
A hőtranszport modellezés elméleti alapjai

Tari Csilla – Szanyi János – Kovács Balázs

Bevezetés

- Az energia egyik formája a hő, vagy hőmennyiség
- Ennek földbeli eloszlásával és mennyiségének vizsgálatával a geotermika foglalkozik
- Mivel a Föld hőmérséklet-eloszlása nem homogén, ezért az egyes régiók között hőátmenet/hőterjedés valósul meg. A hőátmenet a különböző hőmérsékletű testek közötti energia átmenet hőenergia formájában.
- A hő (hőmennyiség) egyik testről vagy helyről más testre vagy helyre lényegében háromféle módon juthat. Például a forró teába tett kanál kiálló vége a **hővezetés (kondukción)** folytán melegszik fel, az alulról melegített víz felső rétegei elsősorban a víz áramlásával kapcsolatos **hőáramlás (hőkonvekció)** miatt válnak meleggé, az izzólámpa vagy napsugarak útjába helyezett hőmérő pedig túlnyomórészt a **hősugárzás (radiáció)** miatt mutat felmelegedést.

I. Hővezetés - Kondukción

Bevezetés

- **Hővezetés** Hővezetés során a hő valamely anyagban a melegebb helyről a hidegebb felé úgy terjed, hogy makroszkopikus anyagáramlás nem jön létre; vagyis az anyagban a molekulák, ill. atomok rendezett mozgást nem végeznek, hanem rendezetlen hőmozgásuk energiájának egy részét ütközések útján adják át a szomszédos részecskéknak.
- A földkéreg szilárd közeteiben a hő túlnyomóan vezetés útján terjed.

I. Hővezetés - Kondukción

Furrier-törvény

- **Kísérlet:** Két, párhuzamos, egymástól L távolságra lévő, dt hőmérséklet-különbségű szilárd falfelület között a vezetés útján továbbadott hőmennyiség

Egyenesen arányos

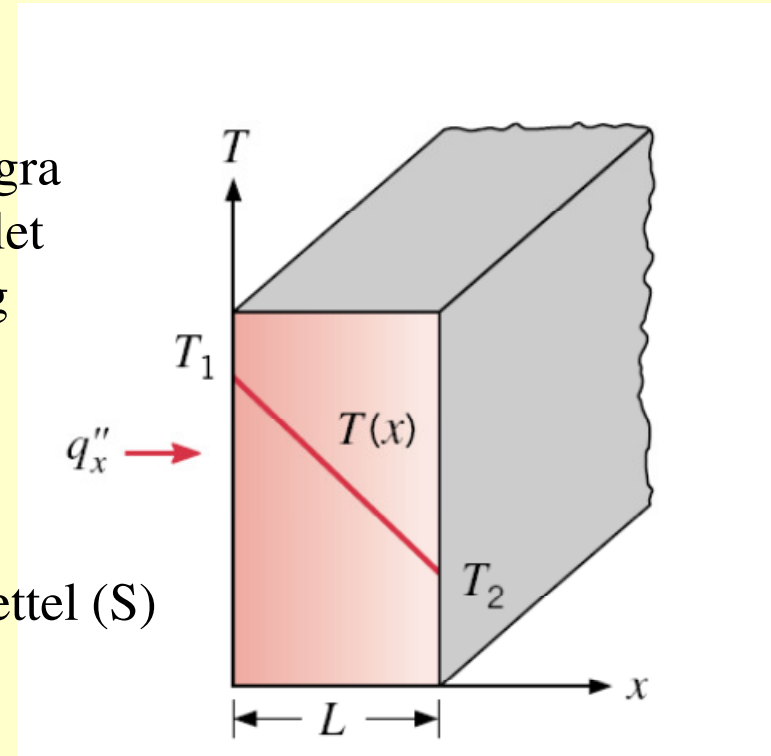
- hőmérsékleteséssel (dT)
- idővel (t)
- hő terjedésére merőleges keresztmetszettel (S)
- hővezetési tényezővel (λ_h)

Fordítottan arányos

- falfelületek távolságával (l)

