Kombinatorika

Variáció, permutáció, kombináció. Binomiális tétel, szita formula.

1. Kombinatorikai alapfeladatok

A kombinatorikai alapfeladatok lényege az, hogy bizonyos elemeket sorba rendezünk, vagy néhányat kiválasztunk belőlük, és esetleg utána rendezzük sorba. Minden ilyen feladatnál fel lehet tenni a következő kérdéseket.

- Sorba kell-e rendezni az összes elemet? (Permutáció.)
- Ki kell-e választani közülük valamennyit? (Variáció vagy kombináció.)
- Az elemek különbözőek, vagy azonosak is vannak közöttük? (Ismétlés nélküli vagy ismétléses.)
- A kiválasztás után számít a sorrend vagy nem? (Variáció vagy kombináció.)

A következőkben a fenti felsorolás zárójelben lévő fogalmait fogjuk pontosan definiálni.

1.1. Variáció

1. Definíció. Egy n elemű halmaz elemeiből képezhető k-tagú (ismétlődést megengedő) sorozatot az n elem k-adosztályú (vagy k-tagú) **ismétléses variáció**jának nevezzük.

2. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak az $1, 8, 7, 1, 10$ sorozat egy 5-öd osztályú ismétléses variációja.

3. Definíció. Egy n elemű halmaz elemiből képezhető k-tagú ismétlés nélküli sorozatot az n elem k-adosztályú (vagy k-tagú) **ismétlés nélküli variáció**jának, vagy csak egyszerűen variációjának nevezzük. Ilyen csak akkor létezik, ha $k \leq n$.

4. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a $3, 10, 7, 1, 2$ sorozat egy 5-öd osztályú variációja.

5. *Megjegyzés.* A fenti definíciók lényege, hogy n elemből kiválasztunk k darabot és utána sorba rendezzük. Ismétléses variációnál n darab különböző elemből akkor is ki tudunk választani k darabot, ha esetleg $k > n$. Nyilván az ismétlés nélküli esetben ez nem tehető meg, mert n darab különböző elemből legfeljebb n különböző darabot választhatunk ki.

Felmerül a kérdés, hogy hány különböző variációja és ismétléses variációja van egy n elemű halmaznak. Azaz n különböző elemből kiválasztva k darabot, majd ezeket sorba rendezve hány különböző sorozatot kaphatunk. Erre ad választ a következő két tétel.

6. Tétel. *Legyen* $n, k \in \mathbb{N}$. *Ekkor* n *elem* k*-adosztályú ismétléses variációinak száma* n^k.

7. Tétel. *Legyen* $n, k \in \mathbb{N}$ *és* $k \leq n$. *Ekkor* n *elem* k*-adosztályú variációinak száma* $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$.

8. *Megjegyzés.* Az előző tételben szereplő képletet úgy célszerű megjegyezni, hogy egy egyesével csökkenő k-tényezős szorzatot képzünk.

9. Példa. Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt? (A magyar totón 14 meccs végeredményére lehet fogadni, és mindegyik meccs kimenetele háromféle lehet: 1, 0 vagy x.) A $\{0, 1, x\}$ halmaz elemeiből kell képeznünk egy $13 + 1$ hosszú sorozatot. Nyilván két meccs eredménye lehet ugyanaz is, ezért a fenti, ismétléses variációra vonatkozó képletet kell használnunk $n = 3$ és $k = 14$ adatokkal. Így 3^{14}-féleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt.

10. Példa. Egy tanácsban 10 ember ül, és ki akarják maguk között sorsolni, hogy ki legyen az igazgató és az igazgató helyettese. Hányféleképpen végződhet a sorsolás? Ismétlés nélküli variációról van szó $n = 10$ és $k = 2$ paraméterekkel. (A sorrend valóban számít a kisorsoltak között, mert nem mindegy, ki lesz az igazgató, és ki lesz a helyettese.) Tehát a sorsolás $10 \cdot 9$, azaz 90-féleképpen végződhet?

11. Példa. Hány különböző négybetűs szó képezhető a „SAJTÓ” szó betűiből? Az 5 különböző betű közül kell kiválasztani 4-et (a feladat nem mondja, hogy nem ismétlődhetnek), és ezeket kell sorbarendezni, tehát ismétléses variációt kell alkalmazni $n = 5$ és $k = 4$ paraméterekkel. Így 5^4 szó képezhető.

