

ABSZTRAKT HARMONIKUS ANALÍZIS

Székelyhidi, László

ABSZTRAKT HARMONIKUS ANALÍZIS

Székelyhidi, László

Publication date 2013

Szerzői jog © 2013 Hallgatói Információs Központ

Copyright 2013, Educatio Kht., Hallgatói Információs Központ. Felhasználási feltételek

TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1 MSc Tananyagfejlesztés

Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület mesterszakjaihoz

Tartalom

Előszó	v
1. BEVEZETÉS	1
2. VÉGES ABEL-CSOPORTOK DUALITÁSELMÉLETE	3
1. 2.1 Karakterek	3
2. 2.2 Duális csoport	6
3. 2.3 Feladatok	8
3. HARMONIKUS ANALÍZIS VÉGES ABEL-CSOPORTOKON	10
1. 3.1 Fourier-transzformáció	10
2. 3.2 Konvolúció	12
3. 3.3 Konvolúciós operátorok	14
4. 3.4 Diszkrét Fourier-transzformáció a véges körön	17
5. 3.5 Feladatok	21
4. TOPOLOGIKUS ALAPISMERETEK	23
1. 4.1 Halmazelméleti alapok	23
2. 4.2 Topologikus alapfogalmak	25
3. 4.3 Elválasztási tételek, Uriszon-lemma	30
4. 4.4 Kompaktifikáció	34
5. 4.5 Az egység felbontása	35
6. 4.6 Összefüggőség	36
7. 4.7 Topologikus csoportok	37
8. 4.8 Topologikus részcsoportok, faktorcsoportok	39
9. 4.9 Topologikus vektorterek	42
10. 4.10 A Minkowski-funkcionál	45
11. 4.11 Konjugált terek	47
12. 4.12 A Hahn-Banach-tétel	49
13. 4.13 A Stone-Weierstrass-tétel	53
5. INVARIÁNS KÖZEPEK ABEL-CSOPORTOKON	60
1. 5.1 Közepek Abel-csoportokon	60
2. 5.2 Invariáns közepek Abel-csoportokon	61
3. 5.3 Feladatok	63
6. DISZKRÉT ÉS KOMPAKT ABEL-CSOPORTOK DUALITÁSELMÉLETE	64
1. 6.1 Karakterek diszkrét Abel-csoportokon	64
2. 6.2 Karakterek kompakt Abel-csoportokon	64
3. 6.3 Diszkrét Abel-csoportok dualitáselmélete	65
4. 6.4 Konvolúciós operátorok kompakt Abel-csoportokon	66
5. 6.5 Diszkrét és kompakt Abel-csoportok karakterelmélete	71
6. 6.6 Feladatok	72
7. ELEMI ABEL-CSOPORTOK DUALITÁSELMÉLETE	74
1. 7.1 Néhány speciális Abel-csoport duális csoportja	74
2. 7.2 Elemi Abel-csoportok	76
3. 7.3 Feladatok	76
8. HARMONIKUS ANALÍZIS KOMPAKT ABEL-CSOPORTOKON	77
1. 8.1 A Riesz-féle reprezentációs tétel	77
2. 8.2 Haar-mérték a komplex egységkörvonalon	82
3. 8.3 Fourier-sorok	83
4. 8.4 Fourier-analízis kompakt elemi Abel-csoportokon	85
5. 8.5 Fourier-analízis kompakt Abel-csoportokon	88
6. 8.6 Integrálható függvények kompakt Abel-csoportokon	90
7. 8.7 Feladatok	90
9. LOKÁLISAN KOMPAKT ABEL-CSOPORTOK DUALITÁSELMÉLETE	93
1. 9.1 Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoportok	93
2. 9.2 Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoportok approximációs tétele	95
3. 9.3 Lokálisan kompakt Abel-csoportok dualitáselmélete	98
4. 9.4 Feladatok	101
10. HAAR-INTEGRÁL LOKÁLISAN KOMPAKT ABEL-CSOPORTOKON	102
1. 10.1 A Haar-mérték és a Haar-integrál	102

2. 10.2 A Haar-mérték létezése lokálisan kompakt Abel-csoportokon	103
3. 10.3 A Haar-integrál egyértelműsége	105
4. 10.4 Haar-mérték elemi, és kompaktan generált Abel-csoportokon	105
5. 10.5 Feladatok	106
11. HARMONIKUS ANALÍZIS LOKÁLISAN KOMPAKT ABEL-CSOPORTOKON	107
1. 11.1 Harmonikus analízis az egészek csoportján	107
2. 11.2 Kommutatív algebrák	107
3. 11.3 Konvolúció	110
4. 11.4 Integrálható függvények Fourier-transzformációja	114
5. 11.5 Fourier-transzformáció lokálisan kompakt Abel-csoportokon	116
12. SPEKTRÁLANALÍZIS ÉS SPEKTRÁLSZINTÉZIS	118
1. 12.1 A spektrálanalízis és spektrálszintézis problémaköre	118
2. 12.2 Varietások, exponenciális polinomok	119
3. 12.3 Spektrálanalízis és spektrálszintézis	122
4. 12.4 Spektrálanalízis és spektrálszintézis diszkrét Abel-csoportokon	126
5. 12.5 Feladatok	130
13. FÜGGELÉK A: KARAKTEREK	132
14. FÜGGELÉK B: HANGHULLÁMOK, HANGKÖZÖK	135
15. FÜGGELÉK C: FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ	138
16. IRODALOMJEGYZÉK	140

Előszó

A jelen digitális tananyag a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0025 számú, "Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület mesterszakjaihoz" című projekt részeként készült el.

A projekt általános célja a XXI. század igényeinek megfelelő természettudományos felsőoktatás alapjainak a megteremtése. A projekt konkrét célja a természettudományi mesterképzés kompetenciaalapú és módszertani megújítása, mely folyamatosan képes kezelni a társadalmi-gazdasági változásokat, a legújabb tudományos eredményeket, és az info-kommunikációs technológia (IKT) eszköztárát használja.



SZÉCHENYI TERV



MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

1. fejezet - BEVEZETÉS

A harmonikus analízis a matematikának az az ága, amely különböző függvényeknek egyszerűbb függvények összetételeként, szuperpozíciójaként való előállíthatóságának kérdéseivel foglalkozik. A harmonikus analízis központi eszközei a Fourier-sorok és a Fourier-transzformáció. Klasszikus gyökerei a XVIII. század végén és a XIX. század elején a trigonometrikus sorok vizsgálataihoz nyúlnak vissza. Ilyen sorokat először bizonyos fizikai problémák matematikai tárgyalásával kapcsolatban tanulmányoztak behatóan, majd, elsősorban Fourier munkássága nyomán, általános érdeklődést váltottak ki a korabeli vezető matematikusok és fizikusok köreiben. Miután Cauchy, Weierstrass, Borel és Lebesgue a klasszikus, majd a modern analízis alapfoglamait megalkották, új távlatok nyíltak ezen vizsgálatok előtt. A huszadik század elején ebben a kutatásban magyar matematikusok, elsősorban Riesz Frigyes, Haar Alfréd és Fejér Lipót, ugyancsak meghatározó szerepet játszottak.

Az intenzív kutatásoknak és a rendkívül mély, és egyre több területen hasznosítható eredményeknek köszönhetően a huszadik század derekán létrejött az absztrakt harmonikus analízis, melynek természetes közege a topologikus csoport: a trigonometrikus összegek helyét karakterek lineáris kombinációi, majd később exponenciális polinomok és reprezentációk veszik át, az alapvető módszerek pedig a modern topológia és a funkcionálanalízis, a mérték- és integrálelmélet, nem ritkán az absztrakt gyűrűelmélet teljes eszköztárán nyugszanak.

Ebben a jegyzetben az absztrakt harmonikus analízis legfőbb problémáit és legfontosabb eredményeit mutatom be kommutatív topologikus csoportokon. Igyekszem a tárgyalás során arra törekedni, hogy az - általam elképzelt - klasszikus valós függvénytani, illetve némi topológiai és funkcionálanalízisbeli ismeretekkel rendelkező érdeklődő egyetemi, vagy főiskolai hallgató képes legyen megismerkedni ennek a területnek a sajátosságaival, hasznosságával és szépségeivel. Ahol a felhasználandó ismeretek jelentősen meghaladják a szokásos egyetemi tananyagot, ott kénytelen leszek a bizonyításokat teljes mértékben mellőzni, s csupán az eredmények ismertetésére szorítkozni, bízva abban, hogy a mellékelt referenciák segíteni fognak a mélyebb részletek iránt érdeklődő olvasónak abban, hogy tudását kiteljesítse.

E munka megírása során számos kézikönyvet és tankönyvet, alapvető jegyzeteket és szakcikket használtam fel. Ezek közül a legfontosabbakat az irodalomjegyzékben felsoroltam. A munka alapját az elmúlt években a Debreceni Egyetemen - korábbi nevén Kossuth Lajos Tudományegyetemen - a témából tartott reguláris előadásaim, speciálkollégiumaim képezik, s az utolsó fejezet eredményei szorosan kapcsolódnak a jelenlegi kutatásaimhoz, így meglehetősen naprakésznek mondhatók. Ezen a helyen tisztelettel és szeretettel emlékezem meg tanítómesteremről, Erdős Jenőről, akinek e témáról szóló felejthetetlen előadásait évtizedekkel előtt hallgathattam, melyek révén első alkalommal nyerhettem bepillantást a matematikának ebbe a gyönyörű virágoskertjébe, s akivel lefolytatott személyes beszélgetéseink kitörő lehetetlen, meghatározó iránymutatást adtak számomra mindannak megértéséhez, ami ebben a munkában található, melyet az ő emlékének ajánlok.



*Erdős Jenő*¹

¹Erdős Jenő, magyar matematikus (1931-2004)

2. fejezet - VÉGES ABEL- CSOPORTOK DUALITÁSELMÉLETE

1. 2.1 Karakterek

Legyen G véges Abel¹-csoport, melyet multiplikatív módon írunk, s melynek e jelöli az egységelemét. Ha $|G|$ a G elemeinek száma, akkor G elemeit felsorolhatjuk $G = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ módon, ahol $x_1 = e$, és $n = |G|$. A továbbiakban $\mathcal{C}(G)$ jelöli az összes, G -n értelmezett, komplex értékű függvények halmazát. Amint az könnyen látható, $\mathcal{C}(G)$ komplex Hilbert²-tér a pontonkénti vektortér-műveletekkel és az

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}$$

módon értelmezett belső szorzattal. Ezért, és a későbbiek figyelembevételével, célszerűbb lesz az $L^2(G)$ jelölést használnunk. Mellesleg, esetünkben ez a tér izomorf $\mathbb{C}^n$ -nel, s az izomorfiát az

$$f \mapsto [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)]$$

leképezés létesíti. A $L^2(G)$ egy ortogonális bázisát az egyponthoz tartozó karakterisztikus függvényei alkotják. A továbbiakban G bármely A részhalmaza esetén az A halmaz karakterisztikus függvényét δ_A fogja jelölni, amely tehát az A pontjaiban 1, az A -n kívüli pontokban pedig 0 értéket vesz fel. Ha $A = \{a\}$ egyponthoz tartozó halmaz, akkor δ_A helyett δ_a -t írunk.

¹Niels Henrik Abel, norvég matematikus (1802-1829)

²David Hilbert, német matematikus (1862-1943)



N. H. Abel



D. Hilbert

A G csoportnak az egységnyi abszolút értékű komplex számok $\mathbb{T}$ multiplikatív csoportjába való homomorfizmusait karaktereknek nevezzük.

2.1.1. Tétel.

Véges (n -elemű) Abel-csoport minden karaktere a csoportnak az n -edik komplex egységgyökök multiplikatív csoportjába való homomorfizmusa.

Bizonyítás.

Ha a G csoport rendezése $\chi(x) = \chi(y)$ akkor bármely G -beli x esetén $x^n = e$, így bármely χ karakter esetén $\chi(x) = \chi(y)$. $\square$

2.1.2. Tétel.

Véges Abel-csoport különböző karakterei egymásra ortogonálisak és 1 normájúak.

Bizonyítás.

Először azt mutatjuk meg, hogy ha χ a G véges Abel-csoport karaktere, akkor

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \chi \neq 1, \\ |G| & \text{ha } \chi = 1. \end{cases}$$

Valóban, bármely G -beli y esetén

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = \sum_{x \in G} \chi(xy) = \sum_{x \in G} \chi(x)\chi(y) = \chi(y) \sum_{x \in G} \chi(x),$$

s ez $\chi \neq 1$ esetén az állítást adja. Legyen most χ_1, χ_2 a G két különböző karaktere, ekkor $\chi = \chi_1 \cdot \overline{\chi_2}$ is karakter, melyből az előbbiek miatt az ortogonalitás következik. A normára vonatkozó állítás nyilvánvaló. $\square$

A G csoport y eleméhez tartozó τ_y eltolásoperátort $\tau_y f(x) = f(xy^{-1})$ (itt x a G tetszőleges eleme) módon értelmezzük $L^2(G)$ -n. A $\tau_y f$ függvényt az f függvény y -nal való eltoltjának nevezzük.

Az G csoporton értelmezett, komplex értékű f függvényt normálnak nevezzük, ha $f(e) = 1$. Ez eltér az 1 normájú függvény fogalmától, amely olyan függvényt jelent, amelynek az $L^2(G)$ Hilbert-térben 1 a normája.

2.1.3. Tétel.

Véges Abel-csoport eltolásoperátorai az $L^2(G)$ Hilbert-tér páronként felcserélhető unitér operátorai.

Bizonyítás.

Az eltolásoperátorok a csoport kommutativitása miatt felcserélhetők egymással, s $\tau_{y^{-1}}$ nyilván a τ_y inverze. Továbbá

$$\langle \tau_y f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^n f(x_k y^{-1}) \overline{g(x_k)} = \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^n f(x_k) \overline{g(y x_k)} = \langle f, \tau_{y^{-1}} g \rangle$$

teljesül tetszőleges G -beli y elem és f, g függvények mellett, ami azt mutatja, hogy τ_y adjungáltja az inverzával egyenlő, azaz τ_y unitér operátor. $\square$

2.1.4. Tétel.

Véges Abel-csoport összes eltolásoperátorainak közös normált sajátfüggvényei pontosan a karakterek.

Bizonyítás.

Legyen f az összes eltolásoperátorok közös normált sajátfüggvénye. Ekkor minden G -beli y -hoz van olyan $\lambda(y)$ komplex szám, hogy

$$f(xy) = \lambda(y) \cdot f(x)$$

teljesül minden G -beli x esetén. Mivel $f(e) = 1$, így az $x = e$ helyettesítéssel $f = \lambda$ adódik, amiből következik, hogy f karakter. Másrészt világos, hogy minden karakter közös normált sajátfüggvénye az összes eltolásoperátoroknak. $\square$

A bizonyításból látható, hogy a χ karakter a τ_y eltolásnál éppen a $\overline{\chi(y)}$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvény.

2.1.5. Tétel.

Véges Abel-csoport összes karakterei az $L^2(G)$ Hilbert-tér ortonormált bázisát alkotják.

Bizonyítás.

A lineáris algebrából ismeretes, hogy véges dimenziós Hilbert-tér páronként felcserélhető unitér operátorai esetén van a térnek olyan ortonormált bázisa, mely az operátorok közös sajátvektoraiból áll. Esetünkben a közös sajátvektorok, azaz sajátfüggvények, éppen a karakterek. A karakterek ortogonalitásából következik, hogy ebben a bázisban a G összes karaktere fellép. $\square$

A tétel szerint a karakterek száma megegyezik $L^2(G)$ dimenziójával, azaz $|G| = n$ -nel.

2. 2.2 Duális csoport

Amint az könnyen látható, a karakterek a pontonkénti szorzás műveletére nézve Abel-csoportot alkotnak, melyet a G duálisának nevezünk, s $\widehat{G}$ -vel jelölünk. A fentiek alapján $|\widehat{G}| = |G|$. Ebben a csoportban a χ karakter inverze $\overline{\chi}$, a χ komplex konjugáltja, amely egyben a χ függvény reciproka.

2.2.1. Tétel.

Véges ciklikus csoport duálisa a csoporttal izomorf.

Bizonyítás.

Legyen az n -edrendű ciklikus csoport generátora x , s egy tetszőleges karaktere χ . Ekkor $\chi(x^k) = \chi(x)^k = \alpha^k$ teljesül $k = 1, 2, \dots, n$ esetén, ahol α egy 1 abszolút értékű komplex szám, sőt,

$$\alpha^n = \chi(x)^n = \chi(x^n) = \chi(e) = 1$$

miatt α egy n -edik egységgyök. Mint könnyen látható, a $\chi \longleftrightarrow \alpha$ megfeleltetés izomorfizmusa a csoport duálisának az n -edik egységgyökök szorzáscsoportjára. Másrészt, könnyen látható, hogy az n -edrendű ciklikus csoport ugyancsak izomorf az n -edik egységgyökök szorzáscsoportjával. $\square$

Tehát minden véges Abel-csoport izomorf saját duálisával, ám - amint az a fenti bizonyításból is látható - az izomorfia megvalósító leképezés cseppet sem „természetes”: nem tükröz semmit abból a kapcsolatból, ami egy Abel-csoport és duálisa között fennáll. Valójában ez az izomorfia nem használható semmire, hiszen csupán annak a meglehetősen triviális ténynek köszönhető, hogy bármely két azonos elemszámú ciklikus csoport izomorf egymással.

A G véges Abel-csoport duálisának is van duálisa: $\widehat{\widehat{G}}$, a G csoport második duálisa. Minden G -beli x elemhez természetes módon tartozik egy Φ_x karakter, mely a G duálisának χ elemén $\Phi_x(\chi) = \chi(x)$ módon van értelmezve. Ezáltal a G csoportnak a második duálisába való $x \mapsto \Phi_x$, úgynevezett természetes leképezését kapjuk. A kommutatív csoportok dualitáselméletének legfontosabb tétele véges csoportok esetén a következő eredmény.

2.2.2. Tétel.

(Véges Abel-csoportok dualitástétele) Véges Abel-csoport izomorf második duális csoportjával, s az izomorfiát a természetes leképezés létesíti.

Bizonyítás.

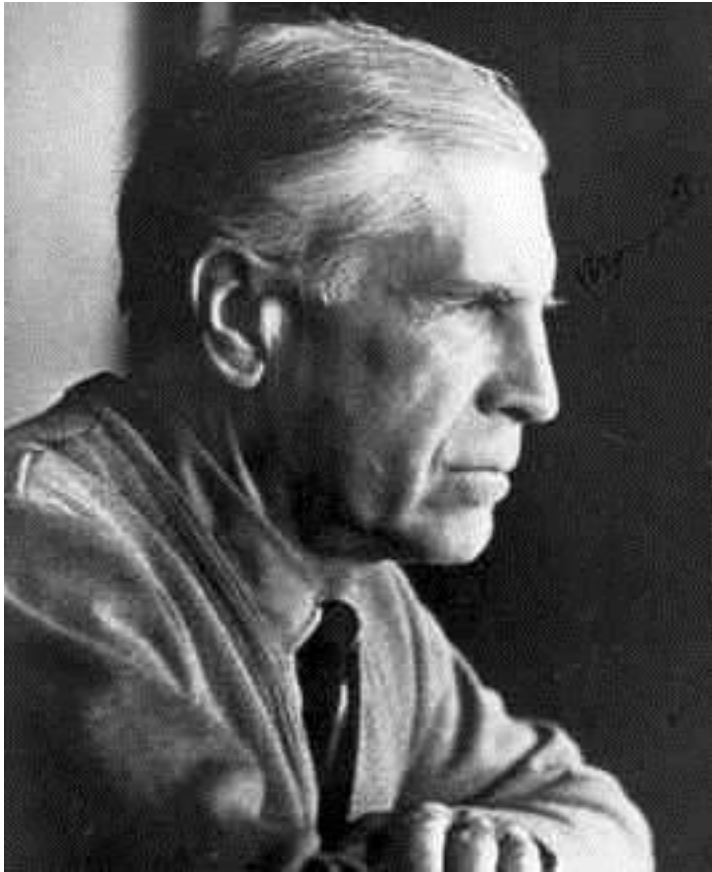
A természetes leképezés nyilván homomorf leképezés. Az injektivitás bizonyításához tekintsük a

$$\begin{pmatrix} \chi_1(x_1) & \chi_1(x_2) & \dots & \chi_1(x_n) \\ \chi_2(x_1) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_n(x_1) & \chi_n(x_2) & \dots & \chi_n(x_n) \end{pmatrix}$$

mátrixot $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, ahol $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ a G csoport összes különböző karakterei. Ha valamely $x \neq e$ elemen minden karakter 1 értéket venne fel, akkor a mátrix x -hez és e -hez tartozó oszlopai egyenlőek lennének, így a mátrix szinguláris lenne, s ez ellentmond a karakterek lineáris függetlenségének, ami az ortogonalitás következménye. Így a természetes homomorfizmus magja az egységelemből áll, tehát injektív. A szürjektivitás abból adódik, hogy G -nek és második duálisának elemszáma azonos. $\square$

A 2.2.2. Tétel a Pontrjagin³-féle dualitástétel véges Abel-csoportokra. A G csoportnak azt a tulajdonságát, hogy bármely, egységelemtől különböző eleméhez van olyan karaktere, mely az illető elemen 1 -től különböző értéket vesz fel, úgy szokás kifejezni, hogy a csoportnak van elég sok karaktere. Ez nyilván egyenértékű azzal, hogy bármely két különböző elemhez van olyan karakter, mely a két elemen különböző értékeket vesz fel. Ez röviden úgy is kifejezhető, hogy a karakterek elválasztják G elemeit, illetve, a karakterek halmaza elválasztó tulajdonságú a G csoportra nézve. A fenti bizonyításból világos, hogy ez a tulajdonság szükséges és elégséges ahhoz, hogy a természetes homomorfizmus injektív legyen.

³Lev Szemjonovics Pontrjagin, orosz matematikus (1908-1988)



L. Sz. Pontrjagin

3. 2.3 Feladatok

1.

Mutassuk meg, hogy ha G, H véges Abel-csoportok, akkor G és H direkt összegének duálisa izomorf duálisaik direkt összegével!

2.

Adjunk példát olyan G véges Abel-csoportra és H részcsoportjára, melyeknél nem létezik a G -nek olyan K részcsoportja, hogy G izomorf H és K direkt összegével!

3.

Mutassuk meg, hogy véges Abel-csoport különböző karakterei lineárisan függetlenek!

4.

Mutassuk meg, hogy ha G véges Abel-csoport az e egységelemmel, akkor

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x) = \begin{cases} |G| & \text{ha } x = e, \\ 0 & \text{ha } x \neq e. \end{cases}$$

5.

Mutassuk meg, hogy ha G véges Abel-csoport, akkor a G bármely χ karaktere esetén

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = \begin{cases} |G| & \text{ha } \chi = 1, \\ 0 & \text{ha } \chi \neq 1. \end{cases}$$

6.

Legyenek G, H véges Abel-csoportok, $\Phi : G \rightarrow H$ pedig egy homomorfizmus. Mutassuk meg, hogy a $\chi \mapsto \chi \circ \Phi$ megfeleltetés a $\widehat{H}$ csoportnak $\widehat{G}$ -be való homomorfizmusa!

7.

Legyen G véges Abel-csoport, H pedig a G egy részcsoportja. Mutassuk meg, hogy az a megfeleltetés, mely a G csoport χ karakteréhez annak H -ra való $\chi|_H$ megszorítását rendeli, a $\widehat{G}$ csoportnak $\widehat{H}$ -ra való szürjektív homomorfizmusa, melynek magja izomorf a G/H faktorcsoport duálisával!

8.

Legyen G véges Abel-csoport, H pedig a G részcsoportja. Mutassuk meg, hogy a G mindazon karaktereinek $H^\perp$ halmaza, melyek H -n az 1 értéket veszik fel a $\widehat{G}$ csoport részcsoportja, mely izomorf a G/H faktorcsoport duálisával! (A $\widehat{G}$ duális csoport $H^\perp$ részcsoportját a H részcsoport annihilátorának nevezzük.)

3. fejezet - HARMONIKUS ANALÍZIS

VÉGES ABEL-CSOPORTOKON

1. 3.1 Fourier-transzformáció

A karakterekből álló ortonormált bázisban minden $L^2(G)$ -beli f függvény egyértelműen felírható

$$f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_k$$

alakban, s az itt szereplő felírásban fellépő λ_k együtthatók a karakterek ortonormált tulajdonsága miatt $\lambda_k = \langle f, \chi_k \rangle$ módon számíthatók ki. Ezek az f függvény Fourier $\times$ -együtthatói, melyekre tehát természetesen fennáll az

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi$$

összefüggés.



*J. B. J. Fourier*¹

Minden $L^2(G)$ -beli függvényhez hozzárendelhetjük a karakterek szerinti felbontásában szereplő Fourier-együtthatók sorozatát: tetszőleges $L^2(G)$ -beli f függvény és $\hat{G}$ -beli χ karakter esetén legyen

$$\hat{f}(\chi) = \langle f, \chi \rangle.$$

¹Jean Baptiste Joseph Fourier, francia matematikus (1768-1830)

A G duálisán értelmezett, komplex értékű $\hat{f}$ függvény az f Fourier-transzformáltja, az $f \mapsto \hat{f}$ leképezés neve pedig Fourier-transzformáció. A fentiek alapján tehát

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\chi(x)}$$

teljesül bármely G -n értelmezett komplex értékű f függvény és χ karakter esetén. A továbbiakban G duálisán célszerű lesz a következő belső szorzatot bevezetni:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\wedge} = \sum_{\chi \in \hat{G}} \varphi(\chi) \overline{\psi(\chi)},$$

ahol φ, ψ tetszőleges függvények G duálisán. A következő tétel Plancherel² tétele, mely a Fourier-transzformáció egyik legfontosabb tulajdonságát fejezi ki.

3.1.1. Tétel.

(Plancherel) A G véges Abel-csoporton a Fourier-transzformáció $L^2(G)$ -nek $L^2(\hat{G})$ -re való izometrikus izomorfizmusa.

Bizonyítás.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a Fourier-transzformáció homomorf leképezés. Másrészt,

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\wedge} &= \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \overline{\hat{g}(\chi)} = \\ &= \sum_{\chi \in \hat{G}} \left[\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\chi(x)} \right] \overline{\left[\frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} g(y) \chi(y) \right]} = \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{\chi \in \hat{G}} \left[\sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(x) \overline{g(y)} \right] \overline{\chi(xy^{-1})} = \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{\chi \in \hat{G}} \sum_{x \in G} f(x) \left[\sum_{y \in G} \overline{g(y)} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(xy^{-1})} \right] = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)} = \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

teljesül minden $L^2(G)$ -beli f, g esetén. Itt azt is felhasználtuk, hogy $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(x) = |G|$, ha $x = e$, egyébként 0, ami a 2.1.2. Tétel bizonyításának első részéből adódik, annak figyelembevételével, hogy $\chi \mapsto \chi(x)$ a $\hat{G}$ karaktere, bármely G -beli x elem esetén. Ebből következik, hogy a Fourier-transzformáció izometrikus leképezés, így injektív. A szürjektivitás abból adódik, hogy $L^2(G)$ és $L^2(\hat{G})$ dimenziója egyaránt $|G|$.

²Michel Plancherel, svájci matematikus (1885-1967)



M. Plancherel $\square$

A Plancherel-tétel következménye a Parseval³ $\times$ -formula:

$$(3.1) \quad \langle f, f \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{f} \rangle_{\wedge},$$

mely minden $L^2(G)$ -beli f esetén fennáll, s a Fourier-transzformáció izometrikus tulajdonságát fejezi ki. A Fourier-transzformáció inverze, mely a Plancherel-tétel szerint szintén izometrikus izomorfia, a Fourier-transzformációt definiáló formulához hasonlóval, az úgynevezett inverziós formulával fejezhető ki.

3.1.2. Tétel.

(Inverziós tétel) A G véges Abel-csoporton a Fourier-transzformáció inverze a következő formulával írható le:

$$f(x) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi(x)$$

tetszőleges G -beli x és $L^2(G)$ -beli f esetén.

Bizonyítás.

A fenti formula éppen az f függvény ortogonális felbontása a karakterekből álló ortonormált bázisban. $\square$

2. 3.2 Konvolúció

³Marc-Antoine de Chène Parseval, francia matematikus (1755-1836)

A Fourier-transzformáltak körében nemcsak a pontonkénti vektortér-műveletek, hanem a pontonkénti szorzás is értelmezve van. Most megvizsgáljuk, hogy a pontonkénti szorzás művelete az $L^2(G)$ -n milyen műveletnek felel meg. Ebből a célból bevezetjük a következő fogalmat.

Adott f függvény esetén tekintsük a $\sum_{x \in G} f(x)x$ formális lineáris kombinációt. Mint könnyen látható, az összes ilyenek halmaza algebrát alkot, az úgynevezett csoportalgebrát, ha a műveleteket a következő módon értelmezzük:

$$\sum_{x \in G} f(x)x + \sum_{y \in G} g(y)y = \sum_{z \in G} [f(z) + g(z)]z,$$

$$\lambda \cdot \sum_{x \in G} f(x)x = \sum_{x \in G} \lambda f(x)x,$$

és

$$\sum_{x \in G} f(x)x \cdot \sum_{y \in G} g(y)y = \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(x)g(y)xy.$$

A szorzat így is írható:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G} f(x)x \cdot \sum_{y \in G} g(y)y &= \sum_{z \in G} \sum_{xy=z} f(x)g(y)z = \\ &= \sum_{x \in G} \left[\sum_{y \in G} f(xy^{-1})g(y) \right] x, \end{aligned}$$

tehát az f -nek és g -nek megfelelő formális lineáris kombinációk szorzata ebben az algebrában az $x \mapsto \sum_{y \in G} f(xy^{-1})g(y)$ módon értelmezett függvénynek megfelelő formális lineáris kombináció lesz.

Ennek a függvénynek az $\frac{1}{|G|}$ -szeresét az f és g konvolúciójának nevezzük. Ezek szerint

$$f * g(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(xy^{-1})g(y).$$

Nyilván $f * g = g * f$. Alapvető jelentőségű a következő tétel.

3.2.1. Tétel.

(Konvolúció-tétel) Véges Abel-csoporton értelmezett bármely f, g komplex értékű függvények esetén

$$(f * g)^{\widehat{}} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Bizonyítás.

Legyen x a G csoport tetszőleges eleme, ekkor

$$\begin{aligned} (f * g)^{\widehat{}}(x) &= \langle f * g, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (f * g)(x) \overline{\chi(x)} = \\ &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(xy^{-1})g(y) \overline{\chi(x)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(xy^{-1}) \overline{\chi(xy^{-1})} g(y) \overline{\chi(y)} = \\
 &= \frac{1}{|G|^2} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} f(z) \overline{\chi(z)} g(y) \overline{\chi(y)} = \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{z \in G} f(z) \overline{\chi(z)} \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} g(y) \overline{\chi(y)} = \widehat{f}(\chi) \widehat{g}(\chi)
 \end{aligned}$$

teljesül minden χ karakter mellett. $\square$

3.3.3 Konvolúciós operátorok

Amint az szokásos, egy H Hilbert-tér esetén $\mathcal{L}(H)$ fogja jelölni a H lineáris operátorainak terét, melyről ismeretes, hogy az operátorok szokásos normájával ellátva Banach⁴-tér. Számunkra különösen fontos lesz az az eset, amikor H az $L^2(G)$ Hilbert-tér. Bármely $\mathcal{C}(G)$ -beli a esetén az

$$A_a : f \mapsto a * f$$

módon értelmezett leképezést az a függvényhez tartozó konvolúciós operátornak nevezzük. Jelölje a^* a következő módon értelmezett függvényt:

$$a^*(x) = \overline{a(x^{-1})}$$

minden G -beli x esetén.



