Gráfelmélet

Alapfogalmak, Euler-vonal, Hamilton-út. Fák, páros gráfok.
Párosítás, lefogó ponthalmaz. Síkgráfok, gráfok színezése.

A gráfok az informatikában gyakran előforduló matematikai struktúrák. Az internet is felfogható egy gráfként, de akár egy adott épület villamos hálózata is. Az emberek közötti ismertségek is kezelhetők gráfként (Facebook). A GPS is gráfként kezeli a térképeket, és gráfelméleti algoritmusok használatával állítja elő az útvonalat. A kémiai molekulák is vizsgálhatók gráfként, mint az atomok és a köztük lévő kötések megjelenítése.

1. Alapfogalmak

1. Definíció (Gráf)**.** A $G = (V, E, I)$ hármast **gráf**nak nevezzük, ha V és E két halmaz, $I \subseteq V \times E$ egy leképezés közöttük, továbbá minden $e \in E$ esetén a $V_e = \{v \in V : (v, e) \in I\}$ halmaz elemszáma 1 vagy 2. A V halmaz elemeit a gráf csúcsainak, az E halmaz elemeit a gráf éleinek nevezzük.

A fenti definíció elég absztraktnak tűnik annak, aki már látott gráfokat. A V jelöli a gráf csúcsainak halmazát, az E pedig az éleinek halmazát. Az I leképezés mondja meg, hogy mely csúcsok és élek állnak kapcsolatban. A V_e halmaz az e él végpontjainak halmaza.

A továbbiakban a gráfoknál az illeszkedési relációt nem jelöljük, mindig feltételezzük, hogy van egy illeszkedési reláció a háttérben, amit ismerünk.

2. Definíció. Legyen adott egy $G = (V, E)$ gráf. Egy $e \in E$ élt **hurokél**nek nevezünk, ha a hozzá tartozó V_e halmaz 1-elemű.

3. Definíció. Legyen adott egy $G = (V, E)$ gráf. Az $e, f \in E$ éleket **párhuzamos élek**nek nevezzük, ha a hozzájuk tartozó V_e és V_f halmazok megegyeznek, azaz ugyanazok a végpontjaik.

A különböző alkalmazásokban többször előkerül az, hogy a gráf élein keresztül szeretnénk tenni egy „sétát”. Nyilván az éleken történő „séta” közben csúcsokon és éleken haladunk át, így különböző sétákat különböztetünk meg attól függően, hogy miken nem akarunk többször is keresztülmenni.

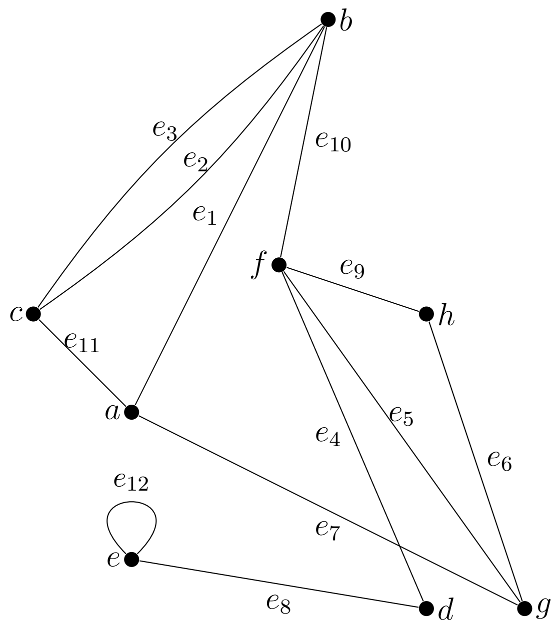
4. Definíció (Séta)**.** Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ sorozatot **sétá**nak nevezünk, ha $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sorozat V-beli csúcsok egy sorozata, és az $e_i \in E$ élek végpontjai v_{i-1} és v_i minden $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén. Ha $v_0 = v_k$, akkor **zárt sétá**ról beszélünk. A k számot a séta **hossz**ának nevezzük.

5. Definíció (Vonal)**.** Ha egy séta élsorozatában nincs ismétlődés, akkor a sétát **vonal**nak, illetve **zárt vonal**nak nevezzük.

6. Definíció (Út)**.** Ha egy séta csúcssorozatában nincs ismétlődés, akkor a sétát **út**nak, illetve **kör**nek nevezzük. (Kör esetén természetesen az első és az utolsó csúcsnak meg kell egyeznie, az ismétlődés tilalma ezekre nem vonatkozik.)

7. *Megjegyzés.* Ha nincs egy sétában csúcsismétlés, akkor garantáltan nincs élismétlés sem. Tehát egy út egyben vonal is.

8. Példa.



$$
\begin{aligned}
V &= \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \\
E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, \\
&\quad e_{12}\}, \\
I &= \{(a, e_1), (b, e_1), (b, e_2), (c, e_2), (b, e_3), \\
&\quad (c, e_3), (d, e_4), (f, e_4), (f, e_5), (g, e_5), \\
&\quad (g, e_6), (h, e_6), (a, e_7), (g, e_7), (e, e_8), \\
&\quad (d, e_8), (f, e_9), (h, e_9), (b, e_{10}), (f, e_{10}), \\
&\quad (a, e_{11}), (c, e_{11}), (e, e_{12})\}
\end{aligned}
$$

$h, e_9, f, e_4, d, e_8, e, e_{12}, e, e_{12}, e, e_8, d, e_4, f, e_{10}, b, e_3, c, e_2, b$ egy 10 hosszú séta.
$a, e_1, b, e_{10}, f, e_5, g, e_7, a$ egy 4 hosszú zárt séta.
$g, e_7, a, e_1, b, e_3, c$ egy 3 hosszú út.
$f, e_5, g, e_6, h, e_9, f$ egy 3-hosszú kör.

