Horner-módszer

Segédanyag *Diszkrét matematika III.* gyakorlathoz

A dokumentumban élünk a $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \{0, 1, 2\}$ jelölésbeli egyszerűsítéssel.

Feladat. Tekintsük a $p(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomot. Horner-módszer segítségével állapítsuk meg, hogy a 2 hányszoros gyöke p-nek. Ennek segítségével adjuk meg az irreducibilis felbontását.

Megoldás. Készítsük el a Horner-táblázatot:

	1	2	0	1	2	
2	1	1	2	2	0	$\to$ a 2 gyök, továbbá $p(x) = (x-2)(x^3 + x^2 + 2x + 2)$
2	1	0	2	0		$\to$ a 2 legalább kétszeres gyök, $p(x) = (x-2)^2(x^2+2)$
2	1	2	0			$\to$ a 2 legalább háromszoross gyök, $p(x) = (x-2)^3(x+2)$
2	1	1				$\to$ a 2 nem négyszeres gyök

A fejléc a polinom együtthatóit tartalmazza, az oldalléc a vizsgálandó értéket. A dupla vonaltól jobbra lévő oszlopba mindig végig a polinom főegyütthatója kerül (jelen esetben 1). A táblázat többi értékét úgy számoljuk, hogy az éppen kiszámolandó cella balszomszédját megszorozzuk az adott sor első elemével (=vizsgálandó érték, jelen esetben 2) és hozzáadjuk a (közvetlen) fölötte lévő elemet. Soronként fentről lefele, sorokon belül balról jobbra számolunk. Addig számolunk, amíg $\neq 0$ elemet kapunk egy sor végén. Annyiszoros gyök a vizsgált érték, ahány 0 végű sort kapunk (jelen esetben háromszoros). Még azt is kiolvashatjuk a táblázat megfelelő soraiból, hogy a megfelelő $x - \alpha$ (jelen esetben $x - 2$) hatványt mivel kell megszorozni, hogy $p(x)$-t kapjunk.
A táblázattal azt kaptuk tehát, hogy p polinomunkból az $x - 2$ polinomnak legfeljebb harmadik hatványa emelhető ki, méghozzá $p(x) = (x-2)^3(x+2) \overset{\mathbb{Z}_3}{=} (x+1)^3(x+2)$ módon. Mivel a maradék $x+2$ tényező elsőfokú, ezáltal irreducibilis, meg is kaptuk az irreducibilis felbontást. (Ha nem lenne irreducibilis, természetesen azt a részt még tovább kellene bontanunk.)

Utolsó frissítés: 2017.11.11.