S. Banach

⁴Stefan Banach, lengyel matematikus (1892-1945)

3.3.1. Tétel.

Legyen G véges Abel-csoport. Bármely $\mathcal{C}(G)$ -beli a esetén az a -hoz tartozó A_a konvolúciós operátor az $L^2(G)$ Hilbert-tér lineáris operátora, melynek adjungáltja A_{a^*} . Speciálisan, A_a pontosan akkor önadjungált, ha $a^* = a$. A konvolúciós operátorok egymással felcserélhetők.

Bizonyítás.

A konvolúciós operátorok linearitása nyilvánvaló. Az A_a adjungáltjára definíció szerint fennáll

$$\langle A_a f, g \rangle = \langle f, A_a^* g \rangle$$

minden $L^2(G)$ -beli f, g esetén. Legyen u a G tetszőleges eleme, valamint $g = \delta_u$, ekkor az iménti egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$a * f(u) = \sum_{x \in G} f(x) \overline{A_a^* \delta_u(x)}$$

teljesül bármely $L^2(G)$ -beli f és bármely G -beli u mellett. Felhasználva $a * f$ definícióját, ebből az

$$A_a^* \delta_u(x) = \frac{1}{|G|} a(ux^{-1})$$

egyenlőség adódik tetszőleges G -beli x, u mellett. Mivel minden $L^2(G)$ -beli g függvény előáll

$$g = \sum_{u \in G} g(u) \delta_u$$

alakban, így az előbbi egyenlőséget és A_a^* linearitását figyelembe véve

$$\begin{aligned} A_a^* g(x) &= \sum_{u \in G} g(u) A_a^* \delta_u(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} a(ux^{-1}) g(u) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} a^*(xu^{-1}) g(u) = a^* * g(x) \end{aligned}$$

adódik, s ez éppen az adjungáltra vonatkozó állítás. A felcserélhetőségre vonatkozó állítás a konvolúció kommutativitásából adódik. $\square$

A konvolúciós operátorok felcserélhetőségére és az adjungáltra vonatkozó, imént igazolt állítás alapján a konvolúciós operátorok az $L^2(G)$ Hilbert-tér normális operátorai.

Megjegyezzük, hogy az eltolásoperátorok is konvolúciós operátorok, hiszen bármely G -beli y és $L^2(G)$ -beli f esetén

$$\begin{aligned} \tau_y f(x) &= f(xy^{-1}) = \sum_{u \in G} f(u^{-1}x) \delta_y(u) = \\ &= \sum_{u \in G} \delta_y(xu^{-1}) f(u) = |G| \delta_y * f(x) \end{aligned}$$

teljesül, tehát

$$\tau_y = A_{|G|\delta_y}.$$

Mint korábban láttuk, ezek az operátorok nem csupán normálisak, de egyben unitér operátorok is. A fentiekből világos, hogy a konvolúciós operátorok felcserélhetősége, mely - mint látni fogjuk - alapvető szerepet játszik a harmonikus analízisben, a G csoport kommutativitásának következménye. Ez teljesen világos az eltolásoperátorokra vonatkozóan, ugyanakkor minden konvolúciós operátor eltolásoperátorok lineáris kombinációja. Valóban, ha a a $\mathcal{C}(G)$ tetszőleges eleme, akkor

$$a = \sum_{y \in G} a(y) \delta_y$$

miatt

$$A_a = \sum_{y \in G} a(y) A_{\delta_y} = \sum_{y \in G} a(y) \tau_y$$

teljesül. Ebből az is világos, hogy minden olyan lineáris operátor, amely az összes eltolásoperátorral felcserélhető, ugyancsak felcserélhető minden konvolúciós operátorral. A következő tétel szerint a konvolúciós operátorokon kívül nincs más ilyen tulajdonságú lineáris operátor $L^2(G)$ -n.

3.3.2. Tétel.

Legyen G véges Abel-csoport. Az $L^2(G)$ egy lineáris operátora akkor és csak akkor cserélhető fel az eltolásoperátorokkal, ha konvolúciós operátor.

Bizonyítás.

A feltétel elegendőségéről a fentiekben meggyőződünk. Legyen most B az $L^2(G)$ Hilbert-tér olyan lineáris operátora, melyre

$$\tau_y B = B \tau_y$$

teljesül minden G -beli y esetén. Ez azt jelenti, hogy

$$(\tau_y B) \delta_e = B(\tau_y \delta_e) = B \delta_y$$

is fennáll minden G -beli y -re. Másrészt, az imént láttuk, hogy

$$(\tau_y B) \delta_e = \tau_y(B \delta_e) = |G|(\delta_y * B \delta_e) = |G|B \delta_e * \delta_y,$$

ezért

$$B \delta_y = |G|B \delta_e * \delta_y$$

teljesül, hacsak y a G eleme. A B operátor és a konvolúció linearitása miatt a

$$f = \sum_{y \in G} f(y) \delta_y,$$

nyilvánvaló azonosságból, mely minden $L^2(G)$ -beli f -re érvényes, azt kapjuk, hogy

$$Bf = |G|B \delta_e * f,$$

tehát $B = A_{|G|B \delta_e}$, valóban konvolúciós operátor. $\square$

Korábban láttuk, hogy a G véges csoport karakterei pontosan az összes eltolásoperátorok közös normált sajátfüggvényei. A következő tétel szerint a karakterek az összes konvolúciós operátoroknak is közös sajátfüggvényei.

3.3.3. Tétel.

Legyen G véges Abel-csoport. A konvolúciós operátorok közös normált sajátfüggvényei pontosan a karakterek.

Bizonyítás.

Mivel az eltolásoperátorok is konvolúciós operátorok, így elegendő megmutatni, hogy minden karakter minden konvolúciós operátornak sajátfüggvénye. Legyen tehát χ karakter, a pedig a $\mathcal{C}(G)$ tetszőleges eleme, ekkor

$$A_a(\chi)(x) = a * \chi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} a(u) \chi(u^{-1}x) = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} a(u) \chi(u^{-1}) \cdot \chi(x)$$

teljesül minden G -beli x mellett, vagyis χ valóban sajátfüggvénye A_a -nak. $\square$

4. 3.4 Diszkrét Fourier-transzformáció a véges körön

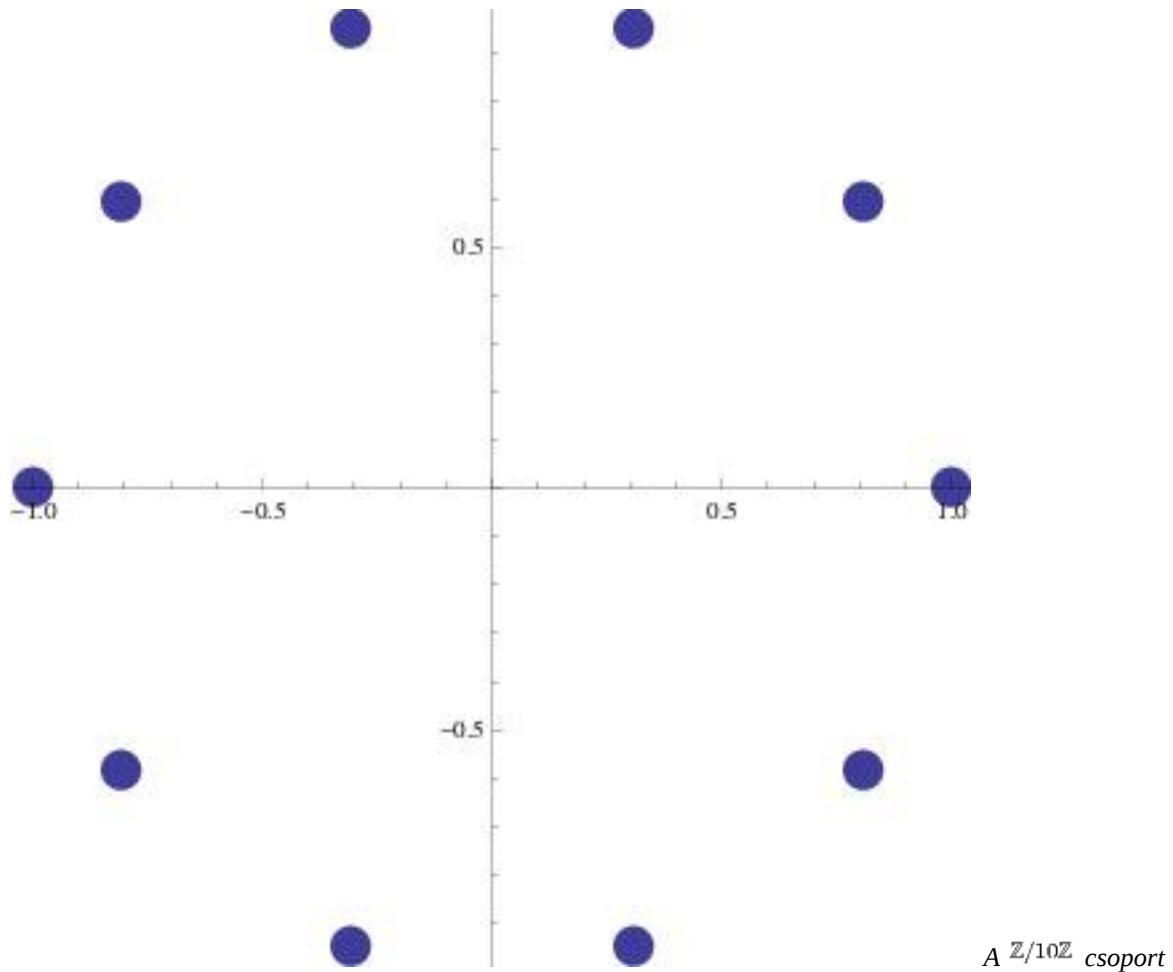
Ebben a szakaszban G a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ faktorcsoportot jelöli tetszőleges $n > 1$ egész szám esetén. Ez egy n elemű ciklikus Abel-csoport, mely számos különböző módon realizálható. Definíció szerint elemei az egész számok modulo n képzett maradékosztályai, melyeket a $0, 1, \dots, n-1$ számokkal fogunk jelölni. Korábban láttuk, hogy ezt a csoportot úgy is felfoghatjuk, mint az n -edik egységgyökök szorzáscsoportját, melynek elemeit az egységsugarú kör kerületén egyenletesen elhelyezkedő n pont ábrázolja. Mivel G duálisa, a $\hat{G}$ csoport ugyancsak n elemű ciklikus csoport, G -től megkülönböztetendő, ez utóbbi felfogást $\hat{G}$ -re tartjuk fenn. Ha tehát

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

rögzített n -edik primitív egységgyökök, akkor $\hat{G}$ elemei az $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ komplex számokkal azonosíthatók abban az értelemben, hogy az ω^j „karakter” értéke a G csoport k elemén

$$(\omega^j)^k = \omega^{jk} = e^{\frac{2\pi i j k}{n}} \quad j, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Végül, csoportunkat geometriailag úgy is elképzelhetjük, mint egy szabályos n -szög középpontja körüli pozitív irányú elforgatások halmazát, melyben két forgatás szorzata az egymás utáni végrehajtásuk eredményeként kapott forgatás, egy forgatás inverze pedig - nyilván $\omega^{-1} = \omega^{n-1}$ miatt - a forgatás $n-1$ - szeri megismétlésével kapott forgatás. Ezek a forgatások egyébként az origóban elhelyezett szabályos n -szög csúcspontjait megadó komplex számok ω^j -vel való szorzásaként realizálhatók $j = 0, 1, \dots, n-1$ esetén.



Az $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvények n komplex komponensű vektorok. A komponenseket 0 -tól $n-1$ -ig fogjuk számozni, és azt a vektort, amelynek j -edik komponense 1 , a többi pedig 0 , $[\delta_j]$ fogja jelölni $j = 0, 1, \dots, n-1$ esetén. Ez a vektor egyébként éppen a δ_j függvényt reprezentálja, hiszen az

$$(3.2) \quad f \mapsto [f] = [f(0), f(1), \dots, f(n-1)]$$

megfeleltetés nyilván $L^2(G)$ -nek $\mathbb{C}^n$ -re való izomorf leképezése, amint ezt a 2.1. szakaszban megjegyeztük. Ebben a szituációban a Fourier-transzformációt diszkrét Fourier-transzformációnak nevezzük, jele DFT. A DFT-t talán A. C. Clairaut ♣ használta legelőször 1759-ben a Halley-üstökös pályájának kiszámításakor. Ezzel megelőzte Fourier 1807-ben megkezdett és 1822-ben megjelent „Théorie analytique de la chaleur” című munkáját, mely mérföldkő a Fourier-sorok és a Fourier-transzformáció elméletében. Megjegyezzük, hogy trigonometrikus összegeket már az ókori babiloniak használtak pályák kiszámítására.



A. Clairaut

5

Legyen tehát $[f] = [f(0), f(1), \dots, f(n-1)]$ az f -nek megfelelő vektor, melyet a DFT az $[\hat{f}] = [\hat{f}(1), \hat{f}(\omega), \dots, \hat{f}(\omega^{n-1})]$ vektorba transzformál az

$$(3.3) \quad \hat{f}(\omega^j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k) e^{-\frac{2\pi i}{n} jk} \quad j = 0, \dots, n-1$$

összefüggések szerint. Például, az $(1, 0, 0, \dots, 0)$ vektor transzformáltja az $\frac{1}{n}(1, 1, \dots, 1)$ vektor lesz, az $(1, 1, \dots, 1)$ vektoré pedig az $(1, 0, \dots, 0)$ vektor. Mivel a DFT az n -dimenziós $L^2(G)$ Hilbert-térnek $L^2(\hat{G})$ -re való lineáris leképezése, így e terek bármely bázisainak rögzítése mellett egy $n \times n$ típusú mátrixszal írható le. Például vizsgáljuk meg a DFT M_δ mátrixát az egyponthalmazok alkotott ortogonális bázisokban. Ez a G , illetve $\hat{G}$ fentebb említett reprezentálását figyelembe véve azt jelenti, hogy $L^2(G)$ bázisát a δ_j függvények, $L^2(\hat{G})$ bázisát pedig a δ_{ω^j} függvények alkotják, ahol $j = 0, 1, \dots, n-1$. Mivel

$$\hat{\delta}_l(\omega^j) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_l(k) e^{-\frac{2\pi i}{n} jk} = \frac{1}{n} e^{-\frac{2\pi i}{n} jl} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \omega^{-lk} \delta_{\omega^k}(\omega^j),$$

másszóval

$$\hat{\delta}_l = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \omega^{-lk} \delta_{\omega^k},$$

⁵Alexis Claude Clairaut, francia matematikus (1713-1765)

ezért

$$(3.4) \quad [M_\delta]_{l,k} = \frac{1}{n} \omega^{-lk}$$

teljesül $k, l = 0, 1, \dots, n-1$ esetén. Ez természetesen megfelel a (3.3) egyenlőségnek. Az $[M_\delta]$ mátrix ismeretében számítsuk ki például az

$$f = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{n-1})$$

függvény DFT-jét. A fentiek alapján

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega^l) &= M_\delta f(\omega^l) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-lk} f(k) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-lk} (\delta_1(k) + \delta_{n-1}(k)) = \\ &= \frac{1}{2} (\widehat{\delta}_1(\omega^l) + \widehat{\delta}_{n-1}(\omega^l)) = \\ &= \frac{1}{2n} (\omega^l + \omega^{-l}) = \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}l} + e^{-\frac{2\pi i}{n}l}}{2} = \frac{1}{n} \cos \frac{2\pi l}{n}, \end{aligned}$$

ha $l = 0, 1, \dots, n-1$. Az $\widehat{f}$ DFT-je tehát egy „diszkrét” koszinusz függvény. Megjegyezzük, hogy mivel $n-1$ és -1 kongruens modulo n , ezért az $\widehat{f}$ definícióját

$$(3.5) \quad f = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$$

formában is felírhatjuk. A DFT természetesen ortogonális bázist ortogonális bázisba visz át és fennáll

$$[M_\delta \cdot M_\delta^*]_{k,l} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-kj} \omega^{lj} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{(l-k)j} = \frac{1}{n} \delta_k(l),$$

vagyis $M_\delta \cdot M_\delta^* = \frac{1}{n} I$, és hasonlóan $M_\delta^* \cdot M_\delta = \frac{1}{n} I$, ahol M_δ^* az M_δ adjungáltja, I pedig az identikus operátor. Ez azt jelenti, hogy $\sqrt{n} M$ unitér operátor. Mivel a DFT izomorfia, így az $[M_\delta]$ mátrix reguláris. Erről determinánsának közvetlen kiszámításával is meggyőződhetünk. A fentiek alapján

$$[M_\delta] = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \cdot & \cdot & \omega^{-(n-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \cdot & \cdot & \omega^{-2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \omega^{-(n-1)} & \omega^{-2(n-1)} & \cdot & \cdot & \omega^{-(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Ez azt jelenti, hogy $n[M]$ egy Vandermonde⁶✚-típusú mátrix, melynek általános alakja

⁶Alexandre-Théophile Vandermonde, francia zenész, matematikus (1735-1796)

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdot & \cdot & x_2^{n-1} \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdot & \cdot & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_n$ komplex számok esetén. Ismeretes, hogy V_n determinánsa

$$\det V_n = \prod_{j < k} (x_j - x_k),$$

amely akkor és csak akkor különbözik zérustól, ha az x_j számok különbözők. Esetünkben $x_j = \omega^{-(j-1)}$, ha $j = 0, 1, \dots, n-1$. Amennyiben $n = p$ páratlan prímszám, azt kapjuk, hogy

$$(3.6) \quad \det[M_\delta] = \begin{cases} (-1)^m (\sqrt{p})^{-p} & \text{ha } p = 4m + 1 \\ -i(-1)^m (\sqrt{p})^{-p} & \text{ha } p = 4m + 3. \end{cases}$$

5. 3.5 Feladatok

1.

Legyen G véges Abel-csoport az e egységelemmel. Határozzuk meg δ_e Fourier-transzformáltját!

2.

Legyen G véges Abel-csoport, a a G eleme. Határozzuk meg δ_a Fourier-transzformáltját!

3.

Legyen G véges Abel-csoport, H a G egy részcsoportja. Határozzuk meg δ_H Fourier-transzformáltját!

4.

Legyen G véges Abel-csoport. Mutassuk meg, hogy

$$\delta = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi.$$

5.

Legyen G véges Abel-csoport, a, b a G elemei. Mutassuk meg, hogy

$$\delta_a * \delta_b = \frac{1}{|G|} \delta_{ab}.$$

6.

Legyen G tetszőleges véges Abel-csoport, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ pedig egy nem azonosan nulla függvény. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll a

$$|\text{supp } f| \cdot |\text{supp } \hat{f}| \geq |G|,$$

úgynevezett Heisenberg $\times$ -féle határozatlansági reláció !



W. Heisenberg ⁷

7.

Legyen G véges Abel-csoport, H a G egy részcsoportja. Mutassuk meg, hogy

$$\widehat{\delta_H} = \frac{|H|}{|G|} \delta_{H^\perp}$$

és

$$|\text{supp } \delta_H| \cdot |\text{supp } \widehat{\delta_H}| = |G|.$$

⁷Werner Heisenberg, német fizikus (1901-1976)

4. fejezet - TOPOLOGIKUS ALAPISMERETEK

1. 4.1 Halmazelméleti alapok

Ebben a szakaszban olyan halmazelméleti alapismereteket foglalunk röviden össze, amelyekre a későbbiekben külön megjegyzés nélkül kívánunk hivatkozni.

Vizsgálataink megértéséhez általában elegendő a halmazelmélet úgynevezett naiv szintjének ismerete, ami elsősorban a halmazalgebrákban használatos alpműveletekkel, azok tulajdonságaival kapcsolatos jártasságot jelenti. Bár a halmazelméletet hallgatólagosan axiomatikus diszciplinaként kezeljük, melynek két alapfogalma a halmaz és a halmazok körében értelmezett eleme reláció, az axiomatikus tárgyalás részleteiben nem kívánunk elmélyedni. Itt csupán néhány olyan fogalomra és eredményre irányítjuk rá a figyelmet, amelyekkel kapcsolatos pontos ismeretek alapvetően fontosak tárgyalásunk szempontjából.

Legyen adott az X halmazon egy R ekvivalencia reláció, azaz, az $X \times X$ Descartes-féle szorzathalmaz egy részhalmaza a következő tulajdonságokkal:

1.

az R reláció reflexív, azaz, (i, i) az R -hez tartozik minden I -beli i esetén;

2.

az R reláció szimmetrikus, azaz, ha valamely I -beli i, j esetén (i, j) az R -hez tartozik, akkor (j, i) is R -hez tartozik;

3.

az R reláció tranzitív, azaz, ha valamely I -beli i, j, k esetén (i, j) és (j, k) az R -hez tartozik, akkor (i, k) is R -hez tartozik.

Jelöljük bármely X -beli x esetén az X mindazon y elemeinek halmazát, melyekre (x, y) az R -hez tartozik, másszóval az x elem osztályát $R(x)$ módon. Amint azt könnyű látni, két elem osztályai vagy diszjunktak, vagy egybeesnek, valamint az összes osztályok egyesítése X . Ezt röviden úgy mondjuk, hogy az osztályok X -nek egy osztályozását adják. Az osztályok halmazát az X halmaz R szerinti faktorhalmazának nevezzük, és X/R módon jelöljük. Azt a leképezést, mely az X minden eleméhez az elem osztályát rendeli az X -nek az X/R faktorhalmazra való természetes leképezésének nevezzük.

Az I halmazt féligrendezett halmaznak nevezzük, ha értelmezett rajta egy $R \subseteq I \times I$ féligrendezés, azaz, egy reláció, a következő tulajdonságokkal:

1.

az R reláció reflexív, azaz, (i, i) az R -hez tartozik minden I -beli i esetén;

2.

az R reláció antiszimmetrikus, azaz, ha valamely I -beli i, j esetén (i, j) és (j, i) az R -hez tartozik, akkor $i = j$;

3.

az (i, R) reláció tranzitív, azaz, ha valamely I -beli i, j, k esetén (i, j) és (j, k) az R -hez tartozik, akkor i is k -hez tartozik.

Például, az $A \subseteq B$ halmazelméleti tartalmazás nyilván halmazok bármely I családján féligrendezés, de ugyanez nem mondható el az $A \in B$ elemként való tartalmazásról, hiszen ez általában a fenti tulajdonságok egyikével sem rendelkezik. Ebben a munkában féligrendezett halmazok esetén azt, hogy (i, j) az R -hez tartozik, $i \leq j$ módon fogjuk jelölni, ha ez nem okoz félreértést.

Az I féligrendezett halmazt láncnak nevezzük, ha rendelkezik a következő tulajdonsággal: bármely I -beli i, j elemek összehasonlíthatók az R reláció értelmében, azaz vagy (i, j) , vagy (j, i) az R -hez tartozik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy I lineárisan rendezett halmaz, vagy röviden rendezett halmaz, az R reláció pedig rendezés.

Egy féligrendezett halmaz bármely részhalmaza természetesen ugyancsak féligrendezett, a halmazon adott féligrendezésnek az illető részhalmazra való megszorításával ellátva. Ha mást nem mondunk, egy féligrendezett halmaz részhalmazait mindig ezzel a féligrendezéssel ellátva tekintjük ugyancsak féligrendezett halmaznak.

Az I féligrendezett halmaz H részhalmazát felülről korlátosnak mondjuk, ha van I -nek olyan i eleme, hogy $h \leq i$ teljesül a H minden h eleme esetén. Ilyenkor azt mondjuk, hogy i a H -nak felső korlátja.

Az I féligrendezett halmaz maximális eleme alatt az I olyan m elemét értjük, melynél nem létezik az I -nek olyan $i \neq m$ eleme, hogy $m \leq i$. Természetesen egy féligrendezett halmaznak lehet több különböző maximális eleme, de az is előfordulhat, hogy egy sincs. Viszont egy láncnak nyilván legfeljebb egy maximális eleme létezik. Megjegyezzük, hogy egy féligrendezett halmaz részhalmazának maximális elemei szükségképpen a részhalmazhoz tartoznak, míg felső korlátjai nem feltétlenül.

Legyen I féligrendezett halmaz, melynek bármely i, j elemei esetén van olyan k eleme, hogy $i \leq k$ és $j \leq k$. Ekkor I -t irányított halmaznak nevezzük. Az irányított halmazokon értelmezett függvényeket Moore¹ Σ -Smith² Σ -sorozatoknak, vagy általánosított sorozatoknak nevezzük. Például, a természetes számok halmaza a természetes rendezéssel nyilván irányított halmaz, s a rajta értelmezett általánosított sorozatok pontosan a közönséges sorozatok. Az I irányított halmazon értelmezett x általánosított sorozatot - a közönséges sorozatok mintájára - $(x_i)_{i \in I}$ módon jelölhetjük. Természetesen azt is meg kell mondanunk, hogy hova esnek ennek az általánosított sorozatnak az elemei, tagjai. Ha a H halmazba, tehát a sorozat egy $x : I \rightarrow H$ függvény, akkor azt mondjuk, hogy x egy H -beli általánosított sorozat. Az általánosított sorozatok a nem metrikus topologikus terekben ugyanazt a szerepet játsszák, mint a közönséges sorozatok metrikus terekben.

A halmazelmélet szokásos axiómarendszereinek egyik leggyakrabban vitatott, leghíresebb axiómája a kiválasztási axióma. Ennek egyik lehetséges formája a következő.

Kiválasztási axióma: Legyen I egy nem üres halmaz, $(A_i)_{i \in I}$ pedig nem üres halmazok egy családjá. Ekkor létezik olyan $f : I \rightarrow \cup_{i \in I} A_i$ függvény, melynél $f(i)$ minden I -beli i esetén A_i -hez tartozik.

A kiválasztási axióma egyik legfontosabb alkalmazása halmazok szorzatával kapcsolatos. Legyen I egy halmaz, $(A_i)_{i \in I}$ pedig halmazok egy családjá. Jelölje $A = \prod_{i \in I} A_i$ mindazon $f : I \rightarrow \cup_{i \in I} A_i$ függvények halmazát, melyekre az I minden i eleme esetén $f(i)$ az A_i -hez tartozik. Az A halmazt az $(A_i)_{i \in I}$ halmazok szorzathalmazának, vagy röviden szorzatának nevezzük. A kiválasztási axióma fenti alakjából világos, hogy érvényes a következő tétel.

4.1.1. Tétel.

Nem üres halmazok nem üres családjának szorzata nem üres.

Az $(A_i)_{i \in I}$ halmazok A szorzathalmazán minden I -beli j esetén a $p_j(f) = f(j)$ módon értelmezett $p_j : A \rightarrow A_j$ függvényt a j -edik tényezőhöz tartozó projekciónak nevezzük.

¹Eliakim Hastings Moore, amerikai matematikus (1862-1932)

²Herman Lyle Smith, amerikai matematikus

A kiválasztási axiómának számos ekvivalens megfogalmazása használatos, melyek az általunk választott, fenti fogalmazás mellett természetesen tételnek minősülnek. Ezek közül az egyik, melyet gyakran fogunk alkalmazni, a következő.

4.1.2. Tétel.

(Zorn³ ✚-lemma) Ha egy féligrendezett halmazban minden lánc felülről korlátos, akkor a halmaznak van maximális eleme.

2. 4.2 Topologikus alapfogalmak

Eddigi vizsgálataink során az alapstruktúra egy Abel-csoport volt, tehát egy tisztán algebrai objektum. Ám a harmonikus analízis klasszikus elmélete a valós egyenesen értelmezett folytonos, periodikus függvények vizsgálatából nőtt ki, így várható, hogy az általános elmélet nem maradhat meg az algebra talaján. A továbbiakban topologikus csoportokkal fogunk foglalkozni, s ehhez bizonyos topologikus alapfogalmakra van szükségünk.

Az X halmaz egy topológiáján az X részhalmazainak egy olyan halmazát értjük, amely bármely két hozzátartozó halmaz metszetét, és hozzátartozó halmazok bármely halmazának az egyesítését, továbbá az X halmazt és az üres halmazt is tartalmazza. Az X -et egy topológiával ellátva topologikus térnek nevezzük. A topológiához elemként tartozó halmazokat nyílt halmazoknak, komplementereiket zárt halmazoknak nevezzük. Az X topologikus tér egy Y részhalmazának Y^d lezártján az összes Y -t tartalmazó zárt halmazok metszetét értjük, az Y részhalmaz Y° belsejének pedig az Y összes nyílt részhalmazainak egyesítését nevezzük. Amint az könnyen látható, egy topologikus térben bármely részhalmaz lezártja zárt halmaz, belseje nyílt halmaz. Továbbá, egy részhalmaz pontosan akkor zárt, ha egyenlő lezártjával, s pontosan akkor nyílt, ha egyenlő belsejével.

Egy topologikus teret diszkrétnek nevezünk, ha benne minden részhalmaz nyílt.

Mint könnyen látható, az X halmazon adott topológiák bármely nem üres halmazának metszete is topológia X -en. Ennek alapján az X részhalmazainak tetszőleges rendszere esetén van értelme az ezen halmazrendszert tartalmazó összes topológiák metszetéről, mint az adott rendszer által generált topológiáról beszélni. Ilyen esetben az eredeti halmazrendszert az általa generált topológia egy szubbázisának nevezzük. Tehát ahhoz, hogy egy topológiának egy halmazrendszer szubbázisa legyen szükséges és elegendő, hogy minden nem üres, nyílt halmaz előálljon a halmazrendszer halmazaiból képzett véges metszetek egyesítéseként. Ha minden nyílt halmaz egy adott halmazrendszerből vett halmazok egyesítéseként áll elő, akkor a szóban forgó halmazrendszert a topológia egy bázisának nevezzük.

Egy topologikus tér részhalmazának belső pontja alatt belsejének tetszőleges pontját értjük, míg külső pontja alatt komplementerének tetszőleges belső pontját. Egy topologikus tér részhalmazának egy pont határpontja, ha a pont a halmaznak sem nem belső, sem nem külső pontja. Egy topologikus tér részhalmaza a tér egy pontjának környezete, ha az illető pont a szóban forgó részhalmaznak belső pontja. Egy topologikus tér egy pontjának környezeteiből álló halmazrendszert a pont egy környezetbázisának nevezzük, ha a pont bármely környezete tartalmazza a szóban forgó halmazrendszer valamely elemét. Nyilvánvaló, hogy topologikus térben minden pontnak van nyílt környezetekből álló környezetbázisa. Az is világos, hogy egy topologikus tér x pontja esetén az x bármely $\mathcal{U}(x)$ környezetbázisának minden eleme tartalmazza az x pontot, s bármely két $\mathcal{U}(x)$ -beli halmaz metszete tartalmaz $\mathcal{U}(x)$ -beli halmazt.

Amint az könnyen látható, az X topologikus tér Y részhalmazának X nyílt részhalmazaihoz való metszetei Y egy topológiáját alkotják, amellyel Y -t ellátva Y -t az X egy alterének nevezzük.