9. Definíció (Fokszám)**.** A $G = (V, E)$ gráf egy $v \in V$ csúcsának **fokszám**ának nevezzük a csúcsra illeszkedő nem hurokélek számának és a csúcsra illeszkedő hurokélek számának kétszeresének az összegét. A v csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük.

10. Példa. A 8. Példa gráfját tekintve: $d(c) = 3$, $d(e) = 3$ és $d(f) = 4$.

A fokszám definíciójából azonnal következik az alábbi tétel.

11. Tétel. *Egy $G = (V, E)$ gráf esetén a csúcsok fokszámainak összege megegyezik az élek számának kétszeresével, azaz*

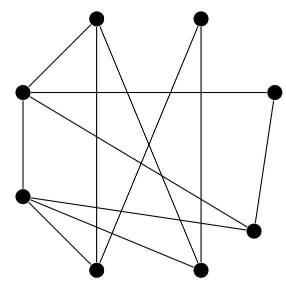
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|\,.$$

12. Definíció. A G gráf egy v csúcsát **izolált csúcs**nak nevezzük, ha v fokszáma nulla.

13. Definíció. Egy gráfot d-**reguláris**nak nevezünk, ha minden csúcsának fokszáma d. Egy gráfot regulárisnak nevezünk, ha valamilyen d-re reguláris.

14. Definíció. Egy n-csúcsú gráf összes csúcsán végigmenve n darab fokszámot kapunk. Ezeket monoton növekvő sorrendbe rakva kapjuk a gráf **fokszámsorozat**át.

15. Példa. A 8. Példa gráfjának fokszámsorozata $2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4$. Természetesen egy fokszámsorozathoz több (nem izomorf) gráf is tartozhat. Algoritmikusan megadható olyan egyszerű gráf, melynek ugyanez a fokszámsorozata. Egy ilyen látható a jobb oldali ábrán.



16. Tétel. *Pontosan akkor adható meg egy gráf, melynek $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a fokszámsorozata, ha $\sum_{i=1}^{n} d_i$ páros.*

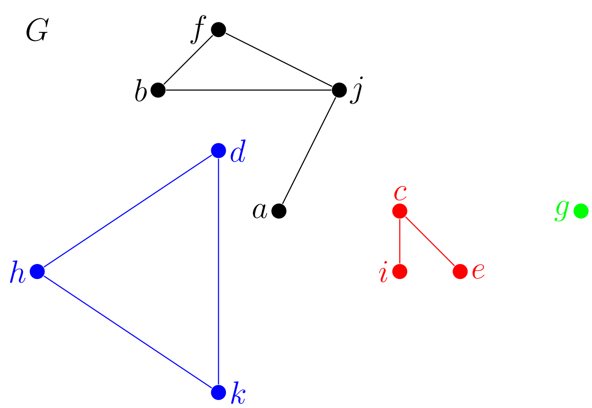
17. Állítás. *Ha egy gráf fokszámsorozata $d_1, d_2, \ldots, d_n$, akkor a páratlan d_i-k száma páros.*

18. Definíció. Egy gráf **összefüggő**, ha bármely két pontja között van út. (A nulla hosszú utat is megengedjük, tehát egyetlen izolált pont is összefüggő.)

19. Tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. Ekkor a gráf V csúcshalmazának létezik olyan $V_1, V_2, \ldots, V_n$ osztályozása, hogy a különböző V_i-k között nincs él, illetve G gráf mindegyik V_i csúcshalmazra külön-külön összefüggő.*

20. Definíció. Az előző tételben szereplő V_i-khez tartozó gráfokat az eredeti gráf összefüggőségi **komponens**einek nevezzük.

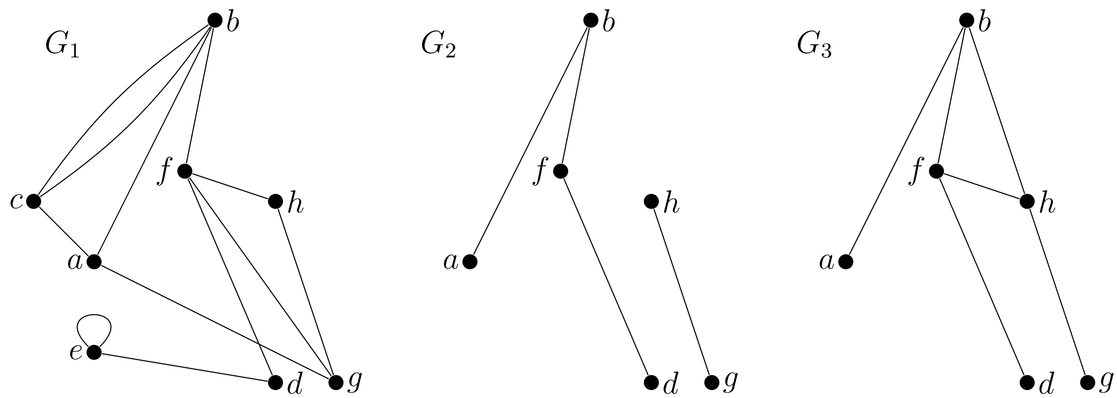
21. Példa.