// feladatok hőáram/ pm. Hővezetési tényezője

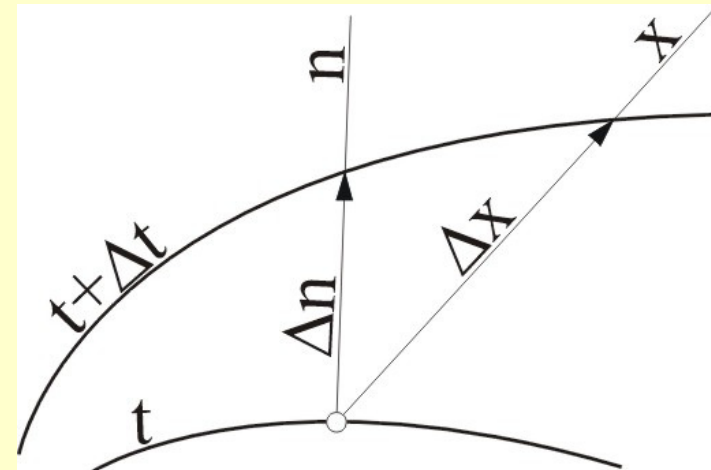
$$Q = -\lambda_h \cdot S \cdot t \frac{dT}{l}$$



I. Hővezetés - Kondukción

Hőmérsékleti-gradiens

- **Izoterma** Az azonos hőmérsékletű pontok mértani helye az izoterma. Mivel a tér egy pontjában nem lehet egyszerre két különböző hőmérséklet ezért az izotermák sohasem metszhetik egymást. A hőmérséklet változás, egy testben, mindig az izotermára merőleges felület pontjai között a legnagyobb (az izotermára fektetett normálison).
- **Hőmérséklet gradiens:** a hőmérséklet változás és az izotermák normálisában vett távolság hányadosa. A hőmérséklet gradiens olyan vektor melynek iránya az izotermikus felület normálisának irányával egyezik meg



$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{\partial t}{\partial n} = \text{grad } t$$

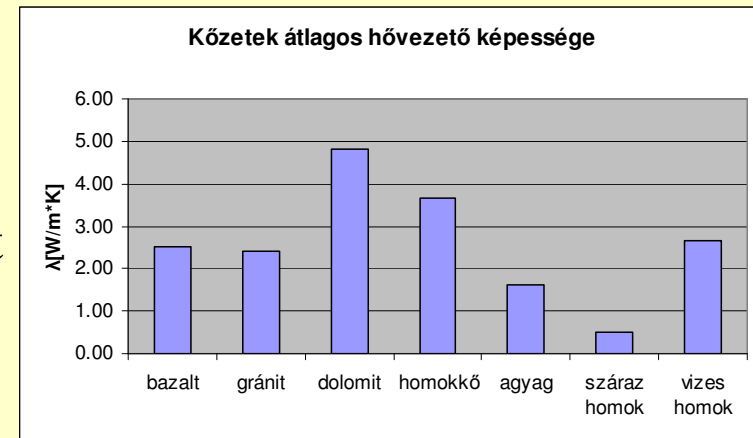
I. Hővezetés - Kondukción

Hővezetési tényező

- A hővezetési tényező egy arányossági tényező a test hővezető képességére jellemző szám, skaláris mennyiség. A hővezetési tényező tehát megadja az izotermikus felületre merőleges 1 m vastagságú réteg, 1 m² felületén egységnyi idő alatt, 1 K hőmérséklet különbség hatására, vezetéssel átáramlott hőmennyiséget.