12. Példa. Egy kerékpárlakaton egy 4 számjegyből álló kombináció nyitja és zárja a zárszerkezetet. Elfelejtettük ezt a kombinációt. Legrosszabb esetben hány kombinációt kell végigpróbálni? Ismétléses variáció $n = 10$ és $k = 4$ paraméterekkel, mivel a 10 különböző számjegyből kell 4-et kiválasztani, és azokból sorozatot képezni. (A lakat az ismétlődő számjegyeket nem tiltja.) Így 10^4 kombináció lehetséges.

13. Példa. Egy bajnokságon 8 csapat indult. Hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón, ha sehol sem lehet holtverseny, és minden csapat csak egy darab helyezést érhet el. Ismétlés nélküli variációt kell alkalmazni, mert a 8 csapatból kell kiválasztani 3-at, őket sorba rendezni, mert a dobogón számít a sorrend, és az ismétlést a feladat szövege tiltja. Összesen $8 \cdot 7 \cdot 6$ sorrend lehetséges.

1.2. Permutáció

14. Definíció. Adott n különböző elem esetén azoknak egy sorba rendezését az n elem egy (ismétlés nélküli) **permutáció**jának nevezzük.

15. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a $8, 1, 2, 7, 10, 3$ sorozat egy permutációja.

16. *Megjegyzés.* Középiskolában általában a permutációkat elkülönítve próbálják tanítani a variációktól, pedig észre kell vennünk, hogy a permutáció egy olyan variáció, ahol egy n elemű halmazból n elemet választunk ki, és ezeket rakjuk sorba. Tehát olyan, mint az ismétlés nélküli variáció $k = n$ paraméterekkel.

A permutációknak is létezik ismétléses változata, azonban ennek definiálásához vissza kell emlékeznünk a rendszer fogalmára. A rendszer a halmazhoz hasonló fogalom, annyi a különbség, hogy a rendszerben egy elemet többször is felsorolhatunk. Például az $1, 1, 3, 4, 6, 6, 7$ egy 7-elemű rendszer. A rendszerek elemeit szándékosan nem tesszük kapcsos zárójelbe, mert azt halmazok esetén használjuk, és a rendszer nem halmaz.

17. Definíció. Egy n elemű rendszer elemeinek sorozatba rakását az n elem **ismétléses permutáció**jának nevezzük.

18. Példa. A $3, 3, 4, 4, 4, 5, 5$ rendszernek a $4, 3, 5, 4, 5, 3, 4$ sorozat egy ismétléses permutációja.

19. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}_0$. Ekkor n elem ismétlés nélküli permutációinak száma $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!$ (ejtsd: n faktoriális). Megállapodás szerint $0! = 1! = 1$.*

20. Tétel. *Tekintsünk egy n elemű rendszert, melyben r különböző elem van, és minden különböző elemből $k_1, k_2, \ldots, k_r$ darab van a rendszerben. Tehát $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$. Ekkor az n elem ismétléses permutációinak száma*

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}.$$

A k_i számokat az i-edik elem multiplicitásának nevezzük, ez mutatja, hogy az i-edik elemnek hány példánya van a rendszerben.

21. Példa. Hányféleképpen tudunk 6 különböző könyvet sorba rendezni a könyvespolcon? A válasz $6! = 720$.

22. Példa. Hány különböző 5-betűs szó készíthető az „ABLAK” szó betűiből, mindegyiket felhasználva? Azaz 5 elemet kell sorba rendezni, ám az elemek között vannak egyformák. Ekkor ismétléses permutációt használunk, a válasz $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

23. Példa. Hányféleképpen lehet egy 52 lapos póker-paklit megkeverni? A válasz $52!$, ami mellékesen egy 68 jegyű szám.

24. Példa. Hányféle különböző sorrendje van a „MATEMATIKA” szó betűinek? Azaz 10 elemet kell sorba rendezni, ám az elemek között vannak egyformák. Ekkor ismétléses permutációt használunk, a válasz $\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 151200$.

