslant k} (t_j - t_{j-1}),$$

ami tetszőlegesen kicsivé tehető. □

Az eloszlásbeli és gyenge konvergencia kapcsolatáról szól a következő tétel.

7.16 Tétel. *Legyenek $X, X_1, X_2, \dots$ d-dimenziós véletlen vektorok. A következő állítások ekvivalensek:*

(i) $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$

(ii) $\mathrm{P}_{X_n} \Rightarrow \mathrm{P}_X$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(g(X_n)) = \mathrm{E}(g(X))$ *minden* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *korlátos, folytonos függvény esetén.*

(iv) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(g(X_n)) = \mathrm{E}(g(X))$ *minden* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *korlátos, egyenletesen folytonos függvény esetén.*

(v) $\limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n \in F) \leqslant \mathrm{P}(X \in F)$ *minden* $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *zárt halmazra.*

(vi) $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n \in G) \geqslant \mathrm{P}(X \in G)$ *minden* $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *nyitott halmazra.*

(vii) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n \in A) = \mathrm{P}(X \in A)$ *minden olyan* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *esetén, melyre* $\mathrm{P}(X \in \partial A) = 0$.

Bizonyítás. A Portmanteau tétel alapján elegendő az (i)$\Longrightarrow$(vi) és (ii)$\Longrightarrow$(i) állításokat bizonyítani. Csak a $d = 1$ esetben bizonyítunk.

(i)$\Longrightarrow$(vi). Ha $G \subset \mathbb{R}$ nyitott halmaz, akkor előáll diszjunkt, nyitott intervallumok megszámlálható uniójaként: $G = \bigcup_k I_k$, ahol $I_k = (a_k, b_k) \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor léteznek olyan $I'_k = [a'_k, b'_k) \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ intervallumok, hogy F_X folytonos az a'_k, b'_k pontokban, és $\mu(I_k) \leqslant \mu(I'_k) + \varepsilon 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$ (hiszen egyrészt F_X monoton növekvő függvény, így megszámlálható sok pont kivételével folytonos, másrészt használhatjuk a μ mérték folytonosságát). A Fatou-lemma alkalmazásával

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(I_k) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \mu_n(I_k) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \mu_n(I'_k).$$

Viszont tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mu_n(I'_k) = F_{X_n}(b'_k) - F_{X_n}(a'_k) \to F_X(b'_k) - F_X(a'_k) = \mu(I'_k)$, így

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I'_k) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mu(I_k) - \varepsilon 2^{-k}\big) = \mu(G) - \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen választható, így $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geqslant \mu(G)$ tetszőleges $G \subset \mathbb{R}$ nyitott halmaz esetén, ezért $\mu_n \Rightarrow \mu$.

(ii)$\Longrightarrow$(i) nyilvánvaló, hiszen ha $x \in \mathbb{R}$ és $A_x := (-\infty, x]$, akkor $\partial A_x = \{x\}$ miatt ha az F_X függvény folytonos az x pontban, akkor $\mu(\partial A_x) = 0$, így (ii) felhasználásával

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n \leqslant x) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_x) = \mu(A_x) = F_X(x),$$

tehát következik (i). □

7.17 Tétel. (Folytonossági tétel) *Legyenek $X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$ véletlen vektorok.*

(i) *Ha létezik olyan $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, hogy $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, akkor $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ minden korlátos intervallumon egyenletesen.*

(ii) *Ha tetszőleges $t \in \mathbb{R}^d$ esetén létezik $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) =: g(t)$, és g folytonos a $0 \in \mathbb{R}^d$ pontban, akkor létezik olyan $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ véletlen vektor, hogy $\varphi_X = g$, és $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.*

Bizonyítás.

□

8 Feltételes valószínűség, feltételes várható érték

Ha $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező és $B \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathrm{P}(B) > 0$, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény esetén definiálható a

$$\mathrm{P}(A \,|\, B) := \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

feltételes valószínűség. De ha például X és Y véletlen változók, és X abszolút folytonos, akkor $\mathrm{P}(Y \leqslant b \,|\, X = a)$ nem definiálható a fenti módon, mert $\mathrm{P}(X = a) = 0$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén.

A $\mathrm{P}(A \,|\, B)$ ismerete még nem írja le az összes információt, melyet a B eseményre vonatkozó megfigyelés ad az A eseményre vonatkozóan; ehhez még $\mathrm{P}(A \,|\, \overline{B})$ is hozzá tartozik. Általánosabban: ha $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ olyan teljes eseményrendszer, melyre $\mathrm{P}(B_n) > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor egy A eseményre vonatkozó teljes informácót a $\{\mathrm{P}(A \,|\, B_n)\}_{n=1}^{\infty}$ feltételes valószínűségek írják le. Hogyan lehetne ezt az információt úgy megadni, hogy ne kelljen hozzá a $\mathrm{P}(B_n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$ feltétel? Tekintsük a következő módon definiált $f : \Omega \to \mathbb{R}$ lépcsős függvényt:

$$f(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A \,|\, B_n) \mathbb{1}_{B_n}(\omega).$$

Ez nyilván véletlen változó, sőt, még a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ események által generált $\mathcal{F}$ σ-algebrára nézve is mérhető. Az $\mathcal{F}$ σ-algebra éppen a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ eseményekből képezett összes megszámlálható unióból áll. Az f véletlen változót egyértelműen meghatározzák az $\{\mathrm{E}(f \mathbb{1}_B) : B \in \mathcal{F}\}$ várható értékek. Továbbá ha $B \in \mathcal{F}$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén vagy $B_n \subset B$, vagy pedig $B_n \cap B = \emptyset$, ezért

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(f \mathbb{1}_B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}(f \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{B_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A \,|\, B_n) \, \mathrm{P}(B \cap B_n) \\ &= \sum_{\{n : B_n \subset B\}} \mathrm{P}(A \cap B_n) = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B). \end{aligned}$$

Tehát az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változót egyértelműen meghatározza a következő két tulajdonság: $\mathcal{F}$-mérhető, és minden $B \in \mathcal{F}$ esetén $\mathrm{E}(f \mathbb{1}_B) = \mathrm{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B)$. Ilyen f függvény olyan $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ teljes eseményrendszer esetén is létezik, melynél nem feltétlenül teljesül $\mathrm{P}(B_n) > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, de ekkor f nem lesz egyértelműen meghatározott, csak $\mathcal{F}$-mérhető P-nullmértékű halmaz erejéig.

Hasonló gondolatmenetet érvényes a feltételes várható értékre is. Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó, melyre $\mathrm{E}(|X|) < \infty$. Ha $B \in \mathcal{A}$ olyan esemény, melyre $\mathrm{P}(B) > 0$, akkor definiálható a

$$\mathrm{E}(X \,|\, B) := \int_{\Omega} X(\omega) \, \mathrm{d}Q_B(\mathrm{d}\omega) = \frac{1}{\mathrm{P}(B)} \mathrm{E}(X \mathbb{1}_B)$$

feltételes várható érték, ahol a $Q_B : \mathcal{A} \to [0, 1]$, $Q_B(A) := \mathrm{P}(A \,|\, B)$ halmazfüggvény valószínűségi mérték. Ha $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ olyan teljes eseményrendszer, melyre $\mathrm{P}(B_n) > 0$ minden

$n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor az X véletlen változó várható értékére vonatkozó teljes információt a $\{\mathrm{E}(X \mid B_n)\}_{n=1}^{\infty}$ feltételes várható értékek írják le. Ennek az információnak a megadásához tekintsük a következő módon definiált $g : \Omega \to \mathbb{R}$ lépcsős függvényt:

$$g(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}(X \mid B_n) \mathbb{1}_{B_n}(\omega).$$

Ez is nyilván véletlen változó, és még a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ események által generált $\mathcal{F}$ σ-algebrára nézve is mérhető. A g véletlen változót egyértelműen meghatározzák az $\{\mathrm{E}(g\mathbb{1}_B) : B \in \mathcal{F}\}$ várható értékek. Továbbá ha $B \in \mathcal{F}$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén vagy $B_n \subset B$, vagy pedig $B_n \cap B = \emptyset$, ezért

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(g\mathbb{1}_B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}(g\mathbb{1}_B \mathbb{1}_{B_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}(X \mid B_n)\, \mathrm{P}(B \cap B_n) \\ &= \sum_{\{n : B_n \subset B\}} \mathrm{E}(X\mathbb{1}_{B_n}) = \mathrm{E}(X\mathbb{1}_B). \end{aligned}$$

Tehát a $g : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változót egyértelműen meghatározza a következő két tulajdonság: $\mathcal{F}$-mérhető, és minden $B \in \mathcal{F}$ esetén $\mathrm{E}(g\mathbb{1}_B) = \mathrm{E}(X\mathbb{1}_B)$.

8.1 Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész-σ-algebra, és $X : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathrm{E}(|X|) < \infty$. Azt mondjuk, hogy a $X_{\mathcal{F}} : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó a X* ***feltételes várható értéke az $\mathcal{F}$ feltételre nézve****, ha*

(i) *$X_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$-mérhető, $\mathrm{E}(|X_{\mathcal{F}}|) < \infty$,*

(ii) *minden $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathrm{E}(X_{\mathcal{F}}\mathbb{1}_A) = \mathrm{E}(X\mathbb{1}_A)$.*

8.2 Tétel. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész-σ-algebra, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ olyan véletlen változó, melyre $\mathrm{E}(|X|) < \infty$. Ekkor létezik $X_{\mathcal{F}} : \Omega \to \mathbb{R}$ feltételes várható érték, mely P-m.b. egyértelműen meghatározott.*

Első bizonyítás. Legyen $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(A) := \mathrm{E}(X\mathbb{1}_A)$. Ekkor $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}$ véges, σ-additív halmazfüggvény az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhetőségi téren. Tekintsük a P valószínűségi mérték $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$ megszorítását is az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhetőségi térre. Ekkor $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}} \ll \mathrm{P}_{\mathcal{F}}$ (azaz $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}$ abszolút folytonos $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$-re nézve, vagyis ha $A \in \mathcal{F}$ olyan, hogy $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}(A) = 0$, akkor $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(A) = 0$). Ezért a Radon-Nikodym–tétel alapján létezik olyan P-m.b. egyértelműen meghatározott $\mathcal{F}$-mérhető $X_{\mathcal{F}} : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, melyre tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}}(A) = \int_A X_{\mathcal{F}} \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}$, vagyis $\mathrm{E}(X_{\mathcal{F}}\mathbb{1}_A) = \mathrm{E}(X\mathbb{1}_A)$.

Második bizonyítás. Jelölje (rögzített $\mathcal{F}$ esetén) $\mathcal{H}$ azon $X : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változók halmazát, melyekre $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, és melyekhez létezik $X_{\mathcal{F}} : \Omega \to \mathbb{R}$ feltételes várható érték. Jelölje $\mathcal{H}^+$ a $\mathcal{H}$-beli nemnegatív véletlen változók halmazát.

Először belátjuk, hogy $\mathcal{H}$ tartalmazza az összes korlátos véletlen változót. Ha X korlátos, akkor $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Nyilván $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ egy zárt altere az $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ Hilbert-térnek. Jelölje $X_{\mathcal{F}}$ a X merőleges vetületét az $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ altérre. Ez nyilván

$\mathcal{F}$-mérhető. Tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbb{1}_A \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, ezért $X_{\mathcal{F}} - X \perp L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ miatt $\langle X_{\mathcal{F}} - X, \mathbb{1}_A \rangle = 0$, így

$$\mathrm{E}(X_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) = \int X_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\,\mathrm{P} = \langle X_{\mathcal{F}}, \mathbb{1}_A \rangle = \langle X, \mathbb{1}_A \rangle = \mathrm{E}(X \mathbb{1}_A).$$

Tehát $X_{\mathcal{F}}$ a X-nek egy feltételes várható értéke $\mathcal{F}$-re nézve.

Legyen $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}^+$ egy monoton növekvő sorozat. Jelölje minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $X_{n,\mathcal{F}}$ a X_n egy feltételes várható értékét $\mathcal{F}$-re nézve. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leqslant X_{n,\mathcal{F}} \leqslant X_{n+1,\mathcal{F}}$ teljesül P-m.b., ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik a X_n-nek olyan $\widetilde{X}_{n,\mathcal{F}}$ feltételes várható értéke $\mathcal{F}$-re nézve, hogy a $\{\widetilde{X}_{n,\mathcal{F}}\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat is monoton növekvő. Jelölje $X := \lim_{n\to\infty} X_n$, és tegyük fel, hogy $X \in \mathcal{H}^+$. Jelölje $X_{\mathcal{F}} := \lim_{n\to\infty} \widetilde{X}_{n,\mathcal{F}}$. Ekkor $X_{\mathcal{F}}$ nyilván $\mathcal{F}$-mérhető, és tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mathrm{E}(X_{\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\widetilde{X}_{n,\mathcal{F}} \mathbb{1}_A) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n \mathbb{1}_A) = \mathrm{E}(X \mathbb{1}_A),$$

tehát $X_{\mathcal{F}}$ a X-nek egy feltételes várható értéke $\mathcal{F}$-re nézve. Mivel $\mathcal{H}$ tartalmazza az összes korlátos véletlen változót, így az előző konstrukció alapján $\mathcal{H}^+$ tartalmazza az összes P-integrálható nemnegatív véletlen változót. Ezért $\mathcal{H}$ nyilván tartalmazza az összes P-integrálható véletlen változót.

A $X_{\mathcal{A}} : \Omega \to \mathbb{R}$ véletlen változó P-m.b. egyértelműen meghatározott. $\square$

8.3 Definíció. *Az 8.2 Tétel alapján létező $X_{\mathcal{F}}$ véletlen változó* P *szerinti ekvivalencia-osztályát, és ennek egy tetszőleges reprezentánsát is* $\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})$ *fogja jelölni.*

8.4 Tétel. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész-σ-algebra.*

(i) *Ha* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, $\mathrm{E}(|Y|) < \infty$ *és* $X \leqslant Y$ P*-m.b., akkor* $\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}) \leqslant \mathrm{E}(Y \,|\, \mathcal{F})$.