$$\lambda \left[\frac{W}{mK} \right] = \frac{Q}{A \tau \text{ grad } t}$$

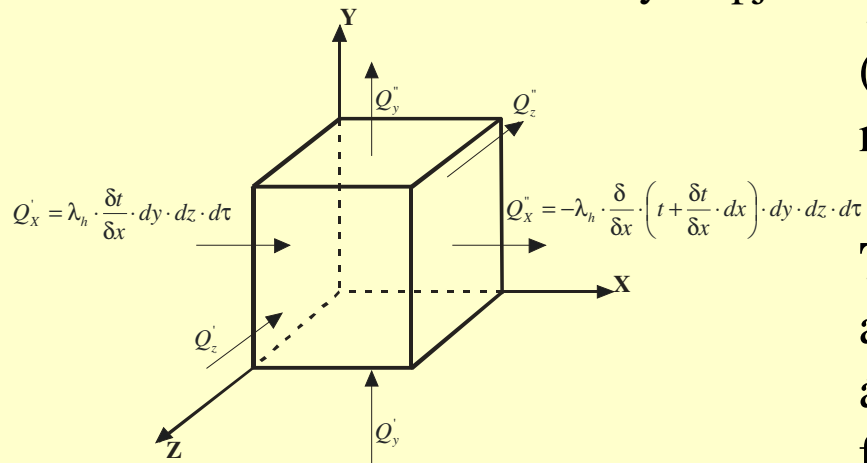
- Értéke hőmérsékletfüggő
 $\lambda = \lambda_0(1 + b \cdot t)$
ahol: λ_0 adott hőmérsékletre vonatkoztatott hővezetési tényező
b kísérletileg meghatározható arányossági tényező



I. Hővezetés - Kondukción

Hővezetés differenciálegyenlete

- **Cél:** A térben és időben változó hőmérsékletmező leírása a termodinamika I. és II. főtétele és a Fourier-törvény alapján



Termodinamika I. főtétele: $dQ = dU + dW$
(rendszerrel közölt energia = belső energia növekedés + rendszer által végzett munka)

Termodinamika II. főtétele: A hő mindig a magasabb hőmérsékletű hely felől áramlik az alacsonyabb hőmérsékletű hely felé

- Vegyük az ábrán látható, dx, dy, dz oldalú, szilárd anyagban található elemi térfogati hasábot, és számoljuk ki a ki, és beáramló hőmennyiségek összegét.

I. Hővezetés - Kondukción

Hővezetés differenciálegyenlete

- A Fourier-törvény szerint az x tengely irányában, a $dz \cdot dy$ felületen, melynek hőmérséklete t , igen kis $d\tau$ idő alatt beáramló hőmennyiség:

$$Q'_x = -\lambda_h \cdot \frac{\delta t}{\delta x} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$$

- Mivel a hőmérsékleti gradiens a térelemben helyileg és időben is változik. A bekövetkezett változás dx út alatt:

$$t + \frac{\delta t}{\delta x} \cdot dx$$

- Ugyanezen tengely mentén a térfogatelemből $d\tau$ idő alatt a kiáramló hőmennyiség:

$$Q''_x = -\lambda_h \cdot \frac{\delta}{\delta x} \cdot \left(t + \frac{\delta t}{\delta x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$$

- A térfogatelemben x irányban felhalmozódott hőmennyiség:

$$dQ_x = Q'_x - Q''_x = \lambda_h \frac{\delta^2 t}{\delta x^2} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$$

I. Hővezetés - Kondukción

Hővezetés differenciálegyenlete

- A térelem felmelegedése $d\tau$ idő alatt következik be, tehát a dQ_x hőmérséklet idő szerinti deriváltjával így írható fel:

$$dQ_x = \left(\frac{\delta}{\delta \tau} \right)_x$$

- Az elemi hasámban felhalmozódott hőmennyiség felírható a **fajhő** segítségével is. A **fajhő** az anyagi minőségre jellemző fizikai mennyiség, ami megmutatja, hogy egységnyi tömegű anyag 1°C -kal való felmelegítéséhez szükséges hőmennyiség.

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dt} \quad \text{Mértékegysége: } \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \right]$$

- A $\frac{dt}{d\tau} \rightarrow \frac{\partial t}{\partial \tau}$ határátmenetet figyelembe véve a fentebbi egyenletek alapján:

$$c \cdot \rho \cdot dV \cdot \left(\frac{\delta t}{\delta \tau} \right)_x = \lambda_h \frac{\delta^2 t}{\delta x^2} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

I. Hővezetés - Kondukción

Hővezetés differenciálegyenlete

- Az egyenletet rendezve megkapjuk a hővezetés differenciálegyenletét egydimenziós esetre:

$$\left(\frac{\delta t}{\delta \tau} \right)_x = \frac{\lambda_h}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\delta^2 t}{\delta x^2}$$

- Hasonlóképpen felírhatóak az y és z irányú hőmennyiségek:

$$\left(\frac{\delta t}{\delta \tau} \right)_x = \frac{\lambda_h}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\delta^2 t}{\delta x^2}$$

$$\left(\frac{\delta t}{\delta \tau} \right)_z = \kappa \cdot \frac{\delta^2 t}{\delta z^2}$$

