Algoritmuselmélet és bonyolultságelmélet MSc hallgatók számára

Javított folyamok algoritmusok

2018. Előadó: Hajnal Péter

1. Edmonds—Karp-algoritmus

Ford és Fulkerson javító út keresése egy kissé más nyelven is leírható.

Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy hálózat ($\overrightarrow{G}$ jelölje $\mathcal{H}$ gráfját, s a forrás, t a nyelő, c a kapacitásfüggvény) és benne egy f folyam. Definiálunk egy maradék (reziduális) $\mathcal{R}$ hálózatot. $\mathcal{R}$ forrás és nyelője ugyanaz mint $\mathcal{H}$-ban. A $\mathcal{R}$ gráfja legyen $\overrightarrow{G}_r$. Ennek csúcshalmaza $V(\overrightarrow{G})$, a forrás/nyelő pár ugyanaz, s/t. $\overrightarrow{G}_r$ éleit és kapacitásait a követekezőképpen kapjuk: Minden olyan $e = \overrightarrow{uv} \in E(\overrightarrow{G})$ élre a következőt végezzük el:

(i) Ha $0 < f(e) < c(e)$, akkor felveszünk egy $e_r^+ = \overrightarrow{uv}$ élet $c(e) - f(e)$ kapacitással, továbbá felveszünk egy $e_r^- = \overrightarrow{vu}$ élet $f(e)$ kapacitással.

(ii) Ha $0 = f(e) < c(e)$, akkor felveszünk egy $e_r^+ = \overrightarrow{uv}$ élet $c(e) - f(e)$ kapacitással.

(iii) Ha $0 < f(e) = c(e)$, akkor felveszünk egy $e_r^- = \overrightarrow{vu}$ élet $f(e)$ kapacitással.

Észrevétel. Az f folyam $\overrightarrow{G}$-beli javító útjai és a $\overrightarrow{G}_r$-beli irányított st utak között egy nyilvánvaló bijekció van.

Valóban, egy $\overrightarrow{G}$-beli J javító út esetén az $e \in E_{\text{előre}}(J)$ élekre az e_r^+ éleket, míg a $e \in E_{\text{hátra}}(J)$ élekre az e_r^- éleket véve egy irányított utat kapunk $\overrightarrow{G}_r$-ben. Fordítva: Legyen $\overrightarrow{P}$ egy irányított st út $\overrightarrow{G}_r$-ben. Ekkor minden e_r^ε élére véve ($e \in E(\overrightarrow{G})$, $\varepsilon \in \{+, -\}$) élre véve az e „ős élt” egy javító út élhalmazát kapjuk.

Ford és Fulkerson esetén is definiálhattuk volna ezt a gráfot és ebben irányított utat kereshettünk volna. Ford és Fulkerson keresése „naív” volt. A

$$B_{\text{előre}} = \{x \in V \backslash S : \text{van olyan } y \in S, \text{ hogy } \overrightarrow{yx} \in E \text{ és } f(\overrightarrow{yx}) < c(\overrightarrow{yx})\},$$

illetve

$$B_{\text{hátra}} = \{x \in V \backslash S : \text{van olyan } y \in S, \text{ hogy } \overrightarrow{xy} \in E \text{ és } f(\overrightarrow{xy}) > 0\}$$

halmazok azon csúcsokat tartalmazzák, amelyekkel egy már megtalált javító út kezdemény tovább növelhető. Ezek most az S-ből kivezető reziduális élek. Ezen halmazok első megtalált eleménél az algoritmus update-elte az S halmazt és továbblépett.

Karp és Edmonds ötlete a szélességi keresés logikáján alapul. Módosítsuk a javítóút keresést a szélessségi keresés filozófiája szerint. Az így kapott algoritmus a Ford—Fulkerson-algoritmus Edmonds—Karp-változata.

Edmonds—Karp javító út keresése: Adott egy $\mathcal{H}$ hálózat és benne egy f folyam.

(R) `Reziduális gráf felépítése:` Építsük fel a $\overrightarrow{G}_r$ reziduális gráfot.

(I) `Iniciálizálás:` Legyen $S_0 = \{s\}$, $i = 0$,
// $S = S_0 \cup \ldots \cup S_i$, azon csúcsok halmaza ahová találtunk javító út kezdeményt.

(B) `Bővítés:` Legyen S_{i+1} azon csúcsok halmaza, amelyekbe vezet irányított él S_i-ből.

- Ha $t \in S_{i+1}$, akkor találtunk egy irányított st utat a reziduális gráfban, azaz találtunk egy javító utat.
- Ha $S_{i+1} = \emptyset$, akkor a keresés sikertelen.
- Ha $t \notin S_{i+1} \neq \emptyset$, akkor $i \leftarrow i + 1$ és vissza (B)-hez.

Ha sikertelen a keresés, akkor a kifulladáskori S halmazból nem lép ki él és $t \notin S$. Azaz nincs is $\overrightarrow{st}$ út.

