

1. feladatsor – Permutációk

1.1. Feladat. Írjuk fel az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \\ \text{(b)} \quad \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \\ \text{(c)} \quad \gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.2. Feladat. Adjuk meg a következő S_7 -beli, páronként idegen ciklusok szorzataként előállított permutációkat kétsoros írásmódban:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \delta &= (1\,3\,6)(2\,7\,5\,4); \\ \text{(b)} \quad \varepsilon &= (1\,7)(2\,6)(3\,4\,5); \\ \text{(c)} \quad \eta &= (1\,5\,4\,2\,7\,3). \end{aligned}$$

1.3. Feladat. Adjuk meg a következő S_6 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad &(1\,2\,4\,3)(1\,5\,2\,3); \\ \text{(b)} \quad &(1\,2\,3\,4)(3\,4\,6\,1); \\ \text{(c)} \quad &(1\,2\,3)(4\,5)(1\,2\,5\,4\,6); \\ \text{(d)} \quad &(1\,3\,4\,2)(5\,6)(1\,4\,3\,2). \end{aligned}$$

1.4. Feladat. Az 1.1. és az 1.2 feladatban bevezetett jelöléseket felhasználva adjuk meg az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$\text{(a)} \quad \alpha\beta; \quad \text{(b)} \quad \beta\alpha; \quad \text{(c)} \quad (\beta\alpha)^{-1}; \quad \text{(d)} \quad \beta^2; \quad \text{(e)} \quad \beta^{2013}; \quad \text{(f)} \quad \alpha^8; \quad \text{(g)} \quad \varepsilon\eta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1}.$$

1.5. Feladat. Adjuk meg a következő S_9 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad &((1\,2\,3)(4\,5))^{15}; \\ \text{(b)} \quad &((1\,2\,3\,4\,6)(7\,8))^{-1}; \\ \text{(c)} \quad &((1\,2\,3\,4)(5\,7\,8))^{26}; \\ \text{(d)} \quad &((1\,2\,4)^5(1\,3\,4))^{-4}; \\ \text{(e)} \quad &((1\,2\,4\,3)^{-6}(1\,5\,4)^{13})^{-4}; \\ \text{(f)} \quad &\left(((1\,3\,4\,6)(2\,5\,7\,9\,8))^{-1} ((1\,7\,6)(2\,8\,4)(3\,9))^2 (1\,3\,4\,6)(2\,5\,7\,9\,8) \right)^{109}; \\ \text{(g)} \quad &\left((1\,5\,4\,3\,7\,2)^9 ((2\,9\,3)(4\,5\,2\,7))^{120} (4\,8\,1) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

1.6. Feladat. Keressük meg azokat a $\sigma \in S_8$ permutációkat, amelyekre teljesülnek a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad &(1\,5\,3)\sigma(6\,2\,1)(4\,1\,3) = (3\,1\,5); \\ \text{(b)} \quad &((1\,2\,3\,4)(7\,3\,8))^3 \sigma(3\,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1}; \\ \text{(c)} \quad &(2\,4\,3\,6)^{14}\sigma(1\,2\,3\,5)^{-9} = (1\,4\,2\,3)^{12}. \end{aligned}$$

1.7. Feladat. Döntsük el, hogy az első két feladatban bevezetett $\alpha, \dots, \eta \in S_7$ permutációk, valamint a segítségükkel megadott alábbi permutációk párosak vagy páratlanok:

$$(a) \ (\eta^{-1} \delta^{112})^{111}; \quad (b) \ (\varepsilon \gamma \alpha)^{-1} (\beta^{-1} \delta \eta^9)^2.$$

1.8. Feladat. Hány olyan $\sigma \in S_6$ permutáció van, amelyre

- (a) $|M_\sigma| = 0$;
- (b) $|M_\sigma| = 1$;
- (c) $|M_\sigma| = 2$;
- (d) $|M_\sigma| = 3$;
- (e) $|M_\sigma| = 4$;
- (f) $|M_\sigma| = 5$;
- (g) $|M_\sigma| = 6$.

1.9. Feladat. Hányféleképpen táncolhat 6 házaspár úgy, hogy senki sem táncol a saját házastársával?

1. feladatsor – Permutációk MEGOLDÁSOK

1.1. Feladat. Felbontás páronként idegen ciklusok szorzatára:

- (a) $\alpha = (1\ 7)(2\ 4\ 3)(5\ 6)$;
- (b) $\beta = (2\ 6\ 3\ 5\ 4)$;
- (c) $\gamma = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 7)$.

1.2. Feladat. A permutációk kétsoros alakja:

- (a) $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;
- (b) $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- (c) $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

1.3. Feladat. Páronként idegen ciklusok szorzataként:

- (a) $(1\ 3\ 5\ 2\ 4)$;
- (b) $(1\ 2\ 4\ 3\ 6)$;
- (c) $(1\ 5\ 6)(2\ 3)$;
- (d) $(1\ 2\ 4)(5\ 6)$.

1.4. Feladat. A műveletek eredménye:

- (a) $\alpha\beta = (1\ 7)(3\ 6\ 4\ 5)$;
- (b) $\beta\alpha = (1\ 7)(2\ 5\ 3\ 6)$;
- (c) $(\beta\alpha)^{-1} = (1\ 7)(6\ 3\ 5\ 2)$;
- (d) $\beta^2 = (2\ 3\ 4\ 6\ 5)$;
- (e) $\beta^{2013} = (5\ 6\ 4\ 3\ 2)$;
- (f) $\alpha^8 = (2\ 3\ 4)$;
- (g) $\varepsilon\eta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1} = (1\ 3\ 6\ 7\ 4\ 5)$.

1.5. Feladat. A műveletek eredménye:

- (a) $(4\ 5)$;
- (b) $(8\ 7)(6\ 4\ 3\ 2\ 1)$;
- (c) $(1\ 3)(2\ 4)(5\ 8\ 7)$;
- (d) $(2\ 4\ 3)$;
- (e) id_{S_9} ;
- (f) $(6\ 2\ 5)(1\ 9\ 3)$;
- (g) $(8\ 2\ 4\ 3\ 1)(5\ 7)$.

1.6. Feladat. Permutációegyenletek megoldása:

- (a) $\sigma = (1\ 4\ 3\ 2\ 6)$
- (b) $\sigma = (1\ 8\ 3\ 7\ 6\ 4)(2\ 5)$
- (c) $\sigma = (1\ 2\ 5)(4\ 6)$

1.7. Feladat. A megadott permutációk paritása:

páros: $\alpha, \beta, \varepsilon$

páratlan: $\gamma, \delta, \eta, (a), (b)$

1.8. Feladat. Összeszámlálás:

- (a) $|M_\sigma| = 0$: 1 darab;
- (b) $|M_\sigma| = 1$: 0 darab;
- (c) $|M_\sigma| = 2$: 15 darab;
- (d) $|M_\sigma| = 3$: 40 darab;
- (e) $|M_\sigma| = 4$: 135 darab;
- (f) $|M_\sigma| = 5$: 264 darab;
- (g) $|M_\sigma| = 6$: 265 darab.