(ii) *Ha* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, *akkor* $|\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})| \leqslant \mathrm{E}(|X| \,|\, \mathcal{F})$.

(iii) *Ha* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, *akkor* $\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{A}) = X$.

(iv) *Ha* X *$\mathcal{F}$-mérhető és* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, *akkor* $\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}) = X$.

(v) *Ha* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, *akkor* $\mathrm{E}[\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})] = \mathrm{E}(X)$.

(vi) *Ha* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$ *és* X *független $\mathcal{F}$-től, akkor* $\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}) = \mathrm{E}(X)$.

(vii) ***Toronyszabály:*** *ha* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$ *és* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *rész-σ-algebra, akkor*

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}) \,|\, \mathcal{G}] = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{G}) \,|\, \mathcal{F}] = \mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{G}).$$

(viii) *Ha* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$ *és* $\mathrm{E}(|Y|) < \infty$, *akkor tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\mathrm{E}(aX + bY \,|\, \mathcal{F}) = a\,\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}) + b\,\mathrm{E}(Y \,|\, \mathcal{F}).$$

(ix) *Ha* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, $\mathrm{E}(|Y|) < \infty$, $\mathrm{E}(|XY|) < \infty$ *és* Y *$\mathcal{F}$–mérhető, akkor* $\mathrm{E}(XY \,|\, \mathcal{F}) = Y\,\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})$.

(x) *Ha* $X_1, X_2, \ldots$ P-*integrálhatók,* $X_n \uparrow X$ P-*m.b. és* X *is* P-*integrálható, akkor* $\mathrm{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}) \uparrow \mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})$ P-*m.b.*

(xi) *Ha* $X_1, X_2, \ldots$ P-*integrálhatók,* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *esetén* $X_n \geqslant 0$ P-*m.b., és* $\mathrm{E}\left(\left|\liminf_{n\to\infty} X_n\right|\right) < \infty$, *akkor* $\mathrm{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n \,|\, \mathcal{F}\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n \,|\, \mathcal{F})$.

(xii) *Ha* $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X$, *és létezik olyan* Y P-*integrálható véletlen változó, hogy minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $|X_n| \leqslant Y$ P-*m.b., akkor* $\mathrm{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})$, *és* $\mathrm{E}(|X_n - X| \,|\, \mathcal{F}) \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.

(xiii) *Ha* $X_1, X_2, \ldots$ P-*integrálhatók,* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *esetén* $X_n \geqslant 0$ P-*m.b., és* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *is* P-*integrálható, akkor* $\mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \,|\, \mathcal{F}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_n \,|\, \mathcal{F})$.

Bizonyítás. (i). Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{E}(Y \,|\, \mathcal{F}) - \mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})\right] = \mathrm{E}(Y \mathbb{1}_A) - \mathrm{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathrm{E}((Y - X)\mathbb{1}_A) \geqslant 0,$$

amiből következik az állítás.

(ii). Következik (i)-ből, hiszen $-|X| \leqslant X \leqslant |X|$ alapján

$$\mathrm{E}(-|X| \,|\, \mathcal{F}) \leqslant \mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}) \leqslant \mathrm{E}(|X| \,|\, \mathcal{F}),$$

és $\mathrm{E}(-|X| \,|\, \mathcal{F}) = -\,\mathrm{E}(|X| \,|\, \mathcal{F})$.

(iii) következik a definícióból, ugyanis X $\mathcal{A}$-mérhető, integrálható, és a definíció (ii) tulajdonsága triviálisan teljesül.

(iv) hasonlóan következik a definícióból.

(v). Az $\Omega \in \mathcal{F}$ eseményre a definíció alapján teljesül

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})] = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})\mathbb{1}_\Omega] = \mathrm{E}(X\mathbb{1}_\Omega) = \mathrm{E}(X).$$

(vi). Nyilván a konstans $\mathrm{E}(X)$ függvény $\mathcal{F}$-mérhető, és a függetlenség miatt tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén a X és $\mathbb{1}_A$ véletlen változók függetlenek, ezért $\mathrm{E}[\mathrm{E}(X)\mathbb{1}_A] = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = \mathrm{E}(X\mathbb{1}_A)$.

(vii). Nyilván $\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-mérhető, és tetszőleges $A \in \mathcal{G}$ esetén $A \in \mathcal{F}$ is teljesül, ezért

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{G})\mathbb{1}_A] = \mathrm{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})\mathbb{1}_A].$$

(viii). Nyilván $a\,\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}) + b\,\mathrm{E}(Y \,|\, \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-mérhető, és tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[(a\,\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}) + b\,\mathrm{E}(Y \,|\, \mathcal{F}))\mathbb{1}_A\right] &= a\,\mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})\mathbb{1}_A\right] + b\,\mathrm{E}\left[\mathrm{E}(Y \,|\, \mathcal{F})\mathbb{1}_A\right] \\ &= a\,\mathrm{E}\left[X\mathbb{1}_A\right] + b\,\mathrm{E}\left[Y\mathbb{1}_A\right] = \mathrm{E}\left[(aX + bY)\mathbb{1}_A\right].\end{aligned}$$

(ix). Nyilván $Y\,\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-mérhető. Ha Y egy $\mathcal{F}$-mérhető indikátorváltozó, azaz $Y = \mathbb{1}_B$, ahol $B \in \mathcal{F}$, akkor $XY = X\mathbb{1}_B$ is P-integrálható. Tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\mathrm{E}\left[Y\,\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})\mathbb{1}_A\right] = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_B\,\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})\mathbb{1}_A\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})\mathbb{1}_{A\cap B}\right] = \mathrm{E}\left[X\mathbb{1}_{A\cap B}\right] = \mathrm{E}\left[YX\mathbb{1}_A\right],$$

így ekkor teljesül $\mathrm{E}(XY\,|\,\mathcal{F}) = Y\,\mathrm{E}(X\,|\,\mathcal{F})$. Nyilván ez teljesül $\mathcal{F}$-mérhető indikátorváltozók véges, lineáris kombinációira is. Ha $Y \geqslant 0$ P-integrálható és $\mathcal{F}$-mérhető, akkor létezik $\mathcal{F}$-mérhető indikátorváltozók véges, lineáris kombinációinak $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton növekvő sorozata úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Y_n \geqslant 0$, és $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$. Ha még az is teljesül, hogy $X \geqslant 0$, akkor tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[Y\,\mathrm{E}(X\,|\,\mathcal{F})\mathbb{1}_A\right] &= \mathrm{E}\left[(\lim_{n\to\infty} Y_n)\,\mathrm{E}(X\,|\,\mathcal{F})\mathbb{1}_A\right] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[Y_n\,\mathrm{E}(X\,|\,\mathcal{F})\mathbb{1}_A\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[Y_n X\mathbb{1}_A\right] = \mathrm{E}\left[(\lim_{n\to\infty} Y_n) X\mathbb{1}_A\right] = \mathrm{E}\left[YX\mathbb{1}_A\right],\end{aligned}$$

ezért ekkor is teljesül $\mathrm{E}(XY\,|\,\mathcal{F}) = Y\,\mathrm{E}(X\,|\,\mathcal{F})$. Végül a $XY = X^+Y^+ - X^+Y^- - X^-Y^+ + X^-Y^-$ felbontás alapján kapjuk az általános esetet.

(x). Nyilván $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X\,|\,\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-mérhető, és tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén

$$\mathrm{E}[\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n\,|\,\mathcal{F})\mathbb{1}_A] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[\mathrm{E}(X_n\,|\,\mathcal{F})\mathbb{1}_A] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_n\mathbb{1}_A] = \mathrm{E}[X\mathbb{1}_A].$$

(xi). Nyilván (i) alapján tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(\inf_{n\geqslant m} X_n\,|\,\mathcal{F}) \leqslant \inf_{n\geqslant m} \mathrm{E}(X_n\,|\,\mathcal{F})$. Az $Y_m := \inf_{n\geqslant m} X_n$, $m \in \mathbb{N}$ sorozatra alkalmazva (x)-et azt kapjuk, hogy

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{E}(\inf_{n\geqslant m} X_n\,|\,\mathcal{F}) = \mathrm{E}(\lim_{m\to\infty} \inf_{n\geqslant m} X_n\,|\,\mathcal{F}) = \mathrm{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n\,|\,\mathcal{F}),$$

ezért

$$\mathrm{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n\,|\,\mathcal{F}) \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf_{n\geqslant m} \mathrm{E}(X_n\,|\,\mathcal{F}) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n\,|\,\mathcal{F}).$$

(xii). Nyilván elég a második állítást bizonyítani, hiszen

$$|\,\mathrm{E}(X_n\,|\,\mathcal{F}) - \mathrm{E}(X\,|\,\mathcal{F})| = |\,\mathrm{E}(X_n - X\,|\,\mathcal{F})| \leqslant \mathrm{E}(|X_n - X|\,|\,\mathcal{F}).$$

A $Z_n := \sup_{m\geqslant n} |X_m - X|$, $n \in \mathbb{N}$ sorozatra $Z_n \downarrow 0$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Z_n \geqslant 0$, ezért (x) alapján $\mathrm{E}(Z_n\,|\,\mathcal{F}) \downarrow 0$ P-m.b. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leqslant |X_n - X| \leqslant Z_n$, ezért $\mathrm{E}(|X_n - X|\,|\,\mathcal{F}) \downarrow 0$ P-m.b.

(xiii) következik (x)-ből. □

8.5 Tétel. (Feltételes Jensen-egyenlőtlenség) *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *rész-σ-algebra, és* $X = (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor, melyre* $\mathrm{E}(\|X\|) < \infty$.

(i) *Ha* $K \subset \mathbb{R}^d$ *konvex, zárt és* $X \in K$ *m.b., akkor*

$$\mathrm{E}(X\,|\,\mathcal{F}) := (\mathrm{E}(X_1\,|\,\mathcal{F}), \ldots, \mathrm{E}(X_d\,|\,\mathcal{F})) \in K \quad \textit{m.b.}$$

(ii) *Ha* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *konvex és* $\mathrm{E}(|g(X)|) < \infty$, *akkor* $g(\mathrm{E}(X\,|\,\mathcal{F})) \leqslant \mathrm{E}(g(X)\,|\,\mathcal{F})$.

8.6 Lemma. *Legyen* $K \subset \mathbb{R}^d$ *konvex, zárt, és* $x \in \mathbb{R}^d$ *esetén jelölje* $h_K(x)$ *az* x*-hez legközelebbi* K*-beli pontot (mely* K *konvexsége és zártsága miatt létezik és egyértelmű). Ekkor tetszőleges* $x \in \mathbb{R}^d$ *és* $y \in K$ *esetén*

$$x^\top(x - h_K(x)) \geqslant h_K(x)^\top(x - h_K(x)) \geqslant y^\top(x - h_K(x)),$$

és az első egyenlőtlenségnél egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in K$.

Bizonyítás. Az első egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$(x - h_K(x))^\top (x - h_K(x)) = \|x - h_K(x)\|^2 \geqslant 0,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $h_K(x) = x$, ami K zártsága miatt azzal ekvivalens, hogy $x \in K$.

A második egyenlőtlenség bizonyításához induljunk ki abból, hogy a $h_K : \mathbb{R}^d \to K$ függvény definíciója és K konvexitása alapján a

$$[0,1] \ni t \mapsto \|x - [(1-t)h_K(x) + ty]\|^2$$

függvény monoton növekvő a $[0,1]$ intervallumon, ezért a deriváltja nemnegatív a $(0,1)$ intervallumon. Mivel

$$\begin{aligned}\|x - [(1-t)h_K(x) + ty]\|^2 &= \|(x - h_K(x)) - t(y - h_K(x))\|^2 \\ &= \|x - h_K(x)\|^2 - 2t(y - h_K(x))^\top (x - g(x)) + t^2\|y - h_K(x)\|^2,\end{aligned}$$

így $-2(y - h_K(x))^\top (x - h_K(x)) + 2t\|y - g(x)\|^2 \geqslant 0$ minden $t \in (0,1)$ esetén, amiből következik $-2(y - h_K(x))^\top (x - h_K(x)) \geqslant 0$, így megkaptuk a második egyenlőtlenséget. □

A feltételes Jensen-egyenlőtlenség bizonyítása. (i) Tetszőleges $\omega \in \Omega$ esetén alkalmazzuk az előző Lemmát $x = \mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega)$ és $y = X(\omega)$ szereposztással. Mivel $X \in K$ m.b., azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega)^\top [\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega))] \\ &\qquad \geqslant h_K(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega))^\top [\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega))] \\ &\qquad \geqslant X(\omega)^\top [\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega))] \qquad \text{m.b.}\end{aligned}$$

Feltételes várható értéket véve az $\mathcal{F}$ rész-σ-algebrára azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega)^\top [\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega))] \\ &\qquad \geqslant h_K(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega))^\top [\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega))] \\ &\qquad \geqslant \mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega)^\top [\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega) - h_K(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F})(\omega))] \qquad \text{m.b.}\end{aligned}$$

Mivel az első és harmadik kifejezés megyegyezik, így mindkét helyen egyenlőség van, ezért az előző Lemma szerint $\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}) \in K$ m.b.

(ii) Tekintsük a

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in \mathbb{R}^d,\ y \in [g(x), \infty)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

zárt, konvex halmazt. Mivel $(X, g(X)) \in K$ m.b., $\mathrm{E}(|X|) < \infty$ és $\mathrm{E}(|g(X)|) < \infty$, így (i) alapján $(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}), \mathrm{E}(g(X) \,|\, \mathcal{F})) \in K$ m.b., ezért K definíciója szerint $\mathrm{E}(g(X) \,|\, \mathcal{F}) \geqslant g(\mathrm{E}(X \,|\, \mathcal{F}))$ m.b. □

8.7 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező és* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *rész-σ-algebra. Egy* $A \in \mathcal{A}$ *eseménynek a* ***feltételes valószínűsége az*** $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ ***feltételre nézve*** $\mathrm{P}(A \,|\, \mathcal{F}) := \mathrm{E}(\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F})$.

