Gram-Schmidt-ortogonalizációs eljárás

Segédanyag *Diszkrét matematika III.* gyakorlathoz, 2018 ősz

Legyenek $x = (x_1, \dots, x_n)$ és $y = (y_1, \dots, y_n)$ mindketten n-dimenziós vektorok, $\mathbb{R}^n$ elemei. Jelölje $\langle x, y\rangle$ a vektorok standard belső szorzatát, azaz legyen

$$\langle x, y\rangle = xy^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Például, ha $x = (1, 2, -3)$, $y = (5, -7, 10)$, akkor

$$\langle x, y\rangle = 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-7) + (-3) \cdot 10 = -39.$$

Az x és y vektorok akkor és csak akkor merőlegesek (ortogonálisak) egymásra, ha $\langle x, y\rangle = 0$. Például az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ vektorok köztudottan merőlegesek egymásra, és valóban

$$\langle (1, 0), (0, 1)\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

A Gram-Schmidt-ortogonalizációs eljárás célja: Adott egy $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer. Célunk egy olyan $u_1, \dots u_k$ $(k \le n)$ vektorrendszer előállítása, melynek tagjai egymásra merőlegesek (ortogonálisak) és $[v_1, \dots, v_n] = [u_1, \dots, u_k]$, azaz az u_i vektorok ugyanazt az alteret generálják, mint a v_i vektorok.

A két vektorrendszer elemszáma azért nem feltétlenül egyenlő $(k \le n)$, mert a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer nem feltétlen független, az algoritmussal kapott $u_1, \dots u_k$ viszont az lesz, így lehet kisebb elemszámú.

Az u vektor v-re vett merőleges vetületét jelölje $p_v(u)$. Ezt a

$$p_v(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v \tag{1}$$

képlettel tudjuk kiszámolni.

A fenti célt megvalósító ún. Gram-Schmidt-ortogonalizációs eljárás a következő számításokból áll:
$u_1 := v_1$
$u_2 := v_2 - p_{u_1}(v_2)$
$u_3 := v_3 - p_{u_1}(v_3) - p_{u_2}(v_3)$
$u_4 := v_4 - p_{u_1}(v_4) - p_{u_2}(v_4) - p_{u_3}(v_4)$
$\vdots$

$u_n := v_n - p_{u_1}(v_n) - p_{u_2}(v_n) - \cdots - p_{u_{n-1}}(v_n)$.
A számítás során természetesen használjuk az (1) képletet.
Vegyük észre, hogy látszólag a kapott $u_1, \ldots u_k$ vektorrendszer is n elemű. Ha azonban van olyan $1 \leq i \leq n$, melyre $v_i \in [v_1, \ldots, v_{i-1}]$, akkor $u_i = \underline{0}$-t fogunk kapni, és őt egyszerűen kihagyjuk az $u_1, \ldots u_k$-k közül. Ilyen módon csökkenhet a kapott vektorrendszer elemszáma.

Ha a feladat orto*normált* vektorrendszert kér, akkor a kapott vektorokat külön-külön elosztjuk a normájukkal, melyet az

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

képlettel kapunk.

1. Feladat. Hajtsuk végre a Gram-Schmidt-ortogonalizációt a következő lineárisan független vektorrendszereken! Normáljunk is!

(a) $(1, 0, 0),\ (2, 3, 0),\ (1, 6, 1)$

(b) $(1, 6, 1),\ (1, 0, 0),\ (2, 3, 0)$

Megoldás. Figyeljük meg, hogy a két vektorrendszer (sorrendtől eltekintve) ugyanaz. (Megjegyezzük, hogy a rendszerekben az elemeknek valójában nincs is sorrendje.) Tehát elegendő lenne az egyiket megoldanunk. Azonban ha a felírt sorrendekben haladunk az algoritmussal, megfigyelhetjük, hogy algoritmusunk nem ugyanazt a vektorrendszer adja, sőt, az egyik eset sokkal számolósabban alakul, mint a másik. Természetesen minden sorrendben kapott megoldás megfelelő célunk szempontjából. A megoldások tehát nem egyértelműek.