- Ahol, κ a **hődiffúzitási tényező**, ami jellemzi az egyenlőtlen hőmérséklet-eloszlású test hőmérséklet kiegyenlítésének sebességét.

$$\kappa = \frac{\lambda_h}{\rho \cdot c} \quad \text{Mértékegysége: } \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

I. Hővezetés - Kondukción

Hővezetés differenciálegyenlete

- A hővezetés differenciálegyenlete háromdimenziós esetre megadja az összefüggést a hőmérséklet időbeli és térbeli változásai között

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = \kappa \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

- Ha ismert a testben a hőmérséklet-eloszlás $t=0$ pillanatban (kezdeti feltétel), továbbá a test határfelületén a környezettel való hőcserélődés mértéke (határfeltétel), akkor az egyenlet megoldása szolgáltatja a hőmérsékleteloszlást bármely későbbi időpillanatban

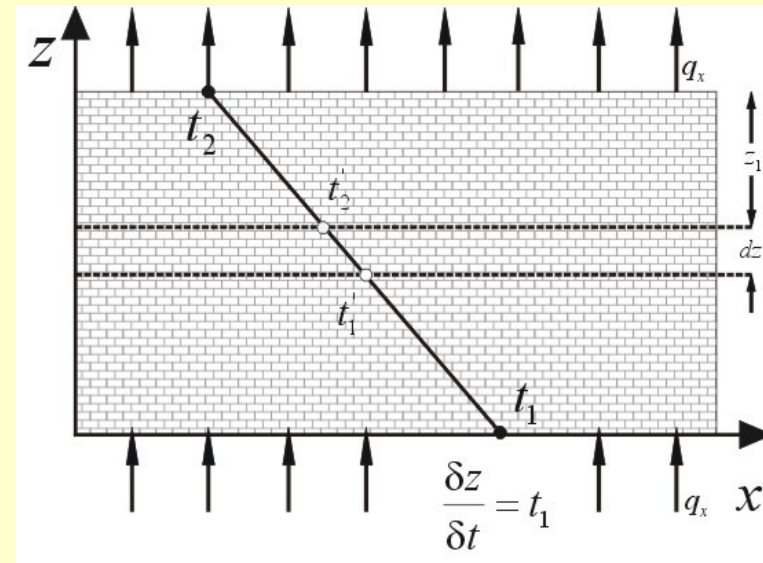
I. Hővezetés - Kondukción

Hővezetés differenciálegyenlete - egyszerűsítések

- Egyrétegű homogén medence állandósult állapotú hővezetése

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

Vegyük tekintetbe egy z mélységű kétdimenziós homogén medencét. A medence hővezetési tényezője egységes λ . A medence hőmérséklete a medence tetején állandó t_2 , míg a medence alján állandó t_1 . A hőmérséklet csupán a z tengelyre merőlegesen változik, vagyis az izotermikus felületek az x tengellyel párhuzamosak.



A falon belül a fal felületétől x távolságban kiválasztott dx vastagságú réteg esetén:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad \text{ahol } q \text{ az egységnyi felületre jutó hőfluxus } W/m^2$$

I. Hővezetés - Kondukción

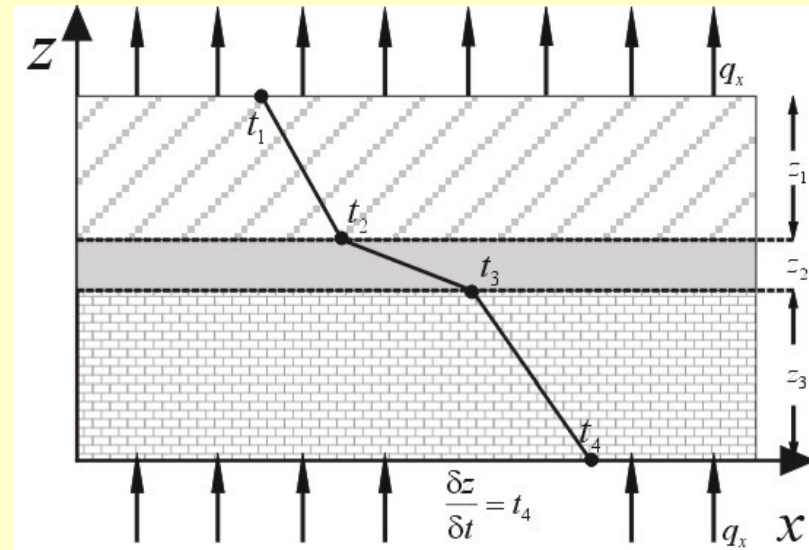
Hővezetés differenciálegyenlete - egyszerűsítések

