IDŐSOROK VIZSGÁLATÁNAK ALAPJAI

Idősorok vizsgálatakor valamilyen jelenség, sokaság időbeli változását, alakulását vizsgáljuk. Ezt akár egyszerű módon, akár modellek alapján is tehetjük. Ebben az alfejezetben az idősorok vizsgálatának alapjaival, egyszerűbb módjaival foglalkozunk.

Az idő jelölésére vezessük be a *t* jelölést, ahol a legelső időegység a t=1, a második t=2, stb. A vizsgált változó jelölésére vezessük be a *y* jelölést, ahol a legelső időegységhez tartozó adat y_1, a másodikhoz tartozó y_2. N jelentse az időegységek számát.

Idősorok adatainak összehasonlítása

Az I. fejezetben tárgyaltuk, hogy statisztikai adatokat különbségképzéssel vagy hányados-képzéssel lehet összehasonlítani. Idősorok esetében, amikor *ugyanazon sokaság* két különböző időponthoz, időszakhoz tartozó adatát szeretnénk összehasonlítani, akkor a gyakorlatban többnyire a hányados-képzést, azaz a viszonyszámokat használják. E speciális hányadosokat **dinamikus viszonyszám**oknak is nevezzük. Amikor két időszakunk, időpontunk van, akkor a szokás az, hogy az újabb időszak adatát hasonlítjuk a régebbihez, ahogyan ezt az I. fejezetben láttuk.
Kérdés, hogy amennyiben legalább három időadatunk van, akkor mihez viszonyíthatunk? Elvileg bármihez, azonban két nevezetes viszonyítási rendszert, dinamikus viszonyszámot ki kell emelni, attól függően, hogy a viszonyítás alapja rögzített (azaz mindent ugyanahhoz viszonyítunk), vagy sem.

A **bázisviszonyszám (bázisviszonyítás)** az összes időponthoz, időszakhoz tartozó adatot mindig egy rögzített időszak adatához viszonyítja, ekkor a **viszonyítás alapja rögzített**. A bázisviszonyszámokat általánosan a b_i szimbólummal jelöljük, ahol az *i* alsó index arra utal, hogy melyik időponthoz, időszakhoz tartozó bázisviszonyszámról van szó. A bázisidőszak adatát x_b szimbólummal jelöljük.

$$b_i = \frac{y_i}{y_b}$$

A kapott bázisviszonyszámokat általában táblázatba foglaljuk. A bázisviszonyszámokat tartalmazó oszlop fejlécében kötelezően fel kell tüntetni a viszonyítás alapját!

A **láncviszonyszám (láncviszonyítás)** az összes időponthoz, időszakhoz tartozó adatot mindig a közvetlenül előtte álló időszak adatához viszonyítja. Ekkor **a viszonyítás alapja változó.** A láncviszonyszámokat általánosan a l_i szimbólummal jelöljük, ahol az *i* alsó index arra utal, hogy melyik időponthoz, időszakhoz tartozó láncviszonyszámról van szó.

$$l_i = \frac{y_i}{y_{i-1}}$$

Példa
Egy bankban a betétállományra vonatkozó adatok az alábbi táblázat szerint változtak.

A betétállományra vonatokozó adatok

Időpont	Betétállomány		
	millió Ft	1997.06.30.= =100,00%	előző év.06.30.= =100,00%
2012. június 30.	43771	100,00 (43771/43771)	-
2013. június 30.	33164	75,77 (33164/43771)	75,77 (33164/43771)
2014. június 30.	25807	58,96 (25807/43771)	77,82 (25807/33164)
2015. június 30.	20925	47,81 (20925/43771)	81,08 (20925/25807)
2016. június 30.	22047	50,37 (22047/43771)	105,36 (22047/20925)
2017. június 30.	24718	56,47 (24718/43771)	112,12 (24718/22047)

A bázis- és a láncviszonyszámok tulajdonságai, illetve a köztük fennálló összefüggések közül hármat célszerű megemlíteni.

1. Tetszőleges két azonos alapú bázisviszonyszám hányadosa megegyezik ugyanazon két időszak adatának hányadosával.

$$\frac{b_i}{b_j} = \frac{y_i}{y_b} : \frac{y_j}{y_b} = \frac{y_i}{y_j}$$

2. Egymást követő bázisviszonyszámok hányadosa láncviszonyszám, azaz

$$\frac{b_i}{b_{i-1}} = \frac{y_i}{y_b} : \frac{y_{i-1}}{y_b} = \frac{y_i}{y_{i-1}} = l_i \,.$$

3. Bázisidőegységet követő egymás után következő láncviszonyszámok szorzata bázisviszonyszámot ad.

Átlagok használata az idősorok vizsgálatakor

Idősorok esetében is van lehetőségünk átlagok alkalmazására:

- egyrészt kiszámíthatjuk az időadatok átlagos nagyságát,
- másrészt pedig vizsgálhatjuk az átlagos változásokat is.