Egy halmaz két topológiája közül az első a másodiknál gyengébbnek mondjuk, ha az elsőben nyílt halmazok nyíltak a másodikban is. Ebben az esetben a második topológiát az elsőnél erősebbnek mondjuk. Az X halmaz részhalmazainak egy halmazához X -nek van egy olyan leggyengébb topológiája, hogy abban az adott halmazok nyíltak (amint az könnyen látható, azt az adott halmazok véges tagszámú metszeteiből képzett halmazok egyesítési halmazai alkotják az üres halmazzal együtt); ezt az adott halmazok által generált topológiának nevezzük.

³Max August Zorn, német matematikus (1906-1993)

Akkor mondjuk, hogy az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való leképezése folytonos, ha Y minden nyílt halmazának az X -nek inverz képe nyílt. Az Y -nek X -ba való leképezése nyílt, ha minden nyílt halmazának a képe nyílt. Az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való leképezése zárt, ha minden zárt halmazának a képe zárt. Az X -nek Y -ra való olyan kölcsönösen egyértelmű, folytonos leképezését, amelynek az inverze is folytonos, homeomorf leképezésnek, vagy homeomorfizmusnak nevezzük. Akkor mondjuk, hogy X homeomorf Y -nal, ha X -nek van homeomorf leképezése Y -ra.

Az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való f leképezése az X tér x_0 pontjában folytonos, ha az $f(x_0)$ pont bármely környezetének f -nél vett inverz képe az x_0 -nak környezete. Világos, hogy az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való f leképezése akkor és csak akkor folytonos, ha az X tér minden pontjában folytonos. Az is könnyen látható, hogy ha az X topologikus térnek az Y topologikus térbe való f leképezése az X tér x_0 pontjában folytonos, s az Y topologikus térnek a Z topologikus térbe való g leképezése az Y tér $f(x_0)$ pontjában folytonos, akkor az X topologikus térnek a Z topologikus térbe való $g \circ f$ összetett leképezése az X tér x_0 pontjában folytonos.

Ha Γ egy halmaz és minden Γ -beli ν esetén f_ν az Y halmaznak az X_ν topologikus térbe való leképezése, akkor Y -nak van olyan leggyengébb topológiája, hogy azzal Y -t ellátva minden f_ν folytonos (mint könnyen látható, ezt az X_ν -k nyílt halmazainak az f_ν -knél vett inverz képei generálják); ezt a topológiát az f_ν függvényrendszer által indukált topológiának mondjuk.

Az X_ν topologikus terek X szorzathalmazát X -nak az X_ν -kre való projekciói által indukált topológiával (vagyis azzal, amelyet az X_ν -k nyílt halmazainak inverz képei generálnak) ellátva X -et az X_ν topologikus terek szorzatának nevezzük. Könnyen látható, hogy ha minden Γ -beli ν esetén B_ν az X_ν topológiájának egy bázisa, akkor a szorzattér topológiájának egy bázisát alkotják a $\prod_{\nu \in \Gamma} B_\nu$ alakú halmazok, ahol B_ν a B_ν eleme, és véges sok ν kivételével $B_\nu = X_\nu$. A szorzattopológia definíciója szerint a projekciók nyílt folytonos leképezések.

Az X topologikus tér R ekvivalencia relációja esetén az X/R faktorhalmaznak azok az A részhalmazai, melyeknek a természetes leképezésnél vett inverz képek X -ben nyílt halmazok, a faktorhalmazon, amint az könnyen látható, egy topológiát adnak, melyet az X/R faktorhalmaz faktortopológiájának nevezünk. Mint könnyen látható, a faktortopológiára nézve az X -nek X/R -re való természetes leképezése folytonos.

Az X halmaz részhalmazainak egy családját centrált rendszernek nevezzük, ha a család bármely véges sok elemének van közös pontja. Akkor mondjuk, hogy részhalmazok egy családja az X -nek lefedése, ha a család egyesítése tartalmazza X -et. Ezek szerint az X részhalmazainak egy családja pontosan akkor centrált rendszer, ha a családhoz tartozó halmazok közül bármely véges soknak a komplementere nem lefedése X -nek.

Akkor mondjuk, hogy az X topologikus tér A részhalmazának az $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ lefedése nyílt lefedés, ha az A_γ halmazok mindegyike nyílt, és véges lefedésnek mondjuk, ha az $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ halmazrendszer véges. Akkor mondjuk, hogy az X topologikus tér A részhalmaza kompakt, ha minden nyílt lefedése tartalmaz véges lefedést. Akkor mondjuk, hogy az X topologikus tér kompakt, ha mint önmagának részhalmaza, kompakt halmaz. Mint könnyen látható, az X topologikus tér A részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha mint alternatív, kompakt topologikus tér. Érvényes a következő tétel.

4.2.1. Tétel.

Egy topologikus tér akkor és csak akkor kompakt, ha benne bármely zárt halmazokból álló centrált rendszer metszete nem üres.

Bizonyítás.

Legyen $(A_i)_{i \in I}$ az X kompakt topologikus tér zárt halmazainak egy centrált rendszere és tegyük fel, hogy $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$. Ekkor az $(A_i^c)_{i \in I}$ komplementer halmazok családja az X olyan nyílt lefedése, melynek egyetlen véges részrendszere sem lefedése X -nek, s ez ellentmond az X kompaktságának.

Megfordítva, tegyük fel, hogy teljesül a tétel feltétele, és $(U_i)_{i \in I}$ az X halmaz egy nyílt lefedése. Ekkor az $\{C_i\}_{i \in I}$ komplementer halmazok olyan zárt halmazrendszert alkotnak, amelynek metszete üres, így ez a rendszer nem lehet centrált, azaz, van olyan véges részrendszere, melynek metszete üres. E véges részrendszer komplementer halmazai az eredeti lefedő rendszer véges részlefedését képezik. $\square$

Kompakt topologikus terekkel kapcsolatban alapvető tétel a következő.

4.2.2. Tétel.

(Tyihonov⁴-tétel) Kompakt topologikus terek szorzata kompakt.

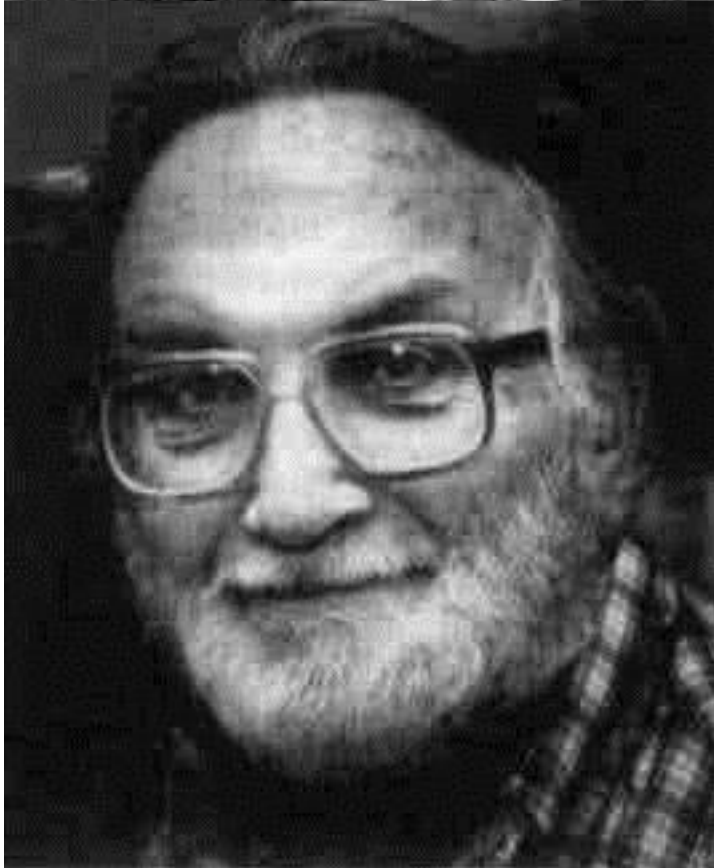
Bizonyítás.

Legyen a Γ halmaz minden ν eleme esetén az X_ν kompakt terek Y szorzatában zárt részhalmazoknak egy $\mathcal{C}$ rendszere centrált. A 4.1.2. Zorn-lemma alapján $\mathcal{C}$ -t magában foglalja Y részhalmazainak egy $\mathcal{M}$ maximális centrált rendszere. Az $\mathcal{M}$ -hez tartozó halmazok véges tagszámú metszetei centrált rendszert alkotnak, s így $\mathcal{M}$ maximális volta miatt $\mathcal{M}$ -hez tartoznak. Ebből az is következik, hogy ha az $A \subseteq Y$ részhalmaznak az $\mathcal{M}$ -hez tartozó halmazok egyikével sem üres a metszete, akkor az $\mathcal{M}$ -hez tartozó halmazok A -val együtt centrált rendszert alkotnak, s így $\mathcal{M}$ maximális volta miatt A is $\mathcal{M}$ -hez tartozik. Az Y -nak az X_ν -re való p_ν projekciójánál az $\mathcal{M}$ -hez tartozó halmazok képei egy $\mathcal{M}_\nu$ centrált rendszert alkotnak. Az X_ν kompaktsága miatt az $\mathcal{M}_\nu$ -höz tartozó halmazok lezárásainak metszete tartalmaz egy x_ν elemet. Ha U az x_ν -t tartalmazó nyílt halmaz, akkor U -nak az $\mathcal{M}_\nu$ -beli halmazok egyikével sem üres a metszete, így az U halmaz p_ν -nél vett inverz képének az $\mathcal{M}$ -hez tartozó halmazok egyikével sem üres a metszete, ezért ez az inverz kép is $\mathcal{M}$ -hez tartozik. Ebből következik, hogy véges számú szóban forgó inverz kép metszete is $\mathcal{M}$ -hez tartozik, így a Γ halmaz ν pontjaiban $f(\nu) = x_\nu$ összefüggéssel értelmezett Y -beli f függvényt tartalmazó bármely nyílt halmaznak az $\mathcal{M}$ -hez tartozó halmazok egyikével sem üres a metszete, vagyis az $\mathcal{M}$ -hez tartozó halmazok bármelyikének a lezártja tartalmazza f -et. Eszerint a $\mathcal{C}$ -hez tartozó halmazok metszete nem üres, tehát Y kompakt tér. $\square$

⁴Andrej Nyikolajevics Tyihonov, orosz matematikus (1906-1993)



A. N. Tyihonov

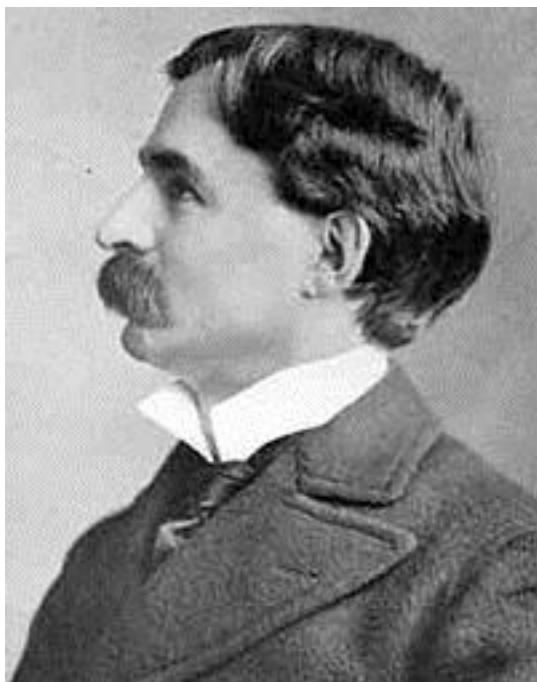


M. Zorn

Egy topologikus teret lokálisan kompaktnak nevezünk, ha minden pontjának van zárt, kompakt környezete. Természetesen minden kompakt topologikus tér lokálisan kompakt.

A metrikus terekkel ellentétben egy topologikus térben a halmazok lezártjának pontjai nem azonosak a halmazbeli sorozatok határértékeivel. A halmazok lezártjának leírásához általánosított sorozatokra van szükség.

Legyen X topologikus tér, $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat X -ben. Akkor mondjuk, hogy ez az általánosított sorozat konvergál az X tér a eleméhez, ha az a bármely U környezete esetén van I -ben olyan i_0 , hogy $i_0 \leq i$ esetén x_i az U -hoz tartozik. Nincs kizárva, hogy egy általánosított sorozat a tér több különböző eleméhez konvergál, ám - amint azt látni fogjuk - ez Hausdorff-terekben nem fordulhat elő: Hausdorff-féle topologikus térben egy általánosított sorozat legfeljebb egy elemhez konvergálhat, melyet ekkor a határértékének nevezünk, s mint az szokásos, $\lim_i x_i$ módon jelölünk.



E. H. Moore

Az általánosított sorozatok hasznosságát leginkább a következő két tétel mutatja, melyek a metrikus terekben jól ismertek közös sorozatokkal kapcsolatban.

4.2.3. Tétel.

Tetszőleges topologikus tér egy részhalmazának lezártja a tér mindazon pontjainak halmaza, melyekhez valamely, a részhalmazhoz tartozó általánosított sorozat konvergál.

Bizonyítás.

Legyen h a H halmaz lezártjának egy pontja, I pedig a h pont összes nyílt környezeteinek halmaza, melyen értelmezzünk féligrendezést úgy, hogy ha U, V a h környezetei, akkor $U \leq V$ azt jelenti, hogy $U \supseteq V$. Világos, hogy ez féligrendezés I -n, mellyel I irányított halmaz. Mivel h minden környezetében van H -nak eleme, így a kiválasztási axióma biztosítja olyan $x : I \rightarrow H$ függvény létezését, melyre $x(U)$ minden I -beli U esetén U -hoz tartozik. Ekkor az $x_U = x(U)$ módon értelmezett $(x_U)_{U \in I}$ egy általánosított sorozat H -ban, mely nyilvánvalóan h -hoz konvergál.

Megfordítva, ha $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat H -ban, mely h -hoz konvergál, akkor természetesen h minden környezetében van e sorozatnak tagja, vagyis H -nak eleme, így h a H lezártjához tartozik. $\square$

A tétel szerint egy topologikus tér zárt halmazait, így a tér topológiáját a tér konvergens általánosított sorozatai segítségével pontosan leírhatjuk: egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha megegyezik a hozzá tartozó konvergens általánosított sorozatok határértékeinek halmazával. Így ha egy halmazon adott két topológia,

melyekre nézve pontosan ugyanazok az általánosított sorozatok konvergensek, s ugyanazokhoz a határértékekhez konvergálnak, akkor a két topológia megegyezik.

4.2.4. Tétel.

Legyenek X, Y topologikus terek, x az X egy pontja, $f: X \rightarrow Y$ pedig egy függvény. Az f akkor és csak akkor folytonos x -ben, ha bármely x -hez konvergáló X -beli $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat esetén az $(f(x_i))_{i \in I}$ általánosított sorozat $f(x)$ -hez konvergál.

Bizonyítás.

Tegyük fel először, hogy f folytonos x -ben, s az $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat x -hez konvergál. Legyen V az $f(x)$ tetszőleges környezete, ekkor van x -nek olyan U környezete, hogy minden U -beli y esetén $f(y)$ a V -hez tartozik. Az U környezethez van az I -ben olyan i_0 , hogy $i \geq i_0$ esetén x_i az U -ban van, így azt kaptuk, hogy $i \geq i_0$ esetén $f(x_i)$ a V -ben van, vagyis az $(f(x_i))_{i \in I}$ általánosított sorozat $f(x)$ -hez konvergál.

Most azt tételezzük fel, hogy bármely x -hez konvergáló X -beli $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat esetén az $(f(x_i))_{i \in I}$ általánosított sorozat $f(x)$ -hez konvergál, de f nem folytonos x -ben. Ez azt jelenti, hogy van az $f(x)$ -nek olyan V környezete, hogy az x bármely U környezete tartalmaz olyan x_U elemet, melyre $f(x_U)$ nincs V -ben. Azonnal látható, hogy az így kapott $(x_U)_{U \in I}$ általánosított sorozat, mely a 4.2.3. Tételben értelmezett I irányított halmazon van definiálva, konvergál x -hez, de az $(f(x_U))_{U \in I}$ általánosított sorozat nem konvergál $f(x)$ -hez, ami ellentmondás. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

3. 4.3 Elválasztási tételek, Uriszon-lemma

Akkor mondjuk, hogy egy topologikus tér T_0 -tér, ha bármely két pontja közül valamelyiknek van olyan nyílt környezete, mely a másikat nem tartalmazza. Akkor mondjuk, hogy egy topologikus tér T_1 -tér, ha benne minden egy pontos halmaz zárt. Nyilván minden T_1 -tér egyben T_0 -tér. Akkor mondjuk, hogy egy topologikus tér T_2 -tér, vagy Hausdorff ⁵ T_2 -tér, ha bármely két eleméhez van két, az egyiket, illetve a másikat tartalmazó, diszjunkt nyílt halmaz. Mint könnyen látható, minden Hausdorff-tér T_1 -tér. Ugyancsak könnyen látható, hogy Hausdorff-terek szorzata Hausdorff-tér. Akkor mondjuk, hogy egy topologikus tér reguláris, ha bármely zárt halmazhoz és rajta kívül fekvő ponthoz vannak a pontot, illetve a zárt halmazt tartalmazó, diszjunkt nyílt halmazok. Ezt úgy szokás fogalmazni, hogy zárt halmaz és rajta kívül fekvő pont nyílt halmazokkal elválasztható.

Akkor mondjuk, hogy egy topologikus tér teljesen reguláris, ha topológiája indukálható valós értékű, folytonos függvényekkel. Mint könnyen látható, ez pontosan akkor teljesül, ha a tér bármely zárt halmazához és azon kívül fekvő ponthoz van olyan valós értékű, folytonos függvény, amely a zárt halmazon eltűnik, a pontban pedig az 1 értéket vesz fel. Ezt úgy szokás fogalmazni, hogy zárt halmaz és rajta kívül fekvő pont folytonos függvénnyel elválasztható. Világos, hogy ebből a regularitás következik, hiszen azon pontok halmaza, ahol az elválasztó folytonos függvény $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb, illetve kisebb értéket vesz fel, a pontot, illetve a zárt halmazt tartalmazó nyílt halmaz, s ezek a nyílt halmazok nyilván diszjunktak.

Akkor mondjuk, hogy egy topologikus tér normális, ha bármely két diszjunkt, zárt halmazához van két, az egyiket, illetve a másikat tartalmazó, diszjunkt nyílt halmaz. Ez röviden úgy mondható, hogy két diszjunkt zárt halmaz nyílt halmazokkal elválasztható. Amennyiben a tér T_1 -tér, úgy ebből következik a regularitás.

⁵Felix Hausdorff, német matematikus (1868-1942)

4.3.1. Tétel.

(Uriszon⁶ -lemma) Az X topologikus tér akkor és csak akkor normális, ha bármely A és B diszjunkt zárt részhalmazaihoz van az X -nek olyan folytonos leképezése a valós számok $[0, 1]$ zárt szakaszába, amely A elemein 0 , B elemein 1 értéket vesz fel.

Bizonyítás.

Az X tér normális volta miatt, ha az U nyílt halmazra és a H zárt halmazra fennáll $H \subseteq U$, akkor valamely V nyílt halmazra és annak V^d lezárására

$$H \subseteq V \subseteq V^d \subseteq U$$

teljesül. Ennek alapján értelmezzük n szerinti teljes indukcióval az $U_{2^{-n}k}$ halmazokat a következőképpen ($n, k \geq 0$ egész számok, $k \leq 2^n$). Legyen U_1 a B komplementere és U_0 olyan nyílt halmaz, amelyre $A \subseteq U_0 \subseteq U_0^d \subseteq U_1$ teljesül. Tegyük fel, hogy valamely n esetén már minden $k \leq 2^n$ -re értelmeztük az $U_{2^{-n}k}$ halmazokat úgy, hogy $U_{2^{-n}k}$ nyílt halmaz és $k < k' \leq 2^n$ esetén $U_{2^{-n}k}^d \subseteq U_{2^{-n}k'}$ érvényes. Legyen $k < 2^n$ -nél $U_{2^{-(n+1)}(2k+1)}$ olyan nyílt halmaz, hogy

$$U_{2^{-n}k}^d \subseteq U_{2^{-(n+1)}(2k+1)} \subseteq U_{2^{-(n+1)}(2k+1)}^d \subseteq U_{2^{-n}(k+1)}$$

teljesüljön. Világos, hogy $k < k' \leq 2^{n+1}$ -nél $U_{2^{-(n+1)}k}^d \subseteq U_{2^{-(n+1)}k'}$ érvényes. Az $U_{2^{-n}}$ halmazok nyilván magukban foglalják A -t, és B -vel diszjunktak, továbbá $2^{-n}k$ alakú $0 \leq r < r' \leq 1$ számoknál $U_r^d \subseteq U_{r'}$ érvényes. Ha x az X eleme, akkor U_1 -beli x esetén legyen $f(x)$ az olyan előbbi r -ek infimuma, melyekre x az U_r -hez tartozik, ha pedig x nincs benne U_1 -ben, akkor legyen $f(x) = 1$. Világos, hogy f a $[0, 1]$ -be képezi le X -et, A elemeinél 0 , B elemeinél pedig 1 értékű. Egyrészt bármely $0 < t \leq 1$ valós szám esetén azoknál és csak azoknál az x -eknél teljesül $f(x) < t$, amelyek az $r < t$ számokkal képzett U_r -ek egyesítési halmazához tartoznak, s így ezek az x -ek nyílt halmazt alkotnak. Másrészt, bármely $0 \leq t < 1$ valós szám esetén azoknál és csak azoknál az x -eknél teljesül $f(x) > t$, amelyek az $r < t$ számokkal képzett U_r^d -ek komplementereinek egyesítési halmazához tartoznak, s így ezek az x -ek is nyílt halmazt alkotnak. Ezekből következik, hogy f folytonos. A megfordított állítás nyilvánvaló. $\square$

⁶Pavel Szamuilovics Uriszon, orosz matematikus (1898-1924)



F. Hausdorff



P. Sz. Urison

4.3.2. Tétel.

Minden normális Hausdorff-tér teljesen reguláris.

Bizonyítás.

Az állítás azonnal következik, ha az Uriszon-lemmát egy zárt halmazra s egy hozzá nem tartozó elemre alkalmazzuk. $\square$

4.3.3. Tétel.

Hausdorff-tér bármely pontjához és a pontot nem tartalmazó kompakt részhalmazához van két diszjunkt nyílt halmaz, melyek közül az egyik a pontot, a másik a részhalmazt tartalmazza.

Bizonyítás.

Az Y bármely eleméhez van olyan, az elemet tartalmazó nyílt részhalmaza X -nek, amelynek lezárása nem tartalmazza x -et. Az ilyen nyílt halmazok közül véges számú az U egyesítési halmaza magában foglalja Y -t. Világos, hogy e véges számú nyílt halmaz lezárásai komplementereinek a metszete x -et tartalmazó, az U nyílt halmazzal diszjunkt nyílt halmaz. $\square$

4.3.4. Tétel.

Kompakt tér zárt részhalmaza kompakt.

Bizonyítás.

Legyen K az X kompakt tér zárt részhalmaza, $(U_i)_{i \in I}$ pedig a K egy nyílt lefedése. Meg kell mutatnunk, hogy az U_i halmazok közül véges soknak az egyesítése tartalmazza K -t. Ehhez a K^c nyílt részhalmazt hozzávéve az X kompakt halmaz

$$\{U_i : i \in I\} \cup K^c$$

nyílt lefedését kapjuk, melyből kiválasztható véges sok halmaz úgy, hogy azok egyesítése tartalmazza az $X = K \cup K^c$ halmazt. Ha e kiválasztott halmazok között K^c nem szerepel, akkor ez a véges sok halmaz az eredeti, K -t lefedő rendszer véges része, mely K -t tartalmazza, s ekkor a bizonyítást befejeztük. Ha viszont a kiválasztott véges sok halmaz között K^c is szerepel, akkor azt elhagyva közülük, a maradék véges sok az eredeti rendszerben is szerepel, s nyilván K -nak lefedése, hiszen K pontjai K^c -ben nem szerepelnek. $\square$

4.3.5. Tétel.

Hausdorff-tér kompakt részhalmaza zárt.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy az X Hausdorff-tér K kompakt részhalmazának K^c komplementerében van olyan x pont, amely határpontja K^c -nek, s így K -nak is. A Hausdorff-tulajdonság miatt minden K -beli p pont esetén vannak olyan U_p, V_p nyílt halmazok, hogy p az U_p -nek, x a V_p -nek eleme, és $U_p \cap V_p = \emptyset$. Az $(U_p)_{p \in K}$ halmazrendszer a K nyílt lefedése, így vannak olyan $p_1, p_2, \dots, p_n$ pontok K -ban, hogy

$$K \subseteq U_{p_1} \cap U_{p_2} \cap \dots \cap U_{p_n}$$

teljesül. Ha $U = U_{p_1} \cap U_{p_2} \cap \dots \cap U_{p_n}$ és $V = V_{p_1} \cap V_{p_2} \cap \dots \cap V_{p_n}$, akkor $K \subseteq U$, V az x környezete, és $U \cap V = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy x határpontja K -nak. $\square$

4.3.6. Tétel.

Kompakt Hausdorff-tér normális.

Bizonyítás.

Az X kompakt Hausdorff-tér A és B diszjunkt, zárt halmazai a 4.3.4. Tétel szerint kompaktnak. A 4.3.3. Tétel szerint B bármely eleméhez van olyan, az elemet tartalmazó nyílt részhalmaza X -nek, amelynek lezártja A -val diszjunkt. Az ilyen nyílt halmazok közül véges számúnak az U egyesítési halmaza magában foglalja B -t. Világos, hogy e véges számú nyílt halmaz lezártjai komplementereinek metszete az A -t magában foglaló, az U nyílt halmazzal diszjunkt nyílt halmaz. $\square$

4.3.7. Tétel.

Kompakt Hausdorff-téren folytonos injektív leképezés nyílt.

Bizonyítás.

Legyen $f : X \rightarrow Y$ folytonos injektív leképezés, U pedig egy nyílt halmaz X -ben. Ekkor U^c zárt, tehát kompakt, így $f(U^c)$ is kompakt, tehát zárt. Végül, az injektivitás miatt $f(U) = f(U^c)^c$, ami nyílt. $\square$

4. 4.4 Kompaktifikáció

A lokálisan kompakt Hausdorff-terek különösen fontos tulajdonsága az, hogy kompakt Hausdorff-tér sűrű alterének tekinthetők, s ennek eléréséhez a térhez csupán egyetlen pontot kell „hozzávenni”.

Az X topologikus tér egy kompaktifikációja alatt egy olyan $\tilde{X}$ kompakt topologikus teret értünk, melynek van X -el homeomorf sűrű altere.

4.4.1. Tétel.

(Egypontos kompaktifikáció) Minden X nem kompakt topologikus térnek van olyan $\tilde{X}$ kompaktifikációja, melynél X képeinek komplementere $\tilde{X}$ -ben egyelemű. A $\tilde{X}$ tér pontosan akkor Hausdorff-féle, ha X lokálisan kompakt Hausdorff-tér.

Bizonyítás.

Legyen ∞ az X elemeitől különböző, egyébként tetszőleges halmaz, továbbá

$$\tilde{X} = X \cup \{\infty\}.$$

Az $\tilde{X}$ halmazon a következő módon adunk meg topológiát: nyílt halmazoknak tekintjük az X nyílt halmazait, valamint azokat a halmazokat, amelyek a ∞ elemet tartalmazzák, komplementerük pedig X -nek zárt, kompakt részhalmaza. Mivel kompakt halmazok zárt részhalmazai kompaktnak a 4.3.4. Tétel szerint, ezért az ilyen módon értelmezett halmazrendszer zárt a tetszőleges egyesítésre és a véges metszetképzésre, így topológiát kapunk $\tilde{X}$ -on. Az is könnyen adódik, hogy X -en ez a topológia megegyezik X topológiájával, azaz, X egy részhalmaza akkor és csak akkor nyílt $\tilde{X}$ -ben, ha nyílt X -ben. Mivel X nem kompakt, a ∞ minden környezete metszi X -et, vagyis X sűrű $\tilde{X}$ -ben. Végül, az $\tilde{X}$ minden nyílt lefedése tartalmaz egy olyan A_0 halmazt, melynek komplementere X -ben zárt és kompakt, s melyhez ∞ hozzátartozik. A többi halmaz $\tilde{X} \setminus A_0$ egy nyílt lefedése, melyből az $A_1, A_2, \dots, A_n$ véges lefedést kiválasztva az $\tilde{X}$ halmaz $A_0, A_1, \dots, A_n$ véges lefedését kapjuk, ami az eredeti lefedés része, így $\tilde{X}$ kompakt. Ha

X lokálisan kompakt, x pedig egy pontja, akkor legyen C az x egy kompakt környezete X -ben. Ekkor C zárt a 4.3.5. miatt, így C belseje és $\check{X} \setminus C$ az x és ∞ diszjunkt környezetek $\check{X}$ -ban. Mivel az X bármely két pontja egymástól nyílt halmazzal elválasztható, hiszen X Hausdorff-féle, így azt kaptuk, hogy $\check{X}$ Hausdorff-féle.

Megfordítva, lokálisan kompakt Hausdorff-tér minden nyílt részhalmaza lokálisan kompakt tér, amint az könnyen látható. $\square$

5. 4.5 Az egység felbontása

Az egység felbontásának tétele olyan esetekben használatos, amikor függvények lokális tulajdonságaiból akarunk globális következtetéseket levonni. A 4.3.1. Uriszon-lemma bizonyításának csekély módosításával kapjuk a következő segédtételt.

4.5.1. Segédtétel.

Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, K az X kompakt, $V \supseteq K$ pedig az $X \setminus K$ -t tartalmazó nyílt részhalmaza. Ekkor van olyan $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely a K pontjaiban legalább 1, s a V egy kompakt részhalmazán kívül nulla.

Ugyancsak szükségünk lesz a következő eredményre.

4.5.2. Segédtétel.

Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, U az X nyílt, K pedig az U kompakt részhalmaza. Ekkor van olyan V nyílt halmaz, melynek lezártja kompakt, és

$$K \subseteq V \subseteq V^{cl} \subseteq U.$$

Bizonyítás.

Mivel a K minden pontjának van kompakt lezártú környezete, s ezek közül véges sok lefedi K -t, ezért K belefoglalható egy kompakt lezártú W nyílt halmazba. Ha $U = X$, akkor legyen $V = W$, egyébként viszont jelölje C a W komplementerét. A 4.3.3. Tétel szerint C minden p pontjához van olyan K -t tartalmazó W_p nyílt halmaz, melyhez p nem tartozik hozzá. Így a C -beli p pontokhoz tartozó $C \cap W^{cl} \cap W_p^{cl}$ alakú halmazok metszete üres, s mivel ezek kompaktak, közülük véges soknak, mondjuk a C -beli $p_1, p_2, \dots, p_n$ pontokhoz tartozóknak a metszete ugyancsak üres. Ezért a

$$V = W \cap W_{p_1} \cap W_{p_2} \cap \dots \cap W_{p_n}$$

halmaz megfelel a kívánalmaknak. $\square$

Ezekből adódik a következő tétel.

4.5.1. Tétel.

(Az egységfelbontás tétele) Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, K az X kompakt részhalmaza, $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ pedig a K egy nyílt lefedése. Ekkor vannak olyan $h_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ nem negatív, folytonos függvények, melyek mindegyike nulla valamely V_i -beli kompakt halmazon kívül, és

$$h_1(x) + h_2(x) + \dots + h_n(x) = 1$$

teljesül a K halmaz minden x eleme esetén.