8.8 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan véletlen változó, melyre* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, *és* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor. Ekkor a* X ***feltételes várható értéke az*** $\boldsymbol{Y}$***-ra nézve*** $\mathrm{E}(X \,|\, Y) := \mathrm{E}(X \,|\, \sigma(Y))$.

8.9 Lemma. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan véletlen változó, melyre* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, *és* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor. Ekkor létezik olyan* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény, hogy* $\mathrm{E}(X \,|\, Y) = f(Y)$. *Ez az a* P_Y*-m.b. egyértelműen meghatározott* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *mérhető függvény, melyre tetszőleges* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *esetén teljesül*

$$\int_B f(y)\, \mathrm{P}_Y(\mathrm{d}y) = \mathrm{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}),$$

ahol P_Y *az* Y *eloszlását jelöli, azaz minden* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *esetén* $\mathrm{P}_Y(B) := \mathrm{P}(Y \in B)$.

Bizonyítás. Az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren P_Y valószínűségi mérték. Legyen továbbá minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén $\mathbb{Q}(B) := \mathrm{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)})$. Ez véges, σ-additív halmazfüggvény az $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren, és $\mathbb{Q} \ll \mathrm{P}_Y$, ezért a Radon-Nikodym-tétel alapján létezik olyan P_Y-m.b. egyértelműen meghatározott $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, melyre tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén $\mathbb{Q}(B) = \int_B \tilde{f} \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}_Y$, ezért

$$\mathrm{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}) = \mathbb{Q}(B) = \int_B \tilde{f} \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}_Y = \int_{Y^{-1}(B)} \tilde{f} \circ Y \,\mathrm{d}\,\mathrm{P} = \mathrm{E}(\tilde{f}(Y) \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}).$$

Mivel $\sigma(Y) = \{Y^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$, így tetszőleges $A \in \sigma(Y)$ esetén $\mathrm{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathrm{E}(\tilde{f}(Y) \mathbb{1}_A)$. Nyilván $\tilde{f} \circ Y$ $\sigma(Y)$-mérhető, így $\mathrm{E}(X \,|\, Y) = \tilde{f}(Y)$. Ha pedig valamely $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mérhető függvény esetén $\mathrm{E}(X \,|\, Y) = f(Y)$, akkor minden $A \in \sigma(Y)$ esetén teljesül $\mathrm{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathrm{E}(f(Y) \mathbb{1}_A)$, így minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén teljesül $\mathrm{E}(X \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}) = \mathrm{E}(f(Y) \mathbb{1}_{Y^{-1}(B)})$, amiből következik $\mathbb{Q}(B) = \int_B f \,\mathrm{d}\,\mathrm{P}_Y$, ezért $f = \tilde{f}$ P_Y-m.m. $\square$

8.10 Jelölés. *Az 8.9 Lemma alapján létező* f *függvény* P_Y *szerinti ekvivalencia-osztályát, és ennek egy tetszőleges reprezentánsát is* $\mathrm{E}(X \,|\, Y = y)$ *fogja jelölni.*

8.11 Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan véletlen változó, melyre* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, *és* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen vektor.*

(i) *Ha* $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *olyan mérhető függvény, hogy* $\mathrm{E}(|Xg(Y)|) < \infty$, *akkor* $\mathrm{E}(Xg(Y) \,|\, Y = y) = g(y)\, \mathrm{E}(X \,|\, Y = y)$.

(ii) *Ha* X *és* Y *függetlenek, és* $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *olyan mérhető függvény, hogy* $\mathrm{E}(|g(X,Y)|) < \infty$, *akkor* $\mathrm{E}(g(X,Y) \,|\, Y = y) = \mathrm{E}(g(X,y))$ *és* $\mathrm{E}(g(X,Y) \,|\, Y) = \mathrm{E}(g(X,c))\big|_{c=Y}$.

(iii) *Ha* $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *olyan mérhető függvény, hogy* $\mathrm{E}(|g(X,Y)|) < \infty$, *akkor* $\mathrm{E}(g(X,Y) \,|\, Y) = \mathrm{E}(g(X,c) \,|\, Y)\big|_{c=Y}$.

Bizonyítás. (i) következik a 8.4 Tétel (ix) pontjából.

(ii). Elég azt bizonyítani, hogy az állítás teljesül indikátorfüggvényekre, azaz amikor $g = \mathbb{1}_A$ valamely $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén, ugyanis ebből már levezethető az állítás a 8.4 Tétel (ix) pontjánál használt gondolatmenettel. Tehát elég azt bizonyítani, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén

$$\mathrm{E}(\mathbb{1}_A(X,Y) \,|\, Y = y) = \mathrm{E}(\mathbb{1}_A(X,y)).$$

Az 8.4 Tétel (xiii) pontja alapján azok a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-beli halmazok, melyekre teljesül ez az állítás, σ-algebrát alkotnak, és a fenti egyenlet mindkét oldala valószínűségi mértéket definiál az $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mérhetőségi téren, ezért a mértékek kiterjesztési tétele alapján elég az állítást egy olyan halmazalgebrára belátni, mely generálja a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ σ-algebrát. Egy ilyen halmazalgebrát alkotnak a $C \times D$ $(C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ alakú halmazok diszjunkt, véges uniói. Ezért elég azt belátni, hogy az állítás teljesül azokra a $g = \mathbb{1}_{C\times D}$ indikátorfüggvényekre, ahol $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Ez pedig azért igaz, mert az

$$y \mapsto \mathrm{E}(\mathbb{1}_{C\times D}(X,y)) = \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_C(X)\mathbb{1}_D(y)\right] = \mathrm{P}(X \in C)\mathbb{1}_D(y)$$

függvény mérhető, és tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ esetén teljesül

$$\int_B \mathrm{E}(\mathbb{1}_{C\times D}(X,y))\ \mathrm{P}_Y(\mathrm{d}y) = \mathrm{E}(\mathbb{1}_{C\times D}(X,Y)\mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}),$$

hiszen a baloldal

$$\int_B \mathrm{E}(\mathbb{1}_C(X)\mathbb{1}_D(y))\ \mathrm{P}_Y(\mathrm{d}y) = \int_{B\cap D} \mathrm{E}(\mathbb{1}_C(X))\ \mathrm{P}_Y(\mathrm{d}y) = \mathrm{P}(X \in C)\,\mathrm{P}(Y \in B \cap D),$$

a jobboldal pedig

$$\mathrm{E}(\mathbb{1}_C(X)\mathbb{1}_{B\cap D}(Y)) = \mathrm{P}(X \in C,\, Y \in B \cap D).$$

A (iii) állítás hasonlóan bizonyítható. □

8.12 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező, és* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *véletlen elem. Egy* $A \in \mathcal{A}$ *eseménynek a* ***feltételes valószínűsége az*** $\boldsymbol{Y}$***-ra nézve*** $\mathrm{P}(A \,|\, Y = y) := \mathrm{E}(\mathbb{1}_A \,|\, Y = y)$.

8.13 Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező, és* $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *abszolút folytonos véletlen vektor. Jelölje* (X,Y) *sűrűségfüggvényét* $f_{X,Y}$. *Definiáljuk az* $f_{X|Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ *függvényt a következő módon:*

$$f_{X|Y}(x|y) := \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{ha } f_Y(y) \neq 0, \\ h(x) & \text{ha } f_Y(y) = 0, \end{cases}$$

ahol f_Y *az* Y *sűrűségfüggvénye, és* $h : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ *tetszőleges sűrűségfüggvény. Ekkor érvényesek a következő állítások:*

(i) *Bármely* $y \in \mathbb{R}$ *esetén az* $x \mapsto f_{X|Y}(x|y)$ *függvény sűrűségfüggvény.*

(ii) *Bármely* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *esetén* $\mathrm{P}(X \in A \,|\, Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$.

(iii) *Ha* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olyan Borel-mérhető függvény, melyre* $\mathrm{E}(|g(X)|) < \infty$, *akkor* $\mathrm{E}(g(X) \,|\, Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$.

Bizonyítás. (i) következik abból, hogy $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(ii) speciális esete (iii)-nak a $g = \mathbb{1}_A$ függvénnyel.

(iii). Nyilván $y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x$ mérhető. Továbbá minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ esetén teljesül

$$\begin{aligned}
&\int_B \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{P}_Y(dy) = \int_B \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x \right) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_B \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mathbb{1}_B(y) f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}(g(X)\mathbb{1}_B(Y)) = \mathrm{E}(g(X)\mathbb{1}_{Y^{-1}(B)}).
\end{aligned}$$

□

8.14 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező, és* $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *abszolút folytonos valószínűségi változó. Az 8.13 Tételben definiált* $f_{X|Y}$ *függvényt a* X*-nek* Y*-ra vonatkozó* ***feltételes sűrűségfüggvényének*** *nevezzük.*

8.15 Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező, és* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *abszolút folytonos véletlen változó. Jelölje* Y *sűrűségfüggvényét* f_Y. *Ekkor érvényesek a következő állítások:*

(i) ***Teljes valószínűség tétele:*** *tetszőleges* $A \in \mathcal{A}$ *eseményre teljesül*

$$\mathrm{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(A \,|\, Y = y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

(ii) ***Teljes várható érték tétele:*** *ha* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *olyan véletlen változó, hogy* $\mathrm{E}(|X|) < \infty$, *akkor*

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(X \,|\, Y = y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Bizonyítás. (i) speciális esete (ii)-nek a $X = \mathbb{1}_A$ indikátorfüggvénnyel.

(ii) következik az 8.4 Tétel (v) pontjából. □

8.16 Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező, és* $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *abszolút folytonos véletlen vektor. Jelölje* (X,Y) *sűrűségfüggvényét* $f_{X,Y}$, *a* X *sűrűségfüggvényét* f_X, *az* Y*-nak* X*-re vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényét pedig* $f_{Y|X}$. *Ekkor tetszőleges* $A \in \mathcal{A}$ *eseményre érvényes* ***Bayes tétele:***

$$\mathrm{P}(X \in A \,|\, Y = y) = \frac{\displaystyle\int_A f_{Y|X}(y|x) f_X(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Bizonyítás. Az állítás következik az 8.13 Tétel (ii) pontjából. □

8.17 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *rész-σ-algebra, és* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *négyzetesen* P*-integrálható valószínűségi változó. Azt mondjuk, hogy az* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó a* X ***négyzetes középben vett legjobb*** $\boldsymbol{\mathcal{F}}$***-mérhető becslése****, ha*

(i) Y *$\mathcal{F}$-mérhető, négyzetesen* P*-integrálható,*

(ii) *tetszőleges* $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ *$\mathcal{F}$-mérhető négyzetesen* P*-integrálható valószínűségi változó esetén* $\mathrm{E}(X - Y)^2 \leqslant \mathrm{E}(X - Z)^2$.

Tulajdonképpen a $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ vektorhoz keresünk olyan $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ vektort, melyre bármely $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ esetén teljesül $\|X - Y\| \leqslant \|X - Z\|$; ez nyilván X merőleges vetülete az $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ zárt, lineáris altérre.

8.18 Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *rész-σ-algebra,* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *négyzetesen* P*-integrálható valószínűségi változó. Ekkor létezik* X*-nek négyzetes középben vett legjobb* $\mathcal{F}$*-mérhető becslése, mégpedig* $\mathrm{E}(X \mid \mathcal{F})$.

Bizonyítás. Legyen $Y := \mathrm{E}(X \mid \mathcal{F})$. Ekkor bármely $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ esetén

$$\mathrm{E}(X - Z)^2 = \mathrm{E}\left((X - Y) + (Y - Z)\right)^2 = \mathrm{E}(X - Y)^2 + 2\,\mathrm{E}[(X - Y)(Y - Z)] + \mathrm{E}(Y - Z)^2.$$

Mivel Y és Z is $\mathcal{F}$-mérhető, így az 8.4 Tétel (vii) pontjának segítségével

$$\mathrm{E}[(X - Y)(Y - Z)] = \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}[(X - Y)(Y - Z) \mid \mathcal{F}]\Big) = \mathrm{E}\Big((Y - Z)\,\mathrm{E}[(X - Y) \mid \mathcal{F}]\Big) = 0,$$

hiszen $\mathrm{E}[(X - Y) \mid \mathcal{F}] = \mathrm{E}(X \mid \mathcal{F}) - \mathrm{E}(Y \mid \mathcal{F}) = Y - Y = 0$. Ezért

$$\mathrm{E}(X - Z)^2 = \mathrm{E}(X - Y)^2 + \mathrm{E}(Y - Z)^2 \geqslant \mathrm{E}(X - Y)^2,$$

amiből következik az állítás. □

8.19 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező, és* $X, Y_1, \ldots, Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *négyzetesen* P*–integrálható véletlen változók. Azt mondjuk, hogy az* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *véletlen változó a* X ***négyzetes középben vett legjobb lineáris becslése az*** $\boldsymbol{Y_1, \ldots, Y_n}$ ***alapján****, ha*

(i) Y *benne van az* $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *Hilbert-térnek abban a* $L^2(Y_1, \ldots, Y_n)$ *zárt, lineáris alterében, melyet az* $Y_1, \ldots, Y_n$ *lineáris kombinációi alkotnak,*

(ii) *tetszőleges* $Z \in L^2(Y_1, \ldots, Y_n)$ *esetén* $\mathrm{E}(X - Y)^2 \leqslant \mathrm{E}(X - Z)^2$.

Tulajdonképpen a $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ vektorhoz keresünk olyan $Y \in L^2(Y_1, \ldots, Y_n)$ vektort, melyre bármely $Z \in L^2(Y_1, \ldots, Y_n)$ esetén teljesül $\|X - Y\| \leqslant \|X - Z\|$; ez nyilván X merőleges vetülete az $L^2(Y_1, \ldots, Y_n)$ zárt, lineáris altérre. Mivel $L^2(Y_1, \ldots, Y_n) \subseteq L^2(\Omega, \sigma(Y_1, \ldots, Y_n), \mathrm{P})$, ezért az $Y_1, \ldots, Y_n$ alapján vett legjobb lineáris becslés általában „rosszabb", mint a legjobb $\sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$-mérhető becslés (mely a 8.9 Lemma alapján $f(Y_1, \ldots, Y_n)$ alakú valamely $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mérhető függvénnyel).

9 Martingálok

9.1 Definíciók, alaptulajdonságok

Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér. Az 1, 2, ... pozitív egészeket *időpontoknak* nevezzük. Jelölje minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{F}_n$ azoknak az eseményeknek a halmazát, melyekről az n időpontban már tudjuk, hogy bekövetkeztek-e, vagy sem. Ekkor $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növekvő rész-σ-algebra sereg $\mathcal{A}$-ban, azaz $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{A}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

9.1 Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ rész-σ-algebra.*
*Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **filtráció**, ha $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$.*
*Azt mondjuk, hogy véletlen változók $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata **adaptált** az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációhoz, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén X_n $\mathcal{F}_n$-mérhető, azaz $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$.*

Véletlen változók $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata akkor és csak akkor adaptált az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációhoz, ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ időpontban a rendelkezésre álló információk alapján tudjuk X_n értékét. Nyilván véletlen változók tetszőleges $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata adaptált a $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ **természetes filtrációhoz**, ahol $\mathcal{F}_n^X := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, és ez a legszűkebb szűrés, melyhez az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat adaptált.

9.2 Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ véletlen változók sorozata, mely adaptált valamely $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ filtrációhoz, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(|X_n|) < \infty$. Azt mondjuk, hogy az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat*

- ***martingál**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n$;*
- ***szubmartingál**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \geqslant X_n$;*
- ***szupermartingál**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \leqslant X_n$.*

Azt mondjuk, hogy a $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat martingál, szubmartingál, illetve szupermartingál, ha az $(X_n, \mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat martingál, szubmartingál, illetve szupermartingál.

Ha X_n egy játékos előjeles vagyona az n időpontban, akkor martingál esetén a játék igazságos, szubmartingál esetén a játék előnyös, szupermartingál esetén pedig hátrányos a játékos számára.

Nyilván

- martingál esetén $\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}(X_2) = \mathrm{E}(X_3) = \ldots$;
- szubmartingál esetén $\mathrm{E}(X_1) \leqslant \mathrm{E}(X_2) \leqslant \mathrm{E}(X_3) \leqslant \ldots$;
- szupermartingál esetén $\mathrm{E}(X_1) \geqslant \mathrm{E}(X_2) \geqslant \mathrm{E}(X_3) \geqslant \ldots$.

Ha az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat martingál, szubmartingál, illetve szupermartingál, akkor az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is martingál, szubmartingál, illetve szupermartingál.

Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szubmartingál, akkor $(-X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szupermartingál.

9.3 Tétel. *Ha az* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat*

- *martingál, akkor minden* $n, k \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathrm{E}(X_{n+k} \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n$*;*
- *szubmartingál, akkor minden* $n, k \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathrm{E}(X_{n+k} \,|\, \mathcal{F}_n) \geqslant X_n$*;*
- *szupermartingál, akkor minden* $n, k \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathrm{E}(X_{n+k} \,|\, \mathcal{F}_n) \leqslant X_n$*.*

Példák:

(i) Legyenek Y_1, Y_2, ... független véletlen változók, és legyen $X_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat

- martingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(Y_k) = 0$;
- szubmartingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(Y_k) \geqslant 0$;
- szupermartingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(Y_k) \leqslant 0$.

(ii) Legyenek Y_1, Y_2, ... független pozitív véletlen változók, és legyen $X_n := \prod_{k=1}^{n} Y_k$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat

- martingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(Y_k) = 1$;
- szubmartingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(Y_k) \geqslant 1$;
- szupermartingál, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(Y_k) \leqslant 1$.

(iii) Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ valószínűségi mező, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ filtráció, Y olyan véletlen változó, hogy $\mathrm{E}(|Y|) < \infty$, és legyen $X_n := \mathrm{E}(Y \,|\, \mathcal{F}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat martingál.

9.4 Állítás. *Ha* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *martingál, és minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $\mathrm{E}(X_k^2) < \infty$*, akkor az* X_1, $X_2 - X_1$, $X_3 - X_2$, ... *véletlen változók páronként korrelálatlanok.*

Bizonyítás. Nyilván $\mathrm{E}(X_k - X_{k-1}) = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá tetszőleges $1 \leqslant j < k$ esetén

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[(X_j - X_{j-1})(X_k - X_{k-1})\right] &= \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}\left[(X_j - X_{j-1})(X_k - X_{k-1}) \,|\, \mathcal{F}_{k-1}\right]\Big] \\ &= \mathrm{E}\left[(X_j - X_{j-1})\,\mathrm{E}(X_k - X_{k-1} \,|\, \mathcal{F}_{k-1})\right] = 0,\end{aligned}$$

hiszen egyrészt $\sigma(X_j - X_{j-1}) \subset \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{k-1}$, másrészt $\mathrm{E}(X_k - X_{k-1} \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) = 0$. □

Tehát a négyzetesen integrálható martingálok előállnak páronként korrelálatlan valószínűségi változók részletösszeg–sorozataként.

9.5 Tétel. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *(nem feltétlenül korlátos) intervallum,* $g : I \to \mathbb{R}$ *konvex függvény, és* X_1, X_2, ... *olyan véletlen változók, hogy minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén* $X_k \in I$ *m.b., és* $\mathrm{E}(|g(X_k)|) < \infty$*. Ekkor* $(g(X_n), \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *szubmartingál, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:*

(i) $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *szubmartingál és* g *monoton növekvő;*

(ii) $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *martingál.*

Bizonyítás. Legyen $j \leqslant k$. Ekkor (i) esetén $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szubmartingálsága miatt $X_j \leqslant \mathrm{E}(X_k \,|\, \mathcal{F}_j)$, így g monotonitása miatt $g(X_j) \leqslant g\big(\mathrm{E}(X_k \,|\, \mathcal{F}_j)\big)$. Továbbá (ii) esetén $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingálsága miatt $X_j = \mathrm{E}(X_k \,|\, \mathcal{F}_j)$, így $g(X_j) = g\big(\mathrm{E}(X_k \,|\, \mathcal{F}_j)\big)$. Mindkét esetben g konvexsége miatt a feltételes Jensen-egyenlőtlenség alapján

$$g(X_j) \leqslant g\big(\mathrm{E}(X_k \,|\, \mathcal{F}_j)\big) \leqslant \mathrm{E}\left(g(X_k) \,|\, \mathcal{F}_j\right),$$

tehát $(g(X_n), \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szubmartingál. □

Például ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál, akkor $(|X_n|, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szubmartingál.

9.2 Doob-felbontás

9.6 Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *valószínűségi mező, és* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *véletlen változók sorozata, mely adaptált valamely* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ *filtrációhoz.*
Azt mondjuk, hogy a $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat*

- ***növekvő****, ha minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $Z_n \leqslant Z_{n+1}$ *m.b.;*
- ***előrejelezhető****, ha* $Z_1 = 0$ *m.b., és minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* Z_{n+1} $\mathcal{F}_n$*-mérhető.*

Nyilván ha $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ növekvő, akkor $Z_1 \leqslant Z_2 \leqslant \ldots$ teljesül 1 valószínűséggel. Ha $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ előrejelezhető, akkor a Z_n értékét már az $n-1$ időpontban tudjuk.

9.7 Tétel. (Doob-felbontás) *Tetszőleges* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *szubmartingál esetén léteznek olyan* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *véletlen sorozatok, hogy*

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *esetén* $X_n = Y_n + Z_n$,

(ii) $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *martingál,*

(iii) $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *növekvő, előrejelezhető sorozat.*

Ilyen tulajdonságokkal rendelkező $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatok* P*-m.b. egyértelműen meghatározottak.*

Bizonyítás. Legyen $Z_1 := 0$, $Y_1 := X_1$, és $n \geqslant 2$ esetén

$$Y_n := X_1 + \sum_{k=2}^{n} \big[X_k - \mathrm{E}(X_k \,|\, \mathcal{F}_{k-1})\big], \qquad Z_n := \sum_{k=2}^{n} \big[\mathrm{E}(X_k \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}\big].$$

Ekkor nyilván minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(|Y_n|) < \infty$ és

$$\mathrm{E}(Y_{n+1} - Y_n \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathrm{E}\left[X_{n+1} - \mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \,|\, \mathcal{F}_n\right] = \mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) - \mathrm{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = 0,$$

tehát $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $Z_n \geqslant 0$, mert minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(X_k \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1} \geqslant 0$, hiszen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szubmartingál. Mivel minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(X_k \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}$ $\mathcal{F}_{k-1}$-mérhető, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén Z_{n+1} $\mathcal{F}_n$-mérhető, tehát $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ növekvő, előrejelezhető sorozat. Végül minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$Y_n + Z_n = X_1 + \sum_{k=2}^{n} (X_k - X_{k-1}) = X_n,$$

tehát az $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok rendelkeznek a megfelelő tulajdonságokkal.

A P-m.b. egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy az $(\widetilde{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\widetilde{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra is teljesülnek az (i)–(iii) tulajdonságok. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}_{n+1} - \widetilde{Z}_n &= (X_{n+1} - \widetilde{Y}_{n+1}) - (X_n - \widetilde{Y}_n) = (Y_{n+1} + Z_{n+1} - \widetilde{Y}_{n+1}) - (Y_n + Z_n - \widetilde{Y}_n) \\ &= (Z_{n+1} - Z_n) + (Y_{n+1} - Y_n) - (\widetilde{Y}_{n+1} - \widetilde{Y}_n).\end{aligned}$$

Véve ennek az egyenletnek a feltételes várható értékét az $\mathcal{F}_n$ σ-algebrára vonatkozóan, azt kapjuk, hogy

$$\widetilde{Z}_{n+1} - \widetilde{Z}_n = Z_{n+1} - Z_n.$$

Mivel $Z_1 = \widetilde{Z}_1 = 0$, így minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\widetilde{Z}_n = Z_n$, ezért $\widetilde{Y}_n = X_n - \widetilde{Z}_n = X_n - Z_n = Y_n$. □

A Doob-felbontásban szereplő $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra nyilván teljesül $\mathrm{E}(|Z_n|) < \infty$, hiszen $|Z_n| \leqslant |X_n| + |Y_n|$.

Ha az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat növekvő és adaptált az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rész-σ-algebra sereghez, akkor $\mathrm{E}(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathrm{E}(X_{n+1}) - \mathrm{E}(X_n) \geqslant 0$ miatt $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szubmartingál, de nem feltétlenül előrejelezhető, ezért nem feltétlenül $X_n = 0 + X_n$ a Doob-felbontása!

9.3 Megállási időpont

9.8 Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhetőségi tér, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ filtráció. Azt mondjuk, hogy az $\alpha : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ véletlen változó (opcionális, vagyis választható, azaz megengedett)* ***megállási időpont*** *az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációra nézve, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$.*

Vagyis tetszőleges n időpontban a rendelkezésre álló információk alapján el lehet dönteni, hogy már elérkezett-e az α véletlen időpont, vagy sem.

Példák:

(i) Ha véletlen változók $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata adaptált az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációhoz, akkor tetszőleges $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ halmazba való első megérkezési időpont:

$$\alpha_B(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \in B\}$$

(ahol $\inf \emptyset := \infty$) megállási időpont az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációra nézve, hiszen tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \leqslant n\} &= \Omega \setminus \{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) > n\} \\ &= \Omega \setminus \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \notin B, \ldots, X_n(\omega) \notin B\} \in \mathcal{F}_n.\end{aligned}$$

(ii) Ha $c \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ és $\alpha(\omega) := c$, $\omega \in \Omega$, akkor α megállási időpont tetszőleges $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációra nézve, hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \leqslant n\} = \begin{cases} \emptyset & \text{ha } n < c, \\ \Omega & \text{ha } n \geqslant c. \end{cases}$$

Tehát minden determinisztikus időpont egyúttal megállási időpont is.

Ha α megállási időpont, akkor az α-ig bekövetkező események (vagyis azok az események, melyekről az α időpontban meg tudjuk állapítani, hogy bekövetkeztek-e vagy sem):

$$\mathcal{F}_\alpha := \big\{A \in \mathcal{A} : \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ esetén } A \cap \{\omega \in \Omega : \alpha(\omega) \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n\big\}.$$

Nyilván $\mathcal{F}_\alpha$ σ-algebra.

Ha véletlen változók $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata adaptált az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációhoz és α megállási időpont az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációra nézve, akkor az $X_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$(X_\alpha)(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega)\mathbb{1}_{\{\alpha=n\}}(\omega), \qquad \omega \in \Omega$$

leképezés mérhető, tehát véletlen változó, sőt $\mathcal{F}_\alpha$-mérhető, azaz $\sigma(X_\alpha) \subset \mathcal{F}_\alpha$. Ha α korlátos, azaz $\alpha \leqslant m$ valamely $m \in \mathbb{N}$ esetén, és $\mathrm{E}(|X_n|) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, akkor $\mathrm{E}(|X_\alpha|) < \infty$, hiszen $|X_\alpha| \leqslant \max\{|X_1|, \dots, |X_m|\}$.