A fenti G gráfnak 4 összefüggőségi komponense van, ezek különböző színnel vannak jelölve a gráfban.

22. Definíció. Egy $G = (V, E)$ gráfnak a $H = (V', E')$ gráf egy **részgráf**ja, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$. Azaz a H gráf minden csúcsa a G gráf csúcsai közül kerül ki, és ha H-ban két pont össze van kötve, akkor az a két pont a G-ben is össze van kötve.

23. Példa.



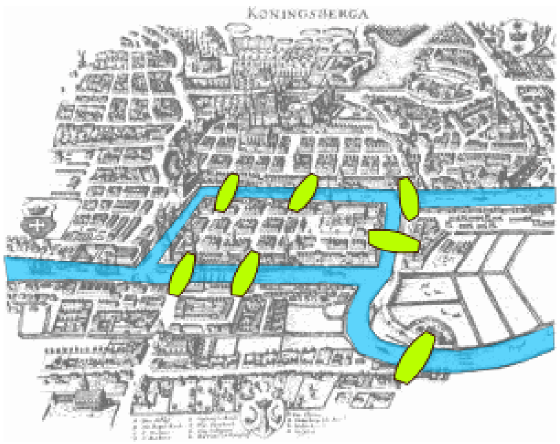
Például a fenti G_2 gráf részgráfja a G_1 gráfnak, viszont a G_3 nem részgráfja.

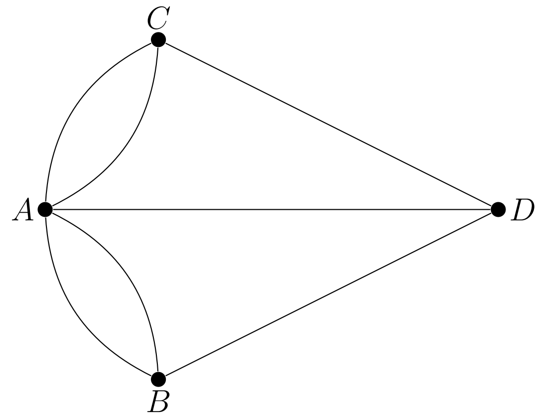
A különböző alkalmazások során a hurokélek és a többszörös élek elveszthetik jelentőségüket. Például városok közötti útvonaltervezésnél nincsenek hurokélek, vagy a Facebook ismertségi gráfjában sincsenek se hurokélek, se párhuzamos élek. (Ez azt jelenti, hogy nem szoktuk feltüntetni, hogy Anna ismeri saját magát, illetve ha ismeri Ádámot, akkor azt csak egyféleképpen ismeri.) Ez indokolhatja, hogy olyan gráfokat vizsgáljunk, melyekben nincsenek ilyen „különleges élek”.

24. Definíció (Egyszerű gráf)**.** Azokat a gráfokat, melyekben nincs hurokél és nincsenek párhuzamos élek, **egyszerű gráf**oknak nevezzük.

2. Speciális vonalak és utak

Nagyon régi az a probléma, hogy egy gráfot le tudunk-e rajzolni a ceruzánk felemelése nélkül. A probléma megoldása Euler nevéhez fűződik, aki a megoldotta a königsbergi hidak problémáját. A városlakók tették fel Eulernek a kérdést, hogy a városban lévő, Pregel folyón átívelő hét hídon át lehet-e úgy sétálni, hogy mindegyik hídon pontosan egyszer menjünk át, és ugyanoda érkezzünk, ahonnan elindultunk.





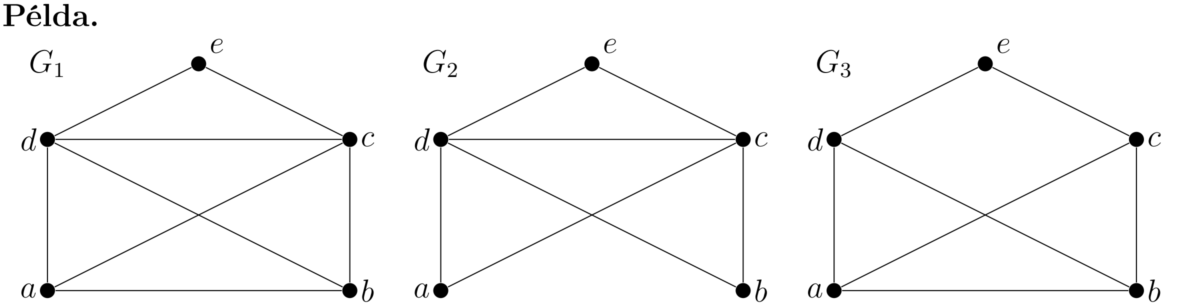
Euler 1736-ban megadta a választ, mely szerint nem lehet. A város ma Kalinyingrád néven ismert, és a világháborúban a hídjait lebombázták, így az eredeti probléma már elvesztette létjogosultságát, azonban ezt a problémát tartják a gráfelmélet első kérdésének.

25. Definíció (Euler-vonal)**.** Egy olyan vonalat, mely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza, **Euler-vonal**nak nevezzük. Ha a vonal zárt, akkor **zárt Euler-vonal**nak nevezzük.