Időadatok átlaga

Amennyiben az idősor adatainak számtani átlagát szeretnénk kiszámítani, akkor figyelnünk arra, hogy milyen típusú idősort vizsgálunk.

Tartamidősorok, azaz időszakok adatainak vizsgálatakor az adatok összegének van tárgyi értelme, így alkalmazhatjuk az egyszerű **számtani átlagot.**

Év	Döntések száma, db
2013	80
2014	108
2015	105
2016	126
2017	164
összesen	**583**

$$\bar{x} = \frac{80+108+105+126+164}{5} = 116{,}6\,\mathrm{db}$$

Állapotidősorok, azaz időpontok adatainak vizsgálatakor az adatok összegének nincs tárgyi értelme, így nem alkalmazhatjuk az egyszerű számtani átlagot. Ekkor az úgynevezett **kronologikus átlagot** kell használnunk. Első lépésben kiszámítjuk a szomszédos időpontokhoz tartozó adatok számtani átlagát. Ez az érték egy átlagos állománynagyságot ad a két időpont között. A kronologikus átlag ezeknek az átlagos állományoknak a számtani közepe.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\ldots+\frac{y_{N-1}+y_N}{2}}{N-1} = \frac{\frac{y_1}{2}+y_2+\ldots+y_{N-1}+\frac{y_N}{2}}{N-1}$$

Példa

Időpont	Betétállomány		
	millió Ft	1997.06.30.= =100,00%	előző év.06.30.= =100,00%
2012. június 30.	43771	100,00 (43771/43771)	-
2013. június 30.	33164	75,77 (33164/43771)	75,77 (33164/43771)
2014. június 30.	25807	58,96 (25807/43771)	77,82 (25807/33164)
2015. június 30.	20925	47,81 (20925/43771)	81,08 (20925/25807)
2016. június 30.	22047	50,37 (22047/43771)	105,36 (22047/20925)
2017. június 30.	24718	56,47 (24718/43771)	112,12 (24718/22047)

$$\bar{y}_k = \frac{\frac{43771+33164}{2}+\frac{33164+25807}{2}+...+\frac{22047+24718}{2}}{6-1}$$ =22860,4 millió Ft.

Átlagos változás

Természetesen nem csak az adatok átlagos nagyságát lehet kiszámítani, hanem a változások átlagos nagyságát is vizsgálhatjuk.

A **fejlődés (növekedés) átlagos mértéke** a vizsgált időszakban időegységenként bekövetkező átlagos (abszolút) változás nagyságát mutatja. A mutató mértékegysége megegyezik az adatok mértékegységével. Mivel a szomszédos időegységek közötti változások (szomszédos adatok különbsége) összege megegyezik az utolsó és az első adat különbségével, ezért a fejlődés átlagos mértékének kiszámítására az alábbi képletet használhatjuk.

$$\bar{d} = \frac{(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + ... + (y_2 - y_1)}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1}$$

A **fejlődés (növekedés) átlagos üteme** a vizsgált időszakban időegységenként bekövetkező átlagos (relatív) változás nagyságát mutatja. A mutató értékét százalékban adjuk meg. Mivel a szomszédos időegységek közötti változások (szomszédos adatok hányadosa) szorzata megegyezik az utolsó és az első adat hányadosával, ezért a fejlődés átlagos ütemének kiszámítására az alábbi képletet használhatjuk.

$$\bar{l} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_{n-1}} \cdot \frac{y_{n-1}}{y_{n-2}} \cdot .... \cdot \frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

Vegyük észre, hogy a fejlődés átlagos üteme nem más, mint a láncviszonyszámok mértani közepe.

