MTN113E: Vektorok

(előadásvázlat)

Kátai-Urbán Kamilla

1. Vektortér

1. Definíció. A V nemüres halmaz vektortér $\mathbb{R}$ felett (röviden valós vektortér) az $\oplus$ (összeadás) kétváltozós és $\lambda \odot$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ műveletekkel, ha

(1) az összeadás kommutatív: $\forall u, v \in V$ esetén $u + v = v + u$,
(2) az összeadás asszociatív: $\forall u, v, w \in V$ esetén $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(3) az összeadásnak van egységeleme: $\exists o \in V$ $\forall u \in V$-re, amelyre $o + u = u + o = u$,
(4) minden vektornak van additív inverze: $\forall u \in V$ $\exists u' \in V$, amelyre $u + u' = u' + u = o$,
(5) $\forall v \in V$ esetén $1 \cdot v = v$,
(6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$ estén $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$,
(7) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$ esetén $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,
(8) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$ esetén $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

2. Tétel. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett, ekkor teljesülnek a következők

(a) A V-n értelmezett összeadásra vonatkozóan pontosan egy egységelem van.
(b) Minden V-beli elemnek egyetlen additív inverze van.

3. Definíció. A vektortér egyértelműen meghatározott additív egységelemét zérusvektornak nevezzük, jele: $\underline{0}$.

4. Definíció. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett, $v_1, \ldots, v_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Ekkor a $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ vektort a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárokkal képzett lineáris kombinációjának nevezzük. Ha $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, akkor triviális lineáris kombinációról beszélünk.

5. Definíció. Az $\mathbb{R}$ feletti V vektortér $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszere lineárisan független, ha pontosan akkor teljesül, hogy $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \underline{0}$, ha $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, azaz csak a triviális lineáris kombináció állítja elő a $\underline{0}$-t. Különben a vektorrendszer lineárisan függő.

6. Tétel. Az $\mathbb{R}$ feletti V vektortér $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszere akkor és csak akkor lineárisan függő, ha van olyan v_i vektor $(1 \leq i \leq k)$, amely előáll a $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ vektorok lineáris kombinációjaként.

7. Tétel. Tetszőleges $\mathbb{R}$ feletti V vektortér esetén teljesülnek a következők:

(1) Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor a vektorrendszer is lineárisan függő.
(2) Lineárisan független vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan független.

8. Definíció. A vektorrendszerek elemi átalakításai a következők:

(1) Tetszőleges vektort helyettesíthetünk a nemnulla skalárszorosával.
(2) Tetszőleges vektort helyettesíthetünk a vektor és a vektorrendszerből egy másik vektor skalárszorosának összegével.
(3) Zérusvektort elhagyhatunk/hozzávehetünk a vektorrendszerből/hez.

9. Definíció. Két vektorrendszer ekvivalens, ha elemi átalakításokkal egymásból megkaphatók.

10. Megjegyzés. A mátrixok lépcsős alakra hozásakor alkalmazott elemi átalakítások a mátrix sorvektorrendszerének elemi átalakításainak felelnek meg.

11. Állítás. Legyen $u_1, \ldots, u_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. Tekintsük azt a mátrixot, amelynek sorvektorrendszere $u_1, \ldots, u_k$, majd elemi átalakításokkal hozzuk lépcsős alakra. Az így kapott mátrix nemnulla soraiból alkotott $\mathbb{R}^n$-beli vektorokat jelölje rendre $v_1, \ldots, v_l$. Ekkor teljesülnek a következők:

(1) a $v_1, \ldots, v_l$ vektorrendszer lineárisan független;
(2) ha $l < k$, akkor az $u_1, \ldots, u_k$ vektorrendszer lineárisan függő;

(3) ha $l = k$, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer lineárisan független.

12. Definíció. Vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszerének nevezzük egy olyan lineárisan független részrendszerét, amely már nem bővíthető tovább úgy, hogy a részrendszer lineárisan független maradjon.

13. Megjegyzés. Az $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszerből a következőképpen választható ki maximális lineárisan független részrendszer. Tekintsük azt a mátrixot, melynek sorvektorrendszere $u_1, \dots, u_k$, a sorokat jelöljük meg, majd hozzuk lépcsős alakra a mátrixot. Az így kapott mátrix nemnulla sorainak megfelelő eredeti vektorok maximális lineárisan független részrendszert alkotnak.

2. Euklideszi tér

14. Definíció. Legyen $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Az u, v vektorok standard belső szorzata (skaláris szorzata) a következő:

$$\langle u, v \rangle = uv^T = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

15. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ vektorteret a standard belső szorzattal euklideszi térnek nevezzük.

16. Definíció. Az $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor hosszán (normáján) az $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ nemnegatív valós számot értjük. Az u vektor normált, ha $||u|| = 1$.

17. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér tetszőleges nemzérus u, v vektora esetén létezik egy egyértelműen meghatározott $0 \leq \alpha \leq \pi$ szög, hogy

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||},$$

amelyet az u és v vektorok szögének nevezünk. Azt mondjuk, hogy az $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektorok merőlegesek (ortogonálisak), ha $\langle u, v \rangle = 0$.

18. Definíció. Az $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer ortogonális, ha bármely $1 \leq i < j \leq k$ esetén u_i, u_j merőlegesek. Ha az $u_1, \dots, u_k$ vektorok normáltak is, akkor ortonormált vektorrendszerről beszélünk.

19. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot ortogonális mátrixnak nevezzük, ha sorvektorrendszere ortonormált vektorrendszert alkot az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben.

20. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér tetszőleges u és $v (\neq \underline{0})$ vektora esetén az u vektor v vektorra vett merőleges vetületén az

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$$

vektort értjük. Ez a vektor egy egyenesbe esik a v-vel, és hosszúsága $||u|| \cdot \cos \alpha$, ahol α az u és v vektorok szöge.

21. Tétel (Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció). Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér tetszőleges $u_1, \dots, u_k$ lineárisan független vektorrenszere esetén van olyan $v_1, \dots, v_k$ ortogonális vektorrendszer, hogy a két vektorrendszer ekvivalens.

22. Megjegyzés. A Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció a következőképpen végezhető el:

(1) legyen a $v_1 = u_1$;
(2) a v_2 vektort úgy kapjuk, hogy vesszük az u_2 vektor merőleges vetületét a v_1 vektorra, majd ezt kivonjuk az u_2-ből: $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1$;
(3) hasonlóan kapjuk a v_3 vektort is: $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$;

a többi vektorra is a fenti eljárást alkalmazzuk.