26. Tétel. *Legyen G egy izolált pont nélküli gráf. Ekkor*

- *G-ben pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha összefüggő, és minden foka páros,*
- *G-ben pontosan akkor van Euler-vonal, ha összefüggő, és legfeljebb két darab páratlan fokú csúcsa van.*

27. Példa.



A G_1 fokszámsorozata $2, 3, 3, 4, 4$, így ebben nincs zárt Euler-vonal, de Euler-vonal van, például az $a, d, e, c, d, b, c, a, b$ vonal. A G_2 fokszámsorozata $2, 2, 2, 4, 4$, így ebben van zárt Euler-vonal, például az a, d, e, c, d, b, c, a vonal. A G_3 fokszámsorozata $2, 3, 3, 3, 3$, így ebben zárt és nyitott Euler-vonal sincs.

Természetesen adódik a kérdés, hogy az élek helyett mikor tudunk az összes ponton átmenni. Hamilton talált ki egy táblajátékot, melyben gyakorlatilag egy gráf összes csúcsán kellett úgy végigmenni, méghozzá pontosan egyszer. Az ő munkásságának tiszteletére nevezték el az ilyen utakat Hamilton-útnak.

28. Definíció (Hamilton-út, Hamilton-kör)**.** Ha egy gráfban egy út minden csúcson átmegy, akkor azt **Hamilton-út**nak nevezzük. Ha egy gráfban egy kör minden csúcson átmegy, akkor **Hamilton-kör**nek nevezzük.

Az Euler-vonal létezéséhez kapcsolódó tétel egy nagyon egyszerű karakterizációs tétel volt. Sőt, gyors algoritmus adható, ami Euler vonalat és kört ad meg outputként. Ezzel szemben a Hamilton-út és kör esetén nincs se karakterizációs tétel, se hatékony algoritmus. Ismeretes néhány tétel, mely bizonyos gráfok esetén működik, ezek közül mi csak egyet említünk meg.

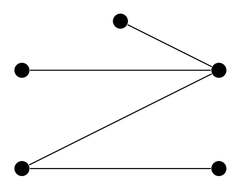
29. Tétel (Dirac tétele)**.** *Ha egy egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább akkora, mint a csúcsszám fele, akkor van benne Hamilton-út.*

Ha egy egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább akkora, mint a csúcsszám fele, és van legalább 3 *csúcsa, akkor van benne Hamilton-kör.*

3. Fák

A fák egy speciális tulajdonságú gráfcsalád. Egy fa több szempontból is extremális értékeket képvisel a gráfok között, már a definíciójuk is ezzel tehető meg.

30. Definíció. Egy G gráfot **fá**nak nevezünk, ha összefüggő, és minden élére igaz, hogy elhagyása után már nem összefüggő gráfot kapunk.



31. Definíció. Egy gráfot **minimálisan összefüggő**nek nevezünk, ha összefüggő, de bármely élét elhagyva már nem összefüggő.

32. Definíció. Egy gráfot **maximális körmentes**nek nevezünk, ha nincs benne kör, de bármely új élt hozzávéve már lenne benne.

33. Tétel (Fák ekvivalens jellemzései)**.** *Legyen G egy n csúcsú egyszerű gráf. Ekkor a következők ekvivalensek.*

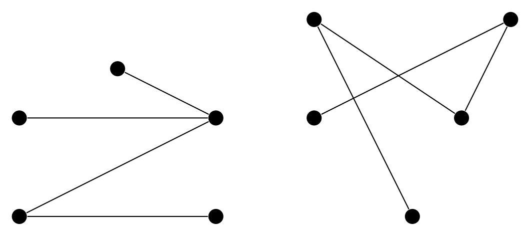
- *A G gráf fa.*
- *A G gráf minimálisan összefüggő.*
- *A G gráf maximális körmentes.*
- *A G gráf összefüggő, és eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa.*
- *A G gráf körmentes, és eggyel kevesebb éle van, mint csúcsa.*

34. *Megjegyzés.* Egy adott n esetén az n-csúcs gráfok között egy n-csúcsú fa a legkevesebb élt tartalmazó gráf.

35. Tétel. *Véges, egynél több csúcsszámú fában legalább két elsőfokú csúcs van.*

36. Definíció (Erdő)**.** Egy körmentes gráfot **erdő**nek nevezünk.

37. Példa. Az alábbi gráf egy erdő.



38. *Megjegyzés.* Az erdő úgy is felfogható, mint fák csúcsdiszjunkt egyesítése.

