Algoritmuselmélet és bonyolultságelmélet feladatok
MSc hallgatók számára

Redukciók

2018. Előadó: Hajnal Péter

1. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő problémák nem eldönthetőek:*

(i) *Adott T Turing-gép, döntsük el igaz-e, hogy van olyan input, amelyen megáll.*

(ii) *Adott T Turing-gép, döntsük el az üres szó inputon megáll-e.*

(iii) *Adott T Turing-gép, döntsük el hogy időbonyolultsága konstans-e.*

2. Feladat. *Tudjuk, hogy a következő probléma eldönthetetlen: Adott $p \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom, döntsük el van-e egész gyöke (Hilbert X. problémája, Matijasevic-tétel). Igazoljuk, hogy a következő problémák sem eldönthetők:*

(i) *Adott $p \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom, döntsük el van-e nem-negatív gyöke.*

(ii) *Adott $p \in \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom, döntsük el van-e pozitív gyöke.*

(iii) *Adottak $p_i \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomok ($i = 1, 2, \dots, k$), döntsük el hogy a $p_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) egyenletrendszernek van-e gyöke.*

⋆ ⋆ ⋆

3. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő feladatok kölcsönösen redukálhatók egymásra logaritmikus tárt használó redukcióval:*

(i) *(FÜGGETLEN) Adott G egyszerű gráf és k természetes szám. Döntsük el van-e G-ben k elemű független halmaz.*

(ii) *(KLIKK) Adott G egyszerű gráf és k természetes szám. Döntsük el van-e G-ben k elemű klikk.*

(iii) *(LEFOGÁS) Adott G egyszerű gráf és k természetes szám. Döntsük el van-e G-ben k elemű lefogó halmaz.*

4. Feladat. *G mindig egy egyszerű gráfot, k egy természetes számot jelöl. Legyen HAMILTON-KÖR$=\{\lceil G, k\rceil : G$-ben van Hamilton-kör$\}$ és legyen HAMILTON-ÚT$=\{\lceil G, k\rceil : G$-ben van Hamilton-út$\}$. Igazoljuk, hogy*

$$\text{HAMILTON-ÚT} \preceq_{\mathcal{P}} \text{HAMILTON-KÖR}.$$

5. Feladat. *Legyen SZÍNEZÉS*$=\{\lceil G,k\rceil$: *G jól színezhető k színnel*$\}$. *Igazoljuk a következő összefüggéseket:*

(a)
$$\textit{HAMILTON-ÚT} \preceq_{\mathcal{P}} \textit{FÜGGETLEN},$$

(b)
$$\textit{HAMILTON-KÖR} \preceq_{\mathcal{P}} \textit{FÜGGETLEN},$$

(c)
$$\textit{HAMILTON-KÖR} \preceq_{\mathcal{P}} \textit{SZÍNEZÉS},$$

(d)
$$\textit{SZÍNEZÉS} \preceq_{\mathcal{P}} \textit{FÜGGETLEN}.$$

Definíció. $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer, ami egy V véges csúcshalmaz bizonyos — éleknek nevezett — részhalmazai. Gondolhatunk rá mint egy $V \times \mathcal{H}$ típusú 0-1 mátrixra. Azaz $|V| \cdot |\mathcal{H}|$ bittel kódolható. Legyen

A gráfelméleti fogalmak legtöbbje kiterjeszthető halmazrendszerekre: Egy F csúcshalmaz független, ha egyik él sem részhalmaza. Egy M élhalmaz független, ha páronként diszjunktak. Egy L csúcshalmaz lefogó, ha minden él tartalmaz L-beli csúcsot. $\mathcal{H}$ egy jó színezése egy $c : V \to P$ függvény (P egy színalmaz/paletta), amelynek egyik élre vaqló megszorítása sem konstans. Egy halmazrendszer kromatikus száma a legkisebb $|P|$, amelyre létezik jó színezés.

6. Feladat. *Definiálunk néhány halmazrendszerekre vonatkozó döntési alapfeladatot/nyelvet.*
FÜGGETLEN-CSÚCSOK-HALMAZRENDSZERBEN$=\{\lceil \mathcal{H},k\rceil$: $\mathcal{H}$*-ban van k elemű független csúcshalmaz*$\}$,
LEFOGÁS-HALMAZRENDSZERBEN$=\{\lceil \mathcal{H},k\rceil$: $\mathcal{H}$*-ban van k elemű lefogó csúcshalmaz*$\}$,
FÜGGETLEN-ÉLEK-HALMAZRENDSZERBEN$=\{\lceil \mathcal{H},k\rceil$: $\mathcal{H}$*-ban van k elemű független élhalmaz*$\}$,
PARKETTÁZÁS$=\{\lceil \mathcal{H}\rceil$: $\mathcal{H}$*-ban található független élhalmaz, amely uniója V*$\}$,
2-SZÍNEZÉS-HALMAZRENDSZERRE$=\{\lceil \mathcal{H}\rceil$: $\mathcal{H}$ *jól színezhető* 2 *színnel*$\}$,
SZÍNEZÉS-HALMAZRENDSZERRE$=\{\lceil \mathcal{H},k\rceil$: $\mathcal{H}$ *jól színezhető k színnel*$\}$.

Igazoljuk a következő összefüggéseket:

(a)
$$\textit{LEFOGÁS} \preceq_{\mathcal{P}} \textit{LEFOGÁS-HALMAZRENDSZERBEN},$$

(b)
$$\textit{LEFOGÁS-HALMAZRSZ-BEN} \preceq_{\mathcal{P}} \textit{FÜGGETLEN-CSÚCSOK-HALMAZRSZ-BEN},$$

(c)

$$\textit{FGTLEN-CSÚCSOK-HALMAZRSZ-BEN} \preceq_{\mathcal{P}} \textit{FGTLEN-ÉLEK-HALMAZRSZ-BEN},$$

(d)

$$\textit{FÜGGETLEN} \preceq_{\mathcal{P}} \textit{FÜGGETLEN-ÉLEK-HALMAZRENDSZERBEN},$$

(e)

$$\textit{FÜGGETLEN-ÉLEK-HALMAZRENDSZERBEN} \preceq_{\mathcal{P}} \textit{PARKETTÁZÁS},$$

(f)

$$\textit{PARKETTÁZÁS} \preceq_{\mathcal{P}} \textit{2-SZÍNEZÉS-HALMAZRENDSZERRE},$$

$\star \quad \star \quad \star$

7. Feladat. *Igazoljuk, hogy* $\preceq_{\mathcal{P}}$ *és* $\preceq_{\mathcal{L}}$ *tranzitív.*

8. Feladat. *Igazoljuk, ha* $L \preceq_{\mathcal{P}} L'$ *és* $L' \in \mathcal{P}$, *akkor* $L \in \mathcal{P}$ *is teljesül.*

9. Feladat. *Igazoljuk, ha* $L \preceq_{\mathcal{L}} L'$ *és* $L' \in \mathcal{L}$, *akkor* $L \in \mathcal{L}$ *is teljesül.*