1.9. Feladat. Lásd 1.8.(g) feladat megoldása.

2. feladatsor – Rang, alterek

2.1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss eliminációval:

$$(a) \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{rrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -5 \end{array}$$

$$(d) \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array}$$

$$(e) \quad \begin{array}{rrcr} & & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & 8 \end{array}$$

$$(f) \quad \begin{array}{rrcr} & & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 & + & 11x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

$$(g) \quad \begin{array}{rrcr} x_1 & - & 3x_2 & & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ -3x_1 & + & 9x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

2.2. Feladat. Döntsük el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben. Határozzuk meg a vektorrendszerek rangját.

- (a) $V = \mathbb{R}^3$; $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (1, 1, 0)$;
 (b) $V = \mathbb{R}^3$; $v_1 = (1, -2, 4), v_2 = (2, -3, 1), v_3 = (-4, 5, 5)$;
 (c) $V = \mathbb{R}^4$; $v_1 = (1, -2, 3, 4), v_2 = (0, -3, 1, 2), v_3 = (2, -4, 5, 9)$;
 (d) $V = \mathbb{Z}_3^4$; $v_1 = (\bar{2}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}), v_2 = (\bar{2}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{2}), v_3 = (\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{1})$;
 (e) $V = \mathbb{Z}_5^4$; $v_1 = (\bar{4}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{3}), v_2 = (\bar{4}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}), v_3 = (\bar{3}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{2}),$
 $v_4 = (\bar{4}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{0}).$

2.3. Feladat. Határozzuk meg a következő valós mátrixok rangját, valamint adjunk meg a mátrixokban maximális méretű nemelfajuló (nem nulla) aldeterminánst.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

2.4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi, $\mathbb{Z}_5$ feletti mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} \end{pmatrix}.$$

2.5. Feladat. Tekintsük az alábbi V vektortereket. Soroljuk fel az U alterek elemeit.

- (a) $V = \mathbb{Z}_2^3$; $U = [(\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})]$;
- (b) $V = \mathbb{Z}_3^3$; $U = [(\bar{1}, \bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}, \bar{1})]$;
- (c) $V = \mathbb{Z}_3^3$; $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 + x_3 = \bar{0}, x_1 + \bar{2}x_2 = \bar{0}\}$;
- (d) $V = \mathbb{Z}_3^4$; $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + \bar{2}x_4 = \bar{0}, \bar{2}x_1 + x_3 + x_4 = \bar{0}\}$.

2.6. Feladat. Adjuk meg az alábbi v vektorok koordinátasorát a $\mathbb{Z}_2^3$ vektortér

$$(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0})$$

bázisában.

- (a) $v = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$;
- (b) $v = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1})$.

2.7. Feladat. Határozzuk meg a V vektortér U alterének dimenzióját és egy bázisát.

- (a) $V = \mathbb{R}^4$; $U = [(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)]$;
- (b) $V = \mathbb{R}^4$; $U = [(1, 2, 4, 1), (-2, -4, -5, -3), (-1, -2, -7, 0), (1, 2, -2, 3)]$;
- (c) $V = \mathbb{Z}_5^4$; $U = [(\bar{1}, \bar{4}, \bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{2})]$.

2.8. Feladat. Adjuk meg a V vektortér U alterét generátorrendszer segítségével. Határozzuk meg U dimenzióját.

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - x_3 = 0\}$;
- (b) $V = \mathbb{Z}_5^3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) : \bar{2}x_1 + \bar{4}x_3 = \bar{0}, x_1 + x_2 = \bar{0}\}$;
- (c) $V = \mathbb{Z}_3^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 = \bar{0}, x_2 + x_3 + x_4 = \bar{0}\}$;
- (d) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
- (e) $V = \mathbb{R}^4$; $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 2x_2, x_3 = x_1 + x_2\}$;
- (f) $V = \mathbb{R}^4$; $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 3x_2 + x_3\}$;
- (g) $V = \mathbb{Z}_3^4$; $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + \bar{2}x_4 = \bar{0}, \bar{2}x_1 + x_3 + x_4 = \bar{0}\}$.

2.9. Feladat. Adjuk meg a V vektortérben a megadott vektorok által kifeszített alteret homogén lineáris egyenletrendszer segítségével.

- (a) $V = \mathbb{R}^3$; $u = (1, 1, 1)$, $v = (-2, 2, -2)$, $w = (3, -1, 3)$;
- (b) $V = \mathbb{R}^3$; $u = (-1, -1, -1)$, $v = (-2, 2, -2)$, $w = (0, -1, 3)$;
- (c) $V = \mathbb{R}^4$; $u = (2, 2, -2, 4)$, $v = (-4, -5, 6, -5)$;
- (d) $V = \mathbb{Z}_5^4$; $u = (\bar{1}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{4})$, $v = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{2})$, $w = (\bar{2}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$;
- (e) $V = \mathbb{Z}_3^5$; $u = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{1})$, $v = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{2})$, $w = (\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0})$.

2.10. Feladat. Határozzuk meg a V vektorterek alábbi U_1 és U_2 alterei esetén az $U_1 + U_2$ és az $U_1 \cap U_2$ alterek dimenzióját, bázisát.

- (a) $V = \mathbb{R}^4$; $U_1 = [(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1)]$, $U_2 = [(2, 1, 0, -1), (1, -1, 3, 7)]$;

- (b) $V = \mathbb{R}^4$; $U_1 = [(1, 2, 1, 3), (0, -2, 3, -1)]$,
 $U_2 = [(0, 2, -3, 1), (0, -2, 4, -4), (0, -6, 11, -9)]$;
- (c) $V = \mathbb{R}^4$; $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
 $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0, x_3 = 2x_4\}$;
- (d) $V = \mathbb{R}^4$; $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_2 - 2x_3 = 0\}$,
 $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_2 - 4x_3 = 0, 3x_3 + x_4 = 0\}$;
- (e) $V = \mathbb{Z}_3^4$; $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 + x_4 = \bar{0}, \bar{2}x_1 + \bar{2}x_3 = \bar{0}\}$,
 $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + \bar{2}x_4 = \bar{0}\}$;
- (f) $V = \mathbb{Z}_3^5$; $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + \bar{2}x_3 = \bar{0}, x_1 + x_2 + x_4 = \bar{0}, x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_5 = \bar{0}\}$, $U_2 = [(\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0})]$;
- (g) $V = \mathbb{Z}_5^4$; $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 = \bar{0}, x_1 + 4x_2 = \bar{0}, x_2 + \bar{2}x_3 = \bar{0}\}$, $U_2 = [(\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{3}), (\bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{3})]$.