4. Gráfparaméterek

39. Definíció (Párosítás)**.** Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Két E-beli élt **független**nek vagy **idegen**nek nevezünk, ha a végpontjaik négy különböző csúcsot adnak. Független éleknek egy M halmazát **párosítás**nak nevezzük. Ha az M párosítás a G összes csúcsát lefedi, akkor **teljes párosítás**nak nevezzük. A G gráfban a maximális méretű párosítás elemszámát $\nu(G)$-vel jelöljük, azaz

$$\nu(G) = \max\{|M| : M \text{ párosítás } G\text{-ben}\}.$$

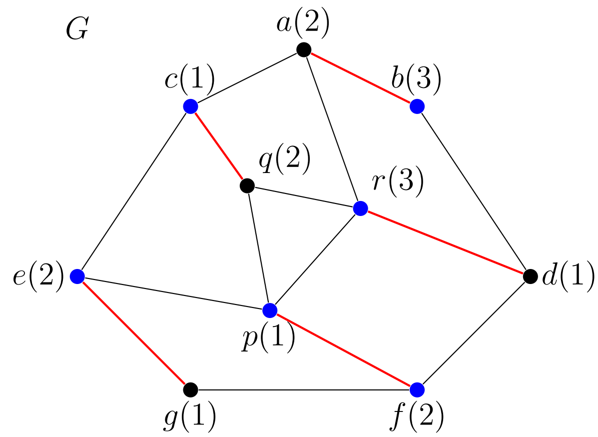
40. Definíció (Lefogó ponthalmaz)**.** Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. A G gráf pontjainak egy S halmazát **lefogó ponthalmaz**nak nevezzük, ha G minden élének legalább az egyik végpontja S-ben van. A G gráfban a minimális méretű lefogó ponthalmaz elemszámát $\tau(G)$-vel jelöljük, azaz

$$\tau(G) = \min\{|S| : S \text{ lefogó ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$$

41. Állítás. *Tetszőleges G gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$.*

42. Definíció. Egy egyszerű gráfot k-**színezhető**nek nevezünk, ha a csúcsai kiszínezhetők k darab színnel úgy, hogy bármely élének a végpontjai különböző színűek. A G gráf kromatikus számának nevezzük azt a legkisebb k számot, mellyel a gráf k-színezhető. A G kromatikus számát $\chi(G)$-vel jelöljük.

43. Példa.

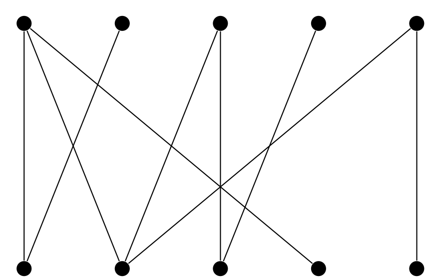


A jobb oldali G gráfban piros élek párosítást, a kék csúcsok pedig lefogó ponthalmazt alkotnak. A csúcsok neve melletti számok a gráfok egy jó 3-színezését jelölik, a felhasznált színek: $1, 2, 3$. A megadott párosítás miatt tudjuk, hogy $5 \leq \nu(G)$. Viszont $\nu(G) < 6$, mert 6 független élhez már 12 csúcsra lenne szükség, de csak 10 csúcsa van. Ebből következik, hogy $\nu(G) = 5$, tehát a pirossal megjelölt $\{ab, cq, dr, pf, eg\}$ párosítás maximális.

A megadott lefogó ponthalmaz miatt, $\tau(G) \leq 6$. Azonban $6 \leq \tau(G)$ is teljesül, mert van gráfban két csúcsdiszjunkt kör: p, q, r, p és a, b, d, f, g, e, c, a. A 3 hosszú kör lefogásához legalább 2 csúcs, a 7 hosszú kör lefogásához legalább 4 csúcs szükséges. Tehát $\tau(G) = 6$.

A megadott 3-színezés jó, tehát $\chi(G) \leq 3$. Viszont 2 színnel nem tudjuk jól színezni, mert a gráf tartalmaz páratlan kört, például a p, q, r háromszöget. Tehát $\chi(G) = 3$.

5. Páros gráfok



44. Definíció (Páros gráf)**.** Egy $G = (V, E)$ gráfot **páros gráf**nak nevezünk, ha a csúcsai olyan A és F diszjunkt halmazba osztályozhatók, hogy minden E-beli él egyik végpontja A-ban, a másik pedig F-ben van. Az A és F halmazokat a páros gráf két **színosztály**ának nevezzük.

45. Tétel. *A G gráf pontosan akkor páros gráf, ha nincs benne páratlan hosszú kör.*

46. Tétel. *Ha a G páros gráfban van teljes párosítás, akkor a két csúcsosztály elemszáma megegyezik.*

47. Tétel (Kőnig-tétel)**.** *Ha G egy véges páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.*

48. Definíció. Legyen M egy tetszőleges párosítás G-ben. A $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ utat M-re vonatkozó **javító alternáló út**nak nevezzük, ha v_0 és v_k nem illeszkedik egyetlen M-beli élre sem, k páratlan, továbbá $e_2, e_4, \ldots, e_{k-1} \in M$ (és így $e_1, e_3, \ldots, e_k \notin M$).

49. Állítás. *Legyen G egy gráf és benne M egy párosítás. Ha létezik $P\colon e_1, e_2, \ldots, e_k$ javító alternáló út M-re nézve, akkor M nem maximális elemszámú párosítás. Ekkor az $M' = (M \setminus E(P)) \cup (E(P) \setminus M)$ párosítás nagyobb elemszámú M-nél. Azaz M' abban különbözik M-től, hogy elhagyjuk M-ből azokat az éleket, amelyek benne vannak a javító útban, és hozzáadjuk a javító út azon elemeit, melyek nincsenek M-ben.*

50. Tétel (Berge tétele)**.** *Legyen G egy gráf és M egy nem optimális párosítás G-ben. Ekkor létezik M-re vonatkozó javító alternáló út.*

51. Algoritmus (Maximális párosítás keresése javító alternáló utak segítségével)**.**
Input: G gráf.
Kiinduló lépés: legyen M egy tetszőleges párosítás.
Általános lépés: keresünk M-re vonatkozóan javító utat.