25. Példa. Hány 10 jegyű szám készíthető 6 darab kettes, 2 darab hetes és 2 darab hatos számjegyből, ha mindegyiket fel akarjuk használni? Ismétléses permutációról van szó, ahol a rendszer 10 elemű, azaz $n = 10$. Továbbá három darab különböző elem van a rendszerben: $2, 7, 6$. Az ezekhez tartozó multiplicitások: $k_2 = 6$, $k_7 = 2$ és $k_6 = 2$. Tehát a válasz a kérdésre: $\frac{10!}{6! \cdot 2! \cdot 2!}$.

1.3. Kombináció

26. Definíció. Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait az n elem k-adosztályú ismétlés nélküli **kombináció**inak nevezzük.

27. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a $\{2, 7, 8\}$ halmaz egy 3-ad osztályú kombinációja.

28. *Megjegyzés.* Részhalmazok felsorolásánál az elemek sorrendje nem számít, mert halmazelméleti szempontból $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

Vegyük észre, hogy egy n-elemű halmaz k-elemű részhalmazának megadása azt jelenti, hogy n elemből kiválasztunk k darabot, és a fenti megjegyzés alapján ezen kiválasztásnál az elemek sorrendje nem számít.

29. Definíció. Egy n elemű halmaz k elemű részrendszereit az n elem k-adosztályú **ismétléses kombináció**inak nevezzük.

30. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a $3, 7, 3, 1, 10, 1, 3$ rendszer egy 7-ed osztályú ismétléses kombinációja.

31. *Megjegyzés.* Az előző definícióban a részrendszer képzése azt jelenti, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk a halmazból. Az elemek sorrendje most sem számít, mivel a rendszerben nem számít az elemek sorrendje.

32. Tétel. *Legyen $k \le n$. Ekkor n elem k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

33. Definíció. Az előző tételben szereplő $\binom{n}{k}$ kifejezést **binomiális együttható**nak nevezzük.

34. Tétel. *Az n elem k-adosztályú ismétléses kombinációinak száma*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

35. Példa. Hányféleképpen tudjuk kitölteni az ötöslottót? (Magyarországon 90 számból 5-öt kell megtippelni.) Mivel a sorsolás után a megjelölt számok sorrendje teljesen irreleváns, így a 90 számból 5 darab kiválasztásánál a sorrend nem számít. Tehát $\binom{90}{5}$-féleképpen tölthető ki egy ötöslottószelvény.

36. Példa. Hányféleképpen osztható szét 100000 forintnyi jutalom 3 dolgozó között, ha mindenki csak 10000-rel osztható összeget kaphat? (Természetesen az is megengedett, hogy valaki nem kap semmit.) Ismétléses kombinációról van szó, mert minden tízezresre ki kell választani egy embert a három közül. Tehát 3-ból választunk 10 helyre, és egy-egy embert nyilván több ezreshez is ki kell választanunk, így a megoldás $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$.

37. Példa. Hány olyan dominó van, amelynek mindkét felén a pontok száma 0-tól 6-ig terjed? Így 7 elemből kell kiválasztani 2-t, de egy elemet mindkét oldalra is kiválaszthatunk, azaz ismétléses kombinációt kell használni. Így $\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28$ dominó van, ami a feladat feltételének eleget tesz.

2. Binomiális tétel

Emlékezzünk vissza a középiskolában is tanult

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \text{ és} \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

azonosságokra. Mint ahogy az a következő tételből látható lesz, ez a 2-es és 3-as kitevő helyett általánosítható tetszőlegesen nagy egész kitevőre.

38. Tétel (Binomiális tétel)**.** *Ha $n \in \mathbb{N}$, továbbá a és b valós számok, vagy valós határozatlanok, akkor*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

vagy rövidebben

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}b^i.$$

Azért, hogy lássuk, a binomiális tétel hogyan kapcsolódik a kombinatorikai problémákhoz, vizsgáljunk meg a jobboldali összegeben fellépő általános $\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$ tagot. Képzeljük el, hogy az n darab $(a+b)$ tényezőt elkezdjük összeszorozni egymással egyesével. Azokat a tagokat számoljuk, ahol i darab b-t, és $n-i$ darab a-t szorzunk össze. Hányféleképpen tehettük ezt meg? Pontosan annyiféleképpen, ahányféleképpen az n darab $(a+b)$ tényezőből ki tudjuk választani az i darab b-t. Ez pedig pontosan $\binom{n}{i}$.