Az S_i halmazoknak a következő tulajdonság nagyon fontos lesz:

($\star$) Minden $\overrightarrow{xy} \in E(\overrightarrow{G})$, $x \in S_i$, $x \in S_j$ esetén $j \leq i + 1$.

Ez a változat ($\star$) miatt garantálja, hogy a legrövidebb javító utat találjuk meg. A fenti keresés elvezet Edmonds—Karp-algoritmushoz, ami a Ford—Fulkerson struktúra szerint optimális folyamot keres. Azonban pontos valós aritmetika feltételezése mellett ciklizálhat.

Edmonds és Karp hozzájárulása az volt, hogy észrevették, ha a legrövidebb javító úttal dolgoznak, akkor a javítások száma becsülhető a hálózat alapgráfjának paramétereivel. A becslésük a csúcs- és pontszám polinomiális függvénye lesz. A fenti polinomiális jelző az „elméletileg hatékonynak tekintendő” matematikusok által elfogadott formalizálása.

A továbbiakban feltesszük, hogy Edmonds és Karp keresése sikeres. Ami miatt aggódunk az az, hogy sokszor lesz sikeres keresés és sok közbülső folyam vezet el az optimálishoz. Egyetlen egyszer lesz sikertelen a keresés. Ez az aktuálsi folyam optimális mivoltját igazolja. A sikertelen keresés „költsége” miatt nem kell aggódnunk.

Definíció. Tegyük fel, hogy sikeres a keresés és $t \in S_\ell$. $\overrightarrow{G}_r^0$ legyen az a részgráf a reziduális gráfban, amely csúcsai $S_0^0 \cup S_1^0 \cup S_2^0 \cup \ldots S_\ell^0$, ahol S_i^0 az S halmaz azon csúcsai, amelyen áthalad legrövidebb javító út, továbbá élei a legrövidebb javító utak élei. Így $S_0^0 = \{s\}$, $S_\ell^0 = \{t\}$, $\overrightarrow{G}_r^0$ összes éle valamelyik S_i^0-ből indul és S_{i+1}^0-be vezet és ℓ a legrövidebb javító út hossza.

Az S_i^0 halmazokat szinteknek nevezzük. $\overrightarrow{G}_r^0$ egy szintezett gráf. Minden legrövidebb javító út csúcsai a $S_0^0 \to S_1^0 \to S_3^0 \to \ldots \to S_\ell^0$ szinteket követik.

$\overrightarrow{G}_r^0$ meghatározása egyszerű. Ha $t \in S_\ell$ bekövetkezik, akkor egy „visszahaladó” szélességi kereséssel ki tudjuk tisztítani az S_i halmazokat úgy, hogy csak azok a csúcsok maradjanak meg amin keresztül megy egy legrövidebb javító út. Legyen S_i^0 azon csúcsok halmaza S_i-ből amelybe vezető i hosszú javító út kezdemény t-be folytatható úgy, hogy egy legrövidebb javító út legyen. A meghatározás költsége $\mathcal{O}(|E| + |V|)$, ami $\mathcal{O}(|E|)$, ha G összefüggő (G az alapgráf irányítását elfelejtve kapott irányítatlan gráf).

Az Edmonds—Karp-algoritmus futását fázisokra osztjuk. Analízisünk a fázisokra bontott algoritmus struktúráját használja.

Definíció. A futás első javítása megnyitja az első fázist. Minden további javítás esetén megnézzük, hogy megtalált legrövidebb javító út hossza megegyezik-e az előző javítás során talált legrövidebb javító út hosszával. Ha igen, akkor a fázist folytatjuk. Ha a hosszban változás áll be, akkor az aktuális fázis az előző javítással véget ért, az új javítás egy új fázist kezd.

1. Tétel (Edmonds—Karp). *(i) Az egymást követő fázisok folyamán a legrövidebb javító út hossza nő.*

(ii) Egy fázison belül $\overrightarrow{G}_r^0$ élhalmaza csökken.

Először kimondunk egy nyilvánvaló következményt.

2. Következmény. *Az Emonds—Karp-algoritmus futása legfeljebb $|V|$ fázisból áll. Minden fázis legfeljebb $|E|$ javítást tartalmaz. Azaz az algoritmus legfeljebb $|V| \cdot |E|$ javítás után megtalál egy optimális folyamot.*

Speciálisan az Edmonds—Karp-algoritmus futási ideje $|V||E|\mathcal{O}(|E| + |V|) = \mathcal{O}(|V||E|^2)$.

A következmény nyilvánvaló hiszen $|V| \cdot |E|$-szer kell megtalálni egy javító utat és javítani. Ez utóbbi feladat-pár $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(|E|)$ lépésben elvégezhető (feltesszük, hogy alaphálózatunk összefüggő).