Példa

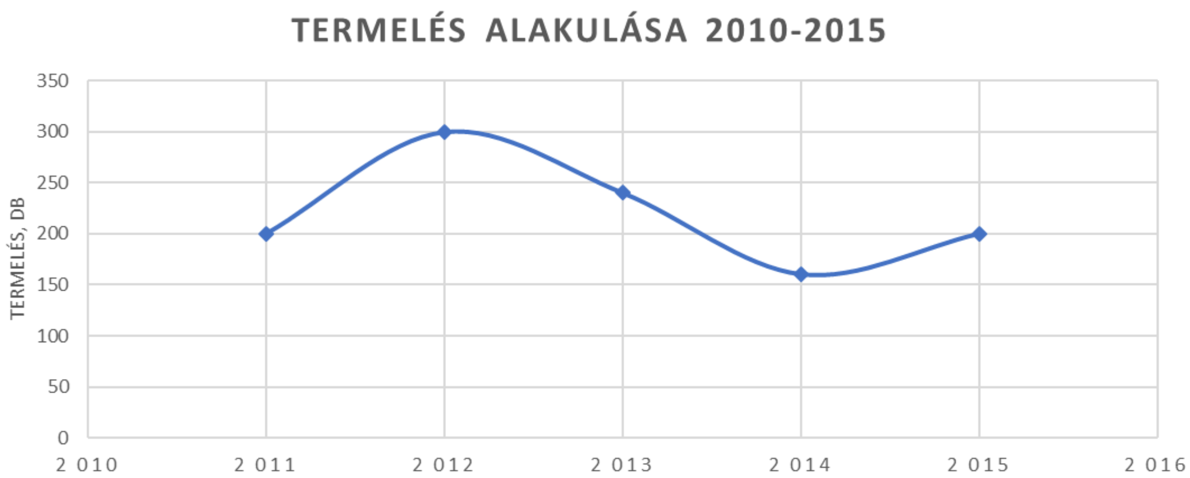
Év	**Döntések száma**		
	db	**az előző évhez képest, db**	**az előző év arányában**
2013	80	-	-
2014	108	28	1,35
2015	105	-3	0,97
2016	126	21	1,20
2017	164	38	1,30
Összesen	**583**	**84**	**-**

$\bar{d} = \dfrac{164-80}{5-1} = \dfrac{84}{5-1} = 21\,\text{db}$, azaz a vizsgált időszakban a döntések száma évente átlagosan 21 darabbal nőtt.

$\bar{l} = \sqrt[5-1]{\dfrac{164}{80}} = \sqrt[5-1]{2{,}05} = \sqrt[5-1]{1{,}35 \cdot 0{,}9722 \cdot \ldots \cdot 1{,}3016} = 1{,}196571$, azaz a vizsgált időszakban a döntések száma évente átlagosan 19,7 százalékkal nőtt.

A fejlődés átlagos üteme és mértéke bár egyszerűen számítható, ugyanakkor a képletből fakadóan csak az első és az utolsó időadatra épít. Ennek használata problematikus lehet, ha a vizsgált időszakban a vizsgált jelenség változásának irányában változás áll be, illetve, ha strukturális törést („megtörik az idősor") tartalmaz az idősor. Tekintsük az alábbi példát.

Év	**Termelés, darab**
2011	200
2012	300
2013	240
2014	160
2015	200



Ekkor $\bar{d} = \dfrac{200-200}{5-1} = 0$ és $\bar{l} = \sqrt[5-1]{\dfrac{200}{200}} = 1$, ami arra utal, hogy a termelés éves átlagos változása 0. Ez az eredmény abból fakad, hogy az idősornak van növekvő és csökkenő szakasza is. Az átlagos ütem és mérték „kinullázódik". E mutatók akkor tudnak megfelelő képet adni, ha az idősor a vizsgált időszakban egy irányba „mozog".

Egyszerűbb előrejelzések

Jelölje y_t a vizsgált változó tényleges, míg $\hat{y}_t$ a vizsgált változó becsült értékét a t-edik időszakban.

Előrejelzések során a jelent és a múltat vetítjük ki a jövőbe, többnyire azt feltételezzük, hogy a jelen összefüggései a jövőben is érvényben lesznek. Egyszerűbb előrejelzéseket készíthetünk az éves átlagos változás, azaz az átlagos növekedési ütem és mérték alapján, amennyiben azt feltételezzük, hogy a jövőbeli változások ezen indikátorokkal és értékekkel leírhatóak. **Ugyanakkor az, hogy az átlagos növekedési ütemet, vagy mértéket használjuk, az nem önkényes. Először mindig az idősor ábrázolása ajánlott.**

A **növekedés átlagos mértéke** azt feltételezi, hogy a vizsgált jelenség időegységenként átlagosan ugyanannyival változik, azaz a vizsgált változó **lineáris növekedési pályát követ.** A mutató pozitív értéke növekedést, míg negatív értéke csökkenést ír le.

A **növekedés átlagos üteme** azt feltételezi, hogy a vizsgált jelenség időegységenként átlagosan ugyanannyi-szorosára változik az előző értékhez képest, azaz a vizsgált változó **exponenciális növekedési pályát követ.** Együtthatós (tizedes tört, nem százalékos) formában a mutató egynél nagyobb értéke növekedést, míg egynél kisebb, nem negatív értéke csökkenést ír le.