- Ha találunk, akkor a 49. Állításban leírt módon az M párosítást lecseréljük, és újra futtatjuk az általános lépést.
- Ha nem találunk javító utat, akkor M maximális elemszámú párosítás.

52. *Megjegyzés.* A fent leírt algoritmus tetszőleges gráfokra működik. Az egyetlen problémát az jelenti, hogyan keressünk a gráfokban javító alternáló utat. Kőnig Dénes és Egerváry Jenő megadtak egy algoritmust arra az esetre, amikor az input G gráf páros. Az ő tiszteletükre nevezték el az algoritmust magyar módszernek (Hungarian method).

53. Definíció. Egy $X \subseteq V$ csúcshalmaz **szomszédság**át $N(X)$-szel jelöljük, és olyan csúcsokat sorolunk az $N(X)$ halmazba, melyek valamelyik X halmazbeli csúccsal össze vannak kötve éllel.

54. Tétel (Kőnig–Hall-tétel)**.** *Legyen G egy páros gráf A, F csúcsosztályokkal. Pontosan akkor létezik A-t lefedő párosítás, ha bármely $X \subseteq A$ csúcshalmazra $|N(X)| \geq |X|$.*

55. Tétel. *Legyen G egy páros gráf A, B csúcsosztályokkal. Pontosan akkor létezik teljes párosítás G-ben, ha $|A| = |F|$ és bármely $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$.*

56. Tétel. *Minden reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás.*

6. Síkgráfok

57. Definíció (Síkgráf)**.** Egy gráfot **síkgráf**nak nevezünk, ha lerajzolható a síkra úgy, hogy az élei (amik esetleg görbe vonalak) csak csúcsoknál találkoznak, nem metszik egymást belső pontban. Egy síkgráf élei által határolt területeket a síkgráf **tartomány**ainak nevezzük. (A sík helyett tetszőleges felülettel lehetne dolgozni, így értelme van például gömbre vagy tóruszra való lerajzolásról beszélni.)

58. Tétel (Euler-tétel). *Legyen G egy olyan síkgráf, melynek n csúcsa, e éle és t tartománya van. Ekkor $n + t = e + 2$.*

59. Definíció (Topologikus részgráf). Ha a T gráfot úgy kapjuk egy G gráfból, hogy

- G néhány csúcsát (a hozzá kapcsolódó élekkel együtt) elhagyjuk,
- G néhány élét elhagyjuk,
- G egy 2-fokú csúcsát elhagyjuk, és a rajta lévő két élt egybe kapcsoljuk vagy
- az előzőeket véges sokszor alkalmazzuk egymás után,

akkor a T gráfot a G gráf **topologikus részgráf**jának nevezzük.

60. Tétel (Kuratowszki-tétel). *A G gráf pontosan akkor síkgráf, ha a K_5 és $K_{3,3}$ nem topologikus részgráfja.*

61. Tétel (Négyszíntétel). *Minden egyszerű G síkgráf esetén $\chi(G) \leq 4$.*

3. feladatsor – Gráfok

3.1. Feladat. Egy sakk csapatversenyen több csapat vett részt. (Minden játékos pontosan egyszer játszik minden, vele nem azonos csapatban levő játékossal.) A verseny végén a sakkozóknak „ünnepi ebédet” adnak. A szakácsnak elfelejtették leadni a csapatok létszámát. A szakács mindössze annyit tud, hogy a legnagyobb létszámú csapatban 12 versenyző van, és hogy a verseny során 42 sakkozó szerzett pontot. Hány ebédet kell főznie a szakácsnak, hogy biztosan jusson minden sakkozónak?

3.2. Feladat. Egy 5 tagú társaságban lehet-e mindenkinek pontosan 3 ismerőse? (Az ismeretségek kölcsönösek.)

3.3. Feladat. Előfordulhat-e 8 csapat körmérkőzéses versenye során, hogy az egyes csapatok eddig rendre $1, 2, 2, 2, 4, 5, 7, 7$ mérkőzést játszottak?

3.4. Feladat. Hány olyan 5-pontú, egyszerű gráf van, melyben a pontok fokszámai $1, 2, 2, 2, 3$? Oldja meg a feladatot úgy is, hogy a pontokat megszámozza, és úgy is, hogy nem.

3.5. Feladat. Rajzoljunk olyan 5-pontú, egyszerű gráfot, amelynek két 3 fokú és két 4 fokú pontja van. Hány ilyen gráf van, ha

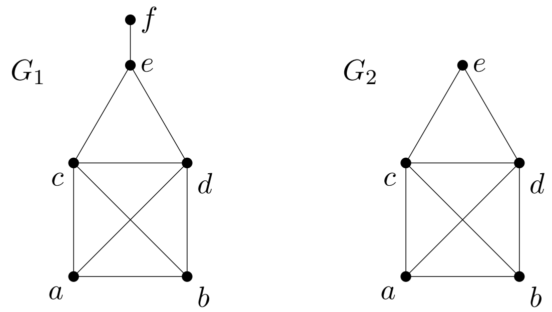
(a) a pontokat nem számozzuk meg;
(b) a pontokat megszámozzuk?

Határozza meg az ilyen gráfok éleinek a számát.