Bizonyítás.

Az előző segédtelem szerint a K_{V_i} minden x pontjának van olyan kompakt lezártja W_x környezete, hogy $x_1, \dots, x_m$ valamely halmaznak része. Itt természetesen függhet x -től. Legyenek $x_1, \dots, x_m$ olyan pontok, hogy

$$K \subseteq W_{x_1} \cup W_{x_2} \cup \dots \cup W_{x_m}.$$

Ha $1 \leq i \leq n$, akkor legyen H_i mindazon $W_{x_j}^{cl}$ halmazok egyesítése, amelyek V_i -ben vannak. A 4.5.1. Segédtelem szerint vannak olyan g_i folytonos függvények, melyek mindegyike egy kompakt halmazon kívül eltűnik, a H_i -n 1 értéket vesz fel, V_i -n kívül pedig 0-t. Legyen $h_1 = g_1$, továbbá $2 \leq k \leq n$ esetén

$$h_k = (1 - g_1)(1 - g_2) \dots (1 - g_{k-1})g_k.$$

Ekkor h_i folytonos, egy kompakt halmazon kívül eltűnik és V_i -n kívül nulla. Indukcióval kapjuk, hogy

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \dots (1 - g_n).$$

Mivel $K \subseteq H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n$, ezért a K halmaz minden x pontjában legalább egy i -re $g_i(x) = 1$ teljesül, így az állítást igazoltuk. $\square$

A $h_1, h_2, \dots, h_n$ függvények együttesét a $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ lefedésnek alárendelt egységfelbontásnak nevezzük.

6. 4.6 Összefüggőség

Egy topologikus teret összefüggőnek nevezünk, ha nem áll elő két nem üres, diszjunkt nyílt halmaz egyesítéseként. Ez nyilván ekvivalens azzal, hogy a tér nem áll elő két nem üres, diszjunkt zárt halmaz egyesítéseként. Ha ilyen előállítás lehetséges, tehát nem összefüggő terekben ezek szerint mindig létezik olyan nem üres valódi részhalmaz, amely egyidejűleg nyílt és zárt. A továbbiakban az ilyen halmazokat nyílt-zárt halmazoknak nevezzük. Bármely topologikus térben az üres halmaz és az egész tér nyilván nyílt-zárt: ezek a triviális nyílt-zárt halmazok, s a tér összefüggősége pontosan azt jelenti, hogy a térben nincs nemtriviális nyílt-zárt halmaz. Egy részhalmazt egy topologikus térben akkor mondunk összefüggőnek, ha mint altér összefüggő. Könnyű látni, hogy ha egy topologikus térben összefüggő halmazok egy családjának metszete nem üres, akkor a család egyesítési halmaza is összefüggő. Így a tér bármely adott pontja esetén a pontot tartalmazó összes összefüggő halmazok egyesítése összefüggő, s ezt a halmazt az illető pont komponensének nevezzük. Könnyen látható, hogy egy összefüggő halmaz és a lezártja között minden halmaz összefüggő. Speciálisan, összefüggő halmazok lezártja is összefüggő. Ebből adódóan egy topologikus tér pontjainak komponensei zárt halmazok, melyeket a tér komponenseinek nevezünk. Ezek a halmazok a tér egy osztályozását adják: páronként diszjunktak és egyesítésük az egész tér. Nyilván a tér pontosan akkor összefüggő, ha egyetlen komponense van. A topologikus teret teljesen szétesőnek nevezzük, ha benne minden egypontos halmaz komponens, vagy ami ugyanaz, minden komponens egyetlen pontból áll. Például, minden diszkrét topologikus tér teljesen széteső, de ez fordítva nem igaz.

Egy topologikus teret lokálisan összefüggőnek mondunk, ha minden pontnak van összefüggő halmazokból álló környezetbázisa.

4.6.1. Tétel.

Összefüggő topologikus tér folytonos képe összefüggő.

Bizonyítás.

Legyen $f: X \rightarrow Y$ szürjektív folytonos függvény, ahol X, Y topologikus terek és X összefüggő. Ha A, B az Y tér nem üres, diszjunkt nyílt halmazai és $A \cup B = Y$, akkor

$f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ az X tér nem üres, diszjunkt nyílt halmazai és $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$. $\square$

4.6.1. Segédteétel.

Véges sok összefüggő topologikus tér szorzata összefüggő.

Bizonyítás.

Az állítást elegendő két tér szorzatára igazolni. Legyenek X, Y összefüggő topologikus terek, valamint $p = (x_1, y_1)$ és $q = (x_2, y_2)$ az $X \times Y$ szorzattér két tetszőleges pontja. Ekkor $\{x_1\} \times Y$ az Y -nal, $X \times \{y_2\}$ pedig X -szel homeomorf, így ezek a halmazok összefüggők $X \times Y$ -ban. Másrészt (x_1, y_2) közös pontjuk, így $\{x_1\} \times Y \cup X \times \{y_2\}$ egyesítésük összefüggő. Mivel ez utóbbi halmaz tartalmazza p -t és q -t, így a szorzattér bármely két pontja benne van valamely összefüggő halmazban, azaz, bármely két pontnak ugyanaz a komponense. Így a szorzattérnek egyetlen komponense van, tehát összefüggő. $\square$

4.6.2. Tétel.

Összefüggő topologikus terek szorzata összefüggő.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy az $X = \prod_{i \in I} X_i$ szorzattér X_i faktorai összefüggő topologikus terek, legyen p egy pont X -ben, és jelölje C a p pont komponensét. Megmutatjuk, hogy tetszőleges X -beli x a C lezártjához tartozik. Mivel minden komponens zárt halmaz, ebből az adódik, hogy a tér bármely pontja p komponenséhez tartozik, azaz a térnek egyetlen komponense van, s így összefüggő. Legyen tehát U az x pont környezetbázisának egy tetszőleges eleme, ami azt jelenti, hogy vannak olyan $i_1, i_2, \dots, i_m$ elemek I -ben, valamint X_{i_k} -beli U_{i_k} nyílt halmazok, hogy

$$U = \{f : f \in X \text{ és } f(i_k) \in U_{i_k}, k = 1, 2, \dots, m\},$$

és természetesen x_{i_k} az U_{i_k} -hoz tartozik, ha csak $k = 1, 2, \dots, m$. Ekkor a

$$H = \{f : f \in X \text{ és } f(i) = p(i) \text{ ha } i \neq i_k, k = 1, 2, \dots, m\}$$

halmaz homeomorf az $X_{i_1} \times X_{i_2} \times \dots \times X_{i_m}$ szorzattérrel, amely az előző segédteétel szerint összefüggő. Továbbá p a H -hoz tartozik, így H része a p pont C komponensének. Tetszőleges I -beli i esetén legyen $q(i) = p(i)$, ha i egyik i_k -val sem egyezik meg, és legyen $q(i) = x(i)$, ha $i = i_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Ekkor q az U és H közös eleme, így $U \cap C$ nem üres, amivel igazoltuk, hogy x bármely környezete belemetsz C -be, vagyis x a C lezártjához, azaz C -hez tartozik. Ezért $X = C$, s a tételt igazoltuk. $\square$

7. 4.7 Topologikus csoportok

A G csoportot, mely egyben topologikus tér is, topologikus csoportnak nevezzük, ha a csoportművelet és az inverzió folytonosak. Mint könnyen látható, a diszkrét topológiával minden csoport topologikus csoport. Ugyancsak könnyen látható, hogy topologikus csoportban a bal- és jobboldali eltolások, s az inverzió homeomorfizmusok. Ebből adódik, hogy a G csoport adott g eleme esetén egy halmazrendszer pontosan akkor környezetbázisa a g pontnak, ha a halmazrendszer elemeinek a g inverzével való baloldali eltoltjai az egységelem környezetbázisát alkotják. Ugyanez érvényes a jobboldali eltoltakra is. A G topologikus csoport A részhalmazát szimmetrikusnak nevezzük, ha $A^{-1} = A$. Itt és a későbbiekben, természetesen, A^{-1} az A

halmaz elemeinek inverzeiből álló halmazt jelenti. Ugyanígy, az A, B részhalmazok esetén $A \cdot B$ az A -beli és B -beli elemek ilyen sorrendben vett szorzataiból álló halmaz.

4.7.1. Tétel.

Topologikus csoport bármely pontjának van nyílt, szimmetrikus halmazokból álló környezetbázisa.

Bizonyítás.

A fentiek alapján elég az állítást az egységelemre igazolni. Az egységelem bármely U nyílt környezete esetén $U \cap U^{-1}$ az egységelem szimmetrikus környezete, mely az U részhalmaza. $\square$

4.7.2. Tétel.

A G topologikus csoport e egységelemének bármely U nyílt környezete esetén

1.

van az e -nek olyan V nyílt környezete, hogy $V^2 \subseteq U$;

2.

van az e -nek olyan V nyílt környezete, hogy $V^{-1} \subseteq U$;

3.

bármely U -beli x esetén van az e -nek olyan V nyílt környezete, hogy $xV \subseteq U$.

Bizonyítás.

Az első állítás a szorzás, a második az inverzképzés folytonosságából adódik, a harmadik pedig abból, hogy U nyílt halmaz. $\square$

Könnyen látható, hogy az e egységelem bármely U környezete tartalmazza az e -nek olyan V nyílt környezetét is, melyre $V \cdot V^{-1} \subseteq U$ teljesül.

4.7.3. Tétel.

Ha egy topologikus csoport T_0 -tér, akkor Hausdorff-tér.

Bizonyítás.

Legyenek x és y a topologikus csoport különböző pontjai, s legyen U az egységelem olyan környezete, melyre xU nem tartalmazza y -t. Válasszunk e -nek olyan V nyílt környezetét, melyre $V \cdot V^{-1} \subseteq U$. Ekkor xV és yV diszjunkt, x -et, illetve y -t tartalmazó nyílt halmazok. $\square$

Ebben a munkában mindig fel fogjuk tételezni, hogy a szóban forgó topologikus csoportok T_0 -tulajdonságúak, azaz bármely két elemük esetén valamelyiknek van olyan környezete, amely a másik elemet nem tartalmazza. Ebből az előző tétel szerint következik, hogy az illető topologikus csoport, mint topologikus tér, Hausdorff-féle. Röviden, tehát a továbbiakban topologikus csoport alatt mindig Hausdorff-féle topologikus csoportot értünk.

4.7.4. Tétel.

Topologikus csoport bármely pontjának van zárt halmazokból álló környezetbázisa.

Bizonyítás.

Elegendő megmutatni, hogy az egységelem bármely U környezete tartalmazza az egységelemnek olyan V környezetét, melynek lezártja is U -ban van. Legyen V az egységelem olyan szimmetrikus környezete, hogy $V^2 \subseteq U$. Ha x a V lezártjának egy pontja, akkor xV belemetsz V -be, így x a $V \cdot V^{-1}$ -hez tartozik, ami éppen V^2 , mely részhalmaza U -nak. $\square$

4.7.5. Tétel.

Topologikus csoport reguláris.

Bizonyítás.

Ha F egy zárt halmaz, x pedig rajta kívül fekvő pont, akkor az F komplementere az x -nek nyílt környezete, mely tartalmazza x -nek olyan V nyílt környezetét, melynek lezártja is az F komplementerében van, így V és V lezártjának komplementere x -et, illetve F -et tartalmazó, diszjunkt, nyílt halmazok. $\square$

4.7.6. Tétel.

Legyenek A és B egy topologikus csoport részhalmazai. Ha A nyílt, akkor $A \cdot B$ és $B \cdot A$ nyílt. Ha A zárt, és B kompakt, akkor $A \cdot B$ és $B \cdot A$ zárt. Ha A és B kompakt, akkor $A \cdot B$ kompakt.

Bizonyítás.

Ha A nyílt, akkor bármely B -beli b esetén Ab és bA is nyílt, így ezek egyesítése, $A \cdot B$, illetve $B \cdot A$ is nyílt. Legyen most A zárt, B kompakt, s legyen x_0 az $A \cdot B$ -beli $(x_\nu)_{\nu \in \Gamma}$ általánosított sorozat határértéke. Elegendő megmutatni, hogy x_0 az $A \cdot B$ -hez tartozik. Nyilván minden Γ -beli ν esetén $x_\nu = y_\nu z_\nu$, ahol y_ν az A -nak, z_ν a B -nek eleme. Mivel B kompakt, a z_ν -nek van olyan $z_{\varphi(\beta)}$ általánosított részsorozata, mely konvergál egy z_0 elemhez. A megfelelő $x_{\varphi(\beta)}$ általánosított részsorozat ugyancsak x_0 -hoz konvergál, így a szorzás és az inverzképzés folytonossága miatt az $y_{\varphi(\beta)} = x_{\varphi(\beta)} z_{\varphi(\beta)}^{-1}$ általánosított sorozat is konvergál az $x_0 z_0^{-1}$ elemhez, mely az A zártsága miatt A -hoz tartozik. Ezért $x_0 = (x_0 z_0^{-1}) z_0$ az $A \cdot B$ halmaz eleme.

Ha A és B kompakt, akkor a Tyihonov-tétel miatt $A \times B$ is, így ennek $A \cdot B$ képe az $(x, y) \mapsto xy$ folytonos leképezésénél ugyancsak kompakt. $\square$

Egy topologikus csoportnak egy másik topologikus csoportra való izomorf leképezését topologikus izomorfizmusnak nevezzük, ha homeomorfizmus. Ilyenkor a két topologikus csoportot topologikusan izomorfoknak mondjuk.

8. 4.8 Topologikus részcsoporthok, faktorcsoporthok

Könnyű látni, hogy egy topologikus csoport bármely részcsoporthja, mint topologikus altér, ugyancsak topologikus csoport, melyet a topologikus csoport részcsoporthjának nevezünk. Az is könnyen látható, hogy egy topologikus csoport bármely részcsoporthjának lezártja ugyancsak részcsoporth.

4.8.1. Tétel.

Topologikus csoport egy részcsoporthja akkor és csak akkor nyílt, ha van belső pontja. Minden nyílt részcsoporth zárt.

Bizonyítás.

Ha x a H részcsoporthoz tartozó pontja, akkor van az egységelemnek olyan U környezete, hogy $xU \subseteq H$. A bármely y eleme esetén $yU = yxU \subseteq yH \subseteq H$, így $yU \subseteq H$, tehát H nyílt.

Ha H nyílt részcsoporthoz tartozó, akkor komplementere az xH alakú mellékosztályok egyesítése, ahol x a G -nek H -ba nem tartozó eleme. Ezek ugyancsak nyíltak, így egyesítésük is, tehát H zárt. $\square$

Ebből adódóan összefüggő topologikus csoportban nincsen valódi nyílt részcsoporthoz tartozó.

4.8.2. Tétel.

Topologikus csoport egységelemének bármely U nyílt, szimmetrikus környezete esetén $\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ nyílt-zárt részcsoporthoz tartozó.

Bizonyítás.

Ha x az U^k -hoz, y pedig az U^l -hez tartozik, akkor xy az U^{k+l} -nek, x pedig az $U^{-1} = U$ -nak eleme, így a fenti egyesítés valóban részcsoporthoz tartozó, mely nyilván nyílt halmaz, így az előző tétel szerint zárt is. $\square$

Következésképpen összefüggő topologikus csoportot egységelemének bármely nyílt, szimmetrikus környezete generálja. Sőt, mivel az egységelemnek minden környezete tartalmaz nyílt, szimmetrikus környezetet, így összefüggő topologikus csoportot egységelemének bármely környezete generálja.

4.8.3. Tétel.

Topologikus csoport egységelemének komponense zárt részcsoporthoz tartozó.

Bizonyítás.

Jelölje C az egységelem komponensét. Mivel $x \mapsto x^{-1}$ folytonos, így a 4.6.1. Tétel alapján C^{-1} összefüggő, valamint tartalmazza az egységelemet, így $C^{-1} \subseteq C$. Másrészt, a $C \times C$ összefüggő topologikus térnek a $C \cdot C$ halmaz folytonos képe az $(x, y) \mapsto x \cdot y$ leképezésnél, így $C \cdot C$ összefüggő, valamint tartalmazza az egységelemet, így $C \cdot C \subseteq C$, s ezzel igazoltuk, hogy C részcsoporthoz tartozó, s mint minden komponens, zárt. $\square$

4.8.4. Tétel.

Ha egy topologikus csoport egy részcsoporthoz tartozó az egységelem valamely zárt környezetével való metszete zárt, akkor a részcsoporthoz tartozó.

Bizonyítás.

Legyen a H részcsoporthoz tartozó az egységelem U környezetének lezártjával való metszete zárt, továbbá legyen V az egységelem olyan nyílt, szimmetrikus környezete, melynél $V^2 \subseteq U$. Legyen x a H lezártjának tetszőleges pontja, $(x_\nu)_{\nu \in \Gamma}$ pedig H -beli, x -hez konvergáló általánosított sorozat. Mivel a H lezártja is részcsoporthoz tartozó, így x^{-1} is a H lezártjához tartozik, s a Vx^{-1} halmaz belemetsz H -ba; legyen y a metszet egy eleme. Létezik olyan ν_0 , hogy ha $\nu \geq \nu_0$, akkor x_ν az xV halmazba esik, így ekkor yx_ν hozzátartozik a $(Vx^{-1})(xV) = V^2 \subseteq U$ halmazhoz, s ezért yx_ν közös eleme az U lezártjának és H -nak. Mivel az $(yx_\nu)_{\nu \in \Gamma}$ általánosított sorozat konvergál yx -hez, ezért yx is közös eleme U lezártjának és H -val, s így $x = y^{-1}yx$ a H -ba tartozik, tehát H lezártja része H -nak, s így H zárt. $\square$

4.8.5. Tétel.

Topologikus csoport egy részcsoportja akkor és csak akkor diszkrét, ha van izolált pontja, és minden diszkrét részcsoport zárt.

Bizonyítás.

Ha x a H részcsoportnak izolált pontja, akkor van az egységelemnek olyan U környezete, hogy $xU \cap H = \{x\}$. A H bármely y eleme esetén

$$(yU) \cap H = (yU) \cap (yx^{-1}H) = yx^{-1}((xU) \cap H) = \{y\},$$

így H minden pontja izolált, tehát H diszkrét. A megfordítás nyilvánvaló. Ha H diszkrét részcsoport, akkor legyen U az e egységelem olyan környezete, melynél $U \cap H = \{e\}$. A 4.7.4. Tétel alapján van az e -nek olyan V környezete, melynek lezártja az U -ban van, így H -val való metszete $\{e\}$, ami zárt halmaz, hiszen a csoport Hausdorff-féle. Így az előző tétel alapján az állítás következik. $\square$

4.8.6. Tétel.

Topologikus csoport lokálisan kompakt részcsoportja zárt.

Bizonyítás.

Legyen U az egységelem környezete G -ben. Ha U lezártjának H -val való metszete H -ban kompakt, akkor G -ben is kompakt, így zárt is, hiszen G Hausdorff-féle. Így a 4.8.4. Tétel alapján H zárt. $\square$

Akkor mondjuk, hogy egy topologikus csoport kompaktan generált, ha van olyan kompakt részhalmaza, mely generálja.

4.8.7. Tétel.

Lokálisan kompakt topologikus csoportban a következő feltételek egyenértékűek:

1.
a csoport kompaktan generált;
2.
a csoportot olyan nyílt halmaz generálja, melynek lezártja kompakt;
3.
a csoportot az egységelem olyan környezete generálja, melynek lezártja kompakt.

Bizonyítás.

Világos, hogy a harmadik feltételből következik a második, s a másodikból az első. Legyen K kompakt halmaz, mely generálja a csoportot. Nyilván feltehetjük, hogy K tartalmazza az egységelemet. A K minden pontjának létezik olyan nyílt környezete, melynek lezártja kompakt, s ezek a nyílt halmazok a K egy nyílt lefedését adják. Közülük véges sokat kiválasztva, melyek egyesítése ugyancsak lefedi K -t, az egyesítés a K halmazt tartalmazó nyílt halmaz, melynek lezártja kompakt, s mely nyilván generálja G -t. Így az első feltételből következik a harmadik. $\square$

4.8.8. Tétel.

Lokálisan kompakt topologikus csoport bármely kompakt részhalmazát tartalmazza a csoport valamely kompaktan generált nyílt-zárt részcsoportja.

Bizonyítás.

Legyen K a szóban forgó kompakt részhalmaz, melyről nyilván feltehetjük, hogy tartalmazza az egységelemet, és szimmetrikus. A K minden pontjának létezik olyan nyílt környezete, melynek lezártja kompakt, s ezek a nyílt halmazok a K egy nyílt lefedését adják. Közülük véges sokat kiválasztva, melyek U egyesítése ugyancsak lefedi K -t, U a K -t tartalmazó nyílt halmaz, melynek lezártja kompakt, s ugyanez érvényes az $U \cap U^{-1}$ nyílt, szimmetrikus halmazra is, mely a 4.8.2. Tétel alapján kompaktan generált nyílt-zárt részcsoportot generál. $\square$

Könnyen látható, hogy egy topologikus csoport bármely normális részcsoportja szerinti faktorcsoportha a faktortopológiával topologikus csoport, melyet a topologikus csoport illető normálosztó szerinti faktorcsoporthának nevezünk. A topologikus csoportnak bármely faktorcsoporthára való természetes homomorfizmusa nyilván folytonos.

4.8.9. Tétel.

Topologikus csoportnak bármely faktorcsoporthára való természetes homomorfizmusa nyílt leképezés.

Bizonyítás.

Ha U nyílt halmaz a G topologikus csoportban, és N normálosztó, akkor U képe a természetes homomorfizmusnál $U \cdot N = \{uN : u \in U\}$, mely nyílt G/N -ben. $\square$

4.8.10. Tétel.

Topologikus csoport normálosztója szerinti faktorcsoporth akkor és csak akkor Hausdorff-tér, ha a normálosztó zárt, és akkor és csak akkor diszkrét, ha a normálosztó nyílt.

Bizonyítás.

Ha a G topologikus csoport N normálosztója zárt, akkor komplementere nyílt G -ben, így az $\{N\}$ egyponthalmaz komplementere nyílt G/N -ben. Tehát G/N -ben az egyponthalmazok zártak, így G/N T_1 -tér. Ezért GT_0 -tér, s a 4.7.3. Tétel miatt Hausdorff-tér.

Ha G/N Hausdorff-tér, akkor T_1 -tér, így benne $\{N\}$ zárt, s természetes ösképe, az N halmaz G -ben zárt.

Legyen N nyílt normálosztó G -ben. Mivel N a G/N faktorcsoporth egységelemének inverz képe a faktorcsoporthra való természetes leképezésnél, így az $\{N\}$ egyponthalmaz G/N -ben nyílt, s így G/N diszkrét. Megfordítva, ha G/N diszkrét, akkor $\{N\}$ nyílt halmaz G/N -ben, így természetes inverz képe, az N halmaz nyílt G -ben. $\square$

4.8.11. Tétel.

Kompakt topologikus csoport bármely faktorcsoportha kompakt.

Bizonyítás.

A faktorcsoporth a csoport folytonos képe, így az állítás nyilvánvaló. $\square$

9. 4.9 Topologikus vektorterek

Fontos speciális esetet képeznek azok a kommutatív topologikus csoportok, melyek alaphalmazán a csoportművelet mellett a valós vagy a komplex test elemeivel való szorzás, a skalárral való szorzás is értelmezve van úgy, hogy e két műveletre nézve az alaphalmaz lineáris tér, valamint a skalárral való szorzás,

mint az alaphalmaz és a skalárok topologikus tere topologikus szorzatának az alaphalmazba való leképezése, folytonos. Ilyenkor a topológiát vektortopológiának, az ezzel ellátott vektorteret pedig topologikus vektortérnek nevezzük. Topologikus vektortérben a csoportműveletet mindig additív módon írjuk, s az egységelemet zéruselemnek nevezzük. A valós vagy komplex számokat ebben a vonatkozásban skalároknak mondjuk. Mint könnyen látható, topologikus vektortérben a nullától különböző skalárral való szorzások a tér topologikus izomorfizmusai. A topologikus csoportokkal kapcsolatos korábbi megállapodásunk értelmében minden topologikus vektortér topológiájáról feltételezzük, hogy T_0 -tulajdonságú, s ennek következtében Hausdorff-féle.

Vektorterek részhalmazai között különösen fontosak a következő típusok. Egy H részhalmaz akkor konvex, ha bármely H -beli x, y elemek és $0 \leq \lambda \leq 1$ skalár esetén $\lambda x + (1 - \lambda)y$ is a H -hoz tartozik. Egy H halmaz körszerű, ha minden $|\lambda| \leq 1$ esetén $\lambda H \subseteq H$. Egy H halmaz elnyelő, ha bármely x elem esetén $\lambda^{-1}x$ a H -hoz tartozik valamely $\lambda > 0$ skalár esetén. Topologikus vektortér egy H részhalmaza korlátos, ha a zéruselem bármely környezeté elnyeli, ami alatt azt értjük, hogy a zéruselem bármely U környezete esetén van olyan $\lambda > 0$ skalár, melyre $\lambda^{-1}H \subseteq U$ teljesül.

4.9.1. Tétel.

Topologikus vektortérben a nulla minden környezete elnyelő, és a nullának van körszerű halmazokból álló környezetbázisa.

Bizonyítás.

Legyen U a nulla egy környezete az X topologikus vektortérben, x pedig egy pont. Mivel a $\lambda \mapsto \lambda x$ leképezés a skalárok teréből X -be folytonos és a nullában 0 , így van olyan $n > 0$ természetes szám, hogy $n^{-1}x$ az U -hoz tartozik. $\square$

Az analízisben előforduló legfontosabb topologikus vektorterek a lokálisan konvex topologikus vektorterek. Egy topologikus vektorteret akkor mondunk ilyennek, ha topológiájának van konvex halmazokból álló bázisa, vagy, ami ugyanaz, a zéruselemnek van konvex halmazokból álló környezetbázisa.

4.9.2. Tétel.

Topologikus vektortérben a nullának van körszerű nyílt halmazokból álló környezetbázisa. Lokálisan konvex térben a nullának van körszerű konvex nyílt halmazokból álló környezetbázisa.

Bizonyítás.

Legyen U a nulla egy nyílt környezete. Mivel a skalárral való szorzás folytonos, így van olyan $\delta > 0$ és van olyan V nyílt környezete a nullának, hogy $\lambda V \subseteq U$, ha csak $|\lambda| < \delta$. Legyen W az összes λV alakú halmazok egyesítése, ahol $|\lambda| < \delta$. Ekkor W a nulla körszerű nyílt környezete és $W \subseteq U$. Ezzel az első állítást igazoltuk.

A második állítás bizonyításához legyen U a nulla konvex nyílt környezete és jelölje A az összes λU alakú halmazok metszetét, ahol $|\lambda| = 1$, tehát A konvex. Legyen $W \subseteq U$ a nulla egy nyílt körszerű környezete, melynek létezését az imént igazoltuk. Mivel W körszerű, ezért $|\lambda| = 1$ esetén $\lambda^{-1}W = W$, így $W \subseteq \lambda U$, tehát $W \subseteq A$. Ezért A a nulla konvex környezete és nyilván $A \subseteq U$. Megmutatjuk, hogy A körszerű. Legyen $|\alpha| \leq 1$, ekkor van olyan r és β , hogy $0 \leq r \leq 1$, $|\beta| = 1$ és $\alpha = r\beta$. Ekkor

$$\alpha A = r\beta A = \bigcap_{|\lambda|=1} r\beta\lambda U = \bigcap_{|\lambda|=1} r\lambda U.$$

Mivel λU konvex és tartalmazza a nullát, így $r\lambda U \subseteq \lambda U$. Ezért $\alpha A \subseteq A_U$ tehát A körszerű. Ekkor $\{0\}$ belseje a nulla körszerű konvex nyílt környezete, mely része $\{0\}$ -nak, s a tételt bebizonyítottuk. $\square$

A lokálisan konvex terek egyik legfontosabb példája a normált tér, mely olyan vektortér, amelyen értelmezve van egy $x \mapsto \|x\|$ norma, ami a következő tulajdonságokkal rendelkező valós értékű függvény: bármely x, y elemek és λ skalár esetén

1.

$$\|x\| \geq 0 \text{ és } \|x\| = 0 \text{ esetén } x = 0 ;$$

2.

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\| ;$$

3.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Normált térben bármely $r > 0$ valós szám esetén az összes $\|x\| < r$ tulajdonságú halmazok, az úgynevezett origó körüli nyílt gömbök, ahol r a gömb sugara, a tér egy topológiájának bázisát képezik, mellyel a teret ellátva könnyű látni, hogy topologikus vektorteret kapunk. Mivel a nyílt gömbök nyilvánvalóan konvex halmazok, ezzel a topológiával a tér lokálisan konvex. Egy normált teret mindig ezzel a topológiával, az úgynevezett norma topológiával ellátott topologikus vektortérként kezelünk.

A norma általánosítása a szeminorma. Az X vektortéren értelmezett $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt így nevezzük, ha bármely x, y elemek és λ skalár esetén

1.

$$p(x) \geq 0 ;$$

2.

$$p(\lambda \cdot x) = |\lambda| p(x) ;$$

3.

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) .$$

Adott p szeminorma esetén az origó körüli $r > 0$ sugarú nyílt p -gömböt a fentiek mintájára értelmezzük: mindazon x pontok halmaza, melyekre $p(x) < r$ teljesül. Ha az X vektortéren adott szeminormák egy $\mathcal{P}$ családja, akkor az X -et azzal a topológiával ellátva, melynek szubbázisát képezik a $\mathcal{P}$ család p elemeihez tartozó nyílt p -gömbök, szeminormált térnek nevezzük, az illető topológiát pedig az adott szeminorma család által indukált topológiának. Megjegyezzük, hogy bár ez a topológia mindig vektortopológia X -en, ezzel a topológiával X nem feltétlenül topologikus vektortér. Előfordulhat ugyanis, hogy ez a topológia nem T_0 -tulajdonságú. Ahhoz, hogy az legyen, a szeminorma családra egy feltételt kell tennünk.

4.9.3. Tétel.

Legyen X valós vagy komplex vektortér, $\mathcal{P}$ pedig szeminorma család X -en. A $\mathcal{P}$ család által indukált topológia akkor és csak akkor T_0 -tulajdonságú vektortopológia, ha bármely $x \neq 0$ esetén van olyan p a $\mathcal{P}$ családban, melyre $p(x) \neq 0$.

Bizonyítás.

Ha az adott feltétel teljesül, akkor bármely $x \neq y$ pontok és az $x - y \neq 0$ elemhez választott adott tulajdonságú esetén, s az

$$U = \{z : p(z - x) < \frac{1}{2}p(y - x)\} \text{ és } V = \{z : p(z - y) < \frac{1}{2}p(y - x)\}$$

halmazok nyíltak, diszjunktak, valamint x az U -nak, y a V -nek eleme. $\square$

A tételben szereplő tulajdonság fennállása esetén a szeminorma családot elválasztónak nevezzük. A tétel szerint tehát egy szeminorma család által indukált topológiával ellátott vektortér pontosan akkor lokálisan konvex topologikus vektortér, ha a szeminorma család elválasztó.

Megjegyezzük, hogy egy vektortéren adott szeminorma család által indukált topológiára nézve a családhoz tartozó szeminormák nyilván mind folytonosak.