- **többrétegű medence állandósult állapotú hővezetése**

- Vegyünk egy z mélységű kétdimenziós három rétegből álló medencét. A rétegek szorosan illeszkedjenek egymáshoz. Az első réteg vastagsága z_1 , a másodiké z_2 , a harmadiké z_3 . A rétegek hővezetési tényezői legyenek λ_1 , λ_2 , λ_3 . A rétegek felületeinek hőmérséklete t_1 , t_2 , t_3 , t_4

- A stacioner hőáram esetében mivel minden rétegen ugyanaz a hőmennyiség áramlik át, így a következő összefüggések írhatók fel:

$$q_h = \frac{A \cdot (T_1 - T_4)}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3}}$$



Egy réteges fal összes ellenállása egyenlő az egyes ellenállások összegével

II. Hőáramlás - Konvekció

Bevezetés

- **Hőáramlás** során a hő a fluidum makroszkopikus részeinek áramlása, helyváltoztató mozgása következtében terjed, vagyis anyagáramlással járó energiatranszport. Megkülönböztetünk természetes, vagy **szabad konvekciót** - amikor a közeg mozgását a különböző hőmérsékletű helyek között kialakuló sűrűség különbség hozza létre - és **kényszerkonvekciót**, amikor a fluidumot külső behatással kényszerítjük mozgásra.

- **Hőátadási tényező** Egy folyadékot határoló szemcsén átjutó hőáram, megegyezik a folyadékba időegység alatt bevezettet vagy onnan elvont hőmennyiséggel.

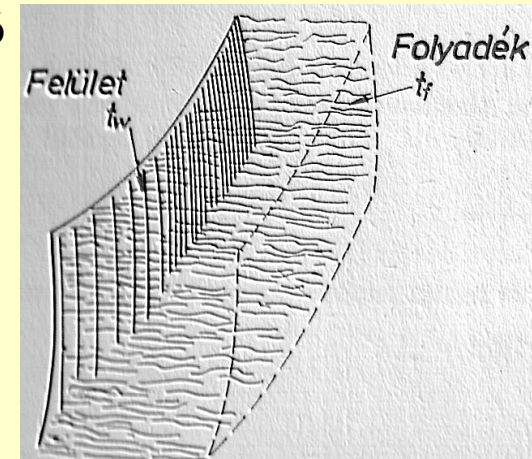
Ha a szemcse hőmérséklete: t_w

És a folyadék hőmérséklete: t_f **Akkor**

$$\dot{Q} = \alpha(t_w - t_f)A \quad \text{W.}$$

Ahol α = hőátadási tényező ($\text{W/m}^2 \cdot \text{K}$), és a folyamatot

meghatározó paraméterektől függ (folyadék fizikai tulajdonságai, áramlási viszonyok)



II. Hőáramlás - Konvekció

Hőátadási tényező

- **Hőátadási tényező meghatározása** A hőátadás fenti képlete annál kevésbé helytálló minél nagyobb a hőmérsékletek különbsége és a felület nagysága. Ezért célszerű bevezetni a lokális hőátadási tényezőt: α_x ami a hely függvényében mondja meg a hőátadási viszonyokat.

$$d\dot{Q} = \alpha_x(t_w - t_f)dA$$

A folyamat és a közeg megnevezése	α (W/m ² K)
Gáz természetes konvekció esetén	6-35
Gáz csövekben áramoltatva	10-350
Víz természetes konvekció esetén	110-1100
Víz csövekben áramoltatva	600-12000
Forrásban lévő víz	2500-45000
Hártyás kondenzáció	4000-15000
Csepp kondenzáció	30000-120000

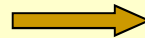
Ez a hőátadás Nusslet függvénye

A hőátadási tényező megadja, hogy 1m² hőátadó felületen, 1 K hőmérséklet különbség hatására mekkora hőáram alakul ki, illetve mennyi hő adódik át időegység alatt.