A binomiális együtthatókból felépíthető Pascal-háromszögből azonnal látszódnak a binomiális együtthatók legfontosabb tulajdonságai. Az alábbi ábrán látható a Pascal-háromszög első néhány sora, melyben az $\binom{n}{k}$ értékek vannak feltüntetve.

$n=0,\ k=0$	$\binom{0}{0}$	1
$n=1,\ k=0,1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
$n=2,\ k=0,1,2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
$n=3,\ k=0,1,2,3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n=4,\ k=0,1,2,3,4$	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
$n=5,\ k=0,1,2,3,4,5$	$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1

A binomiális együttható és a Pascal-háromszög legfontosabb tulajdonságait az alábbi tétel foglalja össze.

39. Tétel. *Legyen $k, n \in \mathbb{N}_0$ és $k \leq n$. Ekkor érvényesek az alábbi összefüggések.*

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. *(A háromszög két oldalán 1-esek állnak.)*
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. *(A háromszög tengelyesen szimmetrikus.)*
3. *Ha $0 < k < n$, akkor $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. (A háromszögben bármelyik elem a felette lévő két elem összege, feltéve, hogy van felette két elem.)*
4. *Bármely $n \in \mathbb{N}_0$-ra $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$. (A Pascal-háromszögben az i-edik sor összege 2^{i-1}.)*

Természetesen adódik a kérdés, hogy a kitevő általánosítása után, tudjuk-e tovább általánosítani a problémát, mondjuk a változók számát tekintve. A választ az alábbi tétel adja meg.

40. Tétel (Polinomiális tétel)**.** *Ha $n \in \mathbb{N}$, továbbá $a_1, \ldots, a_k$ valós számok, vagy valós határozatlanok, akkor*

$$(a_1 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}_0 \\ i_1+\ldots+i_k=n}} \frac{n!}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_k!} \cdot a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{i_k}.$$

3. Szitaformula

Könnyen megfigyelhető a halmazokra vonatkozó alábbi állítás.

41. Állítás. *Ha A, B véges halmazok, akkor $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

A fenti állítás szemléletesen könnyen igazolható, ugyanis az $A \cup B$ halmazban azok az elemek vannak, amik legalább az egyikben benne vannak. Így megszámoljuk azokat, amelyek benne vannak A-ban, illetve külön, amik benne vannak B-ben, de mivel a metszetüket kétszer számoltuk, így a metszet elemszámát egyszer le kell vonni, hogy minden elemet csak egyszer számoljunk.

Természetesen a fenti állítás kiterjeszthető több halmazra is.

42. Tétel. *Legyenek $A_1, \ldots A_n$ véges halmazok. Ekkor*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{\substack{\{i_1,\ldots i_r\} \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |\{i_1,\ldots,i_r\}|=r}} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}|.$$

A fenti tétel első ránézésre egyáltalán nem tűnik kényelmesnek. Segíthet, ha megértjük, mi történik a képletben. Van n darab véges halmazunk, és keressük az uniójuk elemszámát. Az $r = 1$ esetén összeadjuk a halmazok elemszámát. Így néhány elemet kétszer számoltunk ezért le kell vonnunk belőle bizonyos elemszámokat, például $r = 2$ esetén a „kettős metszetek” elemszámát. Ezután hozzáadjuk a „hármas metszetek” elemszámát, levonjuk a „négyes metszetek” elemszámát, és ezt folytatjuk, míg el nem jutunk az $r = n$ esethez, ami az összes halmaznak a metszete. A fenti tétel következménye a szitaformula.

43. Tétel (Szitaformula)**.** *Legyenek* $A_1, \dots A_n$ *halmazok a véges* U *univerzum részhalmazai. Ekkor*

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = |U| + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum_{\substack{\{i_1,\ldots i_r\} \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |\{i_1,\ldots,i_r\}|=r}} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}| \,.$$

A szitaformula a 42. Tétel egyenes következménye, ugyanis $\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = |U| - |A_1 \cup \ldots \cup A_n|\,.$

44. Példa. A szegedi tudományegyetem matematika tanszékcsoportja 100 matematika, 200 biológia és 400 informatika szakos hallgatót oktat. Akik egyszerre matematika és biológia szakosak, azoknak a száma 12, a matematika és informatika szakosoké 44, illetve a biológia-informatika szakos hallgatók száma 6. Négy fő végzi egyszerre mind a három szakot. Hány hallgatót oktat a matematika tanszékcsoport?