10. 4.10 A Minkowski-funkcionál

Most bevezetünk egy fontos fogalmat. Legyen X topologikus vektortér, A pedig egy konvex elnyelő halmaz X -ben. Az A halmaz Minkowski⁷-funkcionálja a következő függvény: bármely X -beli x esetén legyen

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in A\}.$$

Mivel A a 4.9.1. Tétel szerint elnyelő, így a Minkowski-funkcionál véges értékeket vesz fel. Érvényes a következő tétel.

4.10.1. Tétel.

Legyen X topologikus vektortér, A pedig konvex elnyelő részhalmaz X -ben. Ekkor fennállnak a következők:

1.

$$\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y), \text{ hacsak } x, y \text{ az } X \text{ elemei;}$$

2.

$$\mu_A(tx) = t\mu_A(x), \text{ hacsak } x \text{ az } X \text{ eleme, } t \geq 0;$$

3.

ha A körszerű, akkor μ_A szeminorma;

4.

ha $B = \{x : \mu_A(x) < 1\}$ és $C = \{x : \mu_A(x) \leq 1\}$, akkor $B \subseteq A \subseteq C$, továbbá $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

Megjegyezzük, hogy ha A konvex és elnyelő, akkor könnyű látni, hogy B és C is ilyenek.

Bizonyítás.

Bármely X -beli x esetén legyen $H_A = \{t > 0 : t^{-1}x \in A\}$. Mivel A nyilván tartalmazza a nullát, valamint elnyelő, ebből adódóan ha $s > t$ és t a $H_A(x)$ -hez tartozik, akkor s is a $H_A(x)$ -hez tartozik. Tehát $H_A(x)$ egy félegyenes, melynek baloldali végpontja $\mu_A(x)$.

⁷Hermann Minkowski, német matematikus (1864-1909)

Tegyük fel, hogy $\mu_A(x) < s$, $\mu_A(y) < t$, és legyen $u = s + t$. Ekkor x az $s^{-1}A$,
hoz, pedig a $t^{-1}A$ -hoz tartozik. Mivel A konvex, ezért

$$u^{-1}(x + y) = \frac{s}{u}(s^{-1}x) + \frac{t}{u}(t^{-1}y),$$

ami A -hoz tartozik, tehát $\mu_A(x + y) < u$. A 2. és 3. állítás nyilvánvaló. Végül, ha x a
 B -nek eleme, akkor $\mu_A(x) < 1$, tehát 1 a $H_A(x)$ -ben van, ezért x az A -nak eleme.
Továbbá, ha x az A -nak eleme, akkor $\mu_A(x) \leq 1$. Ezekből az adódik, hogy
 $B \subseteq A \subseteq C$, s így minden X -beli x -re

$$H_B(x) \subseteq H_A(x) \subseteq H_C(x),$$

amiből

$$\mu_C(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

A fordított egyenlőtlenség bizonyításához tegyük fel, hogy $\mu_C(x) < s < t < \mu_B(x)$.
Ekkor $s^{-1}x$ a C -nek eleme, tehát $\mu_C(s^{-1}x) \leq 1$, ezért

$$\mu_A(t^{-1}x) \leq \frac{s}{t} \leq 1.$$

Így $t^{-1}x$ a B -ben van, $\mu_B(t^{-1}x) \leq 1$, és $\mu_B(x) \leq t$, ami lehetetlen, így
 $\mu_C(x) = \mu_B(x)$. $\square$

4.10.2. Tétel.

Legyen X lokálisan konvex topologikus vektorér, $\mathcal{B}$ pedig a nullának körszerű konvex nyílt
halmazokból álló környezetbázisa. Ekkor a $\mathcal{B}$ -beli halmazokhoz tartozó Minkowski-
funkcionálok családja elválasztó folytonos szeminorma család.

Bizonyítás.

Mivel $\mathcal{B}$ minden eleme körszerű, konvex és a 4.9.1. Tétel szerint elnyelő, így az előző tétel
alapján a szóbanforgó $\mathcal{P}$ család szeminormákat tartalmaz. Ha $x \neq 0$, akkor x nem tartozik
hozzá $\mathcal{B}$ valamely V eleméhez, s ezért $\mu_V(x) \geq 1$, vagyis a $\mathcal{P}$ család elválasztó. Ha x
hozzátartozik a $\mathcal{B}$ -beli V -hez, akkor van olyan $t > 1$, hogy tx is V -ben van, hiszen V
nyílt. Ezért $\mu_V < 1$ a V -n, így ha $\varepsilon > 0$ és $x - y$ az εV -ben van, akkor
 $\mu_V(x - y) < \varepsilon$. Másrészt

$$\mu_V(x) \leq \mu_V(y) + \mu_V(x - y) \quad \mu_V(y) \leq \mu_V(x) + \mu_V(x - y)$$

a szeminorma szubadditív tulajdonsága miatt, tehát ha adott a tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $x - y$ az
 εV -ben van, akkor

$$|\mu_V(x) - \mu_V(y)| \leq \mu_V(x - y) < \varepsilon,$$

tehát μ_V folytonos. $\square$

A következő tétel szerint pontosan azoknak a topologikus vektortereknek a topológiája indukálható elválasztó
szeminorma családdal, amelyek lokálisan konvexek.

4.10.3. Tétel.

(Minkowski) Egy vektoréren adott topológiával a tér pontosan akkor lokálisan konvex
topologikus vektortér, ha azt elválasztó tulajdonságú szeminorma család indukálja.

Bizonyítás.

A feltétel elegendősége világos: a 4.9.3. Tételben, illetve az előtte és utána tett megjegyzésekben láttuk, hogy egy vektortéren értelmezett elválasztó tulajdonságú szeminorma család által indukált topológiával a tér lokálisan konvex topologikus vektortér. Megfordítva, legyen X lokálisan konvex topologikus vektortér, $\mathcal{B}$ pedig a nulla körszerű nyílt konvex halmazokból álló környezetbázisa, melynek létezését a 4.9.2. Tétel biztosítja. A 4.10.2. Tétel szerint a $\mathcal{B}$ -hez tartozó halmazok Minkowski-funkcionáljainak családja szeparáló folytonos szeminorma család. Jelölje τ_1 az e család által indukált topológiát X -en, míg legyen τ a tér eredeti topológiája. Mivel minden Minkowski-funkcionál folytonos, így nyilván $\tau_1 \subseteq \tau$. Megfordítva, ha W a $\mathcal{B}$ -hez tartozik, akkor $W = \{x : \mu_W(x) < 1\}$ miatt W a nulla 1 sugarú nyílt μ_W -gömbje, így τ_1 -hez tartozik, vagyis $\tau \subseteq \tau_1$, s ezzel a tételt igazoltuk.



H. Minkowski □

11. 4.11 Konjugált terek

Az X topologikus vektortér lineáris funkcionáljainak nevezzük a térnek a skalárok topologikus vektorterébe való folytonos homomorfizmusait. Könnyű látni, hogy a skalárok vektorterébe való lineáris leképezés pontosan akkor folytonos, tehát pontosan akkor lineáris funkcionál, ha minden korlátos halmazon korlátos az értékkészlete. Az összes lineáris funkcionálok halmaza a pontonkénti lineáris műveletekre nézve nyilván lineáris tér, ugyanarra a skalártestre nézve. Az X összes lineáris funkcionáljainak terét X^* jelöli, s az X tér duálisának, vagy konjugáltjának szokás nevezni. E téren legalább két fontos topológia segítségével szokás topologikus vektortér-struktúrát értelmezni. Az egyik a korlátos konvergencia topológiája. Legyen az X -beli B korlátos halmaz és az f lineáris funkcionál esetén

$$q_B(f) = \sup_{x \in B} |(f(x))|.$$

Amint az könnyen látható, $\mathcal{Q} = \{q_B\}$ elválasztó szeminorma család X^* -on, ha B végigfutja az X összes korlátos részhalmazainak osztályát. A $\mathcal{Q}$ család által X^* -on indukált topológiát a korlátos konvergencia

topológiájának nevezzük. Könnyű ellenőrizni, hogy ezzel a topológiával ellátva X^* lokálisan konvex tér. Azt is könnyű látni, hogy ebben a topológiában lineáris funkcionálok egy általánosított sorozata akkor és csak akkor konvergens, ha ez az általánosított sorozat az X minden korlátos halmazán egyenletesen konvergens. Az X topologikus vektortérben nyilván minden véges részhalmaz korlátos. Ha az iménti definícióban B az összes korlátos halmazok osztálya helyett csupán az összes véges halmazok osztályát futja végig, akkor a konjugált terek talán legfontosabb topológiáját kapjuk: ez a gyenge*-topológia. Mivel a véges halmazokon egyenletes konvergencia pontosan megegyezik a pontonkénti konvergenciával, a gyenge*-topológiát a pontonkénti konvergencia topológiájának is szokás nevezni. A gyenge*-topológiát X^* -on a következő szeminorma család indukálja: bármely X -beli x esetén legyen $p_x(f) = |f(x)|$, ekkor a $(p_x)_{x \in X}$ szeminorma család által X^* -on indukált topológia - amint az könnyen látható, - éppen a gyenge*-topológia. A gyenge*-topológia nyilvánvalóan általában gyengébb a korlátos konvergencia topológiájánál.

Tegyük fel most, hogy az X topologikus vektortér normált tér. Ekkor a konjugált téren is értelmezhetünk normát a következő, természetes módon. Legyen f lineáris funkcionál X -en, ekkor f korlátos az X zárt egységgömbjén. Legyen

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Könnyen látható, hogy $\|f\|$ norma X^* -n, mellyel X^* -ot ellátva X^* Banach-tér. Ebből a normából származó topológiát az X^* tér norma-topológiájának nevezzük, mely nyilván erősebb a korlátos konvergencia topológiájánál, így a gyenge*-topológiánál is. Normált terek esetén a konjugált tér zárt egységgömbje alatt értelemszerűen a most értelmezett normára nézve 1 -nél nem nagyobb normájú lineáris funkcionálok halmazát kell érteni. A gyenge*-topológia egyik legfontosabb tulajdonságát a következő tétel fejezi ki.

4.11.1. Tétel.

(Banach-Alaouglu) Tetszőleges normált tér konjugált terében a zárt egységgömb gyenge*-kompakt. ^o✠

Bizonyítás.

Tetszőleges X -beli x esetén jelölje I_x a $|\lambda| \leq \|x\|$ tulajdonságú λ skalárok halmazát. Így valós normált tér esetében I_x a $[-\|x\|, \|x\|]$ zárt intervallum, komplex tér esetén pedig az origó középpontú $\|x\|$ sugarú zárt körlemez, tehát mindkét esetben I_x kompakt topologikus tér. Világos, hogy az X^* tér S zárt egységgömbje a $\prod_{x \in X} I_x$ szorzattér részhalmaza, valamint azt is könnyű látni, hogy ezen a halmazon a szorzat-topológia pontosan megegyezik a gyenge*-topológiával, hisz mindkét topológia éppen a függvények pontonkénti konvergenciájának topológiája. A 4.2.2. Tyihonov-tétel szerint tehát S egy kompakt Hausdorff-féle topologikus tér részhalmaza, s ha megmutatjuk, hogy S a gyenge*-topológiában zárt halmaz, akkor készen vagyunk. Legyen tehát $(f_i)_{i \in I}$ lineáris funkcionálok egy általánosított sorozata az I irányított halmazon, s tegyük fel, hogy $\|f_i\| \leq 1$ teljesül minden i -re. Ha ez az általánosított sorozat az S -ben konvergál az f elemhez, akkor az $(f_i(x))_{i \in I}$ általánosított sorozat $f(x)$ -hez konvergál minden X -beli x esetén. Mivel

$$f_i(\lambda x + \mu y) = \lambda f_i(x) + \mu f_i(y)$$

teljesül minden X -beli x, y és λ, μ skalárok esetén, így a pontonkénti konvergencia miatt f is teljesíti ezt az egyenlőséget, vagyis f lineáris leképezése X -nek a skalárok vektorterébe. Továbbá, mivel $|f_i(x)| \leq \|x\|$ teljesül minden x -re és minden i -re, így $|f(x)| \leq \|x\|$ is fennáll minden X -beli x -re, s így f legfeljebb 1 normájú lineáris funkcionál, vagyis S -hez tartozik, s ezt kellett bizonyítani. $\square$

^oLeonidas Alaouglu, kanadai-amerikai matematikus (1914-1981)

12. 4.12 A Hahn-Banach-tétel

Ebben a szakaszban a lineáris analízis egyik főtételeivel foglalkozunk. Ennek a tételnek több változata van, ezek közül a számunkra legfontosabbakat vizsgáljuk most.

4.12.1. Tétel.

Legyen X valós vektortér, M pedig egy altere, valamint $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, mely teljesíti a

$$(4.1) \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ és } p(tx) = tp(x)$$

egyenlőségeket, ha x, y az X elemei és $t \geq 0$ valós szám. Ha $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre fennáll $f(x) \leq p(x)$ minden M -beli x esetén, akkor létezik X -en olyan $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre $\Lambda(x) = f(x)$, ha x az M -nek eleme, valamint $-p(-x) \leq \Lambda(x) \leq p(x)$, ha x az X eleme.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy $M \neq X$ és x_1 egy M -en kívüli elem. Először f -et kiterjesztjük az

$$M_1 = \{x + tx_1 : x \in M, t \in \mathbb{R}\}$$

altérre a következő módon. Mivel

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x) + p(y) \leq p(x-x_1) + p(x_1+y),$$

ezért

$$f(x) - p(x-x_1) \leq p(x_1+y) - f(y)$$

teljesül az M tetszőleges x, y elemei esetén. Jelölje α a baloldali értékek halmazának pontos felső korlátját, ha x az M halmazt futja végig. Ekkor

$$(4.2) \quad f(x) - \alpha \leq p(x-x_1) \text{ és } f(y) + \alpha \leq p(x_1+y)$$

érvényes minden M -beli x, y mellett. Legyen

$$(4.3) \quad f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha,$$

hacsak x az M -ből való, t pedig valós szám. Ekkor $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezés és $f_1 = f$ az M -en. Megjegyezzük, hogy a (4.3) egyenlőség egyértelműen értelmezi f_1 -et M_1 -en, hiszen, amint az könnyen látható, az M_1 -beli elemek $x + tx_1$ alakban való előállítása egyértelmű. Ha a $t > 0$ és a (4.2) első egyenlőtlenségében x helyére $t^{-1}x$ -et, a másodikban pedig y helyére $t^{-1}y$ -t írunk, majd a kapott egyenlőtlenségeket t -vel beszorozzuk, azonnal kapjuk az $f_1 \leq p$ egyenlőtlenséget M_1 -en.

A továbbiakban a 4.1.2. Zorn-lemmát alkalmazzuk. Az f összes lineáris, és a p -vel kapcsolatos egyenlőtlenséget teljesítő kiterjesztései az M -et tartalmazó alterekre nyilván féligrendezett halmazt alkotnak, melynél az M' -re való f' kiterjesztés akkor áll relációban az M'' -re való f'' kiterjesztéssel, ha $M' \subseteq M''$ és f'' az f' kiterjesztése. Könnyen látható, hogy erre a féligrendezett halmazra teljesül, hogy benne minden lánc felülről korlátos. Valóban, egy láncnak felső korlátja az a kiterjesztés, melynek értelmezési tartománya a

láncban szereplő kiterjesztések értelmezési tartományainak egyesítése, melyen a kiterjesztés értelemszerűen van definiálva. Így, a Zorn-lemma szerint, f -nek van maximális kiterjesztése, melynek értelmezési tartománya szükségképpen X , hiszen egyébként a tétel első részében látott módon ennek a kiterjesztésnek további valódi kiterjesztését adhatnánk meg, ami a maximalitás miatt lehetetlen.

Végül vegyük észre, hogy minden X -beli x -re fennáll

$$-p(-x) \leq -\Lambda(-x) = \Lambda(x),$$

s ezzel a tételt bebizonyítottuk $\square$

4.12.2. Tétel.

Legyen M az X vektortér altere, f lineáris leképezése M -nek a skalárok vektorterébe, p pedig egy szeminorma X -en, melyekre fennáll

$$|f(x)| \leq p(x),$$

hacsak x az M eleme. Ekkor van olyan Λ lineáris leképezése M -nek a skalárok vektorterébe, hogy

$$|\Lambda(x)| \leq p(x),$$

hacsak x az X eleme.

Bizonyítás.

Ha a skalárok teste $\mathbb{R}$, akkor az állítás az előző tétel következménye, hiszen ilyenkor $p(-x) = p(x)$.

Legyen X komplex vektortér és jelölje u az f valós, v pedig a képzetes részét:

$$u(x) = \operatorname{Re} f(x), \quad v(x) = \operatorname{Im} f(x)$$

hacsak x az M eleme. Ekkor u -nak létezik U valós lineáris kiterjesztése X -re az előző tétel alapján úgy, hogy $U \leq p$ az X -en. Legyen

$$(4.4) \quad \Lambda(x) = U(x) - iU(ix),$$

hacsak x az X eleme. Könnyen látható, hogy $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ lineáris leképezés. Az M altér x elemeire fennáll

$$iu(x) - v(x) = i(u(x) + iv(x)) = if(x) = f(ix) = u(ix) + iv(ix),$$

amiből $v(x) = -u(ix)$ és $u(x) = v(ix)$ következik, ha x az M eleme. Mivel az M -beli x -re ix is M -beli, így

$$\Lambda(x) = U(x) - iU(ix) = u(x) - iu(ix) = u(x) + iv(x) = f(x),$$

vagyis Λ az f kiterjesztése. Végül, minden X -beli x -hez van olyan α komplex szám, hogy $|\alpha| = 1$ és $|\Lambda(x)| = \alpha\Lambda(x)$, ezért

$$|\Lambda(x)| = \alpha\Lambda(x) = \Lambda(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x).$$

$\square$

4.12.3. Tétel.

Ha X normált tér, akkor minden x_0 eleméhez van olyan f lineáris funkcionál X -en, hogy $f(x_0) = \|x_0\|$ és $|f(x)| \leq \|x\|$ minden X -beli x esetén.

Bizonyítás.

Ha $x_0 = 0$, akkor legyen $f = 0$, egyébként pedig legyen $p(x) = \|x\|$ az X minden x eleme esetén, legyen M az x_0 által generált egydimenziós altér, melyen $f(tx_0) = tx_0$, és alkalmazzuk az előző tételt. $\square$

A következő tételhez szükségünk van az alábbi segédtételekre.

4.12.1. Segédétel.

Legyenek K, C az X topologikus vektortér diszjunkt halmazai, ahol K kompakt, C pedig zárt. Ekkor van a nullának olyan V nyílt környezete, hogy

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

Bizonyítás.

Ha $K = \emptyset$, akkor akkor $K + V = \emptyset$, így nincs mit bizonyítani. Legyen x a K egy pontja. Mivel C zárt, és nem tartalmazza x -et, ezért a 4.7.2. Tétel első állításának ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy van a nullának olyan V_x szimmetrikus nyílt környezete, hogy az $x + V_x + V_x + V_x$ halmaz nem metszi C -t, így V_x szimmetriája miatt $x + V_x + V_x$ nem metszi $C + V_x$ -et. Mivel K kompakt, vannak olyan $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontjai, hogy az $x_i + V_{x_i}$ halmazok egyesítése tartalmazza K -t. Legyen

$$V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i},$$

akkor

$$K + V \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}),$$

s ezen halmazok egyike sem metszi $C + V$ -t. A bizonyítást befejeztük. $\square$

4.12.4. Tétel.

Legyenek A, B az X topologikus vektortér nem üres, diszjunkt, konvex részhalmazai.

1.

Ha A nyílt, akkor van olyan Λ lineáris funkcionál X -en és olyan γ valós szám, hogy ha x az A -nak, y a B -nek eleme, akkor

$$\operatorname{Re} \Lambda(x) < \gamma < \operatorname{Re} \Lambda(y).$$

2.

Ha X lokálisan konvex, A kompakt, B pedig zárt, akkor van olyan Λ lineáris funkcionál X -en és vannak olyan γ_1, γ_2 valós számok, hogy ha x az A -nak, y a B -nek eleme, akkor

$$\operatorname{Re} \Lambda(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} \Lambda(y).$$

Bizonyítás.

Először is megjegyezzük, hogy a tételt elegendő valós topologikus vektortérre igazolni. Ha ugyanis ezt már tudjuk, és X komplex vektortér, akkor X -et valós vektortérnek tekintve létezik U valós lineáris funkcionál a kívánt tulajdonsággal, s legyen Λ a 4.12.2. Tételben a (4.4) egyenlettel értelmezett funkcionál.

Legyen tehát X valós topologikus vektortér, a_0 az A -nak, b_0 a B -nek egy eleme, valamint $x_0 = b_0 - a_0$ és $C = A - B + x_0$. Ekkor C a nulla konvex környezete X -ben. A 4.10.1. Tétel szerint a C halmaz μ_C Minkowski-funkcionálja teljesíti a 4.12.1. Tétel (4.1) feltételét. Mivel A és B diszjunktak, így x_0 nem tartozik C -hez, s ezért $\mu_C(x_0) \geq 1$.

Legyen $f(tx_0) = t$ az x_0 által generált egydimenziós M altéren. Ekkor $t \geq 0$ esetén

$$f(tx_0) = t \leq t\mu_C(x_0) = \mu_C(tx_0),$$

míg ha $t < 0$, akkor

$$f(tx_0) = t < 0 \leq \mu_C(tx_0).$$

A 4.12.1. Tétel szerint f kiterjeszthető X -re a Λ lineáris leképezéssé, melyre ugyancsak teljesül $\Lambda \leq \mu_C$ az egész X -en. Speciálisan, $\Lambda \leq 1$ a C -n, így $\Lambda \geq -1$ a $-C$ -n, vagyis $|\Lambda| \leq 1$ a nulla $V = C \cap (-C)$ környezetén. Ha $\varepsilon > 0$, akkor $|\Lambda| \leq \varepsilon$ a nulla εV környezetén, így Λ folytonos a nullában. Ha tehát x_0 az X tetszőleges eleme, és x az $x_0 + \varepsilon V$ -hez tartozik, akkor

$$|\Lambda(x) - \Lambda(x_0)| = |\Lambda(x - x_0)| \leq \varepsilon,$$

tehát Λ folytonos, vagyis lineáris funkcionál. Ha a az A -nak, b a B -nek eleme, akkor

$$\Lambda(a) - \Lambda(b) + 1 = \Lambda(a - b + x_0) \leq \mu_C(a - b + x_0) < 1,$$

hiszen $\Lambda(x_0) = f(x_0) = 1$, $a - b + x_0$ a C -hez tartozik és C nyílt. Ezért $\Lambda(a) < \Lambda(b)$. Mivel $\Lambda(A)$ és $\Lambda(B)$ konvex halmazok a valós egyenesen, így szükségképpen diszjunkt intervallumok, mégpedig $\Lambda(A)$ minden eleme kisebb $\Lambda(B)$ minden eleménél. Másrészt, Λ nyílt leképezés. Valóban, legyen y_0 olyan eleme X -nek, melyre $\Lambda(y_0) = 1$. Ilyen y_0 létezik, mert Λ nem nulla. Ha G nyílt halmaz X -ben és g egy eleme, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|t| < \delta$, akkor $g + ty_0$ is G -hez tartozik, ezért $\Lambda(g + ty_0) = \Lambda(g) + t$ miatt $\Lambda(G)$ a $\Lambda(g)$ elemmel együtt tartalmazza a $[\Lambda(g) - \delta, \Lambda(g) + \delta]$ nyílt intervallumot is. Tehát mivel A nyílt, így $\Lambda(A)$ is nyílt, és γ -nak választhatjuk a $\Lambda(A)$ nyílt intervallum jobboldali végpontját. Ezzel az első állítást igazoltuk. A második állítás bizonyításához a 4.12.1. Segédteletet használjuk fel, melynek értelmében van a nullának olyan V konvex nyílt környezete, hogy $A + V$ nem metszi B -t. Most alkalmazzuk az első állítás során bizonyítottakat A helyett $A + V$ -vel, s azt kapjuk, hogy van olyan Λ lineáris funkcionál X -en, hogy $\Lambda(A + V)$ és $\Lambda(B)$ diszjunkt konvex halmazok, valamint $\Lambda(A + V)$ nyílt, és $\Lambda(B)$ baloldalán helyezkedik el. Mivel $\Lambda(A)$ a $\Lambda(A + V)$ kompakt részhalmaza, ezért a $\Lambda(A)$ szuprénuma és $\Lambda(A + V)$ jobboldali végpontja által meghatározott nem üres nyílt intervallum bármely $\gamma_1 < \gamma_2$ pontjai megfelelnek a kívánalmaknak. $\square$

4.12.5. Tétel.

Ha X lokálisan konvex topologikus vektortér, akkor X^* elválasztja X pontjait.

Bizonyítás.

Ha $x \neq y$, akkor alkalmazzuk az előző tétel második részét az $A = \{x\}$ és $B = \{y\}$ halmazokra. $\square$

4.12.6. Tétel.

Ha M a X lokálisan konvex topologikus vektortér altere és x_0 nincs benne M lezártjában, akkor van olyan Λ lineáris funkcionál X -en, mely eltűnik M -en és $\Lambda(x_0) = 1$.

Bizonyítás.

A 4.12.4. Tétel második részében legyen $A = \{x_0\}$ és $B = M^d$. Ekkor $\Lambda(x_0)$ nincs benne $\Lambda(M)$ -ben, ami ezáltal a skalárok egydimenziós vektorterének valódi altere, azaz $\{0\}$. A kívánt tulajdonságú funkcionált Λ -nak $\Lambda(x_0)$ -al való osztásával kapjuk. $\square$

4.12.7. Tétel.

(Hahn-Banach-tétel) Lokálisan konvex topologikus vektortér alterének lineáris funkcionálja kiterjeszthető az egész tér lineáris funkcionáljává.

Bizonyítás.

Nyilván feltehetjük, hogy f nem a nulla funkcionál. Jelölje M_0 az f nullterét: $M_0 = \{x : f(x) = 0\}$, és legyen x_0 olyan, hogy $f(x_0) = 1$. Mivel f folytonos, ezért x_0 nem tartozik hozzá M_0 M -beli lezártjához, s így X -beli lezártjához sem. A 4.12.6. Tétel szerint van az X -nek olyan Λ lineáris funkcionálja, mely M_0 -on eltűnik és $\Lambda(x_0) = 1$. Ha x az M -hez tartozik, akkor $x - f(x)x_0$ az M_0 eleme, hiszen $f(x_0) = 1$. Ezért

$$\Lambda(x) - f(x) = \Lambda(x) - f(x)\Lambda(x_0) = \Lambda(x - f(x)x_0) = 0,$$

így $\Lambda = f$ az M -en. $\square$

Megjegyezzük, hogy az ebben a szakaszban szereplő tételek mindegyikét szokás „Hahn-Banach-tétel”-nek nevezni: ez az elnevezés a fenti tételcsoporthoz vonatkozik.

13. 4.13 A Stone-Weierstrass-tétel

A Stone⁹-Weierstrass¹⁰-tétel a modern analízis egyik alapvető fontosságú eszköze, melynek különböző variánsait fogjuk most áttekinteni.

Legyen X kompakt Hausdorff-tér és jelölje $\mathcal{C}(X)$ az összes X -en értelmezett komplex értékű folytonos függvények halmazát. A $\mathcal{C}(X)$ halmaz a függvények pontonkénti összeadásával és a pontonkénti skalárral való szorzással komplex lineáris tér. A függvények pontonkénti szorzásával ellátva a $\mathcal{C}(X)$ tér kommutatív egységelemes komplex algebra. A konjugálás műveletével a $\mathcal{C}(X)$ tér kommutatív egységelemes $*$ -algebra. A $\mathcal{C}(X)$ -hez tartozó függvények nyilván korlátosak. Az

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

⁹Marshall Harvey Stone, amerikai matematikus (1903-1989)

¹⁰Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, német matematikus (1815-1897)

összefüggés - mint könnyen látható - a $\mathcal{C}(X)$ téren normát értelmez. Ezzel a normával ellátva $\mathcal{C}(X)$ - mint könnyen látható - Banach-tér, s a szorzással, és konjugálással együtt kommutatív egységelemes $\mathcal{C}(X)$ algebra. A térben zárt alteret alkotnak a valós értékű függvények, melyek terét $\mathcal{C}_R(X)$ jelöli. A tér egy részhalmazát elválasztónak nevezzük, ha a tér bármely két különböző pontjához van a részhalmazban olyan függvény, mely a két pontban különböző értékeket vesz fel.

Először a Stone-Weierstrass-tétel valós változatával foglalkozunk.

4.13.1. Tétel.

(Stone-Weierstrass) Ha az X kompakt Hausdorff-tér feletti valós értékű folytonos függvények $\mathcal{C}_R(X)$ terében A olyan zárt elválasztó altér, amely a konstans 1 függvényt, és az A -hoz tartozó függvények abszolút értékét is tartalmazza, akkor $A = \mathcal{C}_R(X)$.

Bizonyítás.

Ha f és g az A -hoz tartozó függvények, akkor az X halmaz x pontjaiban

$$(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)) \text{ és } (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

összefüggésekkel értelmezett $f \vee g$, illetve $f \wedge g$ függvény is A -hoz tartozik, mert

$$f \vee g = 2^{-1}(f + g + |f - g|) \text{ és } f \wedge g = 2^{-1}(f + g - |f - g|).$$

Ezért, ha $f_1, f_2, \dots, f_n$ az A -hoz tartozó függvények ($n \geq 2$ egész szám), akkor

$$f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_n = (f_1 \vee f_2 \vee \dots \vee f_{n-1}) \vee f_n$$

és

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n = (f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_{n-1}) \wedge f_n$$

az A -hoz tartoznak. Az X bármely $y \neq x$ elemeihez és bármely $\alpha \neq \beta$ valós számokhoz van olyan A -beli f , hogy $f(x) = \alpha$ és $f(y) = \beta$, mert ha az A -beli g -re $g(x) \neq g(y)$ teljesül, akkor van olyan γ és δ valós szám, hogy a velük képzett $f = \gamma g + \delta$ függvényre fennáll $f(x) = \alpha$ és $f(y) = \beta$.

Legyen h tetszőleges függvény a $\mathcal{C}_R(X)$ -ből, és bármely X -beli x, y elemeknél legyen $f_{x,y}$ olyan A -beli függvény, amelyre $f_{x,y}(x) = h(x)$, és $f_{x,y}(y) = h(y)$ teljesül. Ha $\epsilon > 0$ valós szám, akkor az $f_{x,y}(z) < h(z) + \epsilon$ egyenlőtlenséget kielégítő X -beli z elemek egy $U_{x,y}$ nyílt halmazt alkotnak. Bármely X -beli x esetén az $U_{x,y}$ ($y \in X$) halmazok egyesítési halmaza az X kompakt tér, hiszen y beletartozik $U_{x,y}$ -ba, ezért vannak olyan X -beli $y_1, y_2, \dots, y_n$ (n pozitív egész szám) elemek, hogy $U_{x,y_1} \cup U_{x,y_2} \cup \dots \cup U_{x,y_n} = X$. Az

$$f_x = f_{x,y_1} \wedge f_{x,y_2} \wedge \dots \wedge f_{x,y_n}$$

függvényre nyilván érvényes $f_x(z) < h(z) + \epsilon$, ha z az X -hez tartozik, továbbá $f_x(x) = h(x)$. Az $f_x(z) > h(z) - \epsilon$ egyenlőtlenséget kielégítő X -beli z elemek egy U_x nyílt halmazt alkotnak. Az U_x halmazok lefedik X -et, mert x nyilván U_x -hez tartozik, ezért vannak olyan X -beli $x_1, x_2, \dots, x_k$ (k pozitív egész szám) elemek, hogy $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_k} = X$. Az

$$f = f_{x_1} \vee f_{x_2} \vee \dots \vee f_{x_k}$$

függvényre nyilván érvényes $f_A(z) < h(z) + \epsilon$ és $f_A(z) > h(z) - \epsilon$, ha z az X eleme.