II. Hőáramlás - Konvekció

Hőátadási tényező

- A fentebbi törvény bevezetésével a konvekciós hőátadás számítását csak látszólagosan tettük egyszerűvé, mert a problémák összességét az α tényező meghatározásába vittük át.



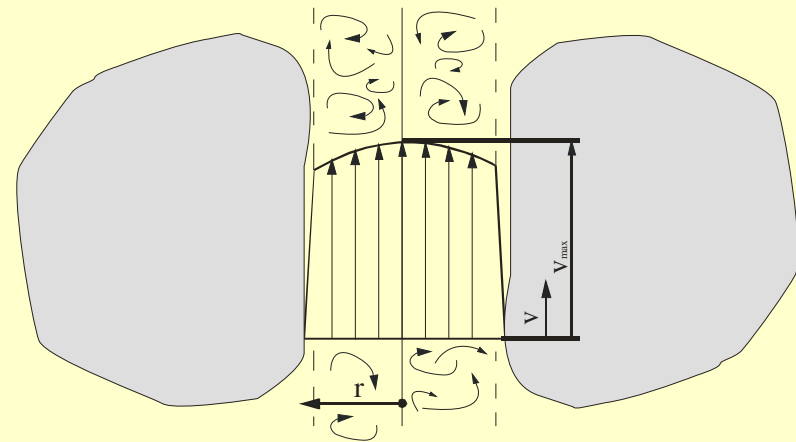
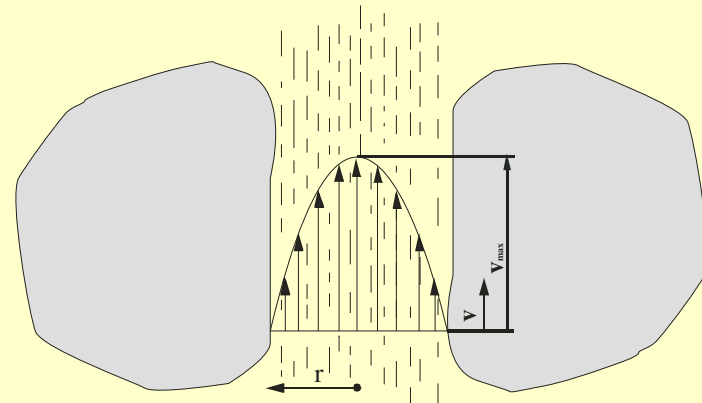
A hőátadási tényező igen sok anyagi, áramlástan és termodinamikai tényezőtől, illetve ezek kölcsönhatásától függ. Szükséges az áramlás **kvalitatív ismerete**

- **Természetes áramlás:** Az áramlást döntően a hőmérséklet és sűrűség különbségek adják
- **Kényszerített áramlás:** Ha az áramlás szivattyúk ventillátorok stb. okozzák

