

Algoritmuskélmélet és bonyolultságkélmélet feladatok
MSc hallgatók számára

Kupacok, Fibonacci

2018.

Előadó: Hajnal Péter

1. Feladat. *Egy pontú gyökeres fáink (1 pontú \equiv gyökere 0 rangú \equiv gyökere 0 gyerekekkel rendelkezik) vannak. Azonos rangú fákat olvasztunk egybe billentéssel. Így egyre bonyolultabb fákat kapunk. Rajzoljunk fel $r = 1, 2, 3, 4, 5$ esetére ilyen fákat.*

Igazoljuk, hogy az r rangú gyökeres fáink mind izomorfak.

Jelölés. Az előző feladatban nyert r rangú fák izomorfiatípusa legyen B_r . Ezeket a fákat binomiális fáknak nevezzük.

2. Feladat (folytatás). (i) *Hány csúcsa van B_r -nek?*

(ii) *Mi a mélysége B_r -nek?*

(iii) *Hány i -edik generációs csúcsa van B_r -nek? (Egy csúcs i -edik generációs, ha i távolságra van a gyökértől.)*

Definíció. Egy *elemi binomiális kupac* 2^r adat egy binomiális fa csúcsaiba rakva:

- (i) Kupac tulajdonság, azaz minden adat kulcsa legfeljebb akkora mint a leszármazottjai kulcsa.
- (ii) Minden adat/csúcs-ból egy pointer megy legkisebb rangú gyerekéhez.
- (iii) Minden adat/csúcs gyerekei rang szerint növekvő sorrendben körzserűen, duplán láncolva vannak.

Egy *binomiális kupac* különböző rangú elemi binomiális kupacok rang szerinti növekvő sorrendben láncolva egy listában.

3. Feladat. *n adatot egy binomiális kupacban tárolunk. Hány darab és milyen rangú fáink vannak?*

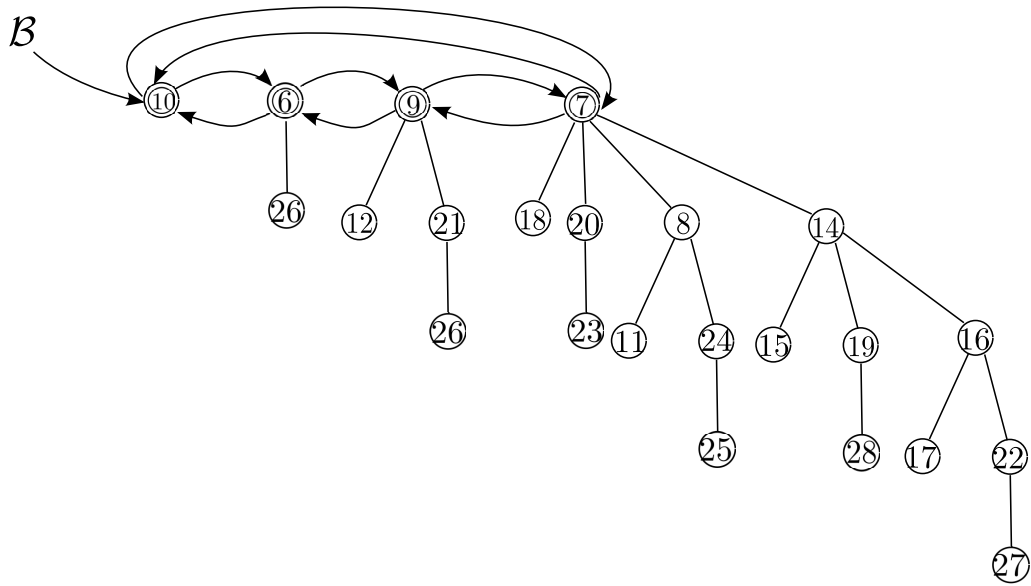
4. Feladat. *Tervezzünk algoritmust egy elem beszúrására egy binomiális kupacba. Analizáljuk az eljárásunkat.*