2.11. Feladat. A V vektortér és U_1, U_2 altereinek megadott dimenziói esetén határozzuk meg az $U_1 + U_2$ és az $U_1 \cap U_2$ alterek dimenziójának összes lehetséges értékét.

- (a) $\dim V = 6, \quad \dim U_1 = 5, \quad \dim U_2 = 3$;
(b) $\dim V = 5, \quad \dim U_1 = 4, \quad \dim U_2 = 3$;
(c) $\dim V = 10, \quad \dim U_1 = 5, \quad \dim U_2 = 2$.

2. feladatsor – Rang, alterek MEGOLDÁSOK

2.1. Feladat. Megoldások:

- (a) $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = -1$,
vektor alakban: $(2, -3, -1)$;
- (b) nincs megoldás;
- (c) $x_4 = 1, x_1 = 2x_2 - x_3, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,
vektor alakban: $(2x_2 - x_3, x_2, x_3, 1), x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
- (d) $x_1 = 17 - 3x_2 + 3x_4, x_3 = 4 + x_4, x_2, x_4 \in \mathbb{R}$,
vektor alakban: $(17 - 3x_2 + 3x_4, x_2, 4 + x_4, x_4), x_2, x_4 \in \mathbb{R}$
- (e) nincs megoldás;
- (f) $x_1 = 4 - 7x_4, x_3 = 2 - 4x_4, x_2, x_4 \in \mathbb{R}$,
vektor alakban: $(4 - 7x_4, x_2, 2 - 4x_4, x_4), x_2, x_4 \in \mathbb{R}$;
- (g) $x_1 = -\frac{14}{3} + 3x_2, x_3 = \frac{31}{3}, x_4 = \frac{17}{6}, x_2 \in \mathbb{R}$,
vektor alakban: $(-\frac{14}{3} + 3x_2, x_2, \frac{31}{3}, \frac{17}{6}), x_2 \in \mathbb{R}$.

2.2. Feladat. Rang, lineáris függetlenség

- (a) $r = 3$, lineárisan független;
- (b) $r = 2$, lineárisan függő;
- (c) $r = 3$, lineárisan független;
- (d) $r = 2$, lineárisan függő;
- (e) $r = 2$, lineárisan függő.

2.3. Feladat. Rang, maximális nemeltűnő aldetemináns:

- (a) $r = 2, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;
- (b) $r = 3, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;
- (c) $r = 1$, tetszőleges nem nulla elemből álló 1×1 -es mátrix determinánása megfelelő.

2.4. Feladat. $r = 3$.

2.5. Feladat. Az U alterek elemei:

- (a) $U = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0})\}$;
- (b) $U = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1})\}$;
- (c) $U = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2}, \bar{1})\}$;
- (d) $U = \{(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{2})\}$.

2.6. Feladat. Előállítások és koordinátasorok:

- (a) $(\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{1}, \bar{0})$, koordinátasora: $(\bar{0}, \bar{1}, \bar{1})$;

- (b) $(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) + (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$, koordinátasora: $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{0})$.

2.7. Feladat. Dimenziók és bázisok:

- (a) $\dim U = 3$, bázis: $(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)$;
 (b) $\dim U = 2$, bázis: $(1, 2, 4, 1), (0, 0, 3, -1)$;
 (c) $\dim U = 2$, bázis: $(\bar{1}, \bar{4}, \bar{2}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{2})$.

2.8. Feladat. Az U alterek és dimenziójuk:

- (a) $U = [(1, 0, 2), (0, 1, 0)]$, $\dim U = 2$;
 (b) $U = [(\bar{4}, \bar{1}, \bar{3})]$, $\dim U = 1$;
 (c) $U = [(\bar{1}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{1})]$, $\dim U = 2$;
 (d) $U = [(1, -1, 0, 1)]$, $\dim U = 1$;
 (e) $U = [(2, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 1)]$, $\dim U = 2$;
 (f) $U = [(3, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$, $\dim U = 3$;
 (g) $U = [(\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1})]$, $\dim U = 2$.

2.9. Feladat. Az alterek:

- (a) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_3\}$;
 (b) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$;
 (c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, -5x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\}$;
 (d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_4 = 2x_2\}$;
 (e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3 + x_4 = \bar{0}, \bar{2}x_2 + x_3 + x_5 = \bar{0}\}$.

2.10. Feladat. Az $U_1 + U_2$ és $U_1 \cap U_2$ alterek dimenziói, bázisai:

- (a) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(1, 2, 1, 0), (0, 3, 2, 1), (0, 0, 1, 2)$
 $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(2, 1, 0, -1)$;
 (b) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(1, 2, 1, 3), (0, -2, 3, -1), (0, 0, 1, -3)$
 $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(0, 2, -3, 1)$;
 (c) $\dim(U_1 + U_2) = 4$, bázis: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$
 $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(3, -3, 2, 1)$;
 (d) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 2, 1, 0)$
 $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(-3, 2, 1, -3)$;
 (e) $\dim(U_1 + U_2) = 4$, bázis: $(\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1})$
 $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{1})$;
 (f) $\dim(U_1 + U_2) = 5$, bázis: $(\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}),$
 $(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1})$
 $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$;
 (g) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1})$
 $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{1})$.

2.11. Feladat. A V vektortér és U_1, U_2 altereinek megadott dimenziói esetén határozzuk meg az $U_1 + U_2$ és az $U_1 \cap U_2$ alterek dimenziójának összes lehetséges értékét.

- (a) $\dim(U_1 + U_2) = 6, \dim(U_1 \cap U_2) = 2,$
 $\dim(U_1 + U_2) = 5, \dim(U_1 \cap U_2) = 3$;
 (b) $\dim(U_1 + U_2) = 5, \dim(U_1 \cap U_2) = 2,$
 $\dim(U_1 + U_2) = 4, \dim(U_1 \cap U_2) = 3$;
 (c) $\dim(U_1 + U_2) = 7, \dim(U_1 \cap U_2) = 0,$
 $\dim(U_1 + U_2) = 6, \dim(U_1 \cap U_2) = 1,$
 $\dim(U_1 + U_2) = 5, \dim(U_1 \cap U_2) = 2$.

3. feladatsor – Lineáris leképezések

3.1. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében tekintsük a következő transzformációkat. Döntsük el, hogy lineáris transzformációk-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magjukat, képterüket és azok dimenzióját, bázisát.