3.6. Feladat. Egy 6-pontú, egyszerű gráf pontjainak fokszámai: $2, 2, 3, 3, 5, 5$. Hány ilyen gráf van, ha a pontokat megszámozzuk, és hány van akkor, ha nem? Számítsuk ki a gráfok éleinek a számát.

3.7. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.

3.8. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő gráfokban van-e Euler-vonal, zárt Euler-vonal, Hamilton-út, Hamilton-kör.



3.9. Feladat. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek?

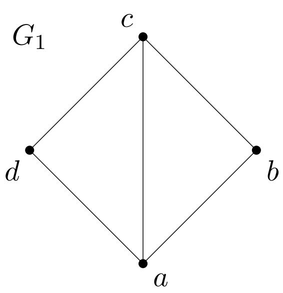
3.10. Feladat. Hány különböző, 5-pontú fa van, ha a pontjait nem különböztetjük meg?

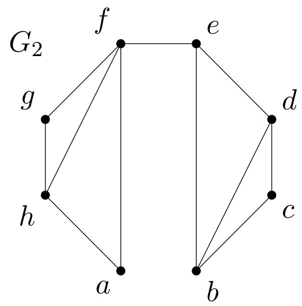
3.11. Feladat. Egy 20-pontú fának 18 darab 1 fokú pontja van.

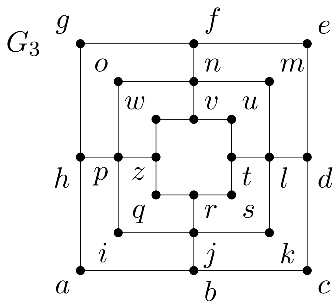
(a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?
(b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?
(c) Hány ilyen fa van, ha a pontokat nem különböztetjük meg?

3.12. Feladat. Adjunk meg az alábbi gráfokban

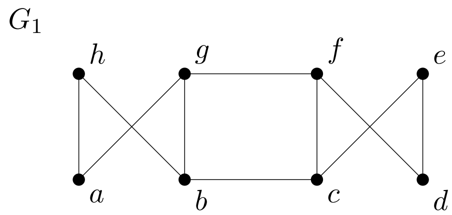
(a) minimális lefogó ponthalmazt;
(b) maximális párosítást;
(c) $\nu(G)$ és $\tau(G)$ értékét.

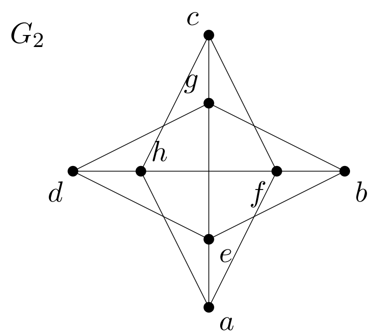




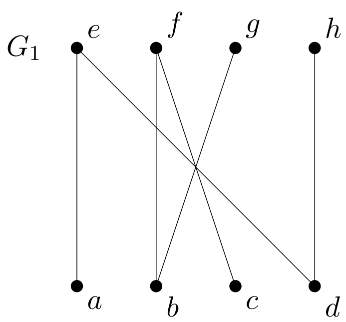


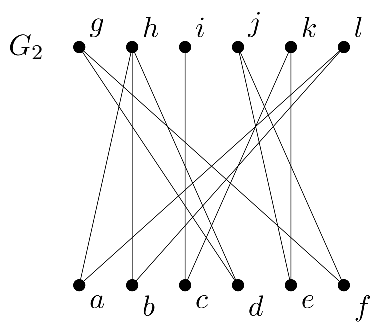
3.13. Feladat. Döntsük el az alábbi gráfokról, hogy páros gráfok-e.



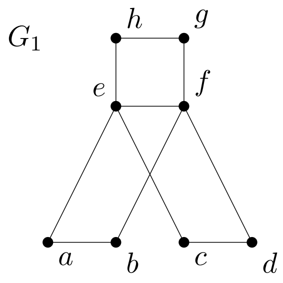


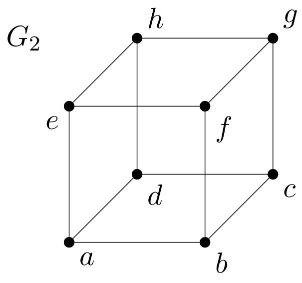
3.14. Feladat. Keressen maximális párosítást az alábbi gráfokban a magyar módszer segítségével.

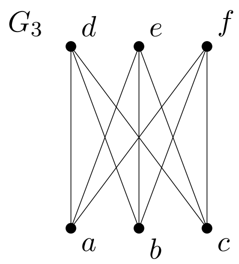




3.15. Feladat. Döntsük el az alábbi gráfokról, hogy síkgráfok-e.







3. feladatsor – Gráfok
MEGOLDÁSOK

3.1. Feladat. 54.

3.2. Feladat. Nem.

3.3. Feladat. Nem.

3.4. Feladat. 120, illetve 2.

3.5. Feladat. .

(a) 1;
(b) $\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$.

3.6. Feladat. Ha megszámozzuk a pontokat: $\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$, ha nem számozzuk meg: 1. Az élek száma: 10.

3.7. Feladat. H.F.

3.8. Feladat. G_1: Euler-vonal nincs, Hamilton-út van ($f - e - d - b - a - c$), Hamilton-kör nincs.

G_2: Euler-vonal van ($b-c-d-e-c-a-b-d-a$), zárt Euler-vonal nincs, Hamilton-út, sőt Hamilton-kör is van ($e - d - b - a - c - e$).