5. Feladat. *Tervezzünk algoritmust egy binomiális kupac legkisebb kulcsának meghatározására. Analizáljuk az eljárásunkat.*

6. Feladat. *Tervezzünk algoritmust egy binomiális kupac legkisebb kulcsú adatának törlésére. Analizáljuk az eljárásunkat.*

7. Feladat. *Tervezzünk algoritmust egy binomiális kupac egyik adatában a kulcs csökkentésére. Analizáljuk az eljárásunkat.*

8. Feladat. Vegyük az alábbi binomiális kupacot.



Végezzük el a $Beszúr(13)$ parancsot.

* * *

Definíció. *Ferde-kettes* számrendszernek nevezzük a következő helyiértékes számrendszert:

(i) A helyiértékek: $1, 3, 7, 15, 31, \dots, 2^\ell - 1, \dots$

(ii) A számjegyek halmaza $\{0, 1, 2\}$.

Például: 12010_{f_2} értéke $1 \cdot 31 + 2 \cdot 15 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 64$.

9. Feladat. (i) *Igazoljuk, hogy minden természetes szám felírható ferde-kettes számrendszerben.*

(ii) *Igazoljuk, hogy van olyan természetes szám, amely több féleképpen is felírható ferde-kettes számrendszerben.*

Definíció. Egy ferde-kettes szám *szabályos*, ha 2 számjegy után csak 0 számjegy(ek) jöhet(nek) (esetleg 2 az egyetlen 2-es számjegy az utolsó helyen). 1011200_{f_2} szabályos, 1011201_{f_2} és 10102020000_{f_2} nem szabályos.

10. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden természetes szám egyértelműen írható fel szabályos módon ferde-kettes számrendszerben.*

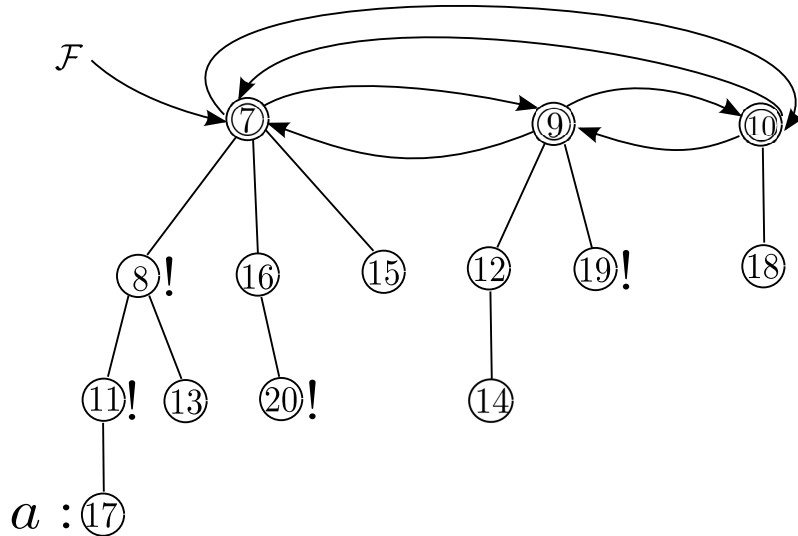
11. Feladat. *Adott egy n szám ferde-kettes számrendszerben felírva. Számoljuk ki $n + 1$ ferde-kettes számrendszerbeli alakját. Tervezzünk algoritmust és analizáljuk azt.*

12. Feladat. * *A binomiális kupacok megvalósítása és analízise nagyban használta a kettes számrendszert. Tervezzünk adatstruktúrát, amely hasonló filozófiát követ, de a fura-kettes számrendszeren alapul.*

* * *

13. Feladat. Induljunk ki egy üres Fibonacci kupacból és sorban hajtsuk végre az alábbi „szolgáltatásokat”: *Beszúr(27)*, *Beszúr(17)*, *Beszúr(19)*, *Beszúr(20)*, *Beszúr(24)*, *Beszúr(12)*, *Beszúr(11)*, *Beszúr(10)*, *Beszúr(14)*, *Beszúr(18)*, *MinTöröl*, *KulcsCsökkent(19, 6)*, *KulcsCsökkent(24,5)*, *MinTöröl*. Rajzoljuk fel a végül kialakuló Fibonacci kupacot.