- (a) eltolás az $(1, 1)$ vektorral;
- (b) tükrözés az y tengelyre;
- (c) tükrözés az $x = -1$ egyenesre;
- (d) merőleges vetítés az x tengelyre;
- (e) origó középpontú 2 paraméterű nyújtás;
- (f) $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
- (g) merőleges vetítés az $y = x$ egyenesre;
- (h) tükrözés az $y = x$ egyenesre;
- (i) $5\pi/3$ szögű forgatás az origó körül.

3.2. Feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a standard bázisban megadott mátrixát.

- (a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$;
- (b) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y)$;
- (c) $\varphi: \mathbb{Z}_3^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3, (x, y) \mapsto (x + \bar{2}y, x + y, \bar{2}x)$;
- (d) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x - y, y + 1, x + z)$.

3.3. Feladat. Határozzuk meg a következő φ lineáris transzformációk mátrixát a megadott $\mathcal{E}$ bázisban. Számítsuk ki a v vektor φ melletti képének koordinátáit ebben a bázisban.

- (a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, -y)$,
 $\mathcal{E}: (2, 1), (-1, 0), \quad v = (-1, 1)$;
- (b) $\varphi: \mathbb{Z}_3^2 \rightarrow \mathbb{Z}_3^2, (x, y) \mapsto (x + \bar{2}y, \bar{2}x)$,
 $\mathcal{E}: (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}), \quad v = (\bar{2}, \bar{0})$;
- (c) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (2x - y, x + y, 3x - 2y - z)$,
 $\mathcal{E}: (2, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1), \quad v = (2, 2, 0)$;
- (d) $\varphi: \mathbb{Z}_3^3 \rightarrow \mathbb{Z}_3^3, (x, y, z) \mapsto (\bar{2}x + y, x + y, y + \bar{2}z)$,
 $\mathcal{E}: (\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{1}, \bar{1}), \quad v = (\bar{2}, \bar{1}, \bar{2})$.

3.4. Feladat. Tekintsük a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett alábbi φ és ψ lineáris transzformációkat. Határozzuk meg a $\varphi + \psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi - 3\psi$ lineáris transzformációkat.

- (a) φ az x -tengelyre, ψ az y -tengelyre vonatkozó tükrözés;
- (b) φ az x -tengelyre, ψ az y -tengelyre vonatkozó merőleges vetítés;
- (c) φ az identikus transzformáció, ψ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás;
- (d) φ az origó körüli $\pi/3$ szögű, ψ az origó körüli $-\pi/3$ szögű forgatás.

3.5. Feladat. Döntse el, hogy az u , illetve v vektor sajátvektora-e a valós A mátrixnak:

- (a) $u = (1, -2, 3), v = (2, 0, -1), A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$$(b) \ u = (1, -4, 0, 2), \ v = (2, 0, -1, 3), \ A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 10 & 21 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.6. Feladat. Döntse el, hogy λ sajátértéke-e a valós A mátrixnak:

$$(a) \ \lambda = -3, \ A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & -9 & 14 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(b) \ \lambda = 2, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

3.7. Feladat. Legyen a V vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A . Határozzuk meg a lineáris transzformációk karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátaltérben.

$$(a) \ V = \mathbb{R}^2; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(b) \ V = \mathbb{R}^2; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(c) \ V = \mathbb{C}^2; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d) \ V = \mathbb{Z}_3^2; \quad A = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix};$$

$$(e) \ V = \mathbb{R}^3; \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(f) \ V = \mathbb{R}^3; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 19 & 5 \end{pmatrix};$$

$$(g) \ V = \mathbb{Z}_3^3; \quad A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

3.8. Feladat. Határozzuk meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében értelmezett következő lineáris transzformációk sajátértékeit, valamint a sajátaltér egy bázisát.

- (a) identikus transzformáció;
- (b) zérus transzformáció;
- (c) tükrözés az x tengelyre;
- (d) merőleges vetítés az y tengelyre;
- (e) $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül.

3. feladatsor – Lineáris leképezések MEGOLDÁSOK

3.1. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében tekintsük a következő transzformációkat. Döntsük el, hogy lineáris transzformációk-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magjukat, képterüket és azok dimenzióját, bázisát.

- (a) nem lineáris
- (b) $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0)\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, egy bázisa: $(0, 1), (1, 0)$.
- (c) nem lineáris
- (d) $\text{Ker } \varphi = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 1$, egy bázisa: $(0, 2)$. $\text{Im } \varphi = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 1$, egy bázisa: $(1, 0)$.
- (e) $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0)\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, egy bázisa: $(0, 1), (1, 3)$.
- (f) $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0)\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, egy bázisa: $(1, 1), (\pi, 0)$.
- (g) $\text{Ker } \varphi = \{(a, b) : a + b = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 1$, egy bázisa: $(1, -1)$. $\text{Im } \varphi = \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 1$, egy bázisa: $(1, 1)$.
- (h) $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0)\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, egy bázisa: $(2, 1/2), (-1, 2)$.
- (i) $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0)\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, egy bázisa: $(-1, 1), (3, 3)$.

3.2. Feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a standard bázisban megadott mátrixát.

- (a) Nem lineáris
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$
- (d) Nem lineáris

3.3. Feladat. Határozzuk meg a következő φ lineáris transzformációk mátrixát a megadott $\mathcal{E}$ bázisban. Számítsuk ki a v vektor φ melletti képének koordinátáit ebben a bázisban.

- (a) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (-1, -1)$
- (b) $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, (\bar{1}, \bar{0})$
- (c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1/2 & -1 & 2 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (1, 3, 1)$
- (d) $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix}, (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1})$

3.4. Feladat. Tekintsük a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett alábbi φ és ψ lineáris transzformációkat. Határozzuk meg a $\varphi + \psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi - 3\psi$ lineáris transzformációkat.

- (a) $\varphi + \psi$ a zérus transzformáció (azaz bármely vektor képe az origó), $\varphi\psi$ az origóra vonatkozó középpontos tükrözés, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.
- (b) $\varphi + \psi$ az identikus transzformáció, $\varphi\psi$ a zérus transzformáció, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
- (c) $\varphi + \psi$ $\pi/4$ -gyel való forgatás és $\sqrt{2}$ -szörös nyújtás, $\varphi\psi$ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (d) $\varphi + \psi$ és $\varphi\psi$ is az identikus transzformáció, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3.5. Feladat. Döntse el, hogy az u , illetve v vektor sajátvektora-e az A mátrixnak:

- (a) u sajátvektor, v nem;
- (b) u és v sajátvektor.