Példa: Legyenek Y_k, $k \in \mathbb{N}$ független véletlen változók, $\mathrm{P}(Y_k = 2^k) = \mathrm{P}(Y_k = -2^k) = \frac{1}{2}$, $X_n := \sum_{j=1}^{n} Y_j$. Ekkor $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál, $\mathcal{F}_n^X = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$, és

$$\alpha(\omega) := \begin{cases} \min\{n : X_n(\omega) > 0\} & \text{ha } \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ melyre } X_n(\omega) > 0, \\ \infty & \text{ha } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ esetén } X_n(\omega) \leqslant 0 \end{cases}$$

megállási időpont az $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációra nézve, mely 1 valószínűséggel véges: $\mathrm{P}(\alpha < \infty) = 1$, de nem korlátos. Továbbá $X_\alpha = 2$ m.b. Ugyan 1 és α olyan megállási pillanatok, hogy $1 \leqslant \alpha$ m.b., viszont mégsem teljesül $\mathrm{E}(X_\alpha \,|\, \mathcal{F}_1) = X_1$. Ezért a következő tétel nem feltétlenül teljesül nem korlátos megállási időpontokra.

9.9 Tétel. (Opcionális megállási tétel) *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál (vagy szubmartingál, vagy szupermartingál) sorozat, és legyenek α és β olyan megállási időpontok $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-re nézve, hogy $\alpha \leqslant \beta$, $\mathrm{E}(|X_\alpha|) < \infty$, $\mathrm{E}(|X_\beta|) < \infty$, és*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(|X_n|\mathbb{1}_{\{\beta>n\}}) = 0.$$

Ekkor $(X_\alpha, X_\beta; \mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta)$ martingál (illetve szubmartingál, vagy szupermartingál), tehát speciálisan: $\mathrm{E}(X_\beta \,|\, \mathcal{F}_\alpha) = X_\alpha$ (illetve $\mathrm{E}(X_\beta \,|\, \mathcal{F}_\alpha) \geqslant X_\alpha$, vagy $\mathrm{E}(X_\beta \,|\, \mathcal{F}_\alpha) \leqslant X_\alpha$).

Bizonyítás. Az állítást elegendő szubmartingál esetén belátni. Elegendő azt belátni, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}_\alpha$ esetén $\mathrm{E}(X_\beta \mathbb{1}_A) \geqslant \mathrm{E}(X_\alpha \mathbb{1}_A)$. Ehhez pedig elegendő azt megmutatni,

hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}}) \geqslant \mathrm{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}})$. Nyilván $A \cap \{\alpha = k\} = A \cap \{\alpha \leqslant k\} \cap (\Omega \setminus \{\alpha \leqslant k-1\}) \in \mathcal{A}_k$. Ezt is felhasználva

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}}) &= \mathrm{E}(X_k \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}}) = \mathrm{E}(X_k \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta=k\}}) + \mathrm{E}(X_k \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta>k\}}) \\
&\leqslant \mathrm{E}(X_k \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta=k\}}) + \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_{k+1} \,|\, \mathcal{F}_k) \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta>k\}})\right] \\
&= \mathrm{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta=k\}}) + \mathrm{E}(X_{k+1} \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta\geqslant k+1\}}) \\
&= \mathrm{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{k\leqslant\beta\leqslant k+1\}}) + \mathrm{E}(X_{k+1} \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta\geqslant k+2\}}) \\
&\leqslant \mathrm{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{k\leqslant\beta\leqslant k+1\}}) + \mathrm{E}(X_{k+2} \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta\geqslant k+2\}}) \\
&\leqslant \ldots \leqslant \mathrm{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{k\leqslant\beta\leqslant n\}}) + \mathrm{E}(X_n \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta>n\}})
\end{aligned}$$

tetszőleges $n \geqslant k$ esetén, azaz

$$\mathrm{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{k\leqslant\beta\leqslant n\}}) \geqslant \mathrm{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}}) - \mathrm{E}(X_n \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta>n\}}).$$

Ebből $n \to \infty$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_\beta \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}}) &\geqslant \limsup_{n\to\infty} \left[\mathrm{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}}) - \mathrm{E}(X_n \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta>n\}})\right] \\
&= \mathrm{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}}) - \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}\cap\{\beta>n\}}) \\
&= \mathrm{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}}) - \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n \mathbb{1}_{A\cap\{\beta>n\}}) \\
&\geqslant \mathrm{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}}) - \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{\beta>n\}}) \geqslant \mathrm{E}(X_\alpha \mathbb{1}_{A\cap\{\alpha=k\}}),
\end{aligned}$$

amiből a fentiek alapján következik az állítás. □

9.10 Megjegyzés. Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingál és α olyan megállási időpont $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$–re nézve, hogy $\alpha \leqslant N$ valamely $N \in \mathbb{N}$ esetén, akkor tekintsük a $\beta(\omega) := N$, $\omega \in \Omega$ megálási időpontot. Ekkor a tétel alapján $X_\alpha = \mathrm{E}(X_N \,|\, \mathcal{F}_\alpha)$, ezért $\mathrm{E}(X_\alpha) = \mathrm{E}(X_N) = \mathrm{E}(X_1)$. Tehát egy igazságos játék esetén a játékos nem javíthatja (de nem is ronthatja!) a várható nyereményét (megengedett, azaz választható) véletlen megállással (amely tehát csak a megállási időpontig felhalmozódó információn alapul), *ha a megállási idő korlátos.* Például ha a játékos abban az első időpontban akar megállni, amikor nyerésbe került vagy letelik az előre rögzített időtartam, akkor lehet, hogy kicsi annak a valószínűsége, hogy veszítsen, de a vesztés esetén fellépő (feltételes) várható veszteség éppen kompenzálja (kiegyenlíti) a nyerés esetén keletkező (feltételes) várható nyereményt.

9.11 Tétel. (Wald-azonosság) *Legyenek X_1, X_2, ... független, azonos eloszlású véletlen változók, és $\mathrm{E}(|X_1|) < \infty$. Legyen τ olyan megállási időpont az $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációra nézve, hogy $\mathrm{E}(\tau) < \infty$. Ekkor*

$$\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_\tau) = \mathrm{E}(\tau)\,\mathrm{E}(X_1).$$

Bizonyítás. Az állítást elegendő nemnegatív X_1, X_2, ... sorozatra bizonyítani. Ekkor

$\mathrm{E}(\tau) < \infty$ miatt $\mathrm{P}(\tau < \infty) = 1$, ezért

$$\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_\tau) = \mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(X_1 + \cdots + X_n)\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\right)$$
$$= \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} X_k \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\right) = \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbb{1}_{\{\tau\geqslant k\}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_k \mathbb{1}_{\{\tau\geqslant k\}})$$

a monoton konvergencia-tétellel. Mivel a $\{\tau \geqslant k\} = \Omega \setminus \{\tau \leqslant k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}^X = \sigma(X_1, \ldots, X_{k-1})$ esemény független az X_k véletlen változótól, így

$$\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_k)\,\mathrm{E}(\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant k\}}) = \mathrm{E}(X_1)\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\tau \geqslant k) = \mathrm{E}(\tau)\,\mathrm{E}(X_1)$$

□

9.4 Maximál-egyenlőtlenség

9.12 Tétel. (Doob maximál-egyenlőtlensége) *Ha* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *szubmartingál, akkor* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *és* $\forall\, \varepsilon > 0$ *esetén*

$$\mathrm{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant \varepsilon\right\}}\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{E}(X_n^+).$$

Bizonyítás. Nyilván

$$\alpha_\varepsilon := \inf\{j \in \mathbb{N} : X_j \geqslant \varepsilon\}$$

megállási időpont az $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációra nézve, melyet felhasználva

$$\mathrm{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant \varepsilon\right\}}\right) = \mathrm{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon \leqslant n\}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon = k\}}\right).$$

Mivel $\{\alpha_\varepsilon = k\} \in \mathcal{F}_k$, ezért $\mathrm{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon=k\}}\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_k)\mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon=k\}}\right)$. A szubmartingálság miatt $\mathrm{E}\left(\mathrm{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_k)\mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon=k\}}\right) \geqslant \mathrm{E}\left(X_k \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon=k\}}\right)$. Mivel $\{\alpha_\varepsilon = k\} \subset \{X_k \geqslant \varepsilon\}$, így $\mathrm{E}\left(X_k \mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon=k\}}\right) \geqslant \varepsilon\,\mathrm{E}\left(\mathbb{1}_{\{\alpha_\varepsilon=k\}}\right) = \varepsilon\,\mathrm{P}\left(\alpha_\varepsilon = k\right)$, tehát végülis

$$\mathrm{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant \varepsilon\right\}}\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \varepsilon\,\mathrm{P}\left(\alpha_\varepsilon = k\right) = \varepsilon\,\mathrm{P}\left(\alpha_\varepsilon \leqslant n\right) = \varepsilon\,\mathrm{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant \varepsilon\right),$$

amit átrendezve kapjuk az első egyenlőtlenséget. A második abból jön ki, hogy

$$\mathrm{E}\left(X_n \mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant \varepsilon\right\}}\right) \leqslant \mathrm{E}\left(X_n^+ \mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant \varepsilon\right\}}\right) \leqslant \mathrm{E}(X_n^+).$$

□

9.5 Martingálok és szubmartingálok konvergenciája

9.13 Definíció. *Legyen* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *véletlen változók sorozata, és* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Legyen*

$$\begin{aligned}
\tau_0 &:= 0,\\
\tau_1 &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \leqslant a\},\\
\tau_2 &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : n > \tau_1,\ X_n \geqslant b\},\\
&\vdots\\
\tau_{2m-1} &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : n > \tau_{2m-2},\ X_n \leqslant a\},\\
\tau_{2m} &:= \inf\{n \in \mathbb{N} : n > \tau_{2m-1},\ X_n \geqslant b\},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Azt mondjuk, hogy az $X_1, \dots X_N$ *sorozat* ***felmetszéseinek*** *száma az* $[a, b]$ *intervalumon*

$$U_N^X(a, b) := \sup\{m \in \mathbb{Z}_+ : \tau_{2m} \leqslant N\}.$$

9.14 Lemma. (Doob felmetszési lemmája) *Ha* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *szubmartingál, akkor tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *és tetszőleges* $N \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$\mathrm{E}\left[U_N^X(a, b)\right] \leqslant \frac{\mathrm{E}[(X_N - a)^+]}{b - a} \leqslant \frac{\mathrm{E}(X_N^+) + |a|}{b - a}.$$

Bizonyítás. A második egyenlőtlenség annak a következménye, hogy $(X_N - a)^+ \leqslant X_N^+ + |a|$.

Mivel az $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x - a)^+ \in \mathbb{R}$ függvény konvex, így $((X_n - a)^+, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is szubmartingál, ezért az első egyenlőtlenséget elegendő nemnegatív szubmartingál és $a = 0$ esetén belátni, mert az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szubmartingál éppen annyiszor metszi át felfelé az $[a, b]$ intervalumot, ahányszor az $((X_n - a)^+, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szubmartingál metszi át felfelé a $[0, b - a]$ intervalumot.

Legyen tehát $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnegatív szubmartingál és $a = 0$. Ekkor azt kell belátni, hogy

$$\mathrm{E}\left[U_N^X(0, b)\right] \leqslant \frac{\mathrm{E}(X_N)}{b}.$$

Legyen $X_0 := 0$, $\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \emptyset\}$, és minden $i \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varphi_i := \begin{cases} 1 & \text{ha } \exists\, m \in \mathbb{N}, \text{ melyre } i \in (\tau_{2m-1}, \tau_{2m}],\\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor

$$bU_N^X(0, b) \leqslant \sum_{i=1}^{N} (X_i - X_{i-1})\varphi_i.$$

Mivel a $\tau_1, \tau_2, \dots$ megállási időpontok az $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ filtrációra nézve, így

$$\{\varphi_i = 1\} = \cup_{m=1}^{\infty}\left[\{\tau_{2m-1} < i\} \setminus \{\tau_{2m} < i\}\right] \in \mathcal{F}_{i-1}.$$

Ezért

$$
\begin{aligned}
b\,\mathrm{E}[U_N^X(0,b)] &\leqslant \sum_{i=1}^N \mathrm{E}[(X_i - X_{i-1})\varphi_i] = \sum_{i=1}^N \mathrm{E}[(X_i - X_{i-1})\mathbb{1}_{\{\varphi_i=1\}}] \\
&= \sum_{i=1}^N \mathrm{E}\left[\,\mathrm{E}(X_i - X_{i-1}\,|\,\mathcal{F}_{i-1})\mathbb{1}_{\{\varphi_i=1\}}\right] = \sum_{i=1}^N \mathrm{E}\left[\left\{\,\mathrm{E}(X_i\,|\,\mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}\right\}\mathbb{1}_{\{\varphi_i=1\}}\right] \\
&\leqslant \sum_{i=1}^N \mathrm{E}\left[\,\mathrm{E}(X_i\,|\,\mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}\right] = \sum_{i=1}^N \left[\,\mathrm{E}(X_i) - \mathrm{E}(X_{i-1})\right] = \mathrm{E}(X_N),
\end{aligned}
$$

hiszen a szubmartingálság miatt $\mathrm{E}(X_i\,|\,\mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1} \geqslant 0$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. □

9.15 Tétel. (Doob szubmartingál konvergencia-tétele) *Ha* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *olyan szubmartingál, hogy* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}(|X_n|) < \infty$, *akkor* $\exists\, X_\infty$ *véletlen változó, melyre* $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X_\infty$, *és* $\mathrm{E}(|X_\infty|) \leqslant \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}(|X_n|) < \infty$.