Így az A zársága miatt az $\overline{A}$ -hoz tartozik, tehát $\overline{A} = C(X)$. $\square$

A $C_R(X)$ tér egy lineáris alterét vektorhálónak nevezzük, ha bármely f, g elemeivel együtt az $f \vee g$ és $f \wedge g$ függvényeket is tartalmazza. Mivel bármely $C_R(X)$ -beli f esetén $|f| = f \vee 0 + (-f) \vee 0$, ezért az előbbi tétel a következőképpen is fogalmazható.

4.13.2. Tétel.

(Stone-Weierstrass) Ha az X kompakt Hausdorff-tér feletti valós értékű folytonos függvények $C_R(X)$ terében A olyan elválasztó vektorháló, amely a konstans 1 függvényt tartalmazza, akkor A sűrű $C(X)$ -ben.



M. H. Stone



T. W. Weierstrass



U. Dini

A következő tételre van szükségünk, mely önmagában is fontos.

4.13.3. Tétel.

(Dini¹¹ ✚) Ha az X kompakt tér feletti valós értékű, folytonos függvények $\mathcal{C}_R(X)$ terében az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és g függvények olyanok, hogy minden X -beli x helyen az $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat monoton csökkenő, és $g(x)$ -hez konvergál, akkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathcal{C}_R(X)$ -ben g -hez konvergál.

Bizonyítás.

Bármely $\epsilon > 0$ valós szám és X -beli x elem esetén van olyan n_x természetes szám, hogy $f_{n_x}(x) - g(x) < \epsilon$. Az f_{n_x} és g folytonossága miatt az X -nek van olyan, az x -et tartalmazó U_x nyílt részhalmaza, hogy minden U_x -beli y helyen $f_{n_x}(y) - f_{n_x}(x) < \epsilon$, és $g(x) - g(y) < \epsilon$ érvényes. Minthogy X kompakt tér, vannak olyan X -beli $x_1, x_2, \dots, x_l$ (l pozitív egész szám) elemek, hogy az $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_l}$ halmazok lefedik X -et. Bármely $n \geq \max(n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_l})$ indexnél minden X -beli x helyen, ha x az U_{x_k} -hoz tartozik, akkor

$$\begin{aligned} f_n(x) - g(x) &\leq f_{n_{x_k}}(x) - g(x) = \\ &= (f_{n_{x_k}}(x) - f_{n_{x_k}}(x_k)) + (f_{n_{x_k}}(x_k) - g(x_k)) + (g(x_k) - g(x)) < 3\epsilon \end{aligned}$$

érvényes, tehát az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathcal{C}_R(X)$ -ben g -hez konvergál. $\square$

¹¹Ulisse Dini, olasz matematikus (1845-1918)

4.13.4. Tétel.

Van valós együtthatós polinomoknak olyan sorozata, amely a $[-1, 1]$ zárt egységintervallumon az e halmaz feletti folytonos valós értékű függvények normált terében az $x \mapsto |x|$ függvényhez konvergál.

Bizonyítás.

Legyen f_0 a konstans 1 polinom. A valós x esetén minden pozitív egész n -re $f_n(x) = 2^{-1}(f_{n-1}^2(x) + (1 - x^2))$ összefüggéssel értelmezett valós együtthatós f_n polinomok $|x| \leq 1$ esetén nyilván nem negatív értékűek, és $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$, ugyanis ha $f_{n-1}(x) \geq f_n(x)$, akkor

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_{n+1}(x) &= \\ &= 2^{-1}(f_{n-1}^2(x) - f_n^2(x)) = 2^{-1}(f_{n-1}(x) + f_n(x))(f_{n-1}(x) - f_n(x)) \geq 0 \end{aligned}$$

és $f_0(x) \geq f_1(x)$. Ezért $|x| \leq 1$ esetén az $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergál egy $g(x) \leq 1$ számhoz, amelyre az f_n -eket értelmező összefüggésből határátmenettel $g(x) = 2^{-1}(g^2(x) + (1 - x^2))$ teljesül, vagyis $g(x) = 1 - |x|$. A g függvény folytonos, így a 4.13.3. Tétel alapján az $|x| \leq 1$ tulajdonságú x valós számok halmazán az e halmaz feletti valós értékű folytonos függvények normált terében az $(1 - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinomsorozat az $x \mapsto |x|$ függvényhez konvergál. $\square$

A következő tételt egyszerű lineáris transzformációval kapjuk az előzőből.

4.13.5. Tétel.

Korlátos zárt intervallumon az $x \mapsto |x|$ függvény valós együtthatós polinomok egyenletesen konvergens sorozatának határfüggvénye.

Most már rátérhetünk a Stone-Weierstrass-tétel komplex változatának tárgyalására.

4.13.6. Tétel.

(Stone-Weierstrass) Ha az X kompakt Hausdorff-tér feletti komplex értékű folytonos függvények $\mathcal{C}(X)$ normált algebrájában A olyan zárt, elválasztó részalgebra, amely a konstans 1 függvényt, valamint az A -hoz tartozó függvények konjugáltjait is tartalmazza, akkor $A = \mathcal{C}(X)$.

Bizonyítás.

Legyen az A -beli valós értékű függvények halmaza A_r . A 4.13.4. Tétel alapján A_r tartalmazza az A_r -hez tartozó függvények abszolút értékét is. Ha f az A egy eleme, akkor vannak olyan valós értékű u, v függvények $\mathcal{C}(X)$ -ben, hogy $f = u + iv$, és itt szükségképpen u és v az A -hoz tartozik, mert az f függvény $\bar{f}$ konjugáltjával $u = 2^{-1}(f + \bar{f})$, valamint $v = -i2^{-1}(f - \bar{f})$ teljesül. Ezért A_r elválasztó család. Így a 4.13.1. Tétel alapján A_r tartalmaz minden $\mathcal{C}(X)$ -beli valós értékű függvényt. Tehát $A = \mathcal{C}(X)$. $\square$

Emlékeztetünk arra, hogy az $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ függvény tartója alatt azon pontok halmazának lezártját értjük, amelyekben a függvény nem nulla. Ez nyilván zárt halmaz, melyet $\text{supp } f$ jelöl, s az f -et kompakt tartójúnak

mondjuk, ha ez a halmaz kompakt. Az összes komplex értékű folytonos kompakt tartójú függvények halmazát $\mathcal{C}_c(X)$ jelöli, melyen a

$$(4.5) \quad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

definíció normát értelmez, amint az könnyen látható. A $\mathcal{C}_c(X)$ normált tér egy lineáris funkcionálját pozitív lineáris funkcionálnak nevezzük, ha nem negatív valós értékű függvényeken értéke nem negatív valós szám. A kompakt tartójú függvényeknél általánosabbak a végtelenben eltűnő függvények. Az $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ akkor ilyen, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan K kompakt részhalmaza X -nek, melynek komplementerén f abszolút értéke kisebb ε -nál. Világos, hogy a (4.5) képlet az összes ilyen tulajdonságú folytonos függvények $\mathcal{C}_0(X)$ lineáris terén is normát értelmez, mellyel az Banach-tér. Lokálisan kompakt Hausdorff-téren a végtelenben eltűnő folytonos függvények könnyen jellemezhetők. Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, $\tilde{X}$ pedig az X egypontos kompaktifikációja. Bármely $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ függvény esetén jelölje $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ azt a függvényt, mely X -en megegyezik f -el, ∞ -ben pedig a 0 értéket veszi fel.

4.13.7. Tétel.

Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, $\tilde{X}$ pedig az X egypontos kompaktifikációja. Az $f \longleftrightarrow \tilde{f}$ hozzárendelés izometrikus izomorfizmus a $\mathcal{C}_0(X)$ és a $\mathcal{C}(\tilde{X})$ Banach-terek között.

Bizonyítás.

Világos, hogy minden $\mathcal{C}_0(X)$ -beli f esetén $\tilde{f}$ folytonos $\tilde{X}$ -en és minden $\tilde{X}$ -en folytonos függvény X -re való megszorítása folytonos X -en. A többi állítás nyilvánvaló. $\square$

Ezek után következzen a Stone-Weierstrass-tétel megfelelője lokálisan kompakt Hausdorff-tereken.

4.13.8. Tétel.

(Stone-Weierstrass) Ha az X lokálisan kompakt Hausdorff-tér feletti komplex értékű, végtelenben eltűnő folytonos függvények $\mathcal{C}_0(X)$ normált algebrájában A olyan zárt, elválasztó részalgebra, amelyhez tartozó függvényeknek nincs közös gyöke, valamint az A -hoz tartozó függvények konjugáltjait is tartalmazza, akkor $A = \mathcal{C}_0(X)$.

Bizonyítás.

Jelölje $\tilde{X}$ az X egypontos kompaktifikációját, tetszőleges $\mathcal{C}_0(X)$ -beli f esetén $\tilde{f}$ a fentebb értelmezett függvényt, $\tilde{A}$ pedig az összes A -beli f függvényekből nyert $\tilde{f}$ függvények és a konstans függvények halmazát. Ekkor $\tilde{A}$ teljesíti az 4.13.6. Stone-Weierstrass-tétel feltételeit, így egyenlő $\tilde{A} = \mathcal{C}(\tilde{X})$ -al, amiből azonnal adódik állításunk. $\square$

5. fejezet - INVARIÁNS KÖZEPEK ABEL-CSOPORTOKON

1. 5.1 Közepek Abel-csoportokon

Legyen G Abel-csoport és jelölje $\mathcal{B}(G)$ az összes G -n értelmezett korlátos, komplex értékű függvények halmazát. A $\mathcal{B}(G)$ komplex Banach-tér az

$$\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$$

normával. A G csoport y eleméhez tartozó τ_y eltolásoperátor nyilván lineáris izometria $\mathcal{B}(G)$ -n. A $\mathcal{B}(G)$ egy lineáris funkcionálját középnek nevezzük a G -n, ha minden nem negatív, valós értékű függvényen nem negatív, valós értéket vesz fel, s a konstans 1 függvényen értéke 1 . Például, a G tetszőleges x eleme esetén a függvényekhez az x -beli értéküket rendelő funkcionál nyilván közép. Mint könnyen látható, minden közép korlátos lineáris funkcionál, s az összes közepek halmaza a $\mathcal{B}(G)$ konjugált terében nem üres, konvex halmaz.

Ha M közép a G Abel-csoporton, és minden G -beli y elemmel

$$M(\tau_y f) = M(f)$$

teljesül tetszőleges f korlátos függvényre, akkor M -et invariáns középnek mondjuk.

5.1.1. Tétel.

Ha G véges Abel-csoport, akkor az egyetlen invariáns közép G -n az

$$I(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)$$

összefüggéssel értelmezett M funkcionál.

Bizonyítás.

Világos, hogy a fenti formula invariáns közepet értelmez G -n. Megfordítva, legyen M invariáns közép G -n. Ha δ_x jelöli az x pontból álló egy pontos halmaz karakterisztikus függvényét, akkor a G minden x, y elemére fennáll $\tau_{y^{-1}}(\delta_x) = \delta_{xy}$ azonosság alapján $M(\delta_x) = M(\delta_y)$ teljesül. Ebből, valamint az $1 = \sum_{x \in G} \delta_x$ és $f = \sum_{x \in G} f(x) \delta_x$ összefüggésekből következik, hogy $M = I$. $\square$

5.1.2. Tétel.

Ha M közép a G Abel-csoporton, akkor

1.

$$M(f) \leq M(g), \text{ ha } f \leq g;$$

2.

$$M(\overline{f}) = \overline{M(f)};$$

3.

$$|M(f)| \leq M(|f|) ;$$

4.

$$|M(f)| \leq \|f\| \text{ teljesül bármely } f, g : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ korlátos függvények esetén.}$$

Bizonyítás.

Ha $f \leq g$, akkor $g - f$ nem negatív, amiből következik 1. Ha $f = a + ib$, ahol a és b valós értékű függvények, akkor

$$M(\bar{f}) = M(a - ib) = M(a) - iM(b) \text{ és } \overline{M(f)} = M(a) - iM(b),$$

azaz teljesül 2. Mivel $-|f| \leq f \leq |f|$, ezért az 1. alapján következik 3. Végül 4. a 3. -ból következik, hiszen az $\|f\| - |f|$ függvény nem negatív és valós értékű. $\square$

2. 5.2 Invariáns közepek Abel-csoportokon

Az invariáns közepek létezésének bizonyításához szükségünk van a Markov¹ -Kakutani² -féle fixpont-tételre.

A V komplex lineáris tér $C \subseteq V$ konvex részhalmazán értelmezett $T : C \rightarrow C$ leképezést affin leképezésnek nevezzük, ha bármely C -beli x, y elemek és bármely $[0, 1]$ -beli λ szám esetén

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$$

teljesül. Nyilván a V tér minden lineáris leképezése affin.

5.2.1. Tétel.

(Markov-Kakutani) Lokálisan konvex topologikus vektortér nem üres, kompakt, konvex részhalmazát önmagába képező folytonos affin leképezések páronként felcserélhető családjának van közös fixpontja.

Bizonyítás.

Legyen T a szóban forgó család egy eleme és a C egy x eleme esetén értelmezzük a következő elemeket $N = 0, 1, \dots$ esetén:

$$x_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N T^n(x).$$

Mivel C kompakt, az $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$ sorozatnak van $(x_{N_i})_{i \in \mathbb{N}}$ konvergens részsorozata C -ben, melynek határértékét jelölje y . Legyen φ a tér tetszőleges lineáris funkcionálja. Mivel C kompakt, φ korlátos C -n, vagyis $|\varphi(x)| \leq M$ teljesül minden C -beli x esetén valamely M számmal. Másrészt,

$$|\varphi(T(x_N)) - \varphi(x_N)| = \frac{1}{N+1} |\varphi(T^{N+1}(x)) - \varphi(x)| \leq \frac{2M}{N+1}.$$

Legyen $N = N_i$ és tartsunk i -vel végtelenhez, ekkor $\varphi(T(y)) = \varphi(y)$ adódik. Mivel lokálisan konvex topologikus vektortér duálisa elválasztó család, ebből $T(y) = y$ következik, vagyis az adott leképezések mindegyikének van C -ben fixpontja. Minden T

¹Andrei Andrejevics Markov, orosz matematikus (1856-1922)

²Shizuo Kakutani, japán matematikus (1911-2004)

esetén a T leképezés C -beli fixpontjainak halmazát jelölje C_T . Mivel a család tagjai felcserélhetők, így C_T -t a család minden leképezése önmagába képezi, amiből azt kapjuk, ahogy a család bármely véges sok tagjának van C -ben közös fixpontja. Világos, hogy a C_T halmazok nem üres, konvex, kompakt halmazok, melyek az eddigiek alapján centrált rendszert alkotnak, s így metszetük nem üres. A metszet elemei a család leképezéseinek közös fixpontjai. $\square$

Legyen M tetszőleges közép a G véges Abel-csoporton. Ha y a G tetszőleges eleme és φ a $\mathcal{B}(G)$ korlátos lineáris funkcionálja, akkor értelmezzük a $T_y\varphi$ funkcionált a

$$T_y\varphi(f) = \varphi(\tau_y f)$$

formulával. Mint könnyen látható, $T_y\varphi$ korlátos lineáris funkcionál $\mathcal{B}(G)$ -n és T_y a $\mathcal{B}(G)$ konjugált terének korlátos lineáris operátora.

5.2.2. Tétel.

Tetszőleges Abel-csoporton létezik invariáns közép.

Bizonyítás.

A 4.11.1. Banach-Alaoglu-tétel szerint a $\mathcal{B}(G)$ tér konjugált terének zárt egységgömbje a gyenge*-topológiában kompakt halmaz, így a $\mathcal{B}(G)$ -n értelmezett összes közepek halmaza egy lokálisan konvex topologikus vektortér kompakt halmazának konvex részhalmaza, az 5.1.2. Tétel 4. állítása szerint. Megmutatjuk, hogy ez a halmaz gyenge*-zárt is, s így gyenge*-kompakt. Legyen N egy korlátos lineáris funkcionál a közepek halmazának lezártjából. Tegyük fel, hogy valamely f valós értékű függvény esetén $\operatorname{Im} N(f) \neq 0$. Ekkor a

$$\{\psi : |\psi(f) - N(f)| < |\operatorname{Im} N(f)|\}$$

halmaz az N -nek gyenge*-környezete, tehát tartalmaz egy φ közepet, ám $\varphi(f)$ valós szám, ami ellentmondás. Így N valós értékű függvényeken valós értéket vesz fel. Tegyük most fel, hogy valamely f nem negatív, valós értékű függvény esetén $N(f) < 0$. Ekkor a

$$\{\psi : |\psi(f) - N(f)| < -N(f)\}$$

halmaz az N -nek gyenge*-környezete, tehát tartalmaz egy φ közepet, ám $\varphi(f)$ nem negatív, ami ellentmondás. Így N a nem negatív, valós értékű függvényeken nem negatív, valós értéket vesz fel. Végül tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a $\{\psi : |\psi(1) - N(1)| < \varepsilon\}$ halmaz az N -nek gyenge*-környezete, tehát tartalmaz egy φ közepet, ám $\varphi(1) = 1$, így $|1 - N(1)| < \varepsilon$, amiből $N(1) = 1$ adódik, tehát N közép. Ezzel igazoltuk, hogy az összes közepek halmaza gyenge*-kompakt halmaz. Világos, hogy a T_y eltolásoperátorok az összes közepek halmazát önmagába képezik, gyenge*-folytonosak, és egymással felcserélhetők. Így az 5.2.1. Markov-Kakutani-féle fixpont-tétel alapján ezeknek az operátoroknak van I közös fixpontja a közepek halmazában. Ekkor tehát $T_y I = I$ teljesül minden G -beli y esetén, azaz bármely f korlátos, komplex értékű függvény mellett fennáll $I(\tau_y f) = (T_y I)(f) = I(f)$, így I invariáns közép. $\square$



A. A. Markov

Sh. Kakutani

3. 5.3 Feladatok

1.

Mutassuk meg, hogy minden közép korlátos lineáris funkcionál!

2.

Mutassuk meg, hogy az összes közepek halmaza $\mathcal{B}(G)$ -ben nem üres, konvex halmaz!

3.

Mutassuk meg, hogy a fentiekben értelmezett T_ν operátor a $\mathcal{B}(G)$ konjugált terének korlátos lineáris operátora!

4.

Mutassuk meg, hogy a fentiekben értelmezett T_ν operátor gyenge*-folytonos!

6. fejezet - DISZKRÉT ÉS KOMPAKT ABEL-CSOPORTOK DUALITÁSELMÉLETE

1. 6.1 Karakterek diszkrét Abel-csoportokon

A G diszkrét Abel-csoportnak a komplex egységkör multiplikatív csoportjába való homomorfizmusait karaktereknek nevezzük, melyek - mint könnyen látható - a pontonkénti szorzás műveletére nézve Abel-csoportot alkotnak: a G duálisát. Ezt - a fentiekkel összhangban - $\widehat{G}$ -vel jelöljük. A G duálisán topológiát értelmezünk a következő módon: legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, K pedig a G egy véges részhalmaza, továbbá legyen

$$U(K, \varepsilon) = \{\chi : |\chi(x) - 1| < \varepsilon \text{ ha } x \in K\}.$$

Azzal a topológiával, melynél az egységelem környezetbázisát az összes $U(K, \varepsilon)$ halmazok alkotják a G csoport duálisa - mint könnyen látható - topologikus csoport. Ha a továbbiakban egy diszkrét Abel-csoport duálisáról, mint topologikus csoportról beszélünk, mindig feltételezzük, hogy ezzel a topológiával van ellátva.

6.1.1. Tétel.

Diszkrét Abel-csoport duálisa kompakt Abel-csoport.

Bizonyítás.

Világos, hogy a G csoport duálisában az egységelem környezetbázisát alkotják az

$U(\{x\}, \varepsilon) = \{\chi : |\chi(x) - 1| < \varepsilon\}$ alakú halmazok, ahol x tetszőleges G -beli elem. Ám ugyanezek a halmazok az egységelem környezetbázisát alkotják a $\mathbb{T}^G$ szorzat-csoport szorzat-topológiájában is. Mivel ez utóbbi topológia a Tyihonov-tétel szerint kompakt, elég megmutatnunk, hogy a G duálisa zárt halmaz ebben a szorzat-topológiában. Legyenek x, y a G tetszőleges elemei, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. Legyen μ a G duálisa lezártjának egy eleme a szorzat-topológiában. Mivel a

$\{\psi : |\psi(x) - \mu(x)| < \varepsilon\} \cap \{\psi : |\psi(y) - \mu(y)| < \varepsilon\} \cap \{\psi : |\psi(xy) - \mu(xy)| < \varepsilon\}$ halmaz a μ környezete, így tartalmazza a G duálisának valamely χ elemét. Továbbá, mivel $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$, ezért $|\mu(xy) - \mu(x) - \mu(y)| < 3\varepsilon$ áll fenn tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, ami azt jelenti, hogy μ karakter. Ebből adódik, hogy a G duálisa kompakt Abel-csoport. $\square$

2. 6.2 Karakterek kompakt Abel-csoportokon

A G kompakt Abel-csoportnak a komplex egységkör multiplikatív csoportjába való folytonos homomorfizmusait karaktereknek nevezzük, melyek - mint könnyen látható - a pontonkénti szorzás műveletére nézve Abel-csoportot alkotnak: a G duálisát. Ezt - a fentiekkel összhangban - $\widehat{G}$ -vel jelöljük. A G duálisán topológiát értelmezünk a következő módon: legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, K pedig a G egy kompakt részhalmaza, továbbá legyen

$$U(K, \varepsilon) = \{\chi : |\chi(x) - 1| < \varepsilon \text{ ha } x \in K\}.$$

(6.1) Azzal a topológiával, melynél az egységelem környezetbázisát az összes $U(K, \varepsilon)$ halmazok alkotják, a G csoport duálisa - mint könnyen látható - topologikus csoport. Ha a továbbiakban egy kompakt Abel-csoport duálisáról, mint topologikus csoportról beszélünk, mindig feltételezzük, hogy ezzel a topológiával van ellátva.

6.2.1. Tétel.

Kompakt Abel-csoport duálisa diszkrét Abel-csoport.

Bizonyítás.

A G kompakt Abel-csoport duálisában a

$$\{\chi : |\chi(x) - 1| < 1 \text{ ha } x \in G\} \quad (6.2) \quad \text{halmaz az}$$

egységelem környezete. Ha χ ennek egy eleme, akkor $\chi(G)$ a $\mathbb{T}$ egy kompakt részcsoportja, ami nem az egész $\mathbb{T}$. Mivel $\mathbb{T}$ -nek nincs valódi, $\{1\}$ -től különböző részcsoportja, így a fenti környezet az $\{1\}$ egyponthalmaz, tehát a G duálisa diszkrét. $\square$

3. 6.3 Diszkrét Abel-csoportok dualitáselmélete

Legyen G diszkrét, vagy kompakt Abel-csoport. A G bármely x elemével értelmezzük G duális csoportján a Φ_x függvényt a következő módon: tetszőleges $\hat{G}$ -beli χ esetén legyen

$$\Phi_x(\chi) = \chi(x). \quad (6.3) \quad \text{Amint az könnyen látható, } \Phi_x \text{ a } G$$

duálisának karaktere, azaz, a $\Phi : x \mapsto \Phi_x$ leképezés G -t második duálisába képezi. Ezt a leképezést a G természetes leképezésének nevezzük.

6.3.1. Tétel.

Diszkrét Abel-csoport részcsoportjának osztható csoportba való homomorfizmusa kiterjeszthető az egész csoport homomorfizmusává.

Bizonyítás.

Legyen H a G diszkrét Abel-csoport részcsoportja, és φ a H homomorfizmusa a D osztható Abel-csoportba. A φ -nek a H -t tartalmazó részcsoportokra való homomorf kiterjesztései a tartalmazásra nézve féligrendezett halmazt alkotnak. Könnyű látni, hogy ebben a féligrendezett halmazban minden nem üres láncnak van felső korlátja, tehát a 4.1.2. Zorn-lemma alapján ennek a féligrendezett halmaznak van maximális eleme, amely nyilván φ -nek maximális homomorf kiterjesztése. Megmutatjuk, hogy ennek értelmezési tartománya már az egész G csoport. Ehhez elég azt igazolni, hogy ha x a H -n kívüli elem, akkor φ homomorf módon kiterjeszthető az $x^n h$ alakú elemek H_0 csoportjára, ahol n egész szám, és h a H eleme. Két esetet különböztetünk meg. Ha x^n egyetlen $n \geq 1$ egész szám esetén sem tartozik H -ba, akkor legyen $\tilde{\varphi}(x^n h) = \varphi(h)$ minden H_0 -beli $x^n h$ esetén. Ez a definíció korrekt, mert ha $x^{n_1} h_1 = x^{n_2} h_2$ teljesülne valamely $h_1, h_2 \in H$ -beli elemek és különböző n_1, n_2 egészek mellett, akkor $x^{n_1 - n_2}$ a H -ba esne, ami lehetetlen. Vagyis, esetünkben a H_0 elemeinek $x^n h$ alakban való előállítása valamely n egész számmal és H -beli h elemmel egyértelmű. Ezért

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x^{n_1} h_1 \cdot x^{n_2} h_2) &= \tilde{\varphi}(x^{n_1 + n_2} \cdot h_1 h_2) = \varphi(h_1) \varphi(h_2) = \\ &= \tilde{\varphi}(x^{n_1} h_1) \cdot \tilde{\varphi}(x^{n_2} h_2), \end{aligned} \quad (6.4) \quad \text{így } \tilde{\varphi}$$

homomorfizmusa G -nek D -be, s nyilván H -n φ -vel egyenlő.

A másik esetben valamely $n \geq 2$ egész szám esetén x^n a H eleme. Ekkor legyen k a legkisebb ilyen tulajdonságú egész szám, s rögzítve egy olyan D -beli z elemet, amelyre teljesül a $z^k = \varphi(x^k)$ egyenlőség, legyen $\tilde{\varphi}(x^n h) = z^n \varphi(h)$. A definíció korrektségéhez meg kell mutatnunk, hogy ha $x^{n_1} h_1 = x^{n_2} h_2$, akkor $z^{n_1} \varphi(h_1) = z^{n_2} \varphi(h_2)$. Vannak olyan q, l nem negatív, egész számok, hogy $0 \leq l < k$ és $n_2 - n_1 = qk + l$. Mivel

$$x^{n_2-n_1} = x^{qk+l} = (x_1^k)^q \cdot x^l, \quad l=0 \quad (6.5) \quad \text{valamint } (x^k)^q \text{ a}$$

-hoz tartozik, ezért is, s a minimalitása miatt. Így

$$z^{n_2} \varphi(h_2) = z^{n_1} z^{qk} \varphi(h_2) = z^{n_1} \varphi(x^{qk} h_2), \quad (6.6) \quad \text{de az}$$

$x^{n_1} h_1 = x^{n_2} h_2 = x^{n_1} x^{qk} h_2$ egyenlőség alapján $x^{qk} h_2 = h_1$, s a fenti egyenlőség jobboldala $z^{n_1} h_1$.

Végül

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x^{n_1} h_1 \cdot x^{n_2} h_2) &= \tilde{\varphi}(x^{n_1+n_2} \cdot h_1 h_2) = z^{n_1+n_2} \varphi(h_1) \varphi(h_2) = \\ &= \tilde{\varphi}(x^{n_1} h_1) \cdot \tilde{\varphi}(x^{n_2} h_2), \end{aligned} \quad (6.7) \quad \text{így}$$

$\tilde{\varphi}$ most is homomorfizmusa G -nek D -be, s nyilván H -n φ -vel egyenlő. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

6.3.2. Tétel.

Diszkrét Abel-csoport izomorf második duálisával, s az izomorfizmust a természetes leképezés létesíti.

Bizonyítás.

A természetes leképezés a G diszkrét Abel-csoportnak második duálisába való homomorfizmusa, ami a

$$\Phi_{xy}(\chi) = \chi(xy) = \chi(x)\chi(y) = \Phi_x(\chi)\Phi_y(\chi) \quad (6.8)$$

egyenlőségből következik. A Φ homomorfizmus magja a G csoport azon x elemeiből áll, melyekre $\chi(x) = \Phi_x(\chi) = 1$ teljesül minden χ karakter esetén. Megmutatjuk, hogy ez csak $x = e$ esetén lehetséges. Ha ugyanis $x \neq e$ a G tetszőleges eleme, akkor legyen $\alpha \neq 1$ -től különböző, egységnyi abszolút értékű komplex szám. Az $x^k \mapsto \alpha^k$ (k egész szám) leképezés nyilván homomorf leképezése a G csoport x által generált részcsoportjának $\mathbb{T}$ -be. Mivel $\mathbb{T}$ osztható, ez a homomorf leképezés kiterjeszthető a G karakterévé, s a kiterjesztés az x elemen 1 -től különböző értéket vesz fel: α -t. Így a természetes leképezés izomorf leképezése G -nek második duálisába.

Most a szűrjektivitás bizonyítása következik. A G csoport duálisa kompakt, és $\Phi(G)$ a $\mathcal{C}(\hat{G})$ -ben elválasztó család, ugyanis, ha $\chi_1 \neq \chi_2$ a $\hat{G}$ elemei, akkor valamely G -beli x elem mellett $\chi_1(x) \neq \chi_2(x)$, azaz, $\Phi_x(\chi_1) \neq \Phi_x(\chi_2)$ érvényes. Tekintsük a $\Phi(G)$ -beli függvények véges lineáris kombinációinak halmazát. Ezek egy algebrát alkotnak $\mathcal{C}(\hat{G})$ -ben, mely elválasztó tulajdonságú, az 1 -et tartalmazza, és a konjugált-képzésre nézve zárt. A 4.13.6. Stone-Weierstrass-tétel szerint tehát $\Phi(G)$ sűrű $\mathcal{C}(\hat{G})$ -ben. Ha ξ a $\hat{G}$ olyan karaktere, mely nem tartozik $\Phi(G)$ -be, akkor ξ ortogonális $\Phi(G)$ minden elemére (hiszen a különböző karakterek ortogonálisak), így ortogonális $\mathcal{C}(\hat{G})$ -re. Ám $\mathcal{C}(\hat{G})$ sűrű $L^2(\hat{G})$ -ben, így ξ ortogonális $L^2(\hat{G})$ -re is, tehát saját magára is, ami ellentmondás. $\square$

4. 6.4 Konvolúciós operátorok kompakt Abel-csoportokon

Legyen I egy rögzített invariáns közép a G kompakt Abel-csoporton. Mivel G -n minden folytonos függvény korlátos, így I a $\mathcal{C}(G)$ korlátos lineáris funkcionálja, mely rendelkezik a 5.1.2. Tételben felsorolt tulajdonságokkal, és $I(1) = 1$.