(a)
$u_1 = (1, 0, 0)$,
$u_2 = (2, 3, 0) - \frac{\langle (1,0,0),(2,3,0) \rangle}{\langle (1,0,0),(1,0,0) \rangle}(1, 0, 0) = (2, 3, 0) - \frac{2}{1}(1, 0, 0) = (0, 3, 0)$,
$u_3 = (1, 6, 1) - \frac{\langle (1,0,0),(1,6,1) \rangle}{\langle (1,0,0),(1,0,0) \rangle}(1, 0, 0) - \frac{\langle (0,3,0),(1,6,1) \rangle}{\langle (0,3,0),(0,3,0) \rangle}(0, 3, 0) = (1, 6, 1) - \frac{1}{1}(1, 0, 0) - \frac{18}{9}(0, 3, 0) = (0, 0, 1)$.

A normálás:
$\frac{(1,0,0)}{||(1,0,0)||} = \frac{(1,0,0)}{1} = (1, 0, 0)$,
$\frac{(0,3,0)}{||(0,3,0)||} = \frac{(0,3,0)}{3} = (0, 1, 0)$,
$\frac{(0,0,1)}{||(0,0,1)||} = \frac{(0,0,1)}{1} = (0, 0, 1)$.

(b)
$u_1 = (1, 6, 1)$,
$u_2 = (1, 0, 0) - \frac{\langle (1,6,1),(1,0,0) \rangle}{\langle (1,6,1),(1,6,1) \rangle}(1, 6, 1) = (1, 0, 0) - \frac{1}{38}(1, 6, 1) = (\frac{37}{38}, \frac{-6}{38}, \frac{-1}{38})$,
$u_3 = (2, 3, 0) - \frac{\langle (1,6,1),(2,3,0) \rangle}{\langle (1,6,1),(1,6,1) \rangle}(1, 6, 1) - \frac{\langle (\frac{37}{38}, \frac{-6}{38}, \frac{-1}{38}),(2,3,0) \rangle}{\langle (\frac{37}{38}, \frac{-6}{38}, \frac{-1}{38}),(\frac{37}{38}, \frac{-6}{38}, \frac{-1}{38}) \rangle}(\frac{37}{38}, \frac{-6}{38}, \frac{-1}{38}) = (2, 3, 0) - \frac{20}{38}(1, 6, 1) - \frac{\frac{28}{19}}{\frac{37}{38}}(\frac{37}{38}, \frac{-6}{38}, \frac{-1}{38}) = (2, 3, 0) - \frac{10}{19}(1, 6, 1) - \frac{56}{37}(\frac{37}{38}, \frac{-6}{38}, \frac{-1}{38}) = (2, 3, 0) - (\frac{10}{19}, \frac{60}{19}, \frac{10}{19}) - (\frac{28}{19}, -\frac{168}{703}, -\frac{28}{703}) = (0, \frac{3}{37}, -\frac{18}{37})$.

A normálás:
$\frac{(1,6,1)}{||(1,6,1)||} = \frac{(1,6,1)}{\sqrt{38}} = (\frac{1}{\sqrt{38}}, \frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}})$,

$$\frac{(\frac{37}{38},\frac{-6}{38},\frac{-1}{38})}{||(\frac{37}{38},\frac{-6}{38},\frac{-1}{38})||} = \frac{(\frac{37}{38},\frac{-6}{38},\frac{-1}{38})}{\sqrt{\frac{37}{38}}} = (\sqrt{\frac{37}{38}}, \frac{-6}{\sqrt{1406}}, \frac{-1}{\sqrt{1406}}),$$
$$\frac{(0,\frac{3}{37},-\frac{18}{37})}{||(0,\frac{3}{37},-\frac{18}{37})||} = \frac{(0,\frac{3}{37},-\frac{18}{37})}{\frac{3}{\sqrt{37}}} = (0, \frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{-6}{\sqrt{37}}).$$

$\square$