Hogyan lehet az előrejelzést elkészíteni az átlagos ütem vagy mérték alapján?

1. Ábrázoljuk az idősort, eldöntjük, hogy lineáris, vagy exponenciális növekedési pályáról van-e szó.
2. Kiszámítjuk az átlagos változást mérő megfelelő mutatót.
3. Mivel e mutatók csak az első és az utolsó időadatra építenek az előrejelzést a mutató és az első vagy az utolsó időadat alapján adhatjuk meg az alábbi képletek segítségével

lineáris esetben: $\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1} + \bar{d} = y_1 + (t-1)\cdot\bar{d} = y_N + (t-N)\cdot\bar{d}$

exponenciális esetben: $\hat{y}_t = \hat{y}_{t-1}\cdot\bar{l} = y_1\cdot\bar{l}^{\,t-1} = y_N\cdot\bar{l}^{\,t-N}$

Példa

		Döntések száma (db)		
Év	**t**	**Tényleges érték**	**Előrejelzés átlagos mérték alapján**	**Előrejelzés átlagos ütem alapján**
2011	**1**	**80,0**	**80,0 (=80,0+0*21)**	**80,0 (=80,0*1,196571^{0})**
2012	2	108,0	**80,0+1*21=**101,0	**80,0*1,196571^{1} =**95,7
2013	3	105,0	**80,0+2*21=**122,0	**80,0*1,196571^{2} =**114,5
2014	4	126,0	**80,0+3*21=**143,0	**80,0*1,196571^{3} =**137,1
2015	**5**	**164,0**	**164,0 (=80,0+4*21)**	**164,0 (=80,0*1,196571^{4})**
2016	6		**80,0+5*21=164,0+1*21=**185,0	**80,0*1,196571^{5} =164*1,196571^{1} =**196,2
2018	7		**80,0+6*21=164,0+2*21=**206,0	**80,0*1,196571^{6} =164*1,196571^{2} =**234,8
2018	8		**80,0+7*21=164,0+3*21=**227,0	**80,0*1,196571^{7} =164*1,196571^{3} =**281,0

2019	9		80,0+8*21=164,0+4*21=248,0	80,0*$1{,}196571^{8}$=164*$1{,}196571^{4}$=336,2
2020	10		80,0+9*21=164,0+5*21=269,0	80,0*$1{,}196571^{9}$=164*$1{,}196571^{5}$=402,3
2021	11		80,0+10*21=164,0+6*21=290,0	80,0*$1{,}196571^{10}$=164*$1{,}196571^{6}$=481,4

ÁBRA

Az előrejelzési technika Excel alkalmazását a kapcsolódó videó szemlélteti.

Az átlagos növekedési mérték használata esetén az előrejelzési pálya egy olyan egyenes, amely a vizsgált időszak első és utolsó pontján halad keresztül, míg az átlagos növekedési ütem használata esetén az előrejelzési pálya egy olyan exponenciális görbe, amely a vizsgált időszak első és utolsó pontján halad keresztül.

Előrejelzések során előfordulhat, hogy tudjuk mekkora változást szeretnénk elérni és az átlagos változásra is van egy feltételezésünk. Ekkor a kérdés az, hogy a kívánt változás mennyi idő alatt érhető el. Nézzünk erre egy példát!

Példa

Mennyi idő alatt lehet 150 százalékkal növelni a termelés volumenét, ha ennek évi átlagos növekedési üteme 20,1124%?

Ha a termelés volumenét 150 százalékkal növeljük, akkor az *N* évből álló vizsgált időszak végén a termelés nagysága 250 százaléka lesz a kiindulási volumennek, azaz $\frac{y_N}{y_1} = 2{,}5$.

Továbbá, ha a termelés évi átlagos növekedési üteme 20,1124%, akkor $\bar{l} = 1{,}201124$. A feltett kérdés szerint *N*–1 értékét kell kiszámítani.

Ekkor

$$\bar{l} = \sqrt[N-1]{\frac{y_N}{y_1}};$$

$$1{,}201124 = \sqrt[N-1]{2{,}5};$$

$$1{,}201124^{N-1} = 2{,}5;$$

$$\ln 1{,}201124^{N-1} = \ln 2{,}5;$$

$$(N-1)\ln 1{,}201124 = \ln 2{,}5;$$

$$(N-1) = \frac{\ln 2{,}5}{\ln 1{,}201124} = 5.$$

Tehát öt év alatt lehet 150 százalékkal növelni a termelés volumenét. (Ez azt jelenti, hogy a 6. évben lesz a termelés volumene a kiindulási nagyságnál 150 százalékkal több.)