Jelölje I, B, M rendre az informatika, biológia és matematika szakos hallgatók halmazát. Ekkor a a 42. Tétel szerint

$$\begin{aligned} |I \cup B \cup M| &= |I| + |B| + |M| - |I \cap B| - |I \cap M| - |B \cap M| + |I \cap B \cap M| \\ &= 400 + 200 + 100 - 6 - 44 - 12 + 4 = 642. \end{aligned}$$

1. feladatsor – Kombinatorika

1.1. Feladat. Adjunk meg egy-egy hétköznapi példát, ahol az események számát

(a) ismétlés nélküli variációval,
(b) ismétléses variációval,
(c) ismétlés nélküli kombinációval,
(d) ismétléses kombinációval

lehet meghatározni.

1.2. Feladat. Hányféleképpen állíhatunk sorba 5 fekete, 3 piros és 4 zöld golyót?

1.3. Feladat. Hányféleképpen helyezhetünk el nyolc embert három szobában, ha a szobák egy, kettő és öt személyesek?

1.4. Feladat. Öt diák vizsgázik. Hányféle eredménye lehet a vizsgának, ha tudjuk, hogy egy diák sem bukott meg, és a vizsgaértékelés ötfokozatú?

1.5. Feladat. Egy étteremben 4 munkatárs ebédel. Az étlapon 20 különböző étel van felsorolva. Hányféleképpen rendelhetnek, ha mindenki pontosan egy ételt rendel?

1.6. Feladat. Egy 6 fős röplabda csapatban egy feladót és egy ütőjátékost választanak. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha egy ember nem lehet egyszerre feladó és ütő is?

1.7. Feladat. Egy bizottságnak 7 tagja van, elnököt és elnökhelyettest választanak. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a tagok egyike sem vállalhat egynél több feladatot?

1.8. Feladat. Egy boltban 6-féle CD-t lehet kapni. Hányféleképpen lehet 4 CD-t vásárolni, ha egyféle CD-ből többet is vehetünk?

1.9. Feladat. Egy üzletben ötféle szaloncukrot lehet kapni: kókuszos, vajkaramellás, zselés, gumicukros és marcipános ízűt. Hányféleképpen lehet tíz szaloncukrot vásárolni, ha minden szaloncukorból van legalább tíz?

1.10. Feladat. Hányféleképpen választhatunk 30 darabot 100, 200 és 500 forintos bankjegyekből, ha feltételezzük, hogy mindegyikből van legalább 30 darab?

1.11. Feladat. Egy turistacsoport egy város 20 nevezetességét szeretné meglátogatni 4 nap alatt. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha 1 nap alatt akár az összes nevezetesség megtekinthető, és számít az, hogy egy adott napon milyen sorrendben tekintik meg a látnivalókat?

1.12. Feladat. Összesen 15 különböző csomagot kell házhoz vitetnünk 3 kézbesítővel. Hányféleképpen osztható szét a munka, ha egy kézbesítő akár 15 csomagot is elbír, és számít a kézbesítési sorrend is?

1.13. Feladat. Hányféleképpen helyezhetünk el 24 különböző könyvet egy 7-polcos szekrényben, ha bármelyik polcon elfér mind a 24 könyv?

1.14. Feladat. Az ötös lottón 90 számból 5 számot húznak ki. Hányféle 3-találatos szelvény lehetséges egy héten? (Egy szelvényen 1-től 90-ig szerepelnek a számok, melyek közül a fogadó ötöt jelöl meg.)

1.15. Feladat. Egy négytagú társaság a következőképpen akar feljutni egy tetőteraszra: ketten lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után mászva a villámhárítón jutnak fel. Hányféle sorrendben érkezhetnek meg a teraszra, ha feltesszük, hogy a lifttel utazó két személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés.

1.16. Feladat. Hat óvodás és öt iskolás gyerek közül szeretnénk úgy kiválasztani négy gyereket, hogy legalább két óvodás legyen közöttük. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

1.17. Feladat. Húsz láda áruból 15 láda első osztályú, a többi másodosztályú. Hányféleképpen választhatunk ki 5 ládát úgy, hogy legfeljebb 2 másodosztályú legyen köztük?