Bizonyítás. Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén legyen $U_\infty^X(a,b) := \lim\limits_{N\to\infty} U_N^X(a,b)$. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$
\mathrm{E}\left[U_N^X(a,b)\right] \leqslant \frac{\mathrm{E}(X_N^+) + |a|}{b-a},
$$

ezért

$$
\mathrm{E}\left[U_\infty^X(a,b)\right] = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left[U_N^X(a,b)\right] \leqslant \frac{\sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \mathrm{E}(X_N^+) + |a|}{b-a} \leqslant \frac{\sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \mathrm{E}(|X_N|) + |a|}{b-a} < \infty.
$$

Ebből az következik, hogy $\mathrm{P}(U_\infty^X(a,b) < \infty) = 1$. Mivel

$$
\{\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n\} \subset \{U_\infty^X(a,b) = \infty\},
$$

ezért $\mathrm{P}(\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n) = 0$. Mivel

$$
\{\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n\} = \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},\, a<b} \{\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n\},
$$

így $\mathrm{P}(\liminf\limits_{n\to\infty} X_n < \limsup\limits_{n\to\infty} X_n) = 0$, tehát $\mathrm{P}(\liminf\limits_{n\to\infty} X_n = \limsup\limits_{n\to\infty} X_n) = 1$, vagyis az $X_\infty := \liminf\limits_{n\to\infty} X_n$ véletlen változóra teljesül $X_n \xrightarrow{\text{m.b.}} X_\infty$. Végül a Fatou-lemmával

$$
\mathrm{E}(|X_\infty|) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}(|X_n|) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}(|X_n|) < \infty.
$$

□

10 Nagy számok gyenge törvényei

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ véletlen változók, és jelölje

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n, \qquad \overline{X}_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

10.1 Tétel. *Ha* $\mathrm{E}(X_n^2) < \infty$ *minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén és* $\mathrm{E}(X_k X_\ell) = 0$ *ha* $k \neq \ell$, *akkor minden* $\varepsilon > 0$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$\mathrm{P}(|\overline{X}_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{E}(\overline{X}_n^2) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2} \sup_{\ell \geqslant 1} \mathrm{E}(X_\ell^2).$$

Speciálisan, ha $\sup_{\ell \geqslant 1} \mathrm{E}(X_\ell^2) < \infty$, *akkor* $\overline{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$, *és így* $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$.

Bizonyítás. Nyilván $\mathrm{E}(S_n^2) = \sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}(X_\ell^2)$, így

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|\overline{X}_n| \geqslant \varepsilon) &= \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\{|\overline{X}_n| \geqslant \varepsilon\}}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{E}(\overline{X}_n^2 \mathbb{1}_{\{|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon\}}) \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{E}(\overline{X}_n^2) = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\,\mathrm{E}(S_n^2) = \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}(X_\ell^2) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2} \sup_{\ell \geqslant 1} \mathrm{E}(X_\ell^2).\end{aligned}$$

□

10.2 Tétel. (Csebisev) *Ha* $X_1, X_2, \dots$ *páronként korrelálatlanok,* $\sup_{\ell \geqslant 1} \mathrm{Var}(X_\ell) < \infty$, *és* $\mathrm{E}(X_n) = m$ *minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, akkor* $\overline{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} m$, *és így* $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} m$.

Bizonyítás. A 10.1 tételt kell alkalmazni a $X_1 - \mathrm{E}(X_1)$, $X_2 - \mathrm{E}(X_1)$, … sorozatra. □

10.3 Tétel. (Markov) *Ha* $X_1, X_2, \dots$ *páronként korrelálatlanok,* $\sup_{\ell \geqslant 1} \mathrm{Var}(X_\ell) < \infty$, *és létezik a* $\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}(\overline{X}_n) =: m$ *határérték, akkor* $\overline{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} m$, *és így* $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} m$.

Bizonyítás. A 10.1 tételt kell alkalmazni a $X_1 - \mathrm{E}(X_1)$, $X_2 - \mathrm{E}(X_1)$, … sorozatra. □

10.4 Tétel. (Hincsin, 1929) *Ha* $X_1, X_2, \dots$ *páronként független, azonos eloszlású véletlen változók és* $\mathrm{E}(|X_1|) < \infty$, *akkor* $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}(X_1)$.

10.5 Tétel. *Ha* $X_1, X_2, \dots$ *egyenletesen integrálható, független véletlen változók, akkor*

$$\overline{X}_n - \mathrm{E}(\overline{X}_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0, \qquad \text{és így} \qquad \overline{X}_n - \mathrm{E}(\overline{X}_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0.$$

Speciálisan, ha $X_1, X_2, \dots$ *független, azonos eloszlású véletlen változók és* $\mathrm{E}(|X_1|) < \infty$, *akkor* $\overline{S}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \mathrm{E}(X_1)$, *és így* $\overline{S}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{E}(X_1)$.

Bizonyítás. Elegendő $\mathrm{E}(X_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$ esetén bizonyítani, hiszen ha $X_1, X_2, \dots$ egyenletesen integrálható, független véletlen változók, akkor $X_1 - \mathrm{E}(X_1)$, $X_2 - \mathrm{E}(X_1)$, … is egyenletesen integrálható, független véletlen változók.

Legyen $R \in (0,\infty)$ és $t \in \mathbb{R}$ esetén $f_R(t) := t \cdot \mathbb{1}_{[-R,R]}(t)$ (ez egy úgynevezett nyírófüggvény). Jelölje

$$m_k^{(R)} := \mathrm{E}[f_R(X_k)], \qquad X_k^{(R)} := f_R(X_k) - m_k^{(R)}, \qquad Y_k^{(R)} := X_k - X_k^{(R)},$$

$$\overline{X}_n^{(R)} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^{(R)}, \qquad \overline{Y}_n^{(R)} := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k^{(R)}.$$

Nyilván

$$\mathrm{E}(|Y_k^{(R)}|) = \mathrm{E}(|X_k-(f_R(X_k)-m_k^{(R)})|) \leqslant \mathrm{E}(|X_k-f_R(X_k)|)+|m_k^{(R)}| = \mathrm{E}(|X_k|\mathbb{1}_{\{|X_k|>R\}})+|m_k^{(R)}|,$$

$$|m_k^{(R)}| = |\,\mathrm{E}[f_R(X_k)]| = \left|\mathrm{E}(X_k\mathbb{1}_{\{|X_k|\leqslant R\}})\right| = \left|\mathrm{E}(X_k) - \mathrm{E}(X_k\mathbb{1}_{\{|X_k|>R\}})\right| \leqslant \mathrm{E}(|X_k|\mathbb{1}_{\{|X_k|>R\}}),$$

így tetszőleges $R \in (0,\infty)$ esetén

$$\mathrm{E}(|\overline{X}_n|) = \mathrm{E}(|\overline{X}_n^{(R)}+\overline{Y}_n^{(R)}|) \leqslant \mathrm{E}(|\overline{X}_n^{(R)}|)+\mathrm{E}(|\overline{Y}_n^{(R)}|) \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\left[(\overline{X}_n^{(R)})^2\right]}+2\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathrm{E}(|X_k|\mathbb{1}_{\{|X_k|>R\}})$$

és

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[(\overline{X}_n^{(R)})^2\right] &= \frac{1}{n^2}\,\mathrm{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k^{(R)}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^n X_k^{(R)}\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k^{(R)}) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathrm{E}\left[\left(X_k^{(R)}\right)^2\right] \leqslant \frac{R^2}{n}\end{aligned}$$

miatt

$$\mathrm{E}(|\overline{X}_n|) \leqslant \frac{R}{\sqrt{n}} + 2\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathrm{E}(|X_k|\mathbb{1}_{\{|X_k|>R\}}),$$

amiből

$$\limsup_{n\to\infty}\mathrm{E}(|\overline{X}_n|) \leqslant 2\sup_{k\geqslant 1}\mathrm{E}(|X_k|\mathbb{1}_{\{|X_k|>R\}}),$$

így az egyenletes integrálhatóság alapján $R \to \infty$ esetén $\limsup_{n\to\infty}\mathrm{E}(|\overline{X}_n|) \leqslant 0$. $\square$

11 Nagy számok erős törvényei

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ véletlen változók, és jelölje

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n, \qquad \overline{X}_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

11.1 Tétel. *Ha* $X_1, X_2, \dots$ *független véletlen változók és* $\mathrm{E}(X_n) = 0$ *minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, akkor minden* $\varepsilon > 0$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$\mathrm{P}(|\overline{X}_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{E}(\overline{X}_n^4)}{\varepsilon^4} \leqslant \frac{3}{n^2\varepsilon^4} \sup_{n \geqslant 1} \mathrm{E}(X_n^4).$$

Speciálisan, ha $\sup_{n \geqslant 1} \mathrm{E}(X_n^4) < \infty$, *akkor* $\overline{X}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_4} 0$ *és* $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy $\mathrm{E}(S_n^4) \leqslant 3n^2 M_4$, ahol $M_4 := \sup_{n \geqslant 1} \mathrm{E}(X_n^4)$. Ez $n = 1$ esetén triviális. Továbbá

$$S_{n+1}^4 = (S_n + X_{n+1})^4 = S_n^4 + 4S_n^3 X_{n+1} + 6S_n^2 X_{n+1}^2 + 4S_n X_{n+1}^3 + X_{n+1}^4.$$

Mivel S_n és X_{n+1} függetlenek és $\mathrm{E}(X_{n+1}) = \mathrm{E}(S_n) = 0$, így

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(S_{n+1}^4) &= \mathrm{E}(S_n^4) + 6\,\mathrm{E}(S_n^2 X_{n+1}^2) + \mathrm{E}(X_{n+1}^4) \\ &= \mathrm{E}(S_n^4) + 6\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k^2)\,\mathrm{E}(X_{n+1}^2) + \mathrm{E}(X_{n+1}^4) \leqslant \mathrm{E}(S_n^4) + (6n+1)M_4,\end{aligned}$$

hiszen $\mathrm{E}(X_k^2) \leqslant \sqrt{\mathrm{E}(X_k^4)} \leqslant \sqrt{M_4}$. Így

$$\mathrm{E}(S_{n+1}^4) \leqslant (3n^2 + 6n + 1)M_4 \leqslant 3(n+1)^2 M_4.$$

Ebből tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon) < \infty$, így $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$. □

11.2 Tétel. (Kolmogorov-egyenlőtlenség) *Ha* $X_1, \dots, X_n$ *független véletlen változók és* $\mathrm{E}(X_k^2) < \infty$ *minden* $k = 1, 2, \dots, n$ *esetén, akkor tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k - \mathrm{E}(S_k)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

Bizonyítás. Elegendő $\mathrm{E}(X_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ esetén bizonyítani. Legyen $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Ekkor

$$S_n^2 - S_k^2 = (S_n - S_k)^2 + 2(S_n - S_k)S_k \geqslant 2(S_n - S_k)S_k.$$

Mivel $S_n - S_k$ független a $\sigma(X_1, \dots, X_k)$ σ-algebrától és $\mathrm{E}(S_n - S_k) = 0$, így tetszőleges $A_k \in \sigma(X_1, \dots, X_k)$ események esetén

$$\mathrm{E}\left[(S_n^2 - S_k^2)\mathbb{1}_{A_k}\right] \geqslant \mathrm{E}\left[2(S_n - S_k)S_k \mathbb{1}_{A_k}\right] = 2\,\mathrm{E}(S_n - S_k)\,\mathrm{E}(S_k \mathbb{1}_{A_k}) = 0,$$

ezért

$$\mathrm{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geqslant \mathrm{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}).$$

Ha speciálisan

$$A_1 = \{|S_1| \geqslant \varepsilon\}, \qquad A_k = \left\{|S_k| \geqslant \varepsilon, \max_{1\leqslant j\leqslant k-1} |S_j| < \varepsilon\right\} \quad \text{ha} \quad k \in \{2,\dots,n\},$$

akkor $A_1,\dots,A_n$ (páronként) diszjunktak és

$$B := \left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j| \geqslant \varepsilon\right\} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

és így

$$\mathrm{E}(S_n^2 \mathbb{1}_B) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(S_n^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(S_k^2 \mathbb{1}_{A_k}) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) = \varepsilon^2\, \mathrm{P}(B),$$

tehát

$$\mathrm{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\right) = \mathrm{P}(B) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\, \mathrm{E}(S_n^2 \mathbb{1}_B) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\, \mathrm{E}(S_n^2) = \frac{1}{\varepsilon^2}\, \mathrm{Var}(S_n),$$

ami a bizonyítandó állítás. □

11.3 Tétel. (Kolmogorov egy sor tétele) *Ha* $X_1, X_2, \dots$ *független véletlen változók és* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$, *akkor*

$$\mathrm{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - \mathrm{E}(X_n)) \quad \textit{konvergens}\right) = 1.$$

Bizonyítás. Elegendő $\mathrm{E}(X_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$ esetén bizonyítani. Mivel

$$\left\{\sup_{k\geqslant 1} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon\right\},$$

így

$$\mathrm{P}\left(\sup_{k\geqslant 1} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon\right)$$

tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén. A Kolmogorov-egyenlőtlenséget alkalmazva a $X_{N+1},\dots,X_{N+n}$ változókra:

$$\mathrm{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=N+1}^{N+n} \mathrm{Var}(X_j),$$

így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\left(\sup_{k\geqslant 1} |S_{N+k} - S_N| > \varepsilon\right) = 0,$$

ezért a 7.5 Tétel alapján az $S_1, S_2, \dots$ sorozat 1 valószínűséggel Cauchy-sorozat. □

11.4 Lemma. (Kronecker) *Legyen* $b_1, b_2, \dots$ *pozitív számokból álló sorozat,* $b_n \uparrow \infty$, *és jelölje* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $\beta_n := b_n - b_{n-1}$, *ahol* $b_0 := 0$.

(i) *Ha* $s_1, s_2, \ldots$ *valós számsorozat és* $s_n \to s \in \mathbb{R}$, *akkor* $\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell s_\ell \to s$.

(ii) *Ha* $x_1, x_2, \ldots$ *valós számsorozat és* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b_n}$ *konvergens, akkor* $\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \to 0$.

Bizonyítás. (i). Elegendő $s = 0$ esetén bizonyítani. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $\ell \geqslant n_0$ esetén $|s_\ell| < \varepsilon$, ezért $n \geqslant n_0$ esetén

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell s_\ell\right| &\leqslant \frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n_0} \beta_\ell |s_\ell| + \frac{1}{b_n}\sum_{\ell=n_0+1}^{n} \beta_\ell |s_\ell| \\ &\leqslant \frac{1}{b_n}\left(\sup_{\ell\geqslant 1}|s_\ell|\right)\sum_{\ell=1}^{n_0}\beta_\ell + \frac{\varepsilon}{b_n}\sum_{\ell=n_0+1}^{n}\beta_\ell \leqslant \frac{b_{n_0}}{b_n}\sup_{\ell\geqslant 1}|s_\ell| + \varepsilon,\end{aligned}$$

amiből tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n}\beta_\ell s_\ell\right| \leqslant \varepsilon,$$

tehát következik az állítás.