3.9. Feladat. 21.

3.10. Feladat. 3.

3.11. Feladat. .

(a) 2 és 18 között bármilyen egész értéket felvehet;
(b) 3;
(c) 9.

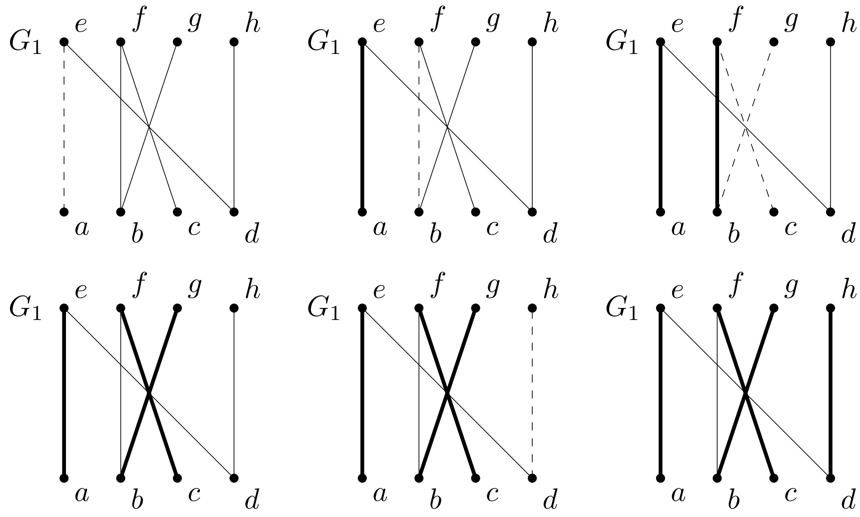
3.12. Feladat. .

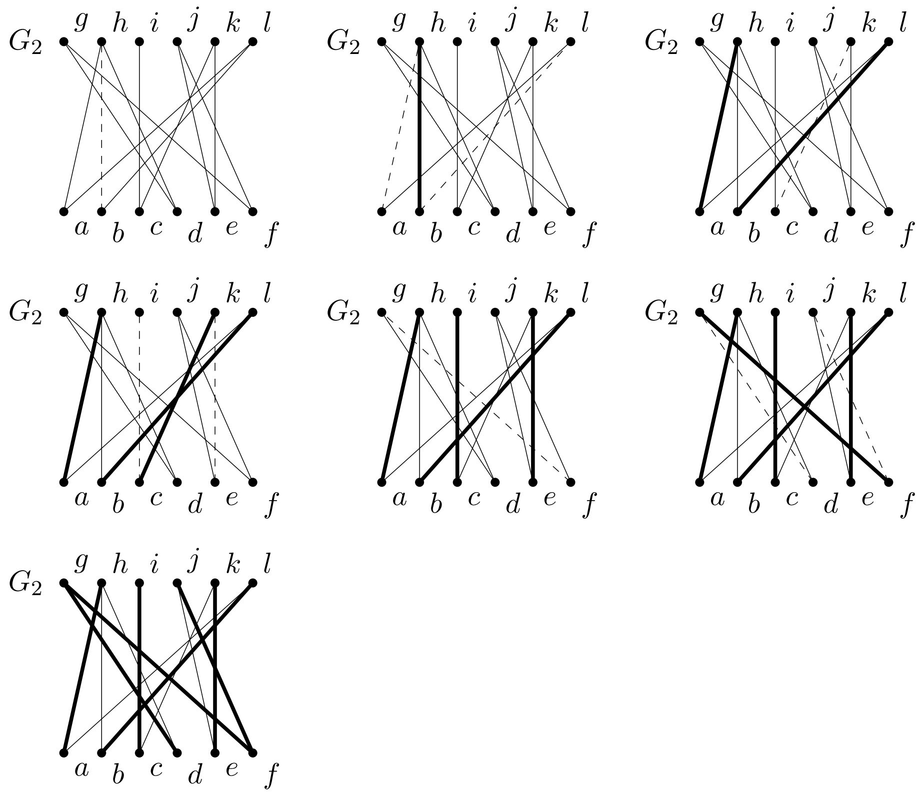
(a) $G_1 : a, c$, $G_2 : b, d, f, h$, $G_3 : a, c, e, g, j, l, n, p, q, s, u, w$.
(b) $G_1 : a - b, c - d$, $G_2 : h - g, a - f, b - e, c - d$, $G_3 : a - b, c - d, e - f, g - h, i - j, k - l, m - n, o - p, q - r, s - t, u - v, w - z$.
(c) $\nu(G_1) = \tau(G_1) = 2$, $\nu(G_2) = \tau(G_2) = 4$, $\nu(G_3) = \tau(G_3) = 12$.

3.13. Feladat. G_1 : páros gráf, mert élei két színnel színezhetők, az egyik osztály: $a - h, b - g, c - f, d - e$.

G_2 : nem páros gráf, van benne páratlan hosszú kör: $d - e - g - d$.

3.14. Feladat. A párosításbeli éleket vastag vonallal jelöljük. Az alternáló útban szereplő párosításon kívüli éleket szaggatott vonallal jelöljük.





3.15. Feladat. G_1, G_2 síkra rajzolható, így síkgráf, G_3 nem síkgráf.