6.4.1. Tétel.

Ha f nem azonosan nulla, nem negatív, folytonos, valós értékű függvény a G kompakt Abel-csoporton, akkor

Bizonyítás.

Mivel f nem azonosan 0, így van G -ben olyan x_0 pont, olyan U környezete az egységelemnek, és van olyan $m > 0$ szám, hogy $f(x) \geq m$, ha x az $x_0 U$ -hoz tartozik. Az yU alakú nyílt halmazok lefedik G -t, ha y végigfutja G -t, így a kompaktság miatt léteznek olyan $y_1, y_2, \dots, y_n \in G$ -beli elemek, hogy $G \subseteq y_1 U \cup y_2 U \cup \dots \cup y_n U$. Ekkor

$$\tau_{y_1}^{-1} f + \tau_{y_2}^{-1} f \cdots + \tau_{y_n}^{-1} f \geq m$$

teljesül.

Ebből

következően

$$I(f) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(\tau_{y_j}^{-1} f) = \frac{1}{n} I(\tau_{y_1}^{-1} f + \tau_{y_2}^{-1} f \cdots + \tau_{y_n}^{-1} f) \geq \frac{m}{n} > 0.$$

□

Amint az könnyen látható, az $\langle f, g \rangle = I(f \cdot \bar{g})$ definícióval $\langle f, g \rangle$ belső szorzat $\mathcal{C}(G)$ -n, melyből származó $\|f\|_2 = (I(|f|^2))^{\frac{1}{2}}$ normával $\mathcal{C}(G)$ normált tér, de nem feltétlenül teljes. Teljes metrikus burka $L^2(G)$, amelyre - mint könnyen látható - a belső szorzat egyértelműen kiterjeszthető, s a kiterjesztéssel $L^2(G)$ Hilbert-tér. Ha f egy $L^2(G)$ -beli függvény, akkor $I(f)$ az $\langle f, 1 \rangle$ belső szorzatot jelenti. Ez nyilván megegyezik $I(f)$ korábbi értékével, ha f folytonos. Az I funkcionált, mely tehát $\mathcal{C}(G)$ -n van értelmezve és nyilván korlátos lineáris funkcionál, Haar¹-integrálnak nevezzük.

Célszerűnek látszik a véges Abel-csoportok esetében alkalmazott gondolatmenet megismétlése a $\mathcal{C}(G)$ helyett az $L^2(G)$ Hilbert-teret használva. Az eltolásoperátorok ezen a téren is egymással felcserélhető unitér operátorok, melyek közös sajátfüggvényei a karakterek. Arra azonban egyelőre nincs garancia, hogy az eltolásoperátoroknak $L^2(G)$ -n van-e elég sok közös sajátfüggvényük, tehát van-e $L^2(G)$ -ben az eltolásoperátorok közös sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszer? Az eltolásoperátorok helyett célszerűbb lesz a konvolúciós operátorokat tekinteni.

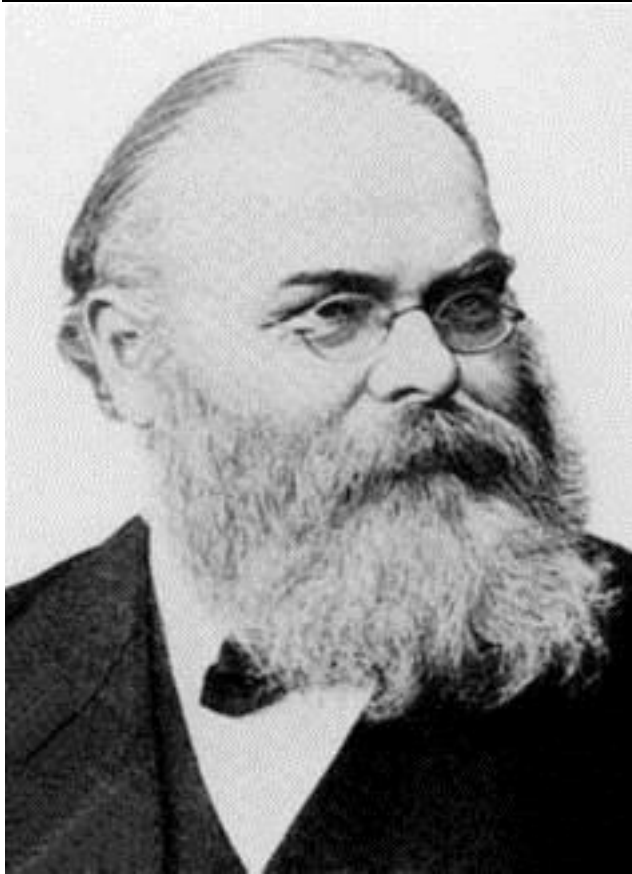
¹Haar Alfréd, magyar matematikus (1885-1933)



A. L. Cauchy



V. J. Bunyakovszkij



H. A. Schwarz

Ha f, g az $L^2(G)$ elemei, akkor a Cauchy² ✚ -Bunyakovszkij³ ✚ -Schwarz⁴ ✚ -egyenlőtlenség alapján az $y \mapsto f(xy^{-1})g(y)$ függvény is $L^2(G)$ -beli, s ezek konvolúcióját az

$$(f * g)(x) = I_y(f(xy^{-1})g(y)) \quad (6.9) \text{ összefüggés értelmezi minden } G -$$

beli x esetén. Itt, és a későbbiekben az I_y jelölés arra utal, hogy az I funkcionált rögzített x mellett az $y \mapsto f(xy^{-1})g(y)$ függvényre alkalmazzuk. Ekkor - mint könnyen látható - $f * g$ ugyancsak $L^2(G)$ -beli, sőt, ha f folytonos, akkor $f * g$ is az.

Rögzített $L^2(G)$ -beli a esetén az $A_a : f \mapsto a * f$ operátor nyilván lineáris, melyet az a -hoz tartozó konvolúciós operátornak nevezünk. Könnyen látható, hogy A_a teljesen folytonos operátor: minden korlátos halmaz képének lezártja kompakt.

A teljesen folytonos operátorok elméletében alapvető fontosságú a következő tétel, mely a teljesen folytonos, normális operátorok spektráltétele.

6.4.2. Tétel.

(Hilbert-Schmidt⁵ ✚) Hilbert-tér zérustól különböző, teljesen folytonos, normális operátorának van zérustól különböző sajátértéke, és minden zérustól különböző sajátértékhez tartozó sajátaltér véges dimenziós.

²Augustin Louis Cauchy, francia matematikus (1789-1857)

³Viktor Jakovlevics Bunyakovszkij, orosz matematikus (1804-1889)

⁴Hermann Amandus Schwarz, német matematikus (1843-1921)

⁵Erhard Schmidt, német matematikus (1876-1959)



E. Schmidt

Ugyanakkor, könnyű látni, hogy fennáll $A_a^* = A_{a^*}$, ahol $a^*(x) = \overline{a(x^{-1})}$. Így a konvolúciós operátorok normális operátorok. Mik a konvolúciós operátorok közös sajátfüggvényei? Ha az $L^2(G)$ -beli f függvény egy ilyen közös sajátfüggvény, akkor minden $L^2(G)$ -beli a esetén $a * f = \lambda(a) \cdot f$ teljesül. Az is látható, hogy a konvolúciós operátorok magjainak metszete 0 . Ha ugyanis $a * f = 0$ áll fenn minden $L^2(G)$ -beli a esetén, akkor az $a = f^*$ -ra azt kapjuk, hogy $0 = f^* * f(e) = \int_G f^*(y^{-1}) f(y) dy = \int |f(y)|^2 dy$. Így, ha f közös sajátfüggvény, akkor valamely a -ra $\lambda(a) \neq 0$. Másrészt

$$\tau_z(a * f)(x) = \int_G a(xzy^{-1}) f(y) dy = \tau_z a * f(x) = \lambda(\tau_z a) \cdot f(x)$$

minden G -beli z esetén teljesül, így

$$\tau_z f = \frac{1}{\lambda(a)} \tau_z(a * f) = \frac{\lambda(\tau_z a)}{\lambda(a)} \cdot f,$$

tehát f az eltolásoperátoroknak is közös sajátfüggvénye. Megfordítva, ha f közös sajátfüggvénye az eltolásoperátoroknak és $f(e) = 1$, akkor f karakter, és közös sajátfüggvénye a konvolúciós operátoroknak. Így elég lenne azt tudni, hogy $L^2(G)$ -ben létezik a konvolúciós operátorok közös sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszer.

6.4.3. Tétel.

(Hilbert-Schmidt-tétel) Hilbert-téren adott, páronként felcserélhető, teljesen folytonos, normális operátorok esetén van a térben az operátorok közös sajátvektoraiból álló teljes ortonormált rendszer.

Bizonyítás.

Legyen $\mathcal{A}$ az operátorok családja. Ha $\mathcal{A} = \{0\}$, akkor az állítás triviális. Ha $\mathcal{A} \neq \{0\}$, akkor $\mathcal{A}$ -nak van zérustól különböző sajátértéke, s a megfelelő sajátaltér véges dimenziós. A felcserélhetőség miatt ez a sajátaltér minden $\mathcal{A}$ -beli operátornak invariáns altére. Ebben az altérrel különböző, összes többi $\mathcal{A}$ -beli operátornak van közös sajátvektora, de ez sajátvektora $\mathcal{A}$ -nak is. Így létezik az összes $1 + \mathcal{A}$ -beli operátornak közös sajátvektora. Minden $\mathcal{A}$ -beli operátor előállítható $\mathcal{B}$ alakban, ahol $\mathcal{B}$ önadjungáltak, teljesen folytonosak, és felcserélhetők. Az összes ilyen $\mathcal{A}$ -ban előálló operátorok halmaza legyen $\mathcal{B}$. Ha $\mathcal{B}$ normális, tetszőleges operátor, és $\mathcal{B}$ invariáns altér, akkor $\mathcal{B}$ teljesen folytonos, páronként felcserélhető önadjungált operátorokból áll. A közös sajátvektorai megegyeznek az $\mathcal{A}$ közös sajátvektoraival. Legyen adott a közös sajátvektoraiból álló maximális ortonormált rendszer $\{e_i\}$. Ezen rendszer lineáris burkának lezártja legyen $\mathcal{B}$. Ha $\mathcal{B}$ ortogonális komplementere nem $\{0\}$, akkor az ortogonális komplementer invariáns altér minden $\mathcal{A}$ -beli operátornak, így abban van közös sajátvektor, ami ellentmond a maximalitásnak. Tehát a maximális ortonormált rendszer teljes, s ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

A tétel szerint tehát bármely G kompakt Abel-csoport esetén létezik olyan teljes ortonormált rendszer $L^2(G)$ -ben, amely karakterekből áll. Mivel a karakterek páronként ortogonálisak, így ebben a rendszerben szükségképpen minden karakter fellép.

6.4.4. Tétel.

Ha G kompakt Abel-csoport, akkor G összes karakterei $L^2(G)$ -ben teljes ortonormált rendszert alkotnak.

Az eddigiekből könnyen kapjuk a következő eredményt.

6.4.5. Tétel.

Kompakt Abel-csoporton a Haar-integrál egyértelmű.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy I_1 és I_2 két Haar-integrál, s a megfelelő L^2 -terek: $L^2_1(G)$ és $L^2_2(G)$. A karakterek véges lineáris kombinációin a két belső szorzat megegyezik, s mivel az ilyenek sűrűk $L^2_1(G)$ -ben és $L^2_2(G)$ -ben is, így a belső szorzat $L^2_1(G)$ -n és $L^2_2(G)$ -n, tehát ezek közös részén, $C(G)$ -n is megegyezik. $\square$

5. 6.5 Diszkrét és kompakt Abel-csoportok karakterelmélete

Legyen G diszkrét Abel-csoport, $\widehat{G}$ pedig a G összes karaktereinek csoportja a $\mathbb{C}^G$ -től örökölt topológiával. A 4.2.2. Tyihonov-tétel alapján a

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}^G$$

halmaz kompakt, s mivel $\widehat{G}$ ennek zárt altére, így $\widehat{G}$ kompakt. Az egységelem környezetbázisát alkotják az összes

$$\{\chi \in \widehat{G} : |\chi(g_k) - 1| < \varepsilon, k = 1, 2, \dots, n\}$$

alakú halmazok, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám, $n \geq 1$ egész szám és $g_1, g_2, \dots, g_n$ a G csoport tetszőleges elemei. A $\widehat{G}$ tehát ezzel a topológiával kompakt Abel-csoport. Legyen G kompakt Abel-csoport, $\widehat{G}$ a G összes folytonos karaktereinek csoportja azzal a topológiával, melyben a $\widehat{G}$ egységelemének környezetbázisát alkotják az összes

$$\{\chi \in \widehat{G} : |\chi(g) - 1| < \varepsilon, g \in K\}$$

alakú halmazok, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám, $K \subseteq G$ kompakt halmaz. Mivel G kompakt, így $\{1\}$ a $\widehat{G}$ egységelemének környezete, tehát $\widehat{G}$ ezzel a topológiával diszkrét Abel-csoport. A fenti két topológia $\widehat{G}$ -n speciális esete a következőnek.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport, $\widehat{G}$ a G összes folytonos karaktereinek csoportja azzal a topológiával, melyben a $\widehat{G}$ egységelemének környezetbázisát alkotják az összes

$$\{\chi \in \widehat{G} : |\chi(g) - 1| < \varepsilon, g \in K\}$$

alakú halmazok, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám, $K \subseteq G$ kompakt halmaz. Ezzel a topológiával G lokálisan kompakt Abel-csoport. Ezt a topológiát kompakt-nyílt topológiának nevezzük. Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport és $\Phi : G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ a G természetes homomorfizmusa második duálisába, azaz

$$\Phi(g)(\chi) = \chi(g),$$

ha $g \in G$ -beli, χ pedig a G folytonos karaktere. A dualitáselmélet egyik célja annak bizonyítása, hogy Φ a G -nek $\widehat{\widehat{G}}$ -re való topologikus izomorfizmusa. Ez a Pontrjagin-féle dualitás-tétel. Ha G diszkrét, akkor $\widehat{G}$ kompakt, így $\widehat{\widehat{G}}$ diszkrét, tehát Φ nyilván folytonos, s ha szűrjektív és van inverze, akkor az is folytonos. Diszkrét Abel-csoportok dualitásához tehát a természetes homomorfizmus injektivitása és szűrjektivitása kellett, ezt láttuk az 6.3. szakaszban. Most a kompakt csoportok esetét fogjuk megvizsgálni. Legyen tehát G kompakt Abel-csoport, ennek $\widehat{G}$ duálisa diszkrét és $\widehat{\widehat{G}}$ ismét kompakt. A duális csoport topológiájának definíciója alapján a $\Phi : G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ természetes homomorfizmus nyilván folytonos. Megmutatjuk, hogy Φ injektív és szűrjektív.

6.5.1. Tétel.

Kompakt Abel-csoport második duális csoportjába való természetes homomorfizmusa topologikus izomorfizmus.

Bizonyítás.

Az injektivitáshoz elég megmutatni, hogy ha g a G egységelemtől különböző eleme, akkor van a G -nek olyan χ karaktere, hogy $\chi(g) \neq 1$. Tegyük fel, hogy ez nem így van. Ekkor a τ_g operátor $L^2(G)$ -ben a karaktereken identikusan hat, így $L^2(G)$ -n is, tehát $\mathcal{C}(G)$ -n is: minden folytonos f függvény és minden G -beli x esetén $f(xg) = f(x)$ teljesül, de ez lehetetlen, hiszen $xg \neq x$, így ez a két elem folytonos függvénnyel elválasztható, a 4.3.3. és a 4.3.6. tételek szerint. A 4.3.7. Tétel és a most bizonyítottak alapján tehát a természetes homomorfizmus G -nek $\Phi(G)$ -re való topologikus izomorfizmusa. Ha $\Phi(G) \neq \widehat{\widehat{G}}$, akkor a $\widehat{\widehat{G}}/\Phi(G)$ faktorcsoporthoz kompakt Abel-csoport, melynek van nemtriviális karaktere. Ez $\widehat{\widehat{G}}$ -n a $\widehat{\widehat{G}} \rightarrow \widehat{\widehat{G}}/\Phi(G) \rightarrow \mathbb{T}$ homomorfizmusok kompozíciója révén indukál egy nemtriviális ξ karaktert, melyre fennáll $\xi(\Phi(G)) = \{1\}$. Mivel $\widehat{\widehat{G}}$ diszkrét, és diszkrét Abel-csoportokra már tudjuk a dualitás-tételt, így ξ a $\widehat{\widehat{G}}$ eleme, azaz G nemtriviális karaktere, de $\xi(g) = 1$ minden G -beli g esetén, ami ellentmondás. $\square$

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy ha G diszkrét vagy kompakt Abel-csoport, akkor G topologikusan izomorf második duális csoportjával.

6.6 Feladatok

1.

Adjunk példát olyan topologikus térre, s benne olyan halmazra, melynek a lezártjában van olyan pont, amely egyetlen, a halmazhoz tartozó sorozatnak sem határértéke!

2.

Adjunk példát olyan topologikus térre, s benne olyan kompakt halmazra, mely nem zárt!

3.

Az Uriszon-lemma bizonyításának mintájára igazoljuk a 4.5.1 segédteét!

4.

Mutassuk meg, hogy diszkrét Abel-csoport duálisa a 6.1. szakaszban értelmezett topológiával topologikus csoport!

5.

Mutassuk meg, hogy kompakt Abel-csoport duálisa a 6.2. szakaszban értelmezett topológiával topologikus csoport!

6.

Mutassuk meg, hogy $\mathbb{T}$ -nek nincs valódi, $\{1\}$ -től különböző részcsoportja!

7.

Mutassuk meg, hogy ha G kompakt Abel-csoport, akkor az eltolásoperátorok az $L^2(G)$ téren egymással felcserélhető unitér operátorok, melyek közös sajátfüggvényei a karakterek!

8.

Mutassuk meg, hogy ha G kompakt Abel-csoport, akkor a 6.4. szakaszban értelmezett konvolúciós operátorok $L^2(G)$ -n teljesen folytonos normális lineáris operátorok!

9.

Mutassuk meg, hogy bármely lokálisan kompakt Abel-csoport duálisa a kompakt-nyílt topológiával lokálisan kompakt Abel-csoport!

7. fejezet - ELEMI ABEL-CSOPORTOK DUALITÁSELMÉLETE

1. 7.1 Néhány speciális Abel-csoport duális csoportja

7.1.1. Tétel.

Kompakt Abel-csoport duálisának nincs valódi, elválasztó tulajdonságú részcsoportha.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy Γ a G kompakt Abel-csoport duálisának elválasztó tulajdonságú részcsoportha, ekkor minden G -beli, egységelemtől különböző g elem esetén van olyan Γ -beli χ karakter, hogy $\chi(g) \neq 1$. A Γ -beli karakterek véges lineáris kombinációinak halmaza teljesíti a 4.13.6. Stone-Weierstrass-tétel feltételeit, így ezek sűrű halmazt alkotnak $\mathcal{C}(\widehat{G})$ -ben. Ha lenne a G -nek olyan χ karaktere, mely nem tartozik Γ -hoz, akkor, mivel χ ortogonális Γ -ra, ortogonális volna $\mathcal{C}(\widehat{G})$ -re, így saját magára is, ami lehetetlen. $\square$

7.1.2. Tétel.

$$\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}.$$

Bizonyítás.

A $\mathbb{T}$ csoport g elemein $\chi(g) = g$ módon értelmezett identikus leképezés elválasztó karakter, így generálja $\widehat{\mathbb{T}}$ -ot. Másrészt, a $\chi^n \mapsto n$ megfeleltetés izomorfizmus $\widehat{\mathbb{T}}$ és $\mathbb{Z}$ között. $\square$

7.1.3. Tétel.

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}.$$

Bizonyítás.

Az állítás következik a kompakt Abel-csoportokra igazolt 6.3.2. Tételből és a 7.1.2. Tételből. $\square$

7.1.4. Tétel.

Ha $G_1, G_2, \dots, G_n$ tetszőleges lokálisan kompakt Abel-csoportok, akkor a $(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n)^\wedge$ topologikus csoport topologikusan izomorf $\widehat{G}_1 \times \widehat{G}_2 \times \dots \times \widehat{G}_n$ -el.

Bizonyítás.

Az állítást $n = 2$ -re bizonyítjuk, az általános eset hasonlóan tárgyalható.

Legyen e_1 , illetve e_2 a G_1 , illetve G_2 egységeleme és bármely $\widehat{G}_1$ -beli χ_1 és $\widehat{G}_2$ -beli χ_2 esetén legyen

$$\Theta(\chi_1, \chi_2)(x_1, x_2) = \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)$$

ha x_1 a G_1 -höz, x_2 a G_2 -höz tartozik. Ekkor $\Theta(x_1, x_2)$ a $G_1 \times G_2$ karaktere és könnyű látni, hogy x_1 a G_1 -ben, x_2 a G_2 -ben, akkor $\Theta(x_1, x_2) = 1$, ha mindkét x_1 és x_2 az egységelem, azaz $x_1 = e_1$ és $x_2 = e_2$. Ha x_1 nem az egységelem, akkor $\chi_1(x_1) \neq 1$, így $\chi_1(x_1) \chi_2(x_2) = 1$ csak akkor teljesül, ha $x_2 = e_2$. Tehát $\Theta(x_1, x_2) = \chi_1(x_1) \chi_2(x_2)$, így Θ izomorf leképezés. Másrészt, bármely χ a $G_1 \times G_2$ karaktere esetén

$$\chi(x_1, x_2) = \chi(x_1, e_2) \chi(e_1, x_2)$$

teljesül, és $x \mapsto \chi(x, e_2)$, illetve $x \mapsto \chi(e_1, x)$ a G_1 -nek, illetve G_2 -nek karakterei, így χ beletartozik a $\Theta(\widehat{G_1} \times \widehat{G_2})$ halmazba, vagyis Θ szürjektív és $\widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$ algebrailag izomorf $(G_1 \times G_2)^\wedge$ -vel. Megmutatjuk, hogy Θ topologikus izomorfizmus, azaz, folytonos és nyílt. Legyen F a $G_1 \times G_2$ kompakt részalgebraja és $\varepsilon > 0$ valós szám. Ha F_1 és F_2 jelöli az F projekcióját G_1 -be, illetve G_2 -be, akkor F_1 és F_2 kompakt, továbbá

$$\Theta(U(F_1, \varepsilon/2) \times U(F_2, \varepsilon/2)) \subseteq U(F, \varepsilon),$$

ezért Θ folytonos. Másrészt, ha F_1 a G_1 -nek, F_2 a G_2 -nek kompakt részalgebraja, $\varepsilon_1 > 0$ és $\varepsilon_2 > 0$ valós számok, akkor az

$$F = (F_1 \cup \{e_1\}) \times (F_2 \cup \{e_2\})$$

halmaz kompakt, és az $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ jelöléssel teljesül

$$U(F, \varepsilon) \subseteq \Theta(U(F_1, \varepsilon_1) \times U(F_2, \varepsilon_2)),$$

tehát Θ nyílt. $\square$

7.1.5. Tétel.

Ha F véges Abel-csoport, akkor $\widehat{\widehat{F}} = F$.

Bizonyítás.

Véges Abel-csoport ciklikus csoportok direkt szorzata:

$$(7.1) \quad F = \mathbb{Z}(m_1) \times \mathbb{Z}(m_2) \times \cdots \times \mathbb{Z}(m_k)$$

($k, m_1, m_2, \dots, m_k$ pozitív egész számok) teljesül, ahol $\mathbb{Z}(m) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ az m -edrendű ciklikus csoport. A $\mathbb{Z}(m)$ csoport izomorf az m -edik egységgyökök szorzáscsoportjával. Ezen az identikus leképezés elválasztó karakter, így hatványai kiadják $\mathbb{Z}(m)^\wedge$ -et, de hatványainak csoportja izomorf magával $\mathbb{Z}(m)$ -mel. Így $\mathbb{Z}(m)^{\wedge\wedge} = \mathbb{Z}(m)$, s az előző tétel alapján az állítás következik. $\square$

7.1.6. Tétel.

$$\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}.$$

Bizonyítás.

Legyen f az $\mathbb{R}$ karaktere, ekkor felírható $f(x) = \exp(it(x))$ (x valós szám) alakban, ahol t valós értékű folytonos függvény. Az

$$\exp(it(x+y)) = f(x+y) = f(x)f(y) = \exp(i[t(x) + t(y)])$$

(x, y valós számok) azonosságból következik, hogy $t(x+y) - t(x) - t(y) = n(x, y)$ (x, y valós számok), ahol n egész értékű folytonos függvény $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -en. Mivel ez utóbbi összefüggő, így n a 4.6.1. Tétel alapján állandó, s mivel $n(0, 0) = 0$, ezért $t(x+y) = t(x) + t(y)$ teljesül minden valós x, y esetén. Ebből adódik, hogy $t(x) = \lambda x$ (x valós szám) teljesül valamely valós λ -val, így $f(x) = \exp(\lambda x)$ (x valós szám). Könnyű látni, hogy az $f \longleftrightarrow \lambda$ megfeleltetés topologikus izomorfizmus $\mathbb{R}$ és $\widehat{\mathbb{R}}$ között. $\square$

2. 7.2 Elemi Abel-csoportok

7.2.1. Tétel.

Ha F véges Abel-csoport, akkor

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k \times \mathbb{T}^m \times F)^\wedge = \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^k \times \mathbb{Z}^m \times F$$

(n, k, m nem negatív egész számok).

Bizonyítás.

Világos. $\square$

Az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k \times \mathbb{T}^m \times F$ alakú csoportokat, ahol F véges Abel-csoport, n, k, m pedig nem negatív egész számok, valamint az ezekkel topologikusan izomorf csoportokat elemi csoportoknak nevezzük.

7.2.2. Tétel.

Elemi csoport természetes homomorfizmusa a második duálisára való topologikus izomorfizmus.

Bizonyítás.

Világos. $\square$

Az elemi Abel-csoportok legfontosabb típusai a következők: a kompakt elemi csoportok, melyek $\mathbb{T}^m \times F$ alakúak, a diszkrét elemi csoportok, melyek $\mathbb{Z}^k \times F$ alakúak, az összefüggő elemi csoportok, melyek $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$ alakúak, az úgynevezett vektorcsoportok, ezek a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k$ alakú csoportok, valamint az úgynevezett rács-csoportok, melyek $\mathbb{Z}^k$ alakúak. Itt F mindig tetszőleges véges Abel-csoportot jelöl, k, n, m pedig természetes számok.

3. 7.3 Feladatok

1.

Mutassuk meg, hogy a $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multiplikatív csoport elemi csoport és írjuk le duálisát!

2.

Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ multiplikatív csoport elemi csoport és írjuk le duálisát!

8. fejezet - HARMONIKUS ANALÍZIS

KOMPAKT ABEL-CSOPORTOKON

1. 8.1 A Riesz-féle reprezentációs tétel

Kompakt Abel-csoportok esetén a harmonikus analízis kiépítése a véges Abel-csoportok esetén alkalmazott gondolatmenet mentén vihető végbe. A véges esetben, majd később, végtelen diszkrét Abel-csoportok vizsgálata során is láttuk, hogy az invariáns közép, amely véges esetben egyszerűen a függvényértékek számtani közepe, alapvető eszköznek bizonyult. Kompakt Abel-csoportok esetén ezt a szerepet a Haar-integrál játssza, melynek egyértelműségét a 6.4.5. Tételben igazoltuk. Az elnevezés azt sugallja, hogy valójában egy integrálról van szó, s felvetődik a kérdés: vajon milyen mértékből származhat ez az integrál? Erre a kérdésre a Riesz¹ $\times$ -reprezentációs tétel ad választ, mellyel kapcsolatban néhány fogalomra van szükségünk.

Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-féle topologikus tér, Ω pedig a nyílt halmazok által generált σ - algebra. Az Ω -hoz tartozó halmazokat Borel² $\times$ -halmazoknak nevezzük. A Hausdorff-tulajdonság miatt a 4.3.5. Tétel alapján minden kompakt halmaz zárt, s így minden kompakt halmaz Borel-halmaz. Az (X, Ω) mérhető téren értelmezett mértéket Borel-mértéknek nevezzük. A μ Borel-mértéket regulárisnak nevezzük X -en, minden véges mértékű Borel-halmaz mértéke egyenlő a benne foglalt kompakt halmazok mértékeinek szuprémumával és minden Borel-halmaz mértéke egyenlő az őt tartalmazó nyílt halmazok mértékeinek infimúumával. Ha emellett minden kompakt hamaz mértéke véges, akkor a mértéket Radon-mértéknek nevezzük. Egy komplex mértéket Borel-, illetve Radon-mértéknek nevezünk, ha abszolút értéke Borel-, illetve Radon-mérték.



E. Borel

¹Riesz Frigyes, magyar matematikus (1880-1956)

²Félix Edouard Justin Émile Borel, francia matematikus (1871-1956)

HARMONIKUS ANALÍZIS

KOMPAKT ABEL- CSOPORTOKON

Amint az könnyen látható, ez egyenértékű azzal, hogy a Hahn³-Jordan⁴-féle felbontásában szereplő valós és képzetes részeinek pozitív és negatív részei Borel-, illetve Radon-mértékek. Az $M(X)$ -en értelmezett összes reguláris komplex Borel-mértékek nyilván komplex lineáris teret alkotnak, melyet $M(X)$ fog jelölni, amelyet a továbbiakban az egyszerűség kedvéért mértéknek nevezünk. A mérték tartójának nevezzük az összes μ -nullmértékű nyílt halmazok egyesítésének komplementerét, mely tehát egy zárt halmaz. Jele: $M(X)$. Ha ez kompakt, akkor a mértékek kompakt tartójúnak nevezünk. Az összes kompakt tartójú mértékek egy alterét alkotják, melyet $M_c(X)$ jelöl. Mint könnyen látható, az $M_c(X)$ téren a

$$(8.1) \quad \|\mu\| = |\mu|(X)$$

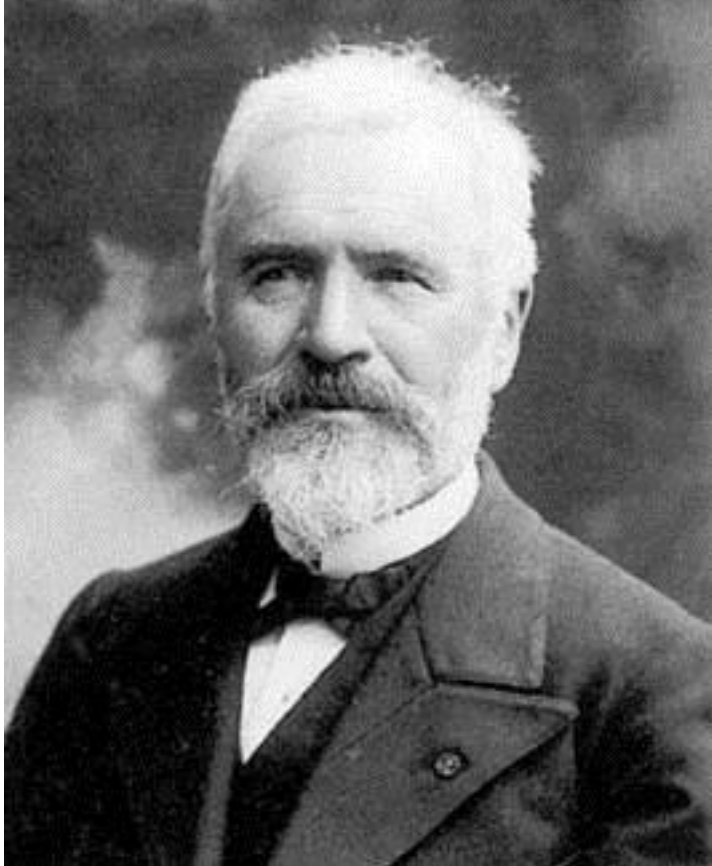
definícióval normát kapunk.