(ii). „Parciális szummázással”:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell &= \frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \frac{x_\ell}{b_\ell} = \frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{x_\ell}{b_\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\beta_j = \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{\ell=j}^{n}\frac{x_\ell}{b_\ell} \\ &= \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{\ell=1}^{n}\frac{x_\ell}{b_\ell} - \sum_{\ell=1}^{j-1}\frac{x_\ell}{b_\ell}\right) = \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{\ell=1}^{n}\frac{x_\ell}{b_\ell} - \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{\ell=1}^{j-1}\frac{x_\ell}{b_\ell}.\end{aligned}$$

Jelölje $s := \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{x_\ell}{b_\ell}$. Alkalmazva az (i) állítást az $s_n := \sum_{\ell=1}^{n}\frac{x_\ell}{b_\ell} \to s$ sorozatra:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{\ell=1}^{j-1}\frac{x_\ell}{b_\ell} \to s,$$

így végülis $\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \to s - s = 0$. □

11.5 Tétel. (Kolmogorov, 1929) *Legyenek* $X_1, X_2, \ldots$ *független véletlen változók. Legyen* $b_1, b_2, \ldots$ *pozitív számokból álló sorozat,* $b_n \uparrow \infty$. *Ha* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}(X_n)}{b_n^2} < \infty$, *akkor*

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{\ell=1}^{n}(X_\ell - \mathrm{E}(X_\ell)) = 0\right) = 1.$$

Speciálisan, ha $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$, *akkor* $\overline{X}_n - \mathrm{E}(\overline{X}_n) \xrightarrow{\text{m.b.}} 0$.

Bizonyítás. Kolmogorov egy sor tétele alapján

$$\mathrm{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}(X_n - \mathrm{E}(X_n)) \ \text{ konvergens}\right) = 1.$$

Ebből a Kronecker–lemma felhasználásával következik az állítás. □

11.6 Tétel. (Kolmogorov, 1933) *Legyenek* $X_1, X_2, \dots$ *független, azonos eloszlású véletlen változók.*

(i) *Ha* $\mathrm{E}(|X_1|) < \infty$, *akkor* $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} \mathrm{E}(X_1)$.

(ii) *Ha* $\mathrm{P}\left((\overline{X}_n)_{n\geqslant 1} \text{ konvergens}\right) > 0$, *akkor* $\mathrm{E}(|X_1|) < \infty$.

Bizonyítás. (i). Elegendő $\mathrm{E}(X_1) = 0$ esetén bizonyítani. Jelölje $Y_n := X_n \mathbb{1}_{\{|X_n|\leqslant n\}}$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(Y_n \neq X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_n| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_1| > n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(k < |X_1| \leqslant k+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \mathrm{P}(k < |X_1| \leqslant k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathrm{P}(k < |X_1| \leqslant k+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}(k\mathbb{1}_{\{k<|X_1|\leqslant k+1\}}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}(|X_1|\mathbb{1}_{\{k<|X_1|\leqslant k+1\}}) = \mathrm{E}(|X_1|\mathbb{1}_{\{|X_1|>1\}}) \leqslant \mathrm{E}(|X_1|) < \infty.$$

Ezért a Borel–Cantelli-lemmával $\mathrm{P}(Y_n \neq X_n$ véges sok $n \in \mathbb{N}$ esetén$) = 1$. Így ha

$$\overline{Y}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k,$$

akkor $\mathrm{P}(\overline{X}_n \to 0) = 1$ ekvivalens azzal hogy $\mathrm{P}(\overline{Y}_n \to 0) = 1$, tehát elegendő az utóbbit belátni. A majoráns konvergencia-tétellel

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n \mathbb{1}_{\{|X_n|\leqslant n\}}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1|\leqslant n\}}) = \mathrm{E}(X_1) = 0,$$

így a Kronecker-lemmával

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{E}(Y_\ell) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Y_n) = 0.$$

Ezért az előző tétel alapján elegendő azt belátni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$. Ez pedig következik abból, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}(Y_n^2)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{E}(X_n^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1<|X_n|\leqslant \ell\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1<|X_1|\leqslant \ell\}})$$
$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1<|X_1|\leqslant \ell\}}) \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \left(\sup_{\ell\geqslant 1} \ell \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell}\,\mathrm{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1<|X_1|\leqslant \ell\}}) < \infty,$$

ugyanis egyrészt

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell}\,\mathrm{E}(X_1^2 \mathbb{1}_{\{\ell-1<|X_1|\leqslant \ell\}}) \leqslant \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathrm{E}(|X_1|\mathbb{1}_{\{\ell-1<|X_1|\leqslant \ell\}}) = \mathrm{E}(|X_1|) < \infty,$$

másrészt

$$\sup_{\ell\geqslant 2} \ell \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \sup_{\ell\geqslant 2} \ell \sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sup_{\ell\geqslant 2} \frac{\ell}{\ell-1} = 2.$$

(ii). A 2.9 példa alapján egyrészt $\mathrm{P}(\{\overline{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergens$) \in \{0,1\}$, így csak

$$\mathrm{P}(\{\overline{X}_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ konvergens}) = 1$$

lehet, másrészt létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{m.b.}} c$. Ebből

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{n\overline{X}_n - (n-1)\overline{X}_{n-1}}{n} = \overline{X}_n - \frac{n-1}{n}\overline{X}_{n-1}$$

alapján az is következik, hogy

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\text{m.b.}} 0,$$

így az $A_n := \{\omega : |X_n(\omega)| > n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ független események közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be, ezért a Borel–Cantelli-lemmával $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty$. Ezért

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(|X_1|) &= \int_0^{\infty} \mathrm{P}(|X_1| > x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathrm{P}(|X_1| > x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \mathrm{P}(|X_1| > n)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_1| > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_n| > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) < \infty.\end{aligned}$$

□

12 Centrális határeloszlás-tétel

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyekre $\mathrm{E}(X_{n,j}^2) < \infty$ és $\sigma_{n,j} := \sqrt{\mathrm{Var}(X_{n,j})} > 0$ tetszőleges $j = 1, \dots, k_n$ esetén. Jelölje $S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$, $D_n := \sqrt{\mathrm{Var}(S_n)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2}$, $\widehat{S}_n := (S_n - \mathrm{E}(S_n))/D_n$. (Nyilván $\mathrm{E}(\widehat{S}_n) = 0$ és $\mathrm{Var}(\widehat{S}_n) = 1$.) Legyen továbbá $n \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén

$$r_n := \frac{1}{D_n} \max_{1 \leqslant j \leqslant k_n} \sigma_{n,j}, \qquad L_n(\varepsilon) := \frac{1}{D_n^2} \sum_{j=1}^{k_n} \mathrm{E}\left[(X_{n,j} - \mathrm{E}(X_{n,j}))^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,j} - \mathrm{E}(X_{n,j})| \geqslant \varepsilon D_n\}}\right].$$

Legyen $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

12.1 Tétel. (Lindeberg) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és $\mathrm{E}(X_{n,j}^2) < \infty$, $j = 1, \dots, k_n$. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromszor folytonosan differenciálható függvény.*

(i) *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $\varepsilon > 0$ esetén*

$$\left|\mathrm{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathrm{E}[g(Y)]\right| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{6} + \frac{r_n}{2}\right) \|g'''\|_\infty + L_n(\varepsilon)\|g''\|_\infty,$$

ahol $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetén $\|h\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$.

(ii) *Ha $\|g''\|_\infty < \infty$, $\|g'''\|_\infty < \infty$, és tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[g(\widehat{S}_n)] = \mathrm{E}[g(Y)]$.*

Bizonyítás. Elegendő $\mathrm{E}(X_{n,j}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, k_n$ esetén bizonyítani.

(i). Legyenek $\{Y_{n,j}\}_{j=1}^{k_n}$ olyan független, standard normális eloszlású véletlen változók, melyek függetlenek a $\{X_{n,j}\}_{j=1}^{k_n}$ valószínűségi változóktól is. Jelölje

$$\widehat{X}_{n,j} := \frac{X_{n,j}}{D_n}, \qquad \widehat{Y}_{n,j} := \frac{\sigma_{n,j} Y_{n,j}}{D_n}.$$

Ekkor $\widehat{S}_n = \sum_{j=1}^{k_n} \widehat{X}_{n,j}$, és

$$\widehat{T}_n := \sum_{j=1}^{n} \widehat{Y}_{n,j} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

ezért

$$\Delta_n := \left|\mathrm{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathrm{E}[g(Y)]\right| = \left|\mathrm{E}[g(\widehat{S}_n)] - \mathrm{E}[g(\widehat{T}_n)]\right|.$$

Jelölje $\ell = 1, \dots, n$ esetén

$$U_{n,\ell} := \sum_{j=1}^{\ell-1} \widehat{X}_{n,j} + \sum_{j=\ell+1}^{k_n} \widehat{Y}_{n,j},$$

ahol $\sum_{j=1}^{0} := 0$, $\sum_{j=n+1}^{k_n} := 0$. Így

$$\Delta_n = \left|\sum_{\ell=1}^{k_n} (\mathrm{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{X}_{n,\ell})] - \mathrm{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{Y}_{n,\ell})])\right| \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} \Delta_{n,\ell},$$

ahol

$$\Delta_{n,\ell} := \Big| \mathrm{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{X}_{n,\ell})] - \mathrm{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{Y}_{n,\ell})] \Big| .$$

Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$R(x,y) := g(x+y) - g(y) - xg'(y) - \frac{1}{2}x^2 g''(y).$$

Mivel $\mathrm{E}(\widehat{Y}_{n,j}) = \mathrm{E}(\widehat{X}_{n,j}) = 0$, $\mathrm{E}(\widehat{Y}_{n,j}^2) = \mathrm{E}(\widehat{X}_{n,j}^2)$, így

$$\mathrm{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{X}_{n,\ell})] - \mathrm{E}[g(U_{n,\ell} + \widehat{Y}_{n,\ell})] = \mathrm{E}[R(\widehat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})] - \mathrm{E}[R(\widehat{Y}_{n,\ell}, U_{n,\ell})],$$

ezért

$$\Delta_{n,\ell} = |\,\mathrm{E}[R(\widehat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})] - \mathrm{E}[R(\widehat{Y}_{n,\ell}, U_{n,\ell})]| \leqslant \mathrm{E}\,|R(\widehat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})| + \mathrm{E}\,|R(\widehat{Y}_{n,\ell}, U_{n,\ell})|.$$

A Taylor-tétel alapján tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$|R(x,y)| \leqslant \|g''\|_\infty\, x^2, \qquad |R(x,y)| \leqslant \frac{\|g'''\|_\infty}{6}|x|^3.$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}\,|R(\widehat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})| &= \sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}\left[|R(\widehat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})|\mathbb{1}_{\{|\widehat{X}_{n,\ell}|<\varepsilon\}}\right] + \sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}\left[|R(\widehat{X}_{n,\ell}, U_{n,\ell})|\mathbb{1}_{\{|\widehat{X}_{n,\ell}|\geqslant\varepsilon\}}\right] \\
&\leqslant \frac{\|g'''\|_\infty}{6}\sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}\left[|\widehat{X}_{n,\ell}|^3\mathbb{1}_{\{|\widehat{X}_{n,\ell}|<\varepsilon\}}\right] + \|g''\|_\infty \sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}\left[\widehat{X}_{n,\ell}^2\mathbb{1}_{\{|\widehat{X}_{n,\ell}|\geqslant\varepsilon\}}\right] \\
&\leqslant \frac{\|g'''\|_\infty}{6}\sum_{\ell=1}^n \varepsilon\,\mathrm{E}\left[\widehat{X}_{n,\ell}^2\right] + \frac{\|g''\|_\infty}{D_n^2}\sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}\left[X_{n,\ell}^2\mathbb{1}_{\{|X_{n,\ell}|\geqslant\varepsilon D_n\}}\right] \\
&= \frac{\varepsilon\|g'''\|_\infty}{6}\sum_{\ell=1}^n \frac{\sigma_{n,\ell}^2}{D_n^2} + L_n(\varepsilon)\|g''\|_\infty = \frac{\varepsilon}{6}\|g'''\|_\infty + L_n(\varepsilon)\|g''\|_\infty.
\end{aligned}$$

Továbbá $\sigma_{n,\ell} \leqslant r_n D_n$ alkalmazásával

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}\,|R(\widehat{Y}_{n,\ell}, U_{n,\ell})| &\leqslant \frac{\|g'''\|_\infty}{6}\sum_{\ell=1}^n \mathrm{E}\left[|\widehat{Y}_{n,\ell}|^3\right] = \frac{\|g'''\|_\infty}{6}\,\mathrm{E}\left[|Y_{1,1}|^3\right]\sum_{\ell=1}^n \frac{\sigma_{n,\ell}^3}{D_n^3} \\
&\leqslant \frac{r_n\|g'''\|_\infty}{2}\sum_{\ell=1}^n \frac{\sigma_{n,\ell}^2}{D_n^2} = \frac{r_n}{2}\|g'''\|_\infty.
\end{aligned}$$

(ii). Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\sigma_{n,\ell}^2 = \mathrm{E}\left[X_{n,\ell}^2\mathbb{1}_{\{|X_{n,\ell}|<\varepsilon D_n\}}\right] + \mathrm{E}\left[X_{n,\ell}^2\mathbb{1}_{\{|X_{n,\ell}|\geqslant\varepsilon D_n\}}\right] \leqslant \varepsilon^2 D_n^2 + L_n(\varepsilon)D_n^2,$$

ezért $r_n^2 \leqslant \varepsilon^2 + L_n(\varepsilon)$. □

12.2 Tétel. (Lindeberg centrális határeloszlás-tétele) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és $\mathrm{E}(X_{n,j}^2) < \infty$,*

$j = 1, \dots, k_n$. *Ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0$, *és* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *olyan folytonos függvény, melyre*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{1+x^2} < \infty,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[g(\widehat{S}_n)] = \mathrm{E}[g(Y)].$$

Speciálisan, $\widehat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$.