3.6. Feladat. Döntse el, hogy λ sajátértéke-e az A mátrixnak:

- (a) igen;
- (b) nem.

3.7. Feladat. Legyen a V vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A . Határozzuk meg a lineáris transzformációk karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátalterekben.

- (a) A karakterisztikus polinom $x^2 - 3x$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $0, (1, 1); 3, (-2, 1)$.
- (b) A karakterisztikus polinom $x^2 - 2x + 3$, nincs valós sajátérték
- (c) A karakterisztikus polinom $x^2 - 2x + 3$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $1 + \sqrt{2}i, (-i/\sqrt{2}, 1); 1 - \sqrt{2}i, (i/\sqrt{2}, 1)$
- (d) A karakterisztikus polinom $x^2 + x + \bar{1}$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $\bar{1}, (\bar{1}, \bar{1})$.
- (e) A karakterisztikus polinom $(x - 3)^2(x + 1)$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $3, (-1, 1, 0), (-1, 0, 1); -1, (0, 1, -5)$.
- (f) A karakterisztikus polinom $-(x + 3)^2(x - 9)$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $-3, (0, 1, 0); 9, (2, -1, -2)$.
- (g) A karakterisztikus polinom $(\bar{2} - x)(x^2 + x + \bar{1})$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátalterek egy bázisa: $\bar{1}, (\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}); \bar{2}, (\bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$.

3.8. Feladat. Határozzuk meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében értelmezett következő lineáris transzformációk sajátértékeit, valamint a sajátalterek egy bázisát.

- (a) Sajátértéke az 1, bázis a sajátaltérben: $(1, 0), (0, 1)$.
- (b) Sajátértéke a 0, bázis a sajátaltérben: $(1, 0), (0, 1)$
- (c) Sajátértékek és bázisok: $1, (1, 0), -1, (0, 1)$.
- (d) Sajátértékek és bázisok: $1, (0, 1), 0, (1, 0)$.
- (e) Nincs (valós) sajátérték.

4. feladatsor – Kvadratikus alakok, Euklideszi terek

4.1. Feladat. Melyek bilineárisak az alábbi leképezések közül? Ha leképezés bilineáris, akkor adjuk meg a mátrixát a standard bázisban. Ha a leképezés szimmetrikus bilineáris leképezés, akkor adjuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot is.

- (a) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_2 y_2$;
- (b) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3$;
- (c) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_1 y_1$;
- (d) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 x_2$;
- (e) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$;
- (f) $\ell : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \ell((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_2 - 2x_3 y_2$.

4.2. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra az $\mathbb{R}^n$ vektortéren értelmezett valós kvadratikus alakokat, és határozzuk meg az osztályukat (pozitív/negatív (sze-mi)definit, stb.)

- (a) $n = 2, x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2$;
- (b) $n = 2, -4x_1^2 + 4x_1 x_2 - 4x_2^2$;
- (c) $n = 3, -4x_1^2 + 4x_1 x_2 - 4x_2^2$;
- (d) $n = 3, 8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3$;
- (e) $n = 3, x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1 x_2 - 4x_2 x_3$;
- (f) $n = 3, 2x_1 x_3 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3$.

4.3. Feladat. Keressünk az alábbi A szimmetrikus mátrixokhoz olyan S nemelfajuló mátrixot, amelyre SAS^T diagonális.

- (a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$;
- (b) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$;
- (c) $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$;
- (d) $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{3} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3 \times 3}$.

4.4. Feladat. Határozzuk meg az u vektor v vektorra vett merőleges vetületét a megadott $v, u \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén.

- (a) $n = 2, v = (11, 0), u = (4, 3)$;
- (b) $n = 2, v = (10, 10), u = (1, 7)$;
- (c) $n = 2, v = (1, -2), u = (-3, 2)$;
- (d) $n = 3, v = (0, 6, 0), u = (-4, 2, -3)$;
- (e) $n = 3, v = (5, 2, -1), u = (1, -1, 3)$;
- (f) $n = 3, v = (2, 3, -1), u = (-4, 14, 6)$;
- (g) $n = 4, v = (2, 1, 1, 1), u = (1, 2, 3, 0)$.

4.5. Feladat. Hajtsuk végre a Gram-Schmidt-ortogonalizációt a következő lineárisan független $\mathbb{R}^n$ -beli vektorrendszereken! (Normáljunk is!)

- (a) $n = 2$, $(4, 4)$, $(0, 4)$;
- (b) $n = 3$, $(2, 3, -1)$, $(-4, 14, 6)$;
- (c) $n = 3$, $(1, 0, 0)$, $(2, 3, 0)$, $(1, 6, 1)$;
- (d) $n = 3$, $(1, 6, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(2, 3, 0)$;
- (e) $n = 3$, $(1, 0, -1)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 4, 1)$;
- (f) $n = 4$, $(1, 1, -1, 1)$, $(0, 3, 0, 1)$, $(0, -3, 0, 7)$.

4.6. Feladat. Legyen a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A . Adjunk meg az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térnek egy, a φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát.

- (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. feladatsor – Kvadratikus alakok, Euklideszi terek MEGOLDÁSOK

4.1. Feladat. Bilineáris-e l ? Ha igen, adjuk meg mátrixát. Ha szimmetrikus, a hozzá tartozó q kvadratikus alakot is adjuk meg.

- (a) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, szimmetrikus, $q = x_2^2$;
- (b) nem bilineáris;
- (c) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nem szimmetrikus;
- (d) nem bilineáris;
- (e) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, szimmetrikus, $q = x_1^2 + x_2^2$;
- (f) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4.2. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra, határozzuk meg az osztályát.

- (a) y_1^2 , pozitív szemidefinit;
- (b) $-4y_1^2 - 3y_2^2$, negatív definit;
- (c) $-4y_1^2 - 3y_2^2$, negatív szemidefinit;
- (d) $8y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2$, pozitív szemidefinit;
- (e) $y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$, pozitív definit;
- (f) $2y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$, indefinit.

4.3. Feladat. Keressünk olyan S -t, amire SAS^T diagonális.

- (a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$;
- (b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$;
- (c) $S = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$;
- (d) Pl.: $S = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3 \times 3}$. (Minden $\begin{pmatrix} \overline{1+2a} & \bar{a} & \overline{4a} \\ \overline{2b} & \bar{b} & \overline{1+4b} \\ \overline{2c} & \bar{c} & \overline{4c} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3 \times 3}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ alakú mátrix jó.)

4.4. Feladat. Határozzuk meg az u vektor v vektorra vett merőleges vetületét.

- (a) $(4, 0)$;
- (b) $(4, 4)$;
- (c) $(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5})$;
- (d) $(0, 2, 0)$;
- (e) $(0, 0, 0)$;
- (f) $(4, 6, -2)$;
- (g) $(2, 1, 1, 1)$.

4.5. Feladat. Hajtsuk végre a megadott vektorrendszeren a Gram-Schmidt algoritmust. (Ezek a vektorrendszerek már normáltak is.)

- (a) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2});$
- (b) $(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}});$
- (c) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1);$
- (d) $(\frac{1}{\sqrt{38}}, \frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}), (\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{38}}, -3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{703}}, -\frac{1}{\sqrt{1406}}), (0, \frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{-6}{\sqrt{37}});$
- (e) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}});$
- (f) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0), (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}).$

4.6. Feladat. Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ egy sajátvektorokból álló ortonormált bázisát.

- (a) $(0, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
(a transzformáció sajátértékei: $1, 1, 3$);
- (b) $(0, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
(a transzformáció sajátértékei: $3, 3, -1$).

5. feladatsor – Polinomok

5.1. Feladat. Határozzuk meg a f és a g polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmus segítségével a megadott polinomgyűrűben.

- (a) $f = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $g = 2x^3 - x^2 - 4x - 1$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (b) $f = -x^4 - 4x^3 + 34x^2 + 76x - 105$, $g = x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 7$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (c) $f = x^8 - \bar{1}$, $g = x^6 - \bar{1}$, $\mathbb{Z}_{13}[x]$;
- (d) $f = \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + x^2 + x + \bar{2}$, $g = \bar{2}x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_5[x]$.

5.2. Feladat. Határozzuk meg az $f = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ és a $g = x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 12$ racionális együtthatós polinomok közös gyökeit, majd ennek felhasználásával az f és g összes gyökét.

5.3. Feladat. Oldjuk meg az u, v ismeretlen polinomokra az alábbi egyenleteket a megadott polinomgyűrűben.

- (a) $(x^2 - 2x - 3)u + (x^2 + 2x - 15)v = x^2 - 3x$, $\mathbb{R}[x]$;
- (b) $(x^5 + x^4 + x^3 + \bar{1})u + (x^4 + \bar{1})v = x^2 + \bar{1}$, $\mathbb{Z}_2[x]$;
- (c) $(x^4 + x^3 + x + \bar{1})u + (x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1})v = x^2 + x$, $\mathbb{Z}_5[x]$;
- (d) $(x^5 + x + \bar{2})u + (x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1})v = x^3 + x^2 + \bar{2}$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

5.4. Feladat. Határozzuk meg, hogy hány-szoros gyöke az f polinomnak a c szám a megadott polinomgyűrűben, majd ennek segítségével alakítsuk szorzattá az f polinomot.

- (a) $f = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 12x + 9$, $c = 3$, $\mathbb{Q}[x]$;
- (b) $f = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54$, $c = 3$, $\mathbb{R}[x]$;
- (c) $f = x^5 - 3ix^4 - 5x^3 + 7ix^2 + 6x - 2i$, $c = i$, $\mathbb{C}[x]$;
- (d) $f = x^4 + \bar{2}x^3 + x + \bar{2}$, $c = \bar{2}$, $\mathbb{Z}_3[x]$.

5.5. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok komplex gyökeit.

- (a) $x^4 + 16$;
- (b) $x^3 - 8$;
- (c) $x^4 - i$;
- (d) $x^6 - 64$;
- (e) $x^3 + 8i$;
- (f) $x^4 + 1 + \sqrt{3}i$.

5.6. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok irreducibilis felbontását a $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

- (a) $x^5 + x^3 - 6x$;
- (b) $x^3 - 8$;
- (c) $x^5 + 8x^2$;
- (d) $x^4 - 25$;
- (e) $x^6 - 27$;
- (f) $x^6 - 2x^4 - 8x^2$.

5.7. Feladat. Határozzuk meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és irreducibilis felbontásukat $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

- (a) $f = x^3 - x^2 - x - 2$;
- (b) $f = 2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$;

(c) $f = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 8x - 4$.

5.8. Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

(a) $f = 2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12$;

(b) $f = 41x^{41} - 30x^{30} + 20x^{20} - 10$;

(c) $f = 5x^4 + 22x - 11$.

5. feladatsor – Polinomok MEGOLDÁSOK

5.1. Feladat. Az f és a g polinomok legnagyobb közös osztója a megadott polinomgyűrűkben.

- (a) $x + 1$;
- (b) $x^2 + 6x - 7$;
- (c) $x^2 - \bar{1}$;
- (d) $\bar{2}x^2 + \bar{1}$.

5.2. Feladat. Az $f = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ és a $g = x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 12$ racionális együtthatós polinomok közös gyökei, majd ennek felhasználásával az f és g összes gyöke.

$\lnko(f, g) = x^2 - 4$, közös gyökök: $2, -2$, $f = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 3)$,
 $g = (x - 2)(x + 2)(x^2 + x + 3)$.

5.3. Feladat. Az egyenletek megoldása.

- (a) Egy megoldás: $u_0 = -\frac{1}{4}x$, $v_0 = \frac{1}{4}x$,
általános: $u = -\frac{1}{4}x + (x + 5)t$, $v = \frac{1}{4}x - (x + 1)t$, $t \in \mathbb{R}[x]$;
- (b) Egy megoldás: $u_0 = x$, $v_0 = x^2 + x + 1$,
általános: $u = x + (x^2 + 1)t$, $v = x^2 + x + 1 + (x^3 + x^2 + 1)t$, $t \in \mathbb{Z}_2[x]$;
- (c) Egy megoldás: $u_0 = 3x$, $v_0 = 2x^2 + 3x$,
általános: $u = 3x + (3x^2 + 3x + 3)t$, $v = 2x^2 + 3x + (2x^3 + 2)t$,
 $t \in \mathbb{Z}_5[x]$;
- (d) Egy megoldás: $u_0 = 1$, $v_0 = 2x$,
általános: $u = 1 + (x + 2)t$, $v = 2x + (2x^2 + x + 2)t$, $t \in \mathbb{Z}_3[x]$.

5.4. Feladat. Hányszoros gyöke az f polinomnak a c szám, majd ennek segítségével az f polinom szorzattá alakítása.

- (a) kétszeres; $(x - 3)^2(x^3 + 2x + 1)$;
- (b) háromszoros; $(x - 3)^3(x^2 + x - 2)$;
- (c) háromszoros; $(x - i)^3(x^2 - 2)$;
- (d) háromszoros; $(x - \bar{2})^3(x + \bar{2})$.

5.5. Feladat. A polinomok komplex gyökei:

- (a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$;
- (b) $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$;
- (c) $\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}$, $\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8}$, $\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}$;
- (d) $2, 1 + \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i, -2, -1 - \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$;
- (e) $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$;
- (f) $\sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$, $\sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$, $\sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$, $\sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$.

5.6. Feladat. A polinomok irreducibilis felbontása a $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

- (a) $x(x^2 + 3)(x^2 - 2)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $x(x^2 + 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $x(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ ($\mathbb{C}$ felett);
- (b) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $(x - 2)(x + 1 - i\sqrt{3})(x + 1 + i\sqrt{3})$;
- (c) $x^2(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $x^2(x + 2)(x - 1 + i\sqrt{3})(x - 1 - i\sqrt{3})$;

- (d) $(x^2 + 5)(x^2 - 5)$ ($\mathbb{Q}$ felett), $(x^2 + 5)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - i\sqrt{5})(x + i\sqrt{5})$ ($\mathbb{C}$ felett);
- (e) $(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9)$ ($\mathbb{Q}$ felett),
 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3)$ ($\mathbb{R}$ felett),
 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}+3i}{2})$;
- (f) $x^2(x+2)(x-2)(x^2+2)$ ($\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ felett), $x^2(x+2)(x-2)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$.

5.7. Feladat. A polinomok racionális gyökei és irreducibilis felbontásuk $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

- (a) Rac. gyök: 2, $(x - 2)(x^2 + x + 1)$;
- (b) Rac. gyök: $1/2$, $(x^2 + 1)(x^2 - 2)(2x - 1)$;
- (c) Rac. gyök: 1, $-1/2$, $2(x - 1)(2x + 1)(x^2 + 2x + 2)$.

5.8. Feladat. Az $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

- (a) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 3$;
- (b) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 2$ vagy $p = 5$;
- (c) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 11$.

6. feladatsor – Véges testek

6.1. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott T test, és ezen test feletti f polinom esetén $T[x]/\langle f \rangle$ testet alkot-e. Ha igen, határozzuk meg az így kapott test elemszámát, karakterisztikáját, prímtestét.

- (a) $T = \mathbb{Z}_2$, $f = x^2 + x + 1$;
- (b) $T = \mathbb{Z}_2$, $f = x^2 + 1$;
- (c) $T = \mathbb{Z}_3$, $f = x^2 + 1$;
- (d) $T = \mathbb{Z}_3$, $f = x^3 + 2x^2 + 2$;
- (e) $T = \mathbb{Z}_3$, $f = x^3 + 2x + 1$;
- (f) $T = \mathbb{Z}_2$, $f = x^4 + x^3 + 1$;
- (g) $T = \mathbb{Z}_2$, $f = x^4 + x^2 + 1$.

6.2. Feladat. Adjuk meg a $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2 \rangle$ test alábbi elemeit:

- (a) $\overline{x+2} + \overline{x^2+2x+1}$;
- (b) $\overline{x^2+2x+1} \cdot \overline{x+2}$;
- (c) $\overline{x^2+2x+1} \cdot \overline{x^2+2}$;
- (d) $\overline{x+2}^{-1}$.

6.3. Feladat. Végezzük el a műveleteket a megadott K véges testekben.

- (a) $K = \mathbb{Z}_{17}$; $16 \cdot 10$, 3^{-1} ;
- (b) $K = \mathbb{Z}_{19}$; $17 \cdot 9$, 6^{-1} ;
- (c) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + 1 \rangle$; $\overline{x^3+x+1} \cdot \overline{x^2+1}$, $\overline{x^3+x^2}^{-1}$;
- (d) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + 2x^2 + x + 1 \rangle$; $\overline{x^2+2x+1} \cdot \overline{x^2+2}$, $\overline{x^2+2x+1}^{-1}$;
- (e) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2x + 1 \rangle$; $\overline{x^2+x+1} \cdot \overline{x^2+2x}$, $\overline{x^2+x+1}^{-1}$.

6.4. Feladat. Határozzuk meg a K testben az α elem (multiplikatív) rendjét. Döntsük el, hogy primitív-e az adott elem a K testben.

- (a) $K = \mathbb{Z}_5$, $\alpha = 2$;
- (b) $K = \mathbb{Z}_7$, $\alpha = 4$;
- (c) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$, $\alpha = \overline{x+1}$;
- (d) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1 \rangle$, $\alpha = \overline{x^2+1}$;
- (e) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle$, $\alpha = \overline{x+1}$;
- (f) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + x + 2 \rangle$, $\alpha = \overline{x+1}$.

6.5. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha \in K$ elem minimálpolinomját.

- (a) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle$, $\alpha = \overline{x+1}$;
- (b) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x^2 + 1 \rangle$, $\alpha = \overline{x+1}$;
- (c) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + 1 \rangle$, $\alpha = \overline{x^2+1}$.

6. feladatsor – Véges testek MEGOLDÁSOK

6.1. Feladat. $T[x]/\langle f \rangle$ testet alkot-e. Ha igen, akkor a test elemszáma, karakterisztikája, prímteste.

- (a) igen (4 elem, $\text{char} = 2$, $\mathbb{Z}_2$);
- (b) nem (1 gyöke f -nek);
- (c) igen (9 elem, $\text{char} = 3$, $\mathbb{Z}_3$);
- (d) nem (2 gyöke f -nek);
- (e) igen (27 elem, $\text{char} = 3$, $\mathbb{Z}_3$);
- (f) igen (16 elem, $\text{char} = 2$, $\mathbb{Z}_2$);
- (g) nem ($x^2 + x + 1$ négyzete f).

6.2. Feladat. A $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + \bar{2} \rangle$ test keresett elemei:

- (a) $\bar{x}^2$;
- (b) $\bar{2x}$;
- (c) $\overline{2x^2 + 2x}$;
- (d) $\overline{2x^2 + x + 1}$.

6.3. Feladat. A műveletek eredménye.

- (a) szorzat: 7, inverz: 6;
- (b) szorzat: 1, inverz: 16;
- (c) Szorzat: $\overline{x^3 + x^2}$, inverz: $\bar{x}$;
- (d) Szorzat: $\overline{2x^2 + 2}$, inverz: $\overline{2x}$;
- (e) Szorzat: $\overline{2x^2 + 1}$, inverz: $\overline{x^2 + 1}$.

6.4. Feladat. Az α elem rendje. Primitív-e az adott elem a K testben.

- (a) Primitív elem (rend: 4);
- (b) Nem primitív elem (rend: 3);
- (c) Primitív elem (rend: 3);
- (d) Primitív elem (rend: 7);
- (e) Nem primitív elem (rend: 4);
- (f) Primitív elem (rend: 8).

6.5. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha \in K$ elem minimálpolinomját.

- (a) $y^2 + 1$;
- (b) $y^3 + y + 1$;
- (c) $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$.

7. feladatsor – Kódolás

7.1. Feladat. Határozzuk meg a $C \subseteq K^n$ blokk-kód minimális távolságát, továbbá azt, hogy hány hibajelző, illetve hibajavító. Döntsük el, hogy a C kód lineáris-e.

- (a) $C = \{000, 011, 101, 110\} \subseteq \mathbb{Z}_2^3$;
- (b) $C = \{0102, 1010, 0021, 2200\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$;
- (c) $C = \{0000, 0101, 1100, 1001\} \subseteq \mathbb{Z}_2^4$.

7.2. Feladat. Igazoljuk, hogy C lineáris kód. Határozzuk meg C információs rátáját. Adjunk meg egy C -vel ekvivalens D szisztematikus lineáris kódot. Adjuk meg D generátor- és ellenőrző mátrixát is.

- (a) $C = \{0000, 0011, 1101, 1110\} \subseteq \mathbb{Z}_2^4$;
- (b) $C = \{00000, 11110, 11011, 00101\} \subseteq \mathbb{Z}_2^5$;
- (c) $C = \{0000, 1201, 2110, 2102, 1220, 0011, 2121, 1212, 0022\} \subseteq \mathbb{Z}_3^4$.

7.3. Feladat. G egy szisztematikus lineáris kód generátormátrixa. Döntsük el, hogy v kódszó-e, ha nem, akkor adjuk meg a v -hez legközelebbi kódszót.

- (a) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2 \times 5}$, $v = 11111$;
- (b) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2 \times 6}$, $v = 211112$;
- (c) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 6}$, $v = 202010$.

7.4. Feladat. Adjuk meg a K test feletti n -hosszú Hamming-kód egy lehetséges P ellenőrző mátrixát, G generátormátrixát, valamint információs rátáját.

- (a) $K = \mathbb{Z}_2$, $n = 3$;
- (b) $K = \mathbb{Z}_2$, $n = 5$;
- (c) $K = \mathbb{Z}_2$, $n = 7$;
- (d) $K = \mathbb{Z}_3$, $n = 4$.

7.5. Feladat. Határozzuk meg az összes nemtriviális K test feletti n -hosszú ciklikus lineáris kódot.

- (a) $K = \mathbb{Z}_3$, $n = 3$;
- (b) $K = \mathbb{Z}_2$, $n = 4$.

7.6. Feladat. Tervezzünk a K test α eleme segítségével n -hosszú t -hibajelző BCH-kódot. Adjuk meg a kód generátormátrixát.

- (a) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 + x + 1 \rangle$, $\alpha = \overline{x+1}$, $n = 6$, $t = 2$;
- (b) $K = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4 + x + 1 \rangle$, $\alpha = \overline{x+1}$, $n = 11$, $t = 3$;
- (c) $K = \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + 2 \rangle$, $\alpha = \overline{x}$, $n = 8$, $t = 2$.

7. feladatsor – Kódolás MEGOLDÁSOK

7.1. Feladat. Meghatározzuk a C minimális távolságát, hány hibajelző ill. -javító. Lineáris-e?

- (a) 2 a minimális távolság, vagyis 1-hibajelző és 0-hibajavító. Lineáris;
- (b) 3 a minimális távolság, vagyis 2-hibajelző és 1-hibajavító. Nem lineáris (nincs benne a nullvektor);
- (c) 2 a minimális távolság, vagyis 1-hibajelző és 0-hibajavító. Lineáris.

7.2. Feladat. Igazoljuk, hogy lineáris. Megadjuk az információs rátáját, a hozzá tartozó szisztematikus kódot és annak ellenőrző- és generátormátrixát.

- (a) A linearitás igazolása: zárt az összeadásra (bármely két vektor összege eleme C -nek); $\mathbb{Z}_2$ felett a skalárral szorzást nem kell ellenőrizni; Információs ráta: $\frac{\log_2 4}{4} = \frac{1}{2}$. $D = \{0000, 1011, 0110, 1101\}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Információs ráta: $\frac{\log_2 4}{5} = \frac{2}{5}$. $D = \{00000, 10111, 01111, 11000\}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Információs ráta: $\frac{\log_3 9}{4} = \frac{1}{2}$.

$$D = \{0000, 1021, 2012, 0101, 0202, 1122, 2211, 1220, 2110\},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3. Feladat. Kódszó-e v , ha nem, megadjuk a legközelebbi kódszót.

- (a) Nem, mert $vP = 100$, ahol P az ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 11011.
- (b) Nem, mert $vP = 0020$ lesz a P ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 211122.
- (c) Nem, mert $vP = 012$ lesz a P ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 212010.

7.4. Feladat. Hamming-kód ellenőrző- és generátormátrixa, információs rátája.

- (a) $n = 3$ és $|K| = 2$ miatt $r = 2$, információs ráta $\frac{1}{3}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) $n = 5$ és $|K| = 2$ -höz r nem egész, így ilyen Hamming-kód NINCS.

- (c) $n = 7$ és $|K| = 2$ miatt $r = 3$, információs ráta $\frac{4}{7}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) $n = 4$ és $|K| = 3$ miatt $r = 2$, információs ráta $\frac{1}{2}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.5. Feladat. Meghatározzuk az összes n -hosszú ciklikus lineáris kódot.

- (a) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x + 2)(x^2 + x + 1)$, vagyis három ilyen kód van.

$$g_1 = x + 2\text{-re a kód generátormátrixa: } G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_2 = x^2 + x + 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_3 = 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C_3 = \mathbb{Z}_3^3).$$

- (b) $x^4 + 1 = (x + 1)^4$ miatt négy ilyen kód van.

$$g_1 = 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_1 = E_4 \quad (C_1 = \mathbb{Z}_2^4).$$

$$g_2 = x + 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_3 = x^2 + 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_4 = x^3 + x^2 + x + 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.6. Feladat. Megadjuk a BCH-kód generátormátrixát.

- (a) α (és α^2) minimálpolinomja $x^3 + x^2 + 1$, így

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

- (b) α (és α^2) minimálpolinomja $g_1 = g_2 = x^4 + x + 1$,

α^3 minimálpolinomja $g_3 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ($\text{lko}(g_1, g_3) = 1$), így

$$\text{lkt}(g_1, g_3) = g_1 g_3 = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

- (c) α minimálpolinomja $g_1 = x^3 + x^2 + 2$,

α^2 minimálpolinomja pedig $g_2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ ($\text{lko}(g_1, g_2) = 1$), így

$$\text{lkt}(g_1, g_2) = g_1 g_2 = x^6 + x^4 + x + 1$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$