A tétel bizonyítása: (i): Egy javítás alatt találunk egy javító utat. Ennek csúcssorozata $v_0 = s, v_1 \in S_i^0, \ldots, v_{\ell-1} \in S_{\ell-1}^0, v_\ell = t$. Ez egy irányított út lesz $\overrightarrow{G}_r^0$-ban. Kiszámoljuk δ-t és az út minden élén megváltoztatjuk az ott folyó anyagmennyiséget. δ-t úgy választottuk meg, hogy valamelyik élen a folyó anyagmennyiség eléri a kapacitást, vagy lenullázódik. Az ilyen él(ek) az új $\overrightarrow{G}_r$ reziduális gráfban már nem szerepelnek. Azaz az új $\overrightarrow{G}_r^0$ sem tartalmazhatja az ilyen éleket. Ez a veszteség az eredeti $\overrightarrow{G}_r^0$ egy éle.

Más változás még az lehet, hogy egy a javító úton szerepelt él (amely $\overrightarrow{G}_r^0$-hez hozzájárult) mellé ellentétes irányban megjelenik egy új él. Ez történik, ha egy 0 anyagmennyiségű élen megjelenik valamennyi anyag. Vagy egy kapacitásnyi anyagmennyiséget szállító élen lecsökken az anyagmennyiség. Egy él mellett egy ellentétes irányú él megjelenése után is teljesül a ($\star$) tulajdonság az új $\overrightarrow{G}_r$ gráfra a régi $S_0, S_1, \ldots$ halmazokkal. Így a legrövidebb $\overrightarrow{st}$ út hossza nem lehet ℓ-nél kisebb ($t \in S_\ell$, ℓ a korábbi legrövidebb javító út hossza), azaz nem csökkenhet.

(ii): A reziduális gráfban megjelenő ellentétes él a fentiek miatt egy S_{i+1}-ből S_i-be vezető él lehet csak, ahol $i + 1 \leq \ell$ (ahol $t \in S_\ell$). Ez garantálja, hogy az új $\overrightarrow{G}_r^0$ gráf nem tartalmazhat más élt mint a korábbi. Sőt az élfogyás is szükségszerű δ választása miatt (lásd fenn). ∎

2. Dinic-algoritmus

Láttuk, hogy a szélességi kereséssel ($\mathcal{O}(|E| + |V|) = \mathcal{O}(|E|)$ lépésben) kiszámolhatunk egy $\overrightarrow{G}_r^0$ gráfot. Ebben ott van az összes legrövidebb $\overrightarrow{st}$ út, sőt egy csak $\mathcal{O}(|V|)$ lépéssel kiolvasható a $\overrightarrow{G}_r^0$ gráfból. Edmonds és Karp a széleségi keresés egy egyszerű változatát futtatott: címkézett, amíg t címkét nem kapott, és az okozati élek egy szélességi kereső fát adtak nekik. Elképzelhető, hogy a fa nem használható az update/javítás után. minden javításhoz egy új szélességi keresést indítottak.

Dinic ötlete a következő: Tartsuk meg Edmonds—Karp algoritmusának alapstruktúráját. Egy fázison kezdeténél azonban határozzuk meg a $\overrightarrow{G_r^0}$ gráfot. (Ez egy egyszeri költség.) Ha ismert a $\overrightarrow{G_r^0}$, akkor ebből egy legrövidebb javító út $\mathcal{O}(|V|)$ költséggel adódik. Egy fázison belül egy javítás után ne építsük fel az új $\overrightarrow{G_r^0}$ gráfot a semmiből. Látjuk, hogy itt egy csökkenés történik, $\overrightarrow{G_r^0}$ gráfot „update-eljük”, azaz a csökkenést számoljuk ki.

3. Tétel (Dinic). *Egy fázison belül a $\overrightarrow{G_r^0}$ gráf változása $\mathcal{O}(|E|)$ költséggel nyilvántartható.*

Ezt a tételt az amortizációs analízis témakörben fogjuk tárgyalni.

Előnye nyilvánvaló: A $|V| \cdot |E|$ javító út keresése $|V|$ fázisra van osztva. Egy fázisban $|E|$ darab javítás lehetséges. Azonban, minden fázisban csak egyszer építjük fel a $\overrightarrow{G}_r^0$ gráfot (ennek költsége $\mathcal{O}(|E|)$), minden javító út megtalálása $\mathcal{O}(|V|)$ költségű, végül $\overrightarrow{G}_r^0$ az egész fázisra vonatkozó update költsége $\mathcal{O}(|E|)$. A teljes folyam algoritmus költsége:

$$|V|\left(\mathcal{O}(|E|) + \mathcal{O}(|E|) \cdot \mathcal{O}(|V|) + \mathcal{O}(|E|)\right) = \mathcal{O}(|V|^2|E|).$$

4. Tétel. *Adott hálózatban a Dinic-algoritmus $\mathcal{O}(|V|^2|E|)$ lépésben megtalálja az optimális folyamot.*