³Hans Hahn, osztrák matematikus (1879-1934)

⁴Marie Ennemond Camille Jordan, francia matematikus (1838-1922)



H. Hahn



az említett tétel.

C. Jordan Ezen bevezetés után következzen

8.1.1. Tétel.

(Riesz-féle reprezentációs tétel) Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér és minden μ komplex Borel-mérték esetén legyen

$$(8.2) \quad F_\mu(f) = \int f d\mu,$$

hacsak f a $C_0(X)$ eleme. Ekkor $F_\mu(f)$ korlátos lineáris funkcionál $C_0(X)$ -en, s a $\mu \mapsto F_\mu$ leképezés $\mathcal{M}(X)$ -nek $C_0(X)^*$ -ra való izometrikus izomorfizmusa.

A tétel tehát pontosan leírja lokálisan kompakt Hausdorff-terek esetén a végtelenben eltűnő folytonos függvények Banach-terének duális terét, e tér korlátos lineáris funkcionáljait: ezek éppen a különböző Borel-mértékek szerinti integrálások.

A tétel egy másik változata az alábbi.

8.1.2. Tétel.

(Riesz-féle reprezentációs tétel) Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, F pedig egy pozitív lineáris funkcionál $C_c(X)$ -en. Ekkor egyértelműen létezik olyan μ reguláris Borel-mérték X -en, hogy

$$(8.3) \quad F(f) = \int f d\mu,$$

hacsak f a $C_c(X)$ eleme.

A tétel kompakt Hausdorff-terekre vonatkozó megfelelője a következő hasonló eredmény. Ilyenkor nyilván $C(X)$ korlátos függvényekből áll, s rajta a (4.5) norma ugyancsak Banach-tér struktúrát értelmez.

8.1.3. Tétel.

(Riesz-féle reprezentációs tétel) Ha X kompakt Hausdorff-tér akkor tetszőleges $\mathcal{M}(X)$ esetén a (8.2) formulával bármely $C(X)$ -beli f függvényre értelmezett F_μ mellett a $\mu \mapsto F_\mu$ leképezés $\mathcal{M}(X)$ -nek $C(X)^*$ -ra való izometrikus izomorfizmusa.

A 6.4. szakaszban láttuk, hogy a G kompakt Abel-csoporton egyértelműen meghatározott I Haar-integrál a $C(G)$ tér korlátos lineáris funkcionálja, melyhez az előző tétel szerint van olyan, ugyancsak egyértelműen meghatározott μ reguláris komplex Borel-mérték, hogy

$$I(f) = \int f d\mu$$

teljesül minden $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény esetén. Az 5.1.2. Tétel alapján I tulajdonságából következik, hogy μ mérték. A μ mértéket Haar-mértéknek nevezzük.



Haar

Alfréd



Riesz Frigyes

A következő tételben összefoglaljuk a kompakt Abel-csoportokon értelmezett Haar-mérték legfontosabb tulajdonságait.

8.1.4. Tétel.

Legyen G kompakt Abel-csoport. A Haar-mérték az egyetlen olyan μ pozitív mérték a Borel-halmazokon, melyre érvényesek a következők:

1.

$$\mu(G) = 1.$$

2.

A μ mérték eltolásinvariáns: minden B Borel-halmaz és G -beli g elem esetén

$$\mu(g \cdot B) = \mu(B).$$

3.

Minden nem üres, nyílt halmaz mértéke pozitív.

4.

Minden nyílt halmaz mértéke egyenlő a benne foglalt kompakt halmazok mértékeinek szuprémumával.

5.

Minden Borel-halmaz mértéke egyenlő az őt tartalmazó nyílt halmazok mértékeinek infimumával.

Az első három állítás az invariáns mérték tulajdonságaiból, az utolsó kettő, valamint az egyértelműség pedig a 8.1.3. Riesz-féle reprezentációs tételből következik.

2. 8.2 Haar-mérték a komplex egységkörvonalon

Világos, hogy minden véges Abel-csoport kompakt, ha a diszkrét topológiával látjuk el. Mint könnyen látható, ez az egyetlen Hausdorff-féle topológia, melyre nézve egy véges csoport topologikus csoport. Véges Abel-csoportokon a számláló mérték osztva a csoport elemszámával nyilván teljesíti az előző tételben felsorolt tulajdonságokat, így - az egyértelműség miatt - megegyezik a Haar-mértékkel. A másik legegyszerűbb és legfontosabb kompakt Abel-csoport $\mathbb{T}$, a komplex egységkörvonal. Erre vonatkozik a következő tétel.

8.2.1. Tétel.

Legyen $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény, μ pedig a Haar-mérték $\mathbb{T}$ -n. Ekkor

$$\int f d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt.$$

Speciálisan, ha B Borel-halmaz $\mathbb{T}$ -ben, akkor

$$(8.4) \quad \mu(B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta_B(e^{it}) dt,$$

ahol δ_B a B halmaz karakterisztikus függvénye.

Bizonyítás.

Az állítás abból az egyszerű észrevételből adódik, hogy a $t \mapsto e^{it}$ leképezés a $[0, 2\pi[$ intervallumnak $\mathbb{T}$ -re való bijektív és folytonos leképezése, mely a Borel-halmazokat a Borel-halmazokra képezi. Ennek következtében a (8.4) egyenlőség jobboldalán álló formula által a Borel-halmazain definiált $\mathbb{T}$ -halmazfüggvény, melyről könnyen látható, hogy a Haar-mérték tulajdonságaival rendelkezik $\mathbb{T}$ -n, az egyértelműség miatt szükségképpen megegyezik Haar-mértékével. $\square$

Megjegyezzük, hogy az előbbi tétellel kapcsolatban még az is igaz, hogy ha a $[0, 2\pi]$ intervallumot a modulo 2π értelemben vett összeadással látjuk el, valamint az euklideszi metrikának megfelelő topológiával, akkor a 0 és 2π elemeket azonosítva $\mathbb{T}$ -vel topologikusan izomorf kompakt Abel-csoportot kapunk, s az izomorfizmust a $t \mapsto e^{it}$ leképezés létesíti. Ennek megfelelően a következőkben ezt a két topologikus csoportot azonosnak tekinthetjük. Ez azt is jelenti, hogy a $\mathbb{T}$ -n értelmezett folytonos függvények azonosíthatók a $[0, 2\pi]$ intervallumon értelmezett olyan folytonos függvényekkel, amelyek a végpontokban azonos értékeket vesznek fel. Még tovább mehetünk, ha ezeket a függvényeket azonosítjuk az egész számegyenesen értelmezett folytonos, 2π szerint periodikus függvényekkel. Ennek az azonosításnak a hátterében az áll, hogy az $\mathbb{R}$ topologikus csoport $\mathbb{Z}$ zárt részcsoportha szerinti $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ faktorcsoportha a faktortopológiával ellátva $\mathbb{T}$ -vel topologikusan izomorf topologikus csoport.

3. 8.3 Fourier-sorok

A $\mathbb{T}$ csoporton a harmonikus analízis egyet jelent a klasszikus periodikus függvényekre vonatkozó Fourier-sorok elméletével. Röviden összefoglaljuk mindazt, amit ezzel kapcsolatban a fentiek alapján speciális esetként kapunk. A 3.1. szakaszban alkalmazott gondolatokat vesszük át.

A 7.1.2. Tételben láttuk, hogy $\mathbb{T}$ duálisa $\mathbb{Z}$ -vel topologikusan izomorf, s az izomorfizmust a következő módon kapjuk: a $\mathbb{T}$ halmaz elemeit azonosítjuk az e^{it} komplex számokkal, ahol t a $[0, 2\pi]$ intervallum eleme. Ekkor $\mathbb{T}$ minden karaktere

$$\chi_n(e^{it}) = e^{int}$$

alakú, ahol n egész szám, s a $\chi_n \longleftrightarrow n$ megfeleltetés a természetes izomorfizmus $\widehat{\mathbb{T}}$ és $\mathbb{Z}$ között. A $\mathbb{T}$ -n értelmezett komplex értékű függvényeket pedig azonosítjuk az $\mathbb{R}$ -en értelmezett, 2π szerint periodikus függvényekkel. Az $L^2(\mathbb{T})$ tér azonosítható az $L^2[0, 2\pi]$ térrel, így ha f, g az $L^2(\mathbb{T})$ elemei, akkor belső szorzatuk

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt.$$

Közvetlenül ellenőrizhetjük, hogy érvényes a következő tétel.

8.3.1. Tétel.

Az $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ függvényrendszer teljes ortonormált függvényrendszer $L^2[0, 2\pi]$ -ben.

Bizonyítás.

Legyen $\chi_n(e^{it}) = e^{int}$ ha n egész, t pedig valós. Ekkor $n \neq m$ esetén

$$\begin{aligned} \langle \chi_n, \chi_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i(n-m)} [e^{i(n-m)t}]_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

míg $n = m$ esetén a belső szorzat 1 . Ezzel a karakterekből álló függvényrendszer ortonormált tulajdonságát igazoltuk. E függvényrendszer teljessége a Stone-Weierstrass-tétel

következménye. Valóban, a $\mathbb{T}$ kompakt Hausdorff-téren a karakterek lineáris kombinációi, az úgynevezett trigonometrikus polinomok olyan elválasztó, és a konjugálásra nézve zárt részalgebrát alkotnak az összes folytonos, komplex értékű függvények algebrájában, mely az 1 függvényt tartalmazza, így ezek a Stone-Weierstrass-tétel 4.13.6. komplex változata alapján az egyenletes konvergenciára nézve sűrű halmazzá képeznek az összes folytonos függvények terében. Mivel az egyenletes konvergenciából nyilván következik az L^2 -beli konvergencia, s a folytonos függvények, amint az könnyen látható, sűrű halmazzá alkotnak $L^2(\mathbb{T})$ -ben, így a trigonometrikus polinomok sűrű halmazzá alkotnak $L^2(\mathbb{T})$ -ben. Ha tehát egy $L^2(\mathbb{T})$ -beli függvény minden karakterre ortogonális, akkor ortogonális ezek lineáris kombinációira, tehát az összes trigonometrikus polinomra, s ezek sűrűsége miatt az $L^2(\mathbb{T})$ minden elemére, így saját magára is, ami csak úgy lehet, ha nullával egyenlő. $\square$

A $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ függvényrendszert komplex trigonometrikus rendszernek, vagy röviden trigonometrikus rendszernek nevezzük. Ugyanúgy, ahogy a 3.1. szakaszban tettük, minden $L^2(\mathbb{T})$ -beli függvényhez hozzárendelhetjük a trigonometrikus rendszer szerinti felbontásában szereplő Fourier-együtthatók sorozatát: tetszőleges $L^2(\mathbb{T})$ -beli f függvény és n egész szám esetén legyen

$$(8.5) \quad c_n = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt.$$

A $\mathbb{Z}$ -n értelmezett, komplex értékű $\widehat{f}$ függvény az f Fourier-transzformáltja, ami azonosítható a $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ komplex számsorozattal, melynek tagjait az $\widehat{f}$ Fourier-együtthatóinak nevezzük. E jelölések felhasználásával a trigonometrikus rendszer teljessége miatt minden $L^2(\mathbb{T})$ -beli függvény esetén fennáll

$$(8.6) \quad f = \sum_n \widehat{f}(n) \chi_n,$$

ami a 3.1.2. Inverziós Tétel megfelelője. Az egyenlőség jobboldalán álló sor természetesen $L^2(\mathbb{T})$ -ben konvergens. A Hilbert-terek elméletéből ugyancsak ismert, hogy érvényes az

$$(8.7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt = \sum_n |\widehat{f}(n)|^2 = \sum_n |c_n|^2$$

egyenlőség is, ami a (3.1)

Parseval-formula megfelelője.

A (8.6) egyenlőséget

$$(8.8) \quad f(e^{it}) = \int \widehat{f}(n) e^{int} dn$$

formában is felírhatjuk, ahol dn a számláló mértéket jelenti $\mathbb{Z}$ -n, s ez az inverziós formula megfelelője. Ha a számláló mértéknek megfelelő négyzetesen integrálható függvények tere $\mathbb{Z}$ -n $L^2(\mathbb{Z})$, akkor (8.7) azt jelenti, hogy minden $L^2(\mathbb{Z})$ -beli f esetén $\widehat{f}$ az $L^2(\mathbb{Z})$ térhez tartozik, és (8.7) így írható:

$$(8.9) \quad \|f\| = \|\widehat{f}\|.$$

A következő tételben, mely a 3.1.1. Plancherel-tétel megfelelője, összefoglalhatjuk az eddig látottakat.

8.3.2. Tétel.

(Plancherel) A $\mathbb{T}$ kompakt Abel-csoporton a Fourier-transzformáció $L^2(\mathbb{T})$ -nek $L^2(\mathbb{Z})$ -re való izometrikus izomorfizmusa.

Bizonyítás.

A Fourier-transzformáció szűrjektivitása, ami az egyetlen, eddig nem bizonyított állítása tételünknek, a Hilbert-terek általános elméletéből következik. $\square$

A dn mértékről könnyű látni, hogy rendelkezik a kompakt csoportokon értelmezett Haar-mérték majdnem minden alapvető tulajdonságával: az egyetlen kivétel a végeesség, hiszen pontosan a véges, mászóval, a $\mathbb{Z}$ diszkrét topológiájára nézve kompakt halmazokon véges az értéke. Látni fogjuk, hogy hasonló helyzet áll fenn más kompakt, majd később nem feltétlenül kompakt, lokálisan kompakt Abel-csoportok és duálisuk vonatkozásában: a G csoportot és $\widehat{G}$ duálisát el lehet látni egy-egy olyan mértékkel, melyek eltolásinvariáns Borel-mértékek, s melyekhez kapcsolódó $L^2(G)$ és $L^2(\widehat{G})$ Hilbert-terek között egy, a fentiekben értelmezett Fourier-transzformációhoz hasonló tulajdonságokkal rendelkező izometrikus izomorfia létezik. Ez a Fourier-transzformáció legalapvetőbb tulajdonsága, s egyben a harmonikus analízis alapja. További vizsgálataink elsődleges célja e tétel minél általánosabb körülmények közti megfogalmazása és bizonyítása.

4. 8.4 Fourier-analízis kompakt elemi Abel-csoportokon

Az előző szakasz gondolatai jelentős mértékben átvihetők a komplex egységkörnél jóval általánosabb kompakt Abel-csoportokra. Milyen a legáltalánosabb kompakt Abel-csoport? Ha $\widehat{G}$ kompakt Abel-csoport, akkor a dualitási tétel alapján fennáll

$$G = \widehat{\widehat{G}},$$

s mivel $\widehat{G}$ diszkrét Abel-csoport, így minden kompakt Abel-csoport valamely diszkrét Abel-csoport duálisa, tehát valamely diszkrét Abel-csoporton értelmezett bizonyos, értékeiket a komplex egységkörön felvevő függvények pontonkénti szorzással és alkalmas topológiával ellátott csoportjával azonosítható. Ez utóbbi függvényter nem más, mint a $\mathbb{T}$ kompakt tér önmagával vett valahány tényező szorzatterének egy zárt altere, melyen a csoportművelet a függvények pontonkénti szorzása. Röviden, és kissé pontatlanul, tehát minden kompakt Abel-csoportot úgy képzelhetünk el, mint egy diszkrét Abel-csoporton értelmezett, egységnyi abszolút értékű komplex számokat értékül felvevő bizonyos függvényeknek a pontonkénti szorzással, mint csoportművelettel ellátott struktúráját. Ugyanakkor, mivel minden diszkrét Abel-csoport duálisa kompakt Abel-csoport, az összes kompakt Abel-csoport áttekintéséhez minden diszkrét Abel-csoportot ismernünk kellene, ami lehet ugyan az algebristák álma, de egyelőre távol áll a megvalósítástól. Ez a gondolatmenet, persze, megfordítható: úgy is okoskodhatunk, hogy ezek szerint a diszkrét Abel-csoportok, amelyeket - ne feledjük - néhány egyszerű axióma definiál, nem mások, mint bizonyos kompakt topologikus tereken értelmezett, egységnyi abszolút értékű komplex számokat értékül felvevő bizonyos függvényeknek ugyancsak a pontonkénti szorzással, mint csoportművelettel ellátott struktúrái. Ki-ki ízlése szerint választhat, hogy mit szeretne elsődlegesnek tekinteni: az axiomatikusán definiált, algebrai diszkrét Abel-csoport fogalmát, vagy a - természetesen ugyancsak axiomatikusán definiált - kompakt topologikus teret, rajta értelmezett folytonos függvényekkel. Mi itt nem kívánunk állást foglalni ebben a kérdésben, csak érzékeltetjük, hogy minél több diszkrét Abel-csoport szerkezetét sikerül leírunk tisztán algebrai eszközökkel, annál több kompakt Abel-csoportról szerezhetünk ismereteket, mint azok duálisairól. S megfordítva, kompakt Abel-csoportok egyre szélesebb osztályai analitikus-topológiai tulajdonságainak felderítése jutalmaként újabb és újabb diszkrét Abel-csoportok szerkezetébe pillanthatunk bele. Most a kompakt Abel-csoportok közül az elemi csoportokkal foglalkozunk röviden. A 7.2. szakaszban láttuk, hogy ezek $G = \mathbb{T}^m \times F$ alakúak, ahol m nem negatív egész, F pedig egy véges Abel-csoport. Az algebrából ismeretes, hogy F véges sok véges ciklikus Abel-csoportnak, vagyis $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ alakú csoportoknak a direkt szorzata. A következőkben a $\mathbb{T}$ csoportot a $[0, 2\pi]$ -vel azonosítjuk, amelyen az euklideszi topológia és a modulo 2π értelemben vett összeadás hoz létre topologikus csoport-struktúrát, F -et pedig az egész számok véges sok modulus szerint vett összeadással, és a diszkrét topológiával ellátott csoport direkt szorzatával, vagyis

$$F = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z},$$

ahol $n_1, n_2, \dots, n_l$ nem negatív egész számok. Ilyen értelemben tehát a G csoport a „folytonos kör” m példányának és darab „véges körnek” n direkt szorzata. A G -n értelmezett függvények változós függvényeknek foghatók fel, melyek első változója valós, s ezekben a függvény szerint periodikus, a további változó pedig az egész számok halmazából veszi fel értékeit, s ezekben a függvény rendre szerint periodikus. A változót tehát (x, k) -val jelölve koordinátás alakban

$$(x, k) = (x_1, x_2, \dots, x_m, k_1, k_2, \dots, k_l)$$

írhatjuk, ahol $x_1, x_2, \dots, x_m$ valós számok, $k_1, k_2, \dots, k_l$ pedig egész számok. A G csoporton a Haar-mérték a tényezőként vett Haar-mértékek szorzata, vagyis $d\lambda^m \times ds_1 \times ds_2 \times \dots \times ds_l$, ahol $d\lambda$ a Lebesgue⁵-mérték $\frac{1}{2\pi}$ -szerese a $[0, 2\pi]$ intervallumon, ds_j pedig a számláló mérték $\frac{1}{n_j}$ -szerese a $\mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$ -n, mint n_j elemű halmazon. A továbbiakban legyen $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_l$, ami az F csoport elemszáma. Az $L^2(G)$ -beli $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvények belső szorzata

$$(8.10) \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2^m \pi^m n} \sum_{k_j=0}^{n_j-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{k_l=0}^{n_l-1} \int_{[0, 2\pi]^m} f(x, k) \overline{g(x, k)} d\lambda^m(x)$$

módon írható fel. Speciálisan

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2^m \pi^m n} \sum_{k_j=0}^{n_j-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{k_l=0}^{n_l-1} \int_{[0, 2\pi]^m} |f(x, k)|^2 d\lambda^m(x).$$



H. L. Lebesgue

Mindkét képletben láthatjuk, hogy az első, vektorváltozóban integrálátlagot, a másodikban pedig számtani átlagot számolunk, természetesen mindkét esetben változónként. A továbbiakban az F -en vett Haar-

⁵Henry Léon Lebesgue, francia matematikus (1875-1941)

integrálást, vagyis az iménti képletekben a belső összegzéseket egyszerűen $\sum_{k \in F}$ módon rövidíthetjük. A 2.2.1. és 7.1.4. tételek alapján a G csoport duálisa tehát

$$\widehat{G} = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_l\mathbb{Z},$$

melyen a G Haar-mértékének megfelelő mérték a fentiek alapján

$$(8.11) \quad dn^m \times ds_1 \times ds_2 \times \cdots \times ds_l,$$

hiszen, amint azt a 3.1. szakaszban láttuk, ezzel a választással tudjuk biztosítani az inverziós formula megszokott alakját. Az $L^2(G)$ -beli $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ függvény Fourier-transzformáltja $\hat{f}: \mathbb{Z}^m \times F \rightarrow \mathbb{C}$, mely az

$$(8.12) \quad \hat{f}(p, q) = \frac{1}{2^m \pi^m n} \sum_{k \in F} \int_{[0, 2\pi]^m} f(x, k) e^{-(x \cdot p + k \cdot q)} d\lambda^m(x)$$

formulával írható fel, ahol p a $\mathbb{Z}^m$, q az F tetszőleges eleme, $u \cdot v$ pedig a belső szorzat $\mathbb{R}^m$ -ben, illetve $\mathbb{R}^n$ -ben. A Plancherel-tétel a következő formában érvényes.

8.4.1. Tétel.

Legyen a G elemi kompakt Abel-csoport. A Fourier-transzformáció $L^2(G)$ -nek $L^2(\widehat{G})$ -re való izometrikus izomorfimusa, melyet a (8.12) formula ír le, inverzét pedig a következő képlet adja meg: ha $G = \mathbb{T}^m \times F$ a fenti alakú és f az $L^2(G)$ eleme, akkor minden $\mathbb{T}^m$ -beli x és F -beli k esetén

$$(8.13) \quad f(x, k) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^m} \sum_{q \in F} \hat{f}(p, q) e^{i(x \cdot p + k \cdot q)}.$$

Bizonyítás.

Mivel az $L^2(G)$ Hilbert-tér az $L^2(\mathbb{T})$ Hilbert-terek m példányának és az $L^2(F)$ Hilbert-ternek a direkt összege, az állítást elegendő a $G = F$ és a $G = \mathbb{T}$ esetben igazolnunk. A $G = F$ esetet a 3.1 szakaszban tárgyaltuk, a $G = \mathbb{T}$ esetet pedig a 8.3. szakaszban, s ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

A fenti formulában az egyenlőség természetesen az $L^2(G)$ -beli konvergencia szerint értendő. Megjegyezzük, hogy ez a tétel a Hilbert-terek elméletéből jól ismert Riesz-Fischer⁶ -tétel megfelelője. A $p \mapsto \hat{f}(p, q)$ minden rögzített F -beli q esetén egy $\mathbb{Z}^m$ elemeivel indexelt „sorozat”, amely a hagyományos értelemben vett Fourier-együtthatók általánosításának tekinthető. Figyelembe véve, hogy F elemei is n dimenziós, nem negatív egész komponensű vektorok, ez a „sorozat-vektor” l^2 -beli, abban az értelemben, hogy fennáll

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^m} \sum_{q \in F} |\hat{f}(p, q)|^2 < \infty.$$

Az ilyen tulajdonságú „sorozat-vektorok” alkotják az $L^2(\widehat{G})$ teret. Ha bármely $\mathbb{Z}^m$ -beli p és F -beli k, q , valamint valós x esetén

$$\chi_{p,q}(x, k) = e^{i(x \cdot p + k \cdot q)},$$

⁶Ernst Sigismund Fischer, osztrák matematikus (1875-1954)

akkor a $(\chi_{p,q})_{p \in \mathbb{Z}^m, q \in F}$ függvényrendszer a trigonometrikus rendszer megfelelője, s a korábbi eredmények alapján teljes ortonormált rendszer $L^2(G)$ -ben, amint az könnyen adódik a 6.4.4. Tételből, és abból, hogy ezek a függvények pontosan a direkt szorzat karakterei. Ezért a (8.13) inverziós formula az $L^2(G)$ -nek ebben az ortonormált bázisban való előállítására.

5. 8.5 Fourier-analízis kompakt Abel-csoportokon

Az előző szakasz legfontosabb eredményei tetszőleges kompakt Abel-csoportra is átvihetők. A kulcs a 6.4.4. Tétel. Az egyetlen nehézséget az okozza, hogy az általános kompakt Abel-csoportok szerkezete nem írható le „egyszerűbb” Abel-csoportok direkt szorzata segítségével. Bár kompakt Abel-csoport duális diszkrét, így a karakterekből álló $L^2(G)$ -beli teljes ortonormált rendszer ugyancsak „diszkrét” halmaz, de ha $L^2(G)$ nem szeparábilis, akkor ez a diszkrét halmaz nem megszámlálható, így nem rendezhető sorozatba, s a Fourier-transzformált sem sorozat, tehát nem világos, hogy milyen formában állhat fenn az inverziós formula megfelelője. Kiderül azonban, hogy mégis tudunk értelmet tulajdonítani a (8.13) inverziós formula jobboldalán álló összegnek.

Legyen X egy halmaz, H egy Hilbert-tér, h a H egy eleme, $\varphi: X \rightarrow H$ pedig egy függvény. Akkor mondjuk, hogy a $\sum_{x \in X} \varphi(x)$ sor konvergens és összege h , jelben

$$\sum_{x \in X} \varphi(x) = h,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $X_0 \subseteq X$ véges részhalmaz, hogy ha $X' \supseteq X_0$ véges részhalmaza X -nek, akkor

$$\|h - \sum_{x \in X'} \varphi(x)\| < \varepsilon.$$

Mint könnyen látható, az $X = \mathbb{N}$ esetben ez a fogalom éppen a sorok abszolút konvergenciájával egyenértékű. Megjegyezzük, hogy ez a sorösszegzés speciális esetként beilleszthető az általánosított sorozatok konvergenciájának elméletébe. Valóban, az X összes véges részhalmazai a tartalmazásra nézve egy I irányított halmazt alkotnak, melyen az a függvény, mely az I minden i eleméhez hozzárendeli a fenti sor i -beli x elemeihez tartozó $\varphi(x)$ értékek összegét, egy H -beli általánosított sorozat. A fent definiált határérték éppen ennek az általánosított sorozatnak a 4.2 szakaszban értelmezett határértéke. Ugyancsak könnyen látható, hogy ha a $\sum_{x \in X} \varphi(x)$ sor konvergens, akkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan X_0 véges részhalmaza X -nek, hogy ha X_1, X_2 az X -nek X_0 -t tartalmazó véges részhalmazai, akkor

$$\|\sum_{x \in X_1} \varphi(x) - \sum_{x \in X_2} \varphi(x)\| < \varepsilon.$$

Könnyen láthatjuk, hogy ilyenkor bármely n pozitív egész esetén a

$$(8.14) \quad \{x \in X : \|\varphi(x)\| \geq \frac{1}{n}\}$$

halmaz véges, így konvergens $\sum_{x \in X} \varphi(x)$ sor esetén a φ függvény tartója, vagyis mindazon X -beli x -ek halmaza, melyekre $\varphi(x) \neq 0$, megszámlálható. A Hilbert-terek elméletéből ismert elemi módszerekkel könnyen igazolhatjuk a következő tételt.

8.5.1. Tétel.

Legyen H Hilbert-tér, $\mathcal{E}$ teljes ortonormált halmaz H -ban. Ekkor érvényesek a következők.

1.

Bármely H -beli x esetén a $\sum_{e \in \mathcal{E}} \langle x, e \rangle e$ sor konvergens és összege x :

$$x = \sum_{e \in \mathcal{E}} \langle x, e \rangle e.$$

2.

Bármely H -beli x, y esetén a $\sum_{e \in \mathcal{E}} \langle x, e \rangle \overline{\langle y, e \rangle}$ sor konvergens és összege $\langle x, y \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{e \in \mathcal{E}} \langle x, e \rangle \overline{\langle y, e \rangle}.$$

3.

Bármely H -beli x esetén a $\sum_{e \in \mathcal{E}} |\langle x, e \rangle|^2$ sor konvergens és összege $\|x\|^2$:

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in \mathcal{E}} |\langle x, e \rangle|^2.$$

Legyen G kompakt Abel-csoport, $c : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ pedig egy függvény. Az imént mondottakat az $L^2(G)$ térre alkalmazva akkor mondjuk, hogy a $\sum_{\chi \in \widehat{G}} c(\chi) \chi$ sor $L^2(G)$ -ben konvergens és összege az $L^2(G)$ -beli $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, ha ez a fenti értelemben teljesül, azaz, bármely $\varepsilon > 0$ esetén van $\widehat{G}$ -nek olyan H_0 véges részhalmaza, hogy ha $H \supseteq H_0$ véges részhalmaz, akkor

$$\|f - \sum_{\chi \in H} c(\chi) \chi\| < \varepsilon.$$

Ekkor tehát az

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} c(\chi) \chi$$

jelölést fogjuk használni. Ha $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ tetszőleges $L^2(G)$ -beli függvény, akkor Fourier-transzformáltját a

$$(8.15) \quad \hat{f}(\chi) = \int f(x) \overline{\chi}(x)$$

módon értelmezzük, tetszőleges χ karakter esetén. Az integrálás természetesen a G kompakt Abel-csoport egyértelműen meghatározott Haar-mértéke szerint értendő. Tehát $\hat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ a G duális csoportján értelmezett függvény. Valójában az $\hat{f}$ függvény értékei nem mások, mint a hagyományos Fourier-együtthatók megfelelői: $\hat{f}(\chi)$ éppen az $L^2(G)$ Hilbert-tér karakterekből álló ortonormált bázisában az f elemnek a χ bázisvektor szerinti komponense. A következő tételek ennek az egyszerű észrevételnek alapján azonnal adódnak.

8.5.2. Tétel.

(Parseval-egyenlet) Legyen G kompakt Abel-csoport. Bármely $L^2(G)$ -beli f esetén fennáll

$$(8.16) \quad \|f\|^2 = \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2.$$

8.5.3. Tétel.

(Plancherel-tétel) Legyen G kompakt Abel-csoport. A Fourier-transzformáció $L^2(G)$ -nek $L^2(\hat{G})$ -ra való izometrikus izomorfizmusa, melynek inverze a következő inverziós formulával adható meg:

$$(8.17) \quad f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi.$$

Láthatjuk, hogy ez a tétel magában foglalja mind a véges, mind pedig az elemi kompakt Abel-csoportok esetében megismert hasonló eredményeket. Azt is láthatjuk, hogy kompakt Abel-csoportokon a Haar-mértékhez a duális csoport számláló mértéke lesz az a mérték, amely biztosítja az inverziós formula (8.17) formában való érvényességét. Ha a G csoporton a Haar-mérték valamilyen konstansszorosát választjuk, akkor a (8.17) formula fennállásához a $\hat{G}$ számláló mértékét is meg kell szorozni valamilyen alkalmas tényezővel.

6. 8.6 Integrálható függvények kompakt Abel-csoportokon

A Haar-mérték és a Haar-integrál létezése lehetővé teszi, hogy ne csak az L^2 -térbeli függvényekre, hanem tