

Sztochasztikus folyamatok feladatgyűjtemény

Kevei Péter, Körmendi Kristóf, Szűcs Gábor

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet, Sztochasztika Tanszék

Utolsó frissítés: 2013. május 4.

1. Megállási idő és filtráció

1.1. Legyen $\tau, \tau_1, \tau_2, \dots : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = (-\infty, \infty]$ általános értelemben vett véletlen változó, továbbá legyen $h : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ egy \mathcal{B} - \mathcal{B} mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy az alábbi leképezések általános értelemben vett véletlen változók, tehát mérhetőek.

- a. $h(\tau)$;
- b. $\tau_1 + \tau_2$ illetve $\tau_1 + \tau_2 + \dots$;
- c. $\max(\tau_1, \tau_2)$ illetve $\sup(\tau_1, \tau_2, \dots)$;

1.2. Legyen $\tau_1, \tau_2 : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ általános értelemben vett véletlen változó. Bizonyítsuk be a következő állításokat.

- a. Ha $P(\tau_1 \leq \tau_2) = 1$, akkor $E(\tau_1) \leq E(\tau_2)$.
- b. Tetszőleges $c_1, c_2 \geq 0$ valós konstansok esetén

$$E(c_1\tau_1 + c_2\tau_2) = c_1E(\tau_1) + c_2E(\tau_2).$$

1.3. Legyen $\tau : \Omega \rightarrow [1, \infty]$ megállási idő az $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T} = [0, \infty)\}$ filtrációra nézve. Mit mondhatunk, megállási idő-e a $\tau - 1$ illetve a $\tau + 1$ változó?

1.4. a. Legyen τ_1, \dots, τ_n megállási idő az $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T} \subseteq [0, \infty)\}$ filtrációra nézve. Mutassuk meg, hogy ekkor $\min(\tau_1, \dots, \tau_n)$ és $\max(\tau_1, \dots, \tau_n)$ is megállási idő erre a filtrációra nézve.

b. Legyen τ_1, τ_2, \dots megállási idő az $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{T} \subseteq [0, \infty)\}$ filtrációra nézve. Mit mondhatunk, megállási idő erre a filtrációra nézve az $\inf(\tau_1, \tau_2, \dots)$ illetve a $\sup(\tau_1, \tau_2, \dots)$ változó? Ha igen, akkor bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk ellenpéldát.

2. Diszkrét idejű Markov-lánccok

2.1. Tegyük fel, hogy a holnapi időjárás csak a mai időjárástól függ. Ha ma esik az eső, akkor holnap 0,4 valószínűséggel fog újra esni, míg ha nem esik, akkor holnap 0,2 valószínűséggel kapunk esőt.

- a. Modellizzük Markov-lánccal az időjárást, írjuk fel az átmenetvalószínűségeket!
- b. Tegyük fel, hogy ma hétfő van. Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket.

$P(\text{holnap esni fog})$

$P(\text{holnapután esni fog} \mid \text{ma és szombaton is jó idő volt})$

$P(\text{a héten nem fog esni} \mid \text{a múlt héten nem esett})$

$P(\text{szerdán és a hétvégén végig jó idő lesz, de ma esni fog})$

$P(\text{kedden vagy pénteken jó idő lesz} \mid \text{ma és tegnap is jó idő volt})$

$P(\text{a következő esőzés pontosan negyven napig fog tartani})$

2.2. Tegyük fel, hogy a holnapi időjárás csupán az előző két nap időjárásától függ. Annak a valószínűsége, hogy holnap esni fog 0,7, ha ma és tegnap is esett, 0,5, ha ma esik de tegnap nem, 0,4, ha tegnap esett, de ma nem, végül 0,2, ha sem ma, sem tegnap nem volt csapadék. Modellezhető-e Markov-lánc segítségével az időjárás, ha igen, akkor mik az átmenetvalószínűségek.

2.3. Legyen X_n , $n \in \mathbb{N}_0$, az egydimenziós szimmetrikus véletlen bolyongás. Markov-láncot alkotnak-e a következő folyamatok? Markov-láncok esetén határozzuk meg az állapotteret, átmenetmátrixot, kommunikációs osztályokat és hogy homogén-e a lánc. Ha a folyamat nem Markov, azt is igazoljuk.

- a. $X_n - X_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$;
- b. $S_n = X_0 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}_0$;
- c. (S_n, S_{n-1}) , $n \in \mathbb{N}$;
- d. $M_n = \max(X_0, \dots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$;
- e. (X_n, M_n) , $n \in \mathbb{N}_0$.

2.4. Legyen X_n , $n \in \mathbb{N}_0$, az egydimenziós véletlen bolyongás. Milyen feltételek mellett lesz Markov-lánc az $|X_n|$, $n \in \mathbb{N}_0$, sorozat?

2.5. Adott egy urna a piros és b fehér golyóval. Minden lépésben kivesszünk egy golyót, és c darab ugyanolyan színűt és d darab ellentétes színűt teszünk az urnába. Legyen X_n és Y_n rendre a piros és a fehér golyók száma az n -dik lépés után, továbbá legyen Z_n annak az indikátora, hogy az n -dik lépésben piros golyót húzunk. Vizsgáljuk meg, hogy mely c és d értékek esetén lesznek az alábbi folyamatok Markov-láncok?

- a. X_n , $n \in \mathbb{N}_0$;
- b. Z_n , $n \in \mathbb{N}_0$;
- c. $(X_n, X_n + Y_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$;
- d. $X_n / (X_n + Y_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

2.6. Egy ABC háromszög csúcsain ugrálunk. Egy adott csúcsban tett látogatások számát nevezzük a csúcshoz tartozó lokális időnek. Jelölje $L_A(n)$ az A csúcshoz tartozó lokális időt az n időpontban. Tegyük fel, hogy az A csúcsból indulunk, az első lépésben 0,5-0,5 valószínűséggel ugrunk valamelyik szomszédos csúcsba, majd minden további lépésben a két lehetséges csúcs közül lokális idejünkkel fordítottan arányos valószínűségek szerint lépünk tovább. Legyen X_n az n -dik lépésben meglátogatott csúcs. Markov-láncot alkotnak-e a következő sorozatok?

- a. X_n , $n \in \mathbb{N}_0$;
- b. $(X_n, L_A(n))$, $n \in \mathbb{N}_0$;
- c. $(L_A(n), L_{X_n}(n))$, $n \in \mathbb{N}_0$;

2.7. Az általános két-állapotú homogén diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a $p_{1,1}^{(n)}$ valószínűségeket, vagy általánosabban a $\mathbf{P}^{(n)}$ átmenetmátrixot!

2.8. Egy vírusnak N különböző típusa létezik. Jelölje α annak a valószínűségét, hogy a következő generációban van mutáció, azaz a vírus típusa megváltozik. Ekkor a többi lehetséges $N - 1$ típus egyforma valószínűséggel lép fel. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az n -edik generációban a vírus ugyanolyan típusú, mint az elsoben.

2.9. a. Egy szabályos dobókockát elrontunk úgy, hogy a dobott szám nem egyezhet meg az előzőleg dobott számmal, a lehetséges 5 értéket pedig egyformán $1/5$ az esélye. Mennyi a valószínűsége, hogy az n -edik dobás 6-os, feltéve, hogy az első 6-os volt? Mennyi a valószínűsége, hogy az n -edik dobás 1-es, feltéve, hogy az első 6-os volt?

b. Most úgy rontjuk el a kockát, hogy a dobott szám 6-os maradéka nem lehet 1-el nagyobb, mint az előző 6-os maradéka. Adjuk meg az előző részben kért valószínűségeket számolás nélkül!

2.10. a. Shanille O'Keal büntetőket dobál egy kosárpályán. Az elsőt bedobja, a másodikat nem. Ezek után annak a valószínűsége, hogy egy büntetőt bedob, meg egyezik az eddig sikeres dobásainak részarányával. Jelölje X_n az n dobás után bedobott büntetők számát! Mutassuk meg, hogy X_n , $n \geq 2$, Markov-lánc, és adjuk meg az átmenetvalószínűségek mátrixát! Számítsuk ki X_n eloszlását!

b. Shanille akkor hagyja abba a büntetődobásokat, amikor először bedob egymás után 10-et. Adjuk meg formálisan ezt a τ véletlen időpontot, és mutassuk meg, hogy megállási idő a folyamat által generált $\mathcal{F}_n = \sigma(X_2, X_3, \dots, X_n)$, $n \geq 3$ filtrációra nézve.

2.11. Tekintsük azt a Markov-láncot, melynek átmenetmátrixa

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a lánc kommunikációs osztályait és adjunk zárt formulát a $p_{1,1}^{(n)}$ átmenetvalószínűségekre!

2.12. Legyen az X_n , $n \geq 0$, Markov-lánc átmenetmátrixa

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ p & 1-p & 0 \end{bmatrix}.$$

- a. Hogyan függenek a kommunikációs osztályok p értékétől?
 b. Határozzuk meg a $P(X_n = 1 | X_0 = 1)$ valószínűséget a (i) $p = 1/16$, (ii) $p = 1/6$,
 (iii) $p = 1/12$ esetén.

2.13. Határozzuk meg az alábbi átmenetmátrixokhoz tartozó kommunikációs osztályokat!
 Adjuk meg az egyes állapotok típusát és periódusát.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2.14. Legyen $X_n, i \in \mathbb{N}_0$, Markov-lánc az \mathcal{I} állapottéren. Rögzített $n \in \mathbb{N}_0$ és $i \in \mathcal{I}$ mellett legyen $Jelen = \{X_n = i\}$, és tekintsünk tetszőleges

$$\text{Múlt}, \text{Múlt}_2 \in \sigma(X_0, \dots, X_n), \quad \text{Jövő} \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots),$$

eseményeket. Mutassuk meg, hogy ekkor teljesülnek az alábbi azonosságok.

- a. $P(\text{Jövő} | Jelen, \text{Múlt}, \text{Múlt}_2) = P(\text{Jövő} | Jelen, \text{Múlt})$;
 b. $P(\text{Jövő}, \text{Múlt} | Jelen) = P(\text{Jövő} | Jelen)P(\text{Múlt} | Jelen)$;
 c. $P(\text{Múlt} | Jelen, \text{Jövő}) = P(\text{Múlt} | Jelen)$.

2.15. Legyen $X_n, n \in \mathbb{N}_0$, Markov-lánc az \mathcal{I} állapottéren. Tekintsünk tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n < m$, időpontokat és $i, j \in \mathcal{I}$ állapotokat, és legyen

$$\text{Múlt} \in \sigma(X_0, \dots, X_n), \quad A \in \sigma(X_n, \dots, X_m), \quad \text{Jövő} \in \sigma(X_m, X_{m+1}, \dots).$$

Mutassuk meg, hogy ekkor

$$P(A | \text{Múlt}, X_n = i, X_m = j, \text{Jövő}) = P(A | X_n = i, X_m = j).$$

2.16. Legyen $X_n, n \in \mathbb{N}_0$, Markov-lánc az $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{Z}$ állapottéren. Igaz-e, hogy ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ időpont, $B \in \mathcal{B}$ Borel-halmaz, valamint

$$\text{Múlt} \in \sigma(X_0, \dots, X_n), \quad \text{Jövő} \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots),$$

események mellett teljesül a következő egyenlőség:

$$P(\text{Jövő} | X_n \in B, \text{Múlt}) = P(\text{Jövő} | X_n \in B).$$

2.17. Mutassunk példát két olyan Markov-láncre melyek összege már nem Markov-lánc.

- 2.18.** a. Legyen \mathcal{I} megszámlálható halmaz, és legyen X_0 az \mathcal{I} halmaz egy véletlen eleme. Ettől függetlenül legyen U_1, U_2, \dots független és a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású véletlen változók. Legyen továbbá $G : \mathcal{I} \times [0,1] \rightarrow \mathcal{I}$ egy mérhető függvény, és tekintsük az $X_{n+1} = G(X_n, U_{n+1})$ formulával definiált $X_n, n \in \mathbb{N}_0$, sorozatot. Mutassuk meg, hogy $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ homogén Markov-lánc, és adjuk meg az átmenetmátrixát!
- b. Mutassuk meg, hogy minden diszkrét idejű homogén Markov-lánc előállítható ilyen alakban!

- 2.19.** (A Chapman–Kolmogorov-egyenletek fennállásából nem következik a markovitás.) Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. Legyen

$$\Omega = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1), (1,1,1), (2,2,2), (3,3,3)\},$$

és legyen minden kimenetel valószínűsége $1/9$. Legyen továbbá X_k az a véletlen változó, ami megadja az ω véletlen kimenetel k -edik komponensét, $k = 1,2,3$.

- a. Mutassuk meg, hogy X_1, X_2, X_3 páronként független, de a három változó nem teljesen független.
- b. Az így konstruált valószínűségi mező megszámlálható sokszori szorzatán megadhatunk Y_1, Y_2, \dots végtelen sok véletlen változót, hogy a különböző hármas blokkok függetlenek, a blokkokon belül pedig a fent megadott módon függenek egymástól a változók. Bizonyítsuk be, hogy az $Y_k, k \geq 1$, sztochasztikus folyamatra teljesülnek a Chapman–Kolmogorov-egyenletek, de a folyamat nem Markov-lánc.
- 2.20.** Egy szabályos dobókockával dobhatunk, legfeljebb kétszer. Az első dobás után dönthetünk úgy, hogy elvisszük a dobott szám értékét forintban, vagy dönthetünk úgy, hogy dobunk még egyet. Ebben az esetben a második dobás értékét kapjuk meg
- a. Milyen stratégia esetén tudjuk maximalizálni a nyereseményünk várható értékét? Mi is lesz egy stratégia?
- b. Mi a helyzet ha legfeljebb 3-szor dobhatunk? És ha n -szer?

Az ilyen típusú feladatokat optimális megállítási feladatoknak nevezik. A következő példa a témakör egy klasszikusa.

- 2.21.** Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül egyet kiválasztania oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat. Tegyük föl, hogy egyértelmű szigorúan monoton szépségi sorrendet tud felállítani a háremhölgyek között. Legyen X_i az szám, hogy az i -ediknek elvonuló hölgy hányadik a szépségi rangsorban az első i lány között. Tehát $X_i \in \{1,2, \dots, i\}$. Tegyük fel, hogy X_1, X_2, \dots, X_N egymástól függetlenek, és X_i egyenletes eloszlású rendre az $\{1,2, \dots, i\}$ halmazon. (Gondoljuk meg, hogy ez pontosan azt jelenti, hogy a háremhölgyek bármely elvonulási sorrendje egyformán valószínű.) Legyen $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \dots, X_k)$. Szindbád a

következő stratégia szerint választ: k hölgyet elenged, majd kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultnál.

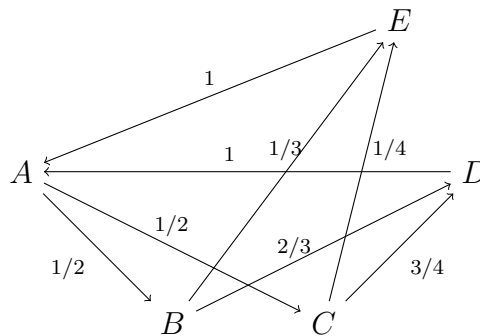
- a. Mutassuk meg, hogy az így választott lány τ sorszáma megállási idő az \mathcal{F}_n , $n = 1, 2, \dots, N$, filtrációra nézve!
- b. Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy ezzel a stratégiával Szindbád a leg-szebb lányt választja! Milyen k esetén lesz ez a stratégia optimális?

3. Visszatérési valószínűségek és az állapotok típusa

3.1. Egy pók egy 20x30 centiméteres terráriumban él, és ideje nagy részében valamelyik sarokban ücsörög. Ezt a monotómiát csak akkor törli meg, amikor átfut egy másik sarokba, hogy ott is eltöltsön egy kis időt. Mindig valamelyik szomszédos sarokba fut, és azt is tudjuk, hogy a két lehetséges sarok között a távolságukkal fordítottan arányú valószínűséggel dönt. Az, hogy melyik sarkot választja, független attól, hogy korábban mely sarkokat hányszor látogatta meg. Jelölje X_n a pók helyét az n -dik helyváltoztatás után.

- a. Gondoljuk meg, hogy az X_n , $n \in \mathbb{N}_0$, sorozat homogén Markov-lánc. Adjuk meg a folyamat átmenetmátrixát és átmenetgráfját. Határozzuk meg a kommunikációs osztályokat, valamint az állapotok típusát és periódusát.
- b. Jelölje i azt a sarkot, melyben a pók a 0 időpillanatban megtalálható. Írjuk fel az $f_{i,i}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, és az $f_{i,i}$ visszatérési valószínűségeket. Továbbá, határozzuk meg a T_i visszatérési idő eloszlását és a $\mu_i = E(T_i)$ várható értéket. Ezek alapján mi az i állapot típusa?

3.2. Egy Markov-láncnak a következő az átmenetgráfja.



- a. Az A állapotból indulva mekkora valószínűséggel leszünk a B állapotban 999, 1000 illetve 1001 lépés megtétele után?
- b. Írjuk fel az $f_{i,i}^{(n)}$, $i \in \mathcal{I}$, $n \in \mathbb{N}_0$, visszatérési valószínűségeket és határozzuk meg a visszatérési idők μ_i , $i \in \mathcal{I}$, várható értékét.

c. Adjuk meg a lánc d periódusát, valamint határozzuk meg a lánc alosztályait. Írjuk fel az $Y = \{Y_n = X_{nd} : n \in \mathbb{N}_0\}$ Markov-lánc átmenetmátrixát, és vegyük észre, hogy ez blokkdiagonális. Mi a jelnetése a mátrix blokkjainak?

3.3. Tekintsük az általános kétdimenziós véletlen bolyongást, ami egy olyan $X_n, n \in \mathbb{N}_0$, folyamat a \mathbb{Z}^2 rácspontokon, mely az origóból indul, és minden egyes lépésben $p_\uparrow, p_\downarrow, p_\leftarrow, p_\rightarrow \in (0,1)$ valószínűséggel lép át a négy szomszédos rácspont valamelyikébe, ahol $p_\uparrow + p_\downarrow + p_\leftarrow + p_\rightarrow = 1$. Adjuk meg a folyamat típusát az alábbi három esetben.

- a. $p_\uparrow = p_\downarrow = p_\leftarrow = p_\rightarrow$;
- b. $p_\uparrow = p_\downarrow \neq p_\leftarrow = p_\rightarrow$;
- c. $p_\uparrow \neq p_\downarrow$ vagy $p_\leftarrow \neq p_\rightarrow$.

4. Invariáns eloszlás és az ergodikus tétel

4.1. Növénytermesztéshez felszerelünk egy önműködő öntözőberendezést. A páratartalmat, hőmérsékletet és egyéb tényezőket óránként megmérve a berendezés automatikusan vált a 3 lehetséges állapota között (kikapcsolt, gyenge és erős). Gyenge állapotában 51, erős állapotban pedig 163 liter vizet locsol szét óránként. Adjuk meg, hogy hosszú távon mennyi időt tölt az öntözőberendezés az egyes állapotokban, és hosszú távon mennyi vizet fogyaszt, ha az átmenetmátrixa

$$\begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.2. Adjuk meg a **3.2.** feladatban definiált Markov-lánc invariáns eloszlását három különböző módszerrel.

4.3. (A diszkrét idejű születési-halálozási folyamat visszaverő fallal.) Tekintsük azt az $X_n, n \in \mathbb{N}_0$, Markov-láncot, mely az $\mathcal{I} = \mathbb{N}_0$ állapottéren van definiálva, és ami minden egyes lépésben valamelyik szomszédos állapotba lép át. Tegyük fel, hogy egy adott i állapotból indulva rendre p_i annak a valószínűsége, hogy a folyamat jobbra lép, és q_i annak az esélye, hogy a folyamat balra lép, ahol $p_i, q_i \in (0,1), p_i + q_i = 1, i \in \mathbb{N}$, és $p_0 = 1$. Ekkor a folyamatnak egy kommunikációs osztálya van.

a. Mutassuk meg, hogy a folyamat pontos akkor pozitív rekurrens, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} < \infty.$$

Határozzuk meg a folyamat invariáns eloszlását ebben az esetben.

- b. Adjunk szükséges és elegendő formulát arra, hogy a folyamat rekurrens legyen.
- 4.4. Tegyük fel, hogy üzemünk naponta 2 darabot tud legyártani egy adott termékből, melyek egymástól függetlenül $p < 1/2$ valószínűséggel felelnek meg a szabványok. Napi 1 szabványos terméket vásárolnak meg tőlünk, ezt este szállítjuk el. Ha többet termelünk, a felesleget el tudjuk raktározni, és amennyiben mindkét munkadarab selejtes, a raktárból is szállíthatunk, ha van tartalék termékünk. Jelölje X_n az elraktározott mennyiséget az n -edik nap végén.
- a. Mik a folyamat lehetséges állapotai? Mutassuk meg, hogy $X_n, n \in \mathbb{N}_0$, Markov-lánc, írjuk fel az átmenetvalószínűségeket, és rajzoljuk fel az átmenetgráfot. Határozzuk meg az invariáns eloszlást.
- b. Legyen A_n azt az esemény, hogy az n -dik napon nem tudunk szállítani. Adjuk meg a $P(A_n)$ sorozat határértékét, amint $n \rightarrow \infty$.
- c. Tegyük fel, hogy egy termék napi raktározási költsége a forint, és b forint kötbért kell fizetnünk, ha egy napon nem tudunk szállítani. Hosszútávon mekkora az egy napra jutó átlagos költség?

5. Elérési idők és elnyelési valószínűségek

- 5.1. Legyen $X_n, n \geq 0$ a 4 állapoton definiált elnyelő falú szimmetrikus bolyongás, azaz legyen átmenetmátrixa

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

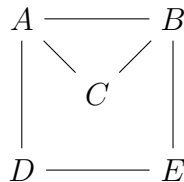
Mi a valószínűsége, hogy a láncot i -ből indítva az végül az 1 elnyelő állapotban köt ki? Precízebben, legyen

$$\tau = \tau_{\{1,4\}} = \min \{n \geq 0 : X_n \in \{1,4\}\}.$$

Mutassuk meg, hogy τ megállási idő, és határozzuk meg a $h_i = P(X_\tau = 1 | X_0 = i)$, $i = 1,2,3,4$, valószínűségeket!

- 5.2. Egy szerencsejátékosnak kezdetben a forintja van, és addig játszik míg vagy nyer b forintot, vagy elveszti minden pénzét. Minden játékban p valószínűséggel nyer 1 forintot, és $q = 1 - p$ valószínűséggel elveszít 1 forintot. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a játékos csődbe jut. Vizsgáljuk a $b \rightarrow \infty$ esetet.
- 5.3. Pinokkiónak kilenc akadályon kell sikerrel túljutnia, hogy fabábuból kisfiúvá változhasson. Ha egy akadályon elbukik, akkor vissza kell mennie az előzőhöz, ha az elsők bukik el, örökre fabábu marad. Pinokkió nem tanul a kudarcokból, ezért az egyes akadályokon a siker valószínűsége $1/10, 2/10, \dots, 9/10$. Milyen sorrendben helyezze el a Kékhajú Tündér az akadályokat, hogy Pinokkió a legnagyobb eséllyel lehessen igazi kisfiú. Mennyi ekkor a valószínűség?

- 5.4. (A diszkrét idejű születési-halálozási folyamat elnyelő fallal.) Legyen X_n egy populáció egyedszáma az n -edik időpontban, és tegyük fel, hogy az X_n , $n \geq 0$, folyamat Markov-lánc, melynek az állapottere a nemnegatív egész számok \mathbb{N}_0 halmaza. A 0 elnyelő állapot, hiszen ezt az állapotot elérve a populáció kihalt. Továbbá, ha a populációban pontosan i egyed van, akkor rendre p_i valószínűséggel születik egy újabb egyed, és $1 - p_i = q_i$ valószínűséggel pedig meghal egy egyed. Tehát a lánc i -ből a $i \pm 1$ állapotokba léphet. Határozzuk meg azon a h_i , $i = 1, 2, \dots$, valószínűségeket, hogy i -ből indulva a folyamat valaha eléri a 0-t, azaz kihal a populáció.
- 5.5. Az alábbi gráfon végzünk véletlen bolyongást, ami azt jelenti, hogy minden egyes lépésben valamelyik szomszédos csúcsba lépünk át, és mindig egyenlő eséllyel választunk egyet a lehetséges csúcsok közül. Tegyük fel, hogy az A csúcsból indulunk, majd válaszoljunk az alábbi kérdésekre.



- Hosszútávon az időnek mekkora hányadát töltjük az A csúcsban? Várhatóan hány lépésben térünk vissza először az A csúcsba?
- Mi a valószínűsége annak, hogy valaha elérjük a B csúcsot? Várhatóan hány lépésben fog ez megtörténni?
- Mi a valószínűsége annak, hogy előbb jutunk el B -be, mint C -be?
- Ha a C csúcsból indulunk, akkor várhatóan hányszor jutunk el B -be mielőtt elérnénk A -ba?
- Mi a valószínűsége, hogy az A -ból indulva meglátogatjuk B -t mielőtt visszatérnénk A -ba? Várhatóan hányszor látogatjuk meg B -t az első visszatérés előtt?

6. Felújítási folyamatok

- 6.1. (A tisztán születési folyamat.) Legyen X_t , $t \geq 0$, az a számláló folyamat, ahol a felújítások közötti S_1, S_2, \dots idők független exponenciális eloszlású változók rendre $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ paraméterrel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a folyamat véges időben felrobban?
- 6.2. Adott egy pénzérme, melyet feldobva $p \in (0, 1)$ valószínűséggel kapunk fejet. Végtelen sokszor feldobva az érmét legyen X_n a fejek száma az első n dobás során, $n = 0, 1, \dots$. Mutassuk meg, hogy X_n , $n \in \mathbb{N}$, egy (az egész időpontokban értelmezett) felújítási folyamat. Adjuk meg a felújítások közötti idő eloszlását és a felújítási függvényt.

6.3. Egy boltba független exponenciális időközönként érkeznek vevők, óránként átlagosan tíz. Legyen $X_t, t \geq 0$ a vevőket számláló folyamat.

- a. Mutassuk meg, hogy $X_t, t \geq 0$, Poisson-folyamat. Mi a folyamat intenzitása?
- b. A nyitás után várhatóan mennyi idő elteltével érkezik meg a harmadik vevő? Mi az érkezési idő szórása? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a harmadik vevő fél órán belül megérkezik?
- c. Várhatóan hány vevő érkezik a nyitást követő 1 óra alatt? És a nyitást követő 2 és 4 óra között? Mekkora a szórása ezeknek az értékeknek?
- d. Mi annak a valószínűsége, hogy az első 1 órában nem jön vevő? Mi annak, hogy 2 és 4 óra között nem jön vevő? Mekkora valószínűséggel fog 2 és 4 között legfeljebb 3 vevő érkezni?
- e. Milyen valószínűséggel fog az első órában pontosan 5, továbbá 2 és 4 között pontosan 10 vevő érkezni?
- f. Milyen valószínűséggel fog 2 és 3 között pontosan 5, továbbá 2 és 4 között pontosan 10 vevő érkezni?
- g. Tegyük fel, hogy az első órában 5 vevő érkezett. Adjuk meg a 2 és 4 óra között érkezett vevők számának feltételes eloszlását és feltételes várható értékét. Mennyi annak az esélye, hogy 2 és 4 között pontosan 10 vevő érkezik?
- h. Tegyük fel, hogy az első órában 5 vevő érkezett. Adjuk meg a nyitás utáni első 2 órában érkezett vevők számának feltételes eloszlását és feltételes várható értékét.

6.4. Legyen $X_t, t \geq 0$, Poisson-folyamat $\lambda > 0$ intenzitással.

- a. Rögzített $t_0 \geq 0$ determinisztikus érték mellett legyen $Y_t = X_{t_0+t}, t \geq 0$. Mutassuk meg, hogy az Y_t folyamat λ intenzitású Poisson-folyamat.
- b. Legyen τ az X_t folyamattól független nemnegatív értékű véges véletlen változó. Bizonyítsuk be, hogy a $Z_t = X_{\tau+t}, t \geq 0$, folyamat szintén λ intenzitású Poisson-folyamat.

6.5. A walkmanem elemmel működik, melynek élettartama egyenletes eloszlást követ a $[8,10]$ intervallumon. Ha az elem tönkremegy, akkor $1/5$ paraméteres exponenciális idő alatt szerzek be egy újat. Feltehető, hogy a bevezetett változók mind függetlenek.

- a. Átlagosan milyen időközönként vásárolok új elemet?
- b. Hosszútávon az időnek mekkora hányadában jó az elem a walkmanben?

6.6. Tegyük fel, hogy egy bankautomatához független exponenciális időközönként érkeznek a potenciális ügyfelek, még hozzá óránként átlagosan λ . Tegyük fel továbbá,

hogy amennyiben egy ügyfél úgy érkezik az autómáshoz, hogy ott már áll valaki, akkor az érkező ügyfél nem várakozik, hanem elmegy. A kiszolgálási idő várható értéke μ , tehát átlagosan μ ideig tart egy-egy készpénzfelvétel.

- a. Átlagosan milyen időközönként távozik úgy egy ügyfél az autómáshoz, hogy sikerült pénzt felvennie?
 - b. Hosszútávon az időnek mekkora hányadában áll valaki az autómáshoz? A potenciális ügyfelek mekkora hányada lesz kiszolgálva?
- 6.7.** A „tipikus” autók élettartama λ paraméteres exponenciális eloszlást követ. Szabó úr tipikus autót használ, és akkor vásárol új autót, ha a régi autója lerobban, vagy a régi autója eléri a t_0 éves kort. Egy új autó ára c_1 , és ha a régi autó nem robbant le, akkor azt Szabó úr $c_2 < c_1$ áron el tudja adni. (λ , t_0 , c_1 és c_2 determinisztikus pozitív értékek.)
- a. Adjuk meg az egységnyi időre jutó hosszútávú átlagos költséget.
 - b. Adott λ , c_1 és c_2 értékek mellett mely t_0 fogja minimalizálni ezt a költséget?

7. Folytonos idejű Markov-láncok

- 7.1.** Adjuk meg az alábbi generátormátrixokkal definiált konzervatív Markov-láncok átmenetvalószínűségeit, továbbá határozzuk meg az átmenetvalószínűségek limeszét, amint $t \rightarrow \infty$.

$$\text{a. } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{b. } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 7.2.** Tekintsük a **6.1.** Feladatban definiált tisztán születési folyamatot.

- a. Mutassuk meg, hogy a folyamat konzervatív Markov-lánc, és írjuk fel az infinitesimális generátorát.
 - b. Határozzuk meg a folyamat átmenetvalószínűségeit.
- 7.3.** Legyen $\mathbb{X} = \{X_t : t \geq 0\}$ càdlàg és konzervatív Markov-lánc, melynek kezdeti eloszlása $\alpha = \delta_i$ valamely $i \in \mathcal{I}$ állapotba. Jelölje f_i az i állapotba való visszatérés valószínűségét.

- a. Mutassuk meg, hogy ekkor az alábbiak ekvivalensek
 - i tranziens.
 - $\sup\{t \geq 0 : X_t = i\} < \infty$ majdnem biztosan.
 - i nem elnyelő és $f_i < 1$.
 - $\int_0^\infty p_{i,i}^{(t)} dt < \infty$.

- b. Vajon milyen ekvivalens állításokat lehet megfogalmazni arra, hogy az i állapot rekurrens? Bizonyítsuk is be ezeket az állításokat.
- 7.4. Legyen X càdlàg és konzervatív Markov-lánc, legyen Y a kapcsolatos beágyazott folyamat, továbbá jelölje Z a h -lépéses vázfolyamatot valamilyen rögzített $h > 0$ esetén. Legyen $i \in \mathcal{I}$ a folyamatok egy tetszőleges állapota. Mutassuk meg, hogy i típusa megegyezik a három folyamatban.
- 7.5. A ferihegyi repülőtérrel 10 fős kisbusszokkal is be lehet jutni a városba. Az utasok átlagosan 3 percenként érkeznek, és egy járat akkor indul, mikor tele van a busz. Feltéve, hogy mindig van szabad busz, adjuk meg az indulásra váró utasok átlagos számát, illetve az átlagos várakozási időt.
- 7.6. Növénytermesztéshez felszerelünk egy önműködő öntözőberendezést. A páratartalmat, hőmérsékletet és egyéb tényezőket óránként megmérve a berendezés automatikusan vált a 3 lehetséges állapota között (kikapcsolt, gyenge és erős). A rendszer minden állapotban exponenciális ideig működik. Átlagosan 5 óra szokott eltelni úgy, hogy a rendszer nem kapcsol be, és bekapcsoláskor a rendszer mindig a gyenge fokozatba vált. A gyenge fokozatban átlagosan 2 órán át működik, és ezek után az esetek $3/4$ részében leáll, az esetek $1/4$ részében pedig átvált az erős fokozatba. Az erős fokozatban a rendszer átlagosan 1 órán át locsol, és utána mindig leáll. Azt is tudjuk, hogy gyenge állapotában 50, erős állapotban pedig 150 liter vizet locsol szét óránként.
- a. Adjuk meg, hogy hosszú távon mennyi időt tölt az öntözőberendezés az egyes állapotokban.
- b. Hosszú távon óránként átlagosan mennyi vizet szór szét a berendezés? Átlagosan óránként mennyi vizet szór szét, ha csak azt az időt vesszük figyelembe, amikor be van kapcsolva?
- 7.7. Egy tigris idejét alvással, vadászattal és evéssel tölti. Minden tevékenység időtartama exponenciális eloszlást követ, átlagosan 5 órát alszik, 2 órán át vadászik, és 1 órán keresztül eszik. Az időnek mekkora arányában alszik, ha
- a. mindig betartja az alvás–vadászat–evés sorrendet?
- b. egy-egy táplálkozás után rendre 0,5 valószínűsítőszámmal marad éllelme, így a következő alkalommal nem kell elmennie vadászni?
- c. egy frissen elfogott zsákmányból 0,5 valószínűsítőszámmal marad éllelme, de ezt akkor a következő alkalommal mind megessi?
- 7.8. Egy utazási irodában egy alkalmazott dolgozik. Ha érkezik egy érdeklődő, akkor 5 perc várható értékű exponenciális ideig tart, amíg az érdeklődő elmondja, hogy mit szeretne, és 10 várható értékű exponenciális ideig tart, amíg az alkalmazott elkészíti számára az ajánlatot. Az ajánlatkészítés után az érdeklődő távozik. (Az

igény előadásához szükséges idő és az ajánlatkészítéshez szükséges idő egymástól függetlenek.) A potenciális érdeklődők óránkénti 3 intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek, és egy vevő csak akkor tér be az üzletbe, ha odabenn legfeljebb egy vevőt talál.

- a. Modellezzük a rendszer viselkedését egy Markov-lánc segítségével, és ábrázoljuk az intenzitási diagrammot.
- b. A potenciális vevők mekkora hányada nem tér be az üzletbe?
- c. Hosszútávon átlagosan hány vevő tartozkodik a boltban, és átlagosan mennyi időt töltenek benn?

8. Tömegkiszolgálási modellek

8.1. (A folytonos idejű születési-halálozási folyamat.) Modellezzük egy állatpopuláció létszámának alakulását az $\mathbb{X} = \{X_t : t \geq 0\}$ càdlàg sztochasztikus folyamattal, mely az $\mathcal{I} = \mathbb{N}_0$ állapottéren van értelmezve. A populáció létszáma változás esetén vagy eggyel nő, vagy eggyel csökken. Ha egy adott időpontban a populáció létszáma pontosan $i \in \mathcal{I}$, akkor $\lambda_i > 0$ paraméteres exponenciális idő múlva születik meg vagy csatlakozik a populációhoz egy új egyed. Továbbá, ha a populáció létszáma $i > 0$, akkor $\mu_i > 0$ paraméteres exponenciális idő múlva pusztul el vagy távozik el a populációból egy egyed.

- a. Előfordulhat-e, hogy az \mathbb{X} folyamat véges időben felrobban?
- b. Mutassuk meg, hogy a \mathbb{X} folyamat konzervatív Markov-lánc, és írjuk fel a generátormátrixát.
- c. Adjunk szükséges és elegendő feltételt az invariáns eloszlás létezésére, és határozzuk is meg az invariáns eloszlást.
- d. Milyen kapcsolat van a folytonos idejű és a **4.3.** Feladatban definiált diszkrét idejű születési-halálozási folyamat között?

8.2. (Az $M/M/1/\infty$ rendszer.) Egy boltba $\lambda > 0$ exponenciális időközönként érkeznek a vevők. A boltban egyszerre egy vevőt tudnak kiszolgálni, a kiszolgálási idő $\mu > 0$ paraméteres exponenciális, mely független a vevők érkezési idejétől. A vevők hajlandóak akármilyen sokáig várakozni a kiszolgálásra. Legyen X_t a rendszer mérete, tehát a boltban található vevők száma a $t \geq 0$ időpillanatban.

- a. Előfordulhat-e, hogy az \mathbb{X} folyamat véges időben felrobban?
- b. Mutassuk meg, hogy X_t , $t \geq 0$, folytonos idejű Markov-lánc, adjunk szükséges és elegendő feltételt az invariáns eloszlás létezésére, és írjuk is fel az invariáns eloszlást.

A továbbiakban tegyük fel, hogy létezik az invariáns eloszlás.

- c. Hosszútávon az időnek mekkora hányadában üres a rendszer? Hosszútávon a vevők mekkora hányada találja üresen a rendszert?
- d. Mutassuk meg, hogy

$$L := \lim_{t \rightarrow \infty} E(X_t) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Mekkora az átlagos rendszerméret? Hosszútávon az érkező vevők átlagosan hány embert találnak a rendszerben?

- e. Jelölje W a vevők által a rendszerben töltött átlagos időt, és mutassuk meg, hogy $W = 1/(\mu - \lambda)$.
- f. (Little törvénye.) A fentiek szerint $L = \lambda W$. Adjunk erre a formulára egy olyan bizonyítást, mely nem használja fel az előző két pont eredményeit.

8.3. Egy számítógépes üzletbe átlagosan 12 percenként érkezik vevő. A tulajdonos két eladó között választhat. Alfréd óránként 6, Béla 8 vevőt tud kiszolgálni, a kért órabér 1000, illetve 1500 forint. A tulajdonos szerint nem jó, ha a vevőknek sokat kell várakozniuk, mire sorra kerülnek. Ezt úgy számszerűsíti, hogy a vevők sorbanállással töltött ideje neki óránként 100 forintba kerül.

- a. A jelöltek munkaidejüknek mekkora hányadában foglalkoznának a vevőkkel?
- b. Mennyi az átlagos rendszerméret és a rendszerben töltött átlagos idő az egyes jelöltek esetében?
- c. Melyik eladót éri meg jobban foglalkoztatni?
- d. Mekkora várakozási költség esetén lesz a két jelentkező költség egyenlő? Mi lesz ez a költség?
- e. Tegyük fel, hogy Csaba is jelentkezik az állásra. Ő 800 forintos órabért kér, de csak 4 vevőt tud kiszolgálni óránként. Megéri-e őt alkalmazni?

8.4. Adott egy taxiállomás, melyre független exponenciális időközönként, átlagosan félpercenként érkeznek a taxik, és az újonnan érkező mindig beáll a sor végére. A potenciális utasok percenkénti 1 intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek. Amennyiben van taxi az állomáson, akkor az érkező kuncsaft beszáll, és elhajt. Ha nincs várakozó taxi, akkor az utas azonnal elmegy.

- a. Az időnek mekkora részében van taxi az állomáson? A potenciális utasok mekkora hányada kap taxit?
- b. Átlagosan hány taxi áll az állomáson? Átlagosan mennyit kell várakozniuk?

8.5. (Az $M/M/\infty/\infty$ rendszer.) Módosítsuk a **8.2.** Feladatban definiált modellt azzal, hogy a boltban nem csupán egy, hanem végtelen sok eladó van, akik képesek tetszőlegesen sok vevőt egymással párhuzamosan kiszolgálni. Egy-egy vevő kiszolgálási ideje továbbra is μ paraméteres exponenciális. (Ezt a modellt önkiszolgáló rendszernek is szokták nevezni. Vajon miért?)

- a. Adjunk szükséges és elegendő feltételt az invariáns eloszlás létezésére, és írjuk fel az invariáns eloszlást.
- b. Határozzuk meg az L átlagos rendszerméretet és a W átlagos rendszerben töltött időt. Little törvénye ebben a modellben is érvényes lesz?
- 8.6.** a. (Az $M/G/1/1$ rendszer.) Módosítsuk a **8.2.** Feladatban definiált modellt azzal, hogy a kiszolgálási idő nem feltétlenül exponenciális, hanem általános eloszlású változó $\nu > 0$ várható értékkel, továbbá a vevők nem hajlandóak várakozni, hanem csak akkor térnek be a rendszerbe, ha az üres. Mutassuk meg, hogy a rendszer hosszútávon az időnek $1/(1 + \lambda\nu)$ hányadában üres.
- b. (Az $M/G/1/\infty$ rendszer.) Módosítsuk a **8.2.** Feladatban definiált modellt azzal, hogy a kiszolgálási idő nem feltétlenül exponenciális, hanem általános eloszlású változó $\nu \in (0, 1/\lambda)$ várható értékkel, de a rendszer mérete továbbra is végtelen. Mutassuk meg, hogy a rendszer hosszútávon az időnek $1 - \lambda\nu$ hányadában üres.
- c. Igaz-e az **a.** és **b.** pont állítása, ha a vevők nem exponenciális, hanem egy általános S eloszlás által meghatározott időközönként érkeznek? (Természetesen továbbra is $E(S) = 1/\lambda$.)
- 8.7.** (Az $M/M/3/\infty$ rendszer.) Egy benzinkútnál 3 töltőfej üzemel. A vevők 20 óránkénti intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek a kúthoz. Egy-egy tankolás exponenciális ideig, átlagosan 6 percig tart.
- a. Az időnek mekkora hányadában áll pontosan n autó a kútnál?
- b. Átlagosan hány autó áll a kútnál? Mekkora az átlagos sorhossz? Mennyi az átlagos várakozási idő és az átlagos rendszerben töltött idő?
- c. Mi történik akkor, ha elromlik az egyik töltőfej?
- 8.8.** Módosítsuk a **8.7.** Feladatot azzal, hogy az autósok nem térnek be a kúthoz, ha azt látják, hogy nincsen szabad töltőfej.
- a. Válaszoljunk a **8.7.** Feladat kérdéseire ezzel a módosítással.
- b. Óránként átlagosan hány autós tér be a kúthoz?
- 8.9.** Egy terráriumban három hörcsög él, melyek egymástól függetlenül alszanak illetve vannak ébren. Órákban kifejezve minden hörcsög 3 várható értékű exponenciális ideig alszik, és $1/4$ paraméterű exponenciális ideig van ébren. Az időnek mekkora részében van mindhárom hörcsög ébren? Adjuk meg az ébren lévő hörcsögök átlagos számát.
- 8.10.** Egy gyárban öt darab őskori gép üzemel, melyek külön-külön és egymástól függetlenül 2 óra várható értékű exponenciális ideig működnek, majd leállnak. A karbantartást két szakí végzi, akik exponenciális eloszlású idő, átlagosan 1 óra alatt

tudnak megjavítani egy elromlott masinát. Egy gépen egyszerre csak egy szerelő tud dolgozni.

- a. Az idő mekkora hányadában dolgozik mindkét szerelő?
- b. Átlagosan hány gép van üzemben kívül? Átlagban hány gépen dolgoznak a szerelők, és hány vár javításra? Átlagosan mennyi ideig áll egy-egy gép?
- c. A munkások órabére 500 forint, és egy gépnek egy órányi kiesése 500 forint bevételkiesést okoz. Mennyi az átlagos óránkénti költsége az üzemnek?
- d. Érdemes-e felvenni még egy szerelőt 500 forintos órabérré?

8.11. Egy autópálya építkezésen 100 ezer köbméter földet kell megmozgatni. A földet rakodógép rakja fel a teherautókra, melyek elviszik azt a kívánt helyre. Csupán egy rakodógépünk van, ennek óránkénti költsége 20 ezer forint. Teherkocsit tetszőleges számban bérelhetünk óránként 8 ezer forintért, és egy-egy autóra 20 köbméter föld fér. A rakodógép átlagosan 12 perc alatt pakol meg egy kocsit, az autók átlagosan 10 perc alatt szállítják el a földet és térnek vissza. Ezek az idők mind függetlenek egymástól és exponenciális eloszlást követnek.

- a. Három teherautót bérelve mennyi a földmunkák időtartama és költsége?
- b. Hány teherautót kell bérelni, ha minimalizálni akarjuk a földmunkák időtartamát? Hányat akkor, ha a teljes költséget akarjuk minimalizálni?

8.12. Egy autószerelő műhelyben két szerelőállomás van, és egy-egy autó javítása exponenciális ideig, átlagosan 12 óráig tart. A javítandó autók exponenciális időközökkel érkeznek, naponta átlagosan 2. Sajnos a szerelőállomások egymás mögött helyezkednek el, és a belső állomásról csak úgy lehet egy autót kivinni, ha a külső állomáson nincsen autó. A külső állomás esetében nincs semmiféle akadály. A műhely udvarán tetszőlegesen sok szerelésre váró autó elfér. Ha egy autó úgy érkezik, hogy a műhely üres, akkor azt a belső szerelőállásra viszik be.

- a. Modellizzük Markov-lánccal a rendszer viselkedését, és ábrázoljuk az intenzitási diagrammot.
- b. Naponta átlagosan hány autót tudnak megszerelni a műhelyben? Mennyi az átlagos rendszerméret és az átlagos rendszerben töltött idő?

8.13. Egy boltban két pénztár áll egymás mellett, melyek exponenciális idő, átlagosan 1 perc alatt szolgálnak ki egy vevőt. A vevők szintén exponenciális időközönként, átlagosan 1 percenként érkeznek a pénztárakhoz. Tekintsük a következő eseteket:

- a. A vevők egy sorban állnak be a két pénztárhoz.
- b. A vevők két sorban állnak be a két pénztárhoz, az érkező vevők mindig a rövidebb sorba állnak be, és a vevők a hosszabb sorból mindig átállnak a rövidebb sorba.

- c. A vevők két sorban állnak be a két pénztárhoz, az érkező vevők mindig a rövidebb sorba állnak be, de ezek után a sorok között már nincsen átjárás.
- d. A két pénztár a bolt két távoli pontján van, az egyes vevők 0,5-0,5 valószínűséggel mennek az egyes pénztárakhoz, és a sorok között nincsen átjárás.

Minden esetben modellezzük a rendszert egy Markov-lánc segítségével, ábrázoljuk az intenzitási diagrammot. Amennyiben tudjuk, határozzuk meg az átlagos rendszer méretet.

- 8.14.** Módosítsuk a **7.8.** Feladatot azzal, hogy az irodához érkező vevők mindig betérnek, függetlenül attól, hogy már hányan váraкоznak odabenn. Válaszoljunk a feladat kérdéseire ezzel a módosítással.

9. A sztochasztikus folyamatok általános elmélete

- 9.1.** Adjunk példát olyan \mathbb{X} és \mathbb{Y} sztochasztikus folyamatra, hogy \mathbb{X} és \mathbb{Y} egymás modifikációja legyen, (és ezáltal azonos eloszlásúak legyenek,) az \mathbb{X} folyamat mintafolytonos legyen, de az \mathbb{Y} folyamat 1 valószínűséggel sehol se legyen folytonos.
- 9.2.** Bizonyítsuk be, hogy a $\psi : \mathbb{R}^{[0,1]} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sup_{0 \leq t \leq 1} x(t)$ leképezés nem mérhető. (Tipp: Definiáljunk egy olyan $\mathbb{X} = \{X_t : t \in [0,1]\}$ sztochasztikus folyamatot, hogy a

$$\psi(\mathbb{X}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \sup_{0 \leq t \leq 1} X_t(\omega),$$

függvény ne legyen mérhető.)