Bizonyítás. Válasszunk egy olyan $\varrho : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ végtelen sokszor differenciálható függvényt, hogy $\varrho(x) = 0$ ha $|x| \geqslant 1$, és $\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Legyen minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$g_k(x) := k\int_{-k}^{k} \varrho(k(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z)g\left(x - \frac{z}{k}\right)\mathrm{d}z.$$

Ekkor $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ végtelen sokszor differenciálható függvény, $g_k(x) = 0$ ha $|x| \geqslant k + 1/k$, és

$$g_k(x) - g(x) = \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z)\left(g\left(x - \frac{z}{k}\right) - g(x)\right)\mathrm{d}z + g(x)\left(1 - \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z)\,\mathrm{d}z\right),$$

ezért tetszőleges $R \in (0,\infty)$ esetén

$$\sup_{|x|\leqslant R} |g_k(x) - g(x)| \leqslant \sup_{\substack{|x|\leqslant R\\ |z|\leqslant 1}} \left|g\left(x - \frac{z}{k}\right) - g(x)\right| + \sup_{|x|\leqslant R} |g(x)| \left(1 - \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Mivel g egyenletesen folytonos a $[-R-1, R+1]$ intervallumon, így

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{|x|\leqslant R\\ |z|\leqslant 1}} \left|g\left(x - \frac{z}{k}\right) - g(x)\right| = 0.$$

Továbbá

$$K := \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{(1+x^2)}$$

jelöléssel

$$\sup_{|x|\leqslant R} |g(x)| \leqslant \sup_{|x|\leqslant R} (1+x^2)K \leqslant (1+R^2)K,$$

így azt kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{|x|\leqslant R} |g_k(x) - g(x)| = 0.$$

Ezenkívül

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g(x)| &\leqslant \int_{k(x-k)}^{k(x+k)} \varrho(z)K\left(1 + \left(x - \frac{z}{k}\right)^2\right)\mathrm{d}z + K(1+x^2) \\ &\leqslant K\left(2 + x^2 + \sup_{|z|\leqslant 1}\left(x - \frac{z}{k}\right)^2\right), \end{aligned}$$

tehát létezik olyan $K' \in (0,\infty)$, hogy

$$\sup_{k\geqslant 1} |g_k(x) - g(x)| \leqslant K'(1+x^2).$$

Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}$ esetén

$$|\operatorname{E}[g(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g(Y)]| \leqslant |\operatorname{E}[g(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| + |\operatorname{E}[g_k(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g_k(Y)]| + |\operatorname{E}[g_k(Y)] - \operatorname{E}[g(Y)]|.$$

Mivel tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén a g_k függvényre alkalmazhatjuk a Lindeberg-tételt, így $\lim\limits_{n\to\infty} |\operatorname{E}[g_k(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g_k(Y)]| = 0$, ezért

$$\limsup_{n\to\infty} |\operatorname{E}[g(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g(Y)]| \leqslant \limsup_{n\to\infty} |\operatorname{E}[g(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| + |\operatorname{E}[g_k(Y)] - \operatorname{E}[g(Y)]|,$$

amiből

$$\limsup_{n\to\infty} |\operatorname{E}[g(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g(Y)]| \leqslant \limsup_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} |\operatorname{E}[g(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| + \limsup_{k\to\infty} |\operatorname{E}[g_k(Y)] - \operatorname{E}[g(Y)]|.$$

Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ és $R \in (0,\infty)$ esetén

$$\begin{aligned}
|\operatorname{E}[g_k(Y)] - \operatorname{E}[g(Y)]| &= |\operatorname{E}[(g_k(Y) - g(Y))]| \leqslant \operatorname{E}|g_k(Y) - g(Y)| \\
&= \operatorname{E}\left[|g_k(Y) - g(Y)| \mathbb{1}_{\{|Y|\leqslant R\}}\right] + \operatorname{E}\left[|g_k(Y) - g(Y)| \mathbb{1}_{\{|Y|>R\}}\right] \\
&\leqslant \sup_{|x|\leqslant R} |g_k(x) - g(x)| + K' \operatorname{E}\left[(1+Y^2)\mathbb{1}_{\{|Y|>R\}}\right],
\end{aligned}$$

így tetszőleges $R \in (0,\infty)$ esetén

$$\limsup_{k\to\infty} |\operatorname{E}[g_k(Y)] - \operatorname{E}[g(Y)]| \leqslant K' \operatorname{E}\left[(1+Y^2)\mathbb{1}_{\{|Y|>R\}}\right].$$

A majoráns konvergencia-tétel segítségével

$$\lim_{R\to\infty} \operatorname{E}\left[(1+Y^2)\mathbb{1}_{\{|Y|>R\}}\right] = 0,$$

ezért

$$\lim_{k\to\infty} |\operatorname{E}[g_k(Y)] - \operatorname{E}[g(Y)]| = 0.$$

Hasonlóan, tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ és $R \in (0,\infty)$ esetén

$$|\operatorname{E}[g(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| \leqslant \sup_{|x|\leqslant R} |g_k(x) - g(x)| + K' \operatorname{E}\left[(1+\widehat{S}_n^2)\mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n|>R\}}\right],$$

ezért tetszőleges $R \in (0,\infty)$ esetén

$$\limsup_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} |\operatorname{E}[g(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| \leqslant K' \limsup_{n\to\infty} \operatorname{E}\left[(1+\widehat{S}_n^2)\mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n|>R\}}\right].$$

Válasszunk egy olyan $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ végtelen sokszor differenciálható függvényt, hogy $h(x) = 0$ ha $|x| \leqslant 1/2$, és $h(x) = 1$ ha $|x| \geqslant 1$. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $R \in (0,\infty)$ esetén

$h_R(x) := (1+x^2)h(x/R)$. Ekkor a h_R függvényre alkalmazhatjuk a Lindeberg-tételt, hiszen $|x| \geqslant R$ esetén $h_R''(x) = 2$ és $h_R'''(x) = 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} |\operatorname{E}[h_R(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[h_R(Y)]| = 0$, ezért

$$\limsup_{n\to\infty} \operatorname{E}\left[(1+\widehat{S}_n^2)\mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n|>R\}}\right] \leqslant \limsup_{n\to\infty} \operatorname{E}\left[h_R(\widehat{S}_n)\right] = \operatorname{E}[h_R(Y)] \leqslant \operatorname{E}\left[(1+Y^2)\mathbb{1}_{\{|Y|>R\}}\right].$$

Ezért

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \operatorname{E}\left[(1+\widehat{S}_n^2)\mathbb{1}_{\{|\widehat{S}_n|>R\}}\right] = 0,$$

amiből következik

$$\limsup_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} |\operatorname{E}[g(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g_k(\widehat{S}_n)]| = 0,$$

így végülis

$$\limsup_{n\to\infty} |\operatorname{E}[g(\widehat{S}_n)] - \operatorname{E}[g(Y)]| = 0.$$

A feltételek szerint ez minden folytonos, korlátos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre teljesül, így a Portmanteau-tétel segítségével kapjuk az $\widehat{S}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$ konvergenciát. □

12.3 Tétel. (Ljapunov centrális határeloszlás-tétele) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és jelölje $S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$. Ha valamely $\delta > 0$ esetén $\operatorname{E}(|X_{n,j}|^{2+\delta}) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, k_n$, és*

$$\frac{1}{\operatorname{Var}(S_n)^{(2+\delta)/2}} \sum_{j=1}^{k_n} \operatorname{E}\big[|X_{n,j} - \operatorname{E}(X_{n,j})|^{2+\delta}\big] \to 0$$

amint $n \to \infty$, akkor $\widehat{S}_n := \frac{S_n - \operatorname{E}(S_n)}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 12.2 Tételt. Tetszőleges $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ és $j = 1, \dots, k_n$ esetén

$$\operatorname{E}\left[(X_{n,j} - \operatorname{E}(X_{n,j}))^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,j} - \operatorname{E}(X_{n,j})| \geqslant \varepsilon\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}\}}\right] \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\delta \operatorname{Var}(S_n)^{\delta/2}} \operatorname{E}\big[|X_{n,j} - \operatorname{E}(X_{n,j})|^{2+\delta}\big],$$

ezért

$$L_n(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^\delta \operatorname{Var}(S_n)^{(2+\delta)/2}} \sum_{j=1}^{k_n} \operatorname{E}\big[|X_{n,j} - \operatorname{E}(X_{n,j})|^{2+\delta}\big] \to 0$$

amint $n \to \infty$. □

12.4 Tétel. (Centrális határeloszlás-tétel független, azonos eloszlású sorozatokra) *Legyenek X_1, X_2, ... független, azonos eloszlású véletlen változók, és jelölje $S_n := X_1 + \dots + X_n$.*
Ha $\operatorname{E}(X_1^2) < \infty$ és $\operatorname{Var}(X_1) > 0$, akkor $\frac{S_n - \operatorname{E}(S_n)}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$.

Bizonyítás. Elegendő bizonyítani $\operatorname{E}(X_1) = 0$ esetén. Alkalmazzuk a 12.2 Tételt $X_{n,j} := X_j$, $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ esetén. Jelölje $\sigma := \sqrt{\operatorname{Var}(X_1)}$. Nyilván $\operatorname{Var}(S_n) = n\sigma^2$. A majoráns konvergencia-tétel alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$L_n(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{E}\left[X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1| \geqslant \varepsilon\sigma\sqrt{n}\}}\right] \to 0$$

amint $n \to \infty$. □

12.5 Tétel. (Feller tétele) *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén legyenek* $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ *független véletlen változók, melyek nem mind elfajultak, és jelölje* $S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$. *Ha* $\widehat{S}_n := \frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1)$ *és bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant k_n} \mathrm{P}\left(\left| \frac{X_{n,j} - \mathrm{E}(X_{n,j})}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \right| \geqslant \varepsilon \right) \to 0,$$

akkor bármely $\varepsilon > 0$ *esetén* $L_n(\varepsilon) \to 0$.

12.6 Tétel. (Poisson konvergenciatétel) *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén legyenek* $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ *független véletlen változók, melyekre* $\mathrm{P}(X_{n,j} = 1) = p_{n,j} = 1 - \mathrm{P}(X_{n,j} = 0)$, $j = 1, \dots, k_n$, *és jelölje* $S_n := X_{n,1} + \dots + X_{n,k_n}$. *Ha* $\sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j} \to \lambda \in \mathbb{R}_+$ *és* $\max_{1 \leqslant j \leqslant k_n} p_{n,j} \to 0$, *akkor* $S_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

12.7 Lemma. *Ha* $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in [-1, 1]$, *akkor*

$$\left| \prod_{j=1}^m a_j - \prod_{j=1}^m b_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^m |a_j - b_j|.$$

Bizonyítás.

$$\prod_{j=1}^m a_j - \prod_{j=1}^m b_j \leqslant \sum_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^{j-1} a_i \right) (a_j - b_j) \left(\prod_{i=j+1}^m b_i \right),$$

ahol az üres szorzat értéke 1. □

A Poisson konvergenciatétel bizonyítása. A λ paraméterű Poisson-eloszlás generátorfüggvénye

$$x \mapsto \sum_{k=0}^\infty x^k \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^\infty \frac{(x\lambda)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{x\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}.$$

A $X_{n,j}$ véletlen változó generátorfüggvénye

$$x \mapsto 1 - p_{n,j} + p_{n,j} x = 1 + p_{n,j}(x - 1),$$

ezért az S_n véletlen változó generátorfüggvénye

$$x \mapsto \prod_{j=1}^{k_n} [1 + p_{n,j}(x - 1)].$$

A generátorfüggvényekre vonatkozó folytonossági tétel alapján az állítás bizonyításához elegendő belátni, hogy tetszőleges $x \in [-1, 1]$ esetén

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{j=1}^{k_n} [1 + p_{n,j}(x - 1)] = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}.$$

Tekintsük a

$$\left| \prod_{j=1}^{k_n} [1 + p_{n,j}(x - 1)] - \mathrm{e}^{\lambda(x-1)} \right| \leqslant A_n(x) + B_n(x),$$

becslést, ahol

$$A_n(x) := \left| \prod_{j=1}^{k_n} [1 + p_{n,j}(x-1)] - \prod_{j=1}^{k_n} \mathrm{e}^{p_{n,j}(x-1)} \right|, \qquad B_n(x) := \left| \prod_{j=1}^{k_n} \mathrm{e}^{p_{n,j}(x-1)} - \mathrm{e}^{\lambda(x-1)} \right|.$$

Itt

$$B_n(x) = \left| \mathrm{e}^{(x-1)\sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j}} - \mathrm{e}^{\lambda(x-1)} \right| \to 0,$$

mert $\sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j} \to \lambda$. Az előző Lemma alapján

$$A_n(x) \leqslant \sum_{j=1}^{k_n} \left| \mathrm{e}^{p_{n,j}(x-1)} - 1 - p_{n,j}(x-1) \right|.$$

A Taylor-tétel alapján tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén $|\mathrm{e}^y - 1 - y| \leqslant \frac{1}{2} y^2 \, \mathrm{e}^{|y|}$, ezért tetszőleges $x \in [-1, 1]$ esetén

$$A_n(x) \leqslant \frac{1}{2}(x-1)^2 \sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j}^2 \, \mathrm{e}^{p_{n,j}|x-1|} \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2}(x-1)^2 \sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j}^2.$$

Itt

$$\sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j}^2 \leqslant \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant k_n} p_{n,j} \right) \sum_{j=1}^{k_n} p_{n,j} \to 0,$$

ezért $A_n(x) \to 0$. $\square$