14. Feladat. Vegyük a rajzon látható Fibonacci kupacot:



Végezzünk el *MinTöröl* algoritmust. Majd végezzük el a *KulcsCsökkent(a,10)* parancsot.

15. Feladat. Igaz-e, hogy egy Fibonacci-kupacban egy r rangú gyökér kupacának $\mathcal{O}(\log n)$ mélysége van? Válaszunkat indokoljuk.

16. Feladat. *Beszúr*, *MinTöröl*, *KulcsCsökkent* utasítások sorozatával építsünk fel egy Fibonacci-kupacot, amely egyetlen gyökeret tartalmaz, amely kupaca egy végpontjában gyökereztetett út.

* * *

Definíció. Legyen $\mathcal{F}_0 = 1, \mathcal{F}_1 = 2$, és $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$ (amennyiben $n \geq 2$) összefüggéssel megadott sorozat.

Legyen $F_0 = 1, F_1 = 1$, és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (amennyiben $n \geq 2$) összefüggéssel megadott sorozat.

Legyen $f_0 = 0, f_1 = 1$, és $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (amennyiben $n \geq 2$) összefüggéssel megadott sorozat.

17. Feladat. Igazoljuk, hogy

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-2} + \dots + \mathcal{F}_0 + 2.$$

18. Feladat. Igazoljuk, hogy a következő összeszámlálási kérdésekre \mathcal{F}_n a válasz:

- (i) Hányféleképpen színezhető ki egy n szintes torony szintjei piros/kék színnel, ha két szomszédos szint nem lehet egyszerre piros?
- (ii) Igazoljuk az előző feladat azonosságát ezen értelmezés alapján kombinatorikus módon.

19. Feladat. Igazoljuk, hogy a következő összeszámlálási kérdésekre F_n a válasz:

- (i) Hányféleképpen fedhető le egy $2 \times n$ méretű tábla mezői n darab dominóval, ahol egy dominó alakja két szomszédos mező téglalapja.
- (ii) Hányféleképpen fedhető le egy $1 \times n$ méretű tábla mezői dominókkal és 1×1 méretű négyzetekkel, ahol egy dominó alakja két szomszédos mező téglalapja.
- (ii)' Hányféleképpen írható fel az n szám 1 és 2 tagok összegeként? (A tagok sorrendje számít!)
- (ii)'' Hányféleképpen mehetünk fel egy n fokú lépcső tetejére (alúlról), ha minden lépésünkkel egy vagy két fokot mehetünk fel?

20. Feladat. Igazoljuk, hogy a következő összeszámlálási kérdésekre f_n a válasz:

- (i) Hányféleképpen írható fel n páratlan számok összegeként? (A tagok sorrendje számít!)
- (i)' Hány n hosszú 0-1 sorozat van, amely 0-val kezdődik és 0/1 blokkokra osztásában minden blokk páratlan hosszú?
- (ii) Hány n hosszú s sorozatot építhetünk fel az 1, 2, 3, 4 számokból úgy, hogy a sorozat 1-gyel kezdődjön és a szomszédos elemek között 1 különbség legyen?

21. Feladat. Hány n hosszú s sorozatot építhetünk fel az 1, 2, 3, 4 számokból úgy, hogy a sorozat 1-gyel kezdődjön, 1-gyel vagy 4-gyel végződjön és a szomszédos elemek között 1 különbség legyen?