1.18. Feladat. Az ajándékboltban ötféle mesekönyv, háromféle csokoládé és hatféle játék kapható. Hányféleképpen vásárolhat egy szülő gyermekének 4 különböző ajándékot úgy, hogy pontosan 2 mesekönyv legyen köztük?

1.19. Feladat. Egy csomag francia kártya 52 lapból áll, 4-féle színből 13-13 lapot tartalmaz.

(a) Hányféleképpen húzhatunk ki egy csomag francia kártyából négy olyan lapot, amelyek közül pontosan két lap színe egyezik meg?
(b) Hányféleképpen húzhatunk ki négy olyan lapot, amelyek között pontosan két szín fordul elő?

1.20. Feladat. Van 2 sárga, 3 fehér és 1 lila golyónk. Hányféleképpen állíhatunk össze ezekből egy 5 golyóból álló sorozatot?

1.21. Feladat. Hányféleképpen ültetheti le Hófehérke a hét törpét egy padra úgy, hogy Tudor és Morgó ne üljön egymás mellett?

1.22. Feladat. Az a, b, c, d, e, f betűk permutációi között hány olyan van, amelyben az a, b, c betűk nem egymás mellett állnak? (Bármely kettő állhat egymás mellett, de mind a három már nem!)

1.23. Feladat. Hányféleképpen lehet 5 (egyforma) fehér és 6 (egyforma) zöld golyót úgy sorbarendezni, hogy két fehér ne kerüljön egymás mellé?

1.24. Feladat. Egy állatszelídítő 5 oroszlánt és 4 tigrist szeretne bevezetni egymás után a porondra úgy, hogy 2 tigris nem jöhet egymás után. Hányféleképpen teheti ezt meg? (Az állatszelídítő természetesen meg tudja különböztetni az állatait.)

1.25. Feladat. Hány olyan (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a KARIKA szó betűiből, ahol 2 magánhangzó nem kerülhet egymás mellé?

1.26. Feladat. Hányféle olyan "szó" képezhető a kombinatorika szó betűiből, melyben nem áll egymás mellett két

(a) mássalhangzó,
(b) magánhangzó?

1.27. Feladat. Hányféle sorrendben haladhat át a forgóajtón egy 8 házaspárból álló társaság, ha a házastársak közvetlenül egymás után mennek?

1.28. Feladat. Öt házaspár foglal helyet egy kerek asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk azonosnak, ha mindenkinek ugyanaz a bal-, illetve jobboldali szomszédja.)

1.29. Feladat. Öt házaspár foglal helyet egy kör alakú asztalnál. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két férfi, sem két nő nem ülhet egymás mellé.

1.30. Feladat. Mi a $(3x^2 + \frac{2}{x})^6$ kifejezésben a konstans tag a hatványozás elvégzése és a rendezés után?

1.31. Feladat. Mi lesz x^{18} együtthatója az $(1 + x^3 - x^4)^{12}$ polinomban a hatványozás elvégzése és a rendezés után?

1.32. Feladat. Egy kutatóintézetben 67-en dolgoznak. Angolul 47-en, németül 35-en, franciául 20-an beszélnek, németül és angolul 23-an, angolul és franciául 12-en, németül és franciául 11-en, mind három nyelven 5-en beszélnek. Hányan vannak, akik egy nyelvet sem beszélnek?

1.33. Feladat. Egy 50 fős osztályból 25-en járnak matematika, 19-en fizika és 30-an kémia szakkörre. 10-en járnak matematika és fizika, 12-en matematika és kémia, 16-an fizika és kémia szakkörre, valamint 8-an járnak mindhárom szakkörre. Hányan vannak, akik egyik szakkörre sem járnak?