II. Hőáramlás - Konvekció

Áramlások fajtái

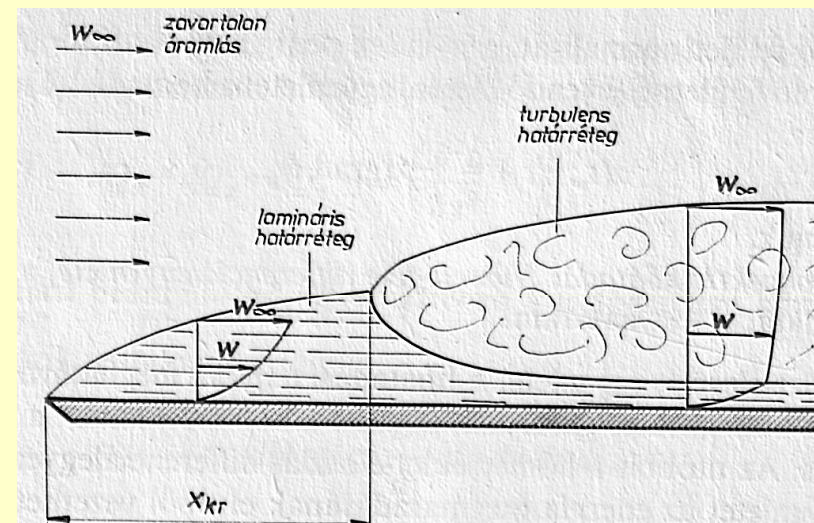
- **Lamináris áramlásnál** az összes mozgásban lévő részecskék sebességvektora párhuzamos, eloszlása parabolatörvény szerint változik. Az áramlási sebesség rétegesen, a fal menti nulla értéktől a maximális értékig, parabolikus eloszlású
- **Turbulens áramlás:** Itt a részecskék mozgáspályája tetszőleges, tehát a fő áramlási irányban történő mozgás mellett többek között a falra merőleges elmozdulással is számolni kell. Az áramlási sebességprofil hatványgörbe. Turbulens áramkép kialakulása után a falra, illetve a falról a hőt a vezetés mellett első sorban az örvénylő részecskék közvetlen hőtranszportja biztosítja. //Lásd mozi 14.



II. Hőáramlás - Konvekció

Hőátadás áramló folyadékot határoló felület mentén

- A határoló felület jelentősége: hőátadó felület + áramlás tulajdonságait befolyásoló geometriai test
- Az áramló fluidumnak azt a rétegét, ahol a fal közelsége az áramkép ki alakulására hatással van, *hidraulikai határrétegnek* nevezzük. Határrétegnek, hidraulikai értelemben, az áramlás főirányában vett sebesség komponensek intenzív változásának rétegvastagságát nevezzük.
- A határréteg vastagságának definíciója egyébként önkényes. A réteg határát ott szokás kijelölni, ahol az áramlási sebesség 99 %-os pontossággal közelíti az áramló fluidum főtömegét. A kialakuló áramkép és a hőmérséklet eloszlás között szoros összefüggés van.



II. Hőáramlás - Konvekció

A Konvektív hőáramlás differenciálegyenlete

- Vegyünk egy elemi hasábot a mozgásban lévő folyadékban. A mozgó folyadékelem hőmérsékletének teljes változása két tényezőből tevődik össze. Egyrészt időbeli változásból, másrészt a tér egyik pontból a másik pontba való elmozdulás következtében fellépő változásból.

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{\delta T}{\delta \tau} + \frac{\delta T}{\delta x} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \frac{\delta T}{\delta y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\delta T}{\delta z} \cdot \frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{w} \cdot \text{grad}T$$

- Az eddigiekben leírtak alapján a konvektív hőátadást meghatározó paraméterek:

$$\alpha = f(w, t_w, t_f, \lambda, c_p, Q, \mu, \Phi, l_1, l_2 \dots)$$

- Ahol: **w**=áramlási sebesség eloszlása
μ=dinamikai viszkozitási tényező, és a folyadék fal határán fellépő surlódástól függ
Φ=határoló felület geometriája (l_1, l_2 stb. a geometriai méretek)

II. Hőáramlás - Konvekció

A Konvektív hőáramlás differenciálegyenlete

- Ebből következik, hogy az áramló folyadékban a hőmérsékleti tér a sebességtől is függ

Ezért a mozgó folyadékelem hőmérsékletének teljes változásához szükséges a folyadékmozgás differenciálegyenletének levezetése (az egyenletben szereplő ismeretlen w_x, w_y, w_z változóknak, az-az a térelemben áramló folyadék x, y, z irányú sebesség összetevőjének meghatározása)

Elv: Newton II. főtétele $F = m \cdot a$

Amelyhez figyelembe kell venni az elemi hasábra gyakorolt erőket, de ettől itt eltekintünk

III. Hősugárzás - Radiáció

- Hősugárzás útján hőenergia juthat egyik testről a másikra anélkül, hogy a testek közti teret anyag töltene ki, vagy hogy az anyagi közeg észrevehetően felmelegedne. A hő a sugárzó test molekuláinak vagy atomjainak hőmozgása következtében kibocsátott különböző hullámhosszú elektromágneses rezgések formájában terjed.

- Hőtermelés esetén az elemi hasámban a hőmennyiség: $dQ = A \cdot dV \cdot dt$

Ahol A az egységnyi térfogatban egységnyi idő alatt termelt hőmennyiség

- A fajhőre vonatkozó ismereteket felhasználva felírható a hőmérséklet változása hőtermelés esetén: $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{A}{c \cdot \rho}$

- Vagyis a hővezetés differenciálegyenlete abban az esetben, ha hőtermelés is van:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \kappa \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{A}{c \cdot \rho}$$

IV. Hőátadás alapegyenlete

A hőátadási folyamat matematikai leírásának problémái

- A hőátadási folyamatok matematikai leírásához nagyon sok egyszerűsítő feltételt vettünk figyelembe (pl. a folyadék összenyomhatatlan, az áramlás állandósult, a folyadék hőmérséklete a belépési keresztmetszetenél állandó stb.)

➡ Gyakran ezen egyszerűsítő feltételek nem valósulnak meg, és ez lényegesen befolyásolja a hőátadás módját, ezért az analitikai módszerek nem egyeznek a tapasztalattal

- Ezért a hőátadást olyan félempirikus egyenletekből számoljuk ki, amik kísérleti tapasztalatok alapján vannak fölállítva

Ilyen félempirikus egyenletek:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

A Nusslet szám olyan kifejezés amely az áramló közeg és a fal határán végbemenő hőátadásra jellemző.

$$Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda}$$

A Prandtl szám a hőátadás hatásfok jellegű anyagi jellemzőit foglalja magába

$$Gr = \frac{l^3 \rho^2 g \beta \Delta t}{\eta^2}$$

A Grashoff szám a térfogategységre eső felhajtóerő és a belső súrlódási erő hányadosa:

$$Re = \frac{l v \rho}{\eta}$$

A Re szám a tehetetlenségi erő és a belső súrlódási erő hányadosa:

V. Hőtranszport modellezés

Processing Shemat bemutatása

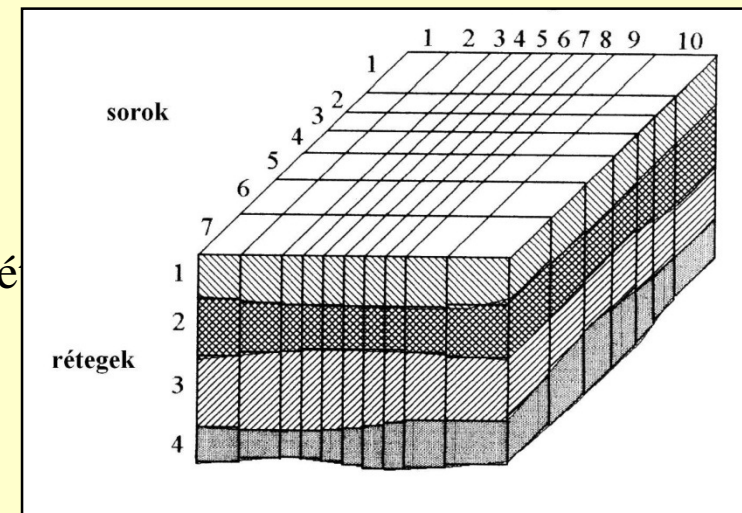
- Processing Modflow kiterjesztése hőtranszport modellé

→ Új lehetőségek: hőtranszport, anyagtranszport, kémiai reakciók különböző T-n

- numerikus modell: a Konvekció és kondukció alapegyenletének közelítő, nem egzakt megoldásai

A numerikus megoldások mind időben, mind térben szakaszolják a lezajló folyamatokat úgy, hogy az egyes szakaszokon belül a számításhoz szükséges paramétereket állandónak tekinti

véges differencia módszer: a modellezett teret tetszőleges darabszámú, de azonos eloszlású, egymással érintkező téglatest alakú elemekre bontjuk, Konvekció és a kondukció alapegyenletét leíró parciális differenciál-egyenletet differencia egyenletté alakítjuk és az egyes elemek közötti hőátadási folyamatokat numerikus, iteratív eljárásokkal megoldjuk



Négy rétegből álló rendszer véges differencia elemekre bontása (CHIANG és KINZELBACH, 1999)

Köszönöm a figyelmet!