1.34. Feladat. Hányféleképpen festhetünk ki n szobát 2-féle színnel, ha minden színt legalább egyszer felhasználunk?

1.35. Feladat. Hányféleképpen festhetünk ki n szobát 3-féle színnel, ha minden színt legalább egyszer felhasználunk?

1. feladatsor – Kombinatorika
MEGOLDÁSOK

1.1. Feladat.

1.2. Feladat. $\dfrac{(5+3+4)!}{5!\,3!\,4!}$

1.3. Feladat. $\dfrac{8!}{1!\,2!\,5!} = \binom{8}{5}\binom{3}{2}$

1.4. Feladat. 4^5

1.5. Feladat. 20^4

1.6. Feladat. $6 \cdot 5$

1.7. Feladat. $7 \cdot 6$

1.8. Feladat. $\binom{6+(4-1)}{6}$

1.9. Feladat. $\binom{5+(10-1)}{10}$

1.10. Feladat. $\binom{3+(30-1)}{30}$

1.11. Feladat. $\dfrac{(20+(4-1))!}{(4-1)!} = 20!\binom{20+(4-1)}{20}$

1.12. Feladat. $\dfrac{(15+(3-1))!}{(3-1)!} = 15!\binom{15+(3-1)}{15}$

1.13. Feladat. $\dfrac{(24+(7-1))!}{(7-1)!} = 24!\binom{24+(7-1)}{24}$

1.14. Feladat. $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$

1.15. Feladat. $\binom{4}{2}3!$

1.16. Feladat. $\binom{6}{2}\binom{5}{2} + \binom{6}{3}\binom{5}{1} + \binom{6}{4}\binom{5}{0}$

1.17. Feladat. $\binom{15}{3}\binom{5}{2} + \binom{15}{4}\binom{5}{1} + \binom{15}{5}\binom{5}{0}$

1.18. Feladat. $\binom{5}{2}\binom{9}{2}$

1.19. Feladat. .

(a) $\binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{1}\binom{13}{1} = 4 \cdot 3 \cdot 13^2 \cdot \binom{13}{2}$

(b) $\binom{4}{2}\left[2\binom{13}{1}\binom{13}{3}+\binom{13}{2}\binom{13}{2}\right]$

1.20. Feladat. $\frac{5!}{2!\,3!}+\frac{5!}{2!\,2!\,1!}+\frac{5!}{1!\,3!\,1!}$

1.21. Feladat. $7!-6!\cdot 2$

1.22. Feladat. $6!-4!\,3!$

1.23. Feladat. $\binom{7}{5}$

1.24. Feladat. $\binom{6}{4}4!\,5!$

1.25. Feladat. $\binom{4}{3}\frac{3!}{2!}\frac{3!}{2!}=4\cdot 3\cdot 3$

1.26. Feladat. .

(a) $\binom{7}{7}\frac{6!}{2!\,2!\,2!}\frac{7!}{2!}$

(b) $\binom{8}{6}\frac{6!}{2!\,2!\,2!}\frac{7!}{2!}$

1.27. Feladat. $8!2^8$

1.28. Feladat. $\frac{5!}{5}2^5$

1.29. Feladat. $\frac{5!}{5}2$

1.30. Feladat. $\binom{6}{4}3^2 2^4$

1.31. Feladat. $\frac{12!}{6!\,6!\,0!}-\frac{12!}{2!\,3!\,7!}$

1.32. Feladat. 6

1.33. Feladat. 6

1.34. Feladat. 2^n-2

1.35. Feladat. $3^n-\binom{3}{2}2^n+3$

Kombinatorikai feladatok, 1-2. gyakorlat.

1. Feladat. Hányféleképpen tudunk 6 különböző könyvet sorba rendezni a könyvespolcon?

2. Feladat. Hányféle különböző sorrendje van a „MATEMATIKA” szó betűinek?

3. Feladat. Hányféleképpen lehet egy 52 lapos póker-paklit megkeverni?

4. Feladat. Hányféleképpen tudjuk kitölteni az ötöslottót?

5. Feladat. Hány olyan dominó van, amelynek mindkét felén a pontok száma 0-tól 6-ig terjed?

6. Feladat. Hányféleképpen osztható szét 10000 forintnyi jutalom 3 dolgozó között, ha mindenki csak 1000-rel osztható összeget kaphat?

7. Feladat. Hány különböző négybetűs szó képezhető a „SAJTÓ” szó betűiből?

8. Feladat. Egy bajnokságon 8 csapat indult. Hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón?

9. Feladat. Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt?

10. Feladat. Hányféleképpen választható ki 10 tanácstagból egy elnök és egy elnökhelyettes?

11. Feladat. Hányféleképpen állíthatunk sorba 4 lila, 2 piros és 3 kék golyót?

12. Feladat. Egy boltban 6-féle CD-t lehet kapni. Hányféleképpen lehet 4 CD-t vásárolni, ha egyféle CD-ből többet is vehetünk?

13. Feladat. Egy étteremben 3 munkás ebédel. Az étlapon 10 különböző étel van felsorolva. Hányféleképpen rendelhetnek, ha mindenki pontosan egy ételt rendel?

14. Feladat. Hányféleképpen választhatunk 20 darabot 100 és 200 forintos érmékből, ha mindegyikből van legalább 20 darab?

15. Feladat. Hat diák vizsgázik. Hányféle eredménye lehet a vizsgának, ha tudjuk, hogy egy diák sem bukott meg.

16. Feladat. Artúr király és 12 lovagja hányféleképpen ülhetett le a kerekasztalhoz?

17. Feladat. Legyen A egy adott négyelemű, B pedig egy adott háromelemű halmaz. Hány $A \to B$ leképezés van?

18. Feladat. Hányféleképpen rakhatók sorba a „PAPLAK” szó betűi?

19. Feladat. A cukrászdában nyolcféle sütemény kapható (és mindegyikből van bőven). Hányféleképpen vásárolhatunk egyszerre öt süteményt?

20. Feladat. Egy öttagú társaság a következő haditervet dolgozza ki arra, hogy mind az öten feljussanak a tetőteraszra: hárman a (háromszemélyes) lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után a villámhárítón mászva jutnak fel. Hány különböző sorrendben érkezhetnek meg a tetőteraszra, ha feltesszük, hogy a liften utazó három személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés?

21. Feladat. Hányféle 3 találatos szelvény lehet egy héten az ötöslottón?

22. Feladat. Harminc láda paradicsomból 20 elsőosztályú, a többi másodosztályú. Hányféleképpen választhatunk ki 8 ládát úgy, hogy legfeljebb 3 másodosztályú legyen köztük?

23. Feladat. Az ajándékboltban négyféle mesekönyv, ötféle édesség és 12-féle játék kapható. Hányféleképpen vásárolhatunk 6 ajándékot úgy, hogy pontosan 2 játék legyen benne.

24. Feladat. Egy társaság hat férfiból és öt nőből áll. Hányféleképpen lehet közülük két férfit és két nőt a nyitótánchoz kiválasztani? (A sorrend nem számít.)

25. Feladat. Az a, b, c, d, e, f betűk permutációi között hány olyan van, amelyben az a, c, f betűk nem egymás mellett állnak?

26. Feladat. Hányféleképpen ülhet le a hét törpe egy padra úgy, hogy Tudor és Vidor ne egymás mellett üljön?

27. Feladat. Hányféle sorrendben haladhat át egy ajtón 6 házaspár, ha a házastársak közvetlenül egymás után mennek be?

28. Feladat. Négy házaspár egy kör alakú asztalhoz akar ülni úgy, hogy a házaspárok egymás mellé ülnek, illetve a férfiak és nők felváltva ülnek. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

29. Feladat. Összesen 16 különböző csomagot kell házhoz vitetnünk 4 kézbesítővel. Hányféleképpen osztható szét a munka, ha egy kézbesítő akár 16 csomagot is elbír, és számít a kézbesítési sorrend.

30. Feladat. Egy turistacsoport egy város 18 nevezetességét szeretné megnézni 5 nap alatt. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha 1 nap alatt akár az összes nevezetesség megtekinthető, és számít az, hogy egy adott napon milyen sorrendben tekintik meg a látnivalókat?

31. Feladat. Hányféleképpen állíthatunk elő 3 kék, 2 piros és 5 fekete golyóból egy 9 golyóból álló sorozatot?

32. Feladat. Hányféleképpen lehet 4 fehér és 6 zöld golyót sorba rendezni úgy, hogy két fehér ne kerüljön egymás mellé?

33. Feladat. Egy motoros felvonuláson 10 chopper és 13 robogó akar felvonulni úgy, hogy két chopper ne menjen közvetlenül egymás után. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

34. Feladat. Hány olyan (nem feltétlenül értelmes) szó képezhető a „KOMBINATORIKA” szó betűiből, melyben nem áll egymás mellett két magánhangzó?

35. Feladat. Hányféleképpen húzhatunk ki egy csomag francia kártyából négy olyan lapot, melyek közül pontosan két lap színe egyezik meg?

36. Feladat. Hányféleképpen húzhatunk ki egy csomag francia kártyából négy olyan lapot, hogy pontosan két szín jelenik meg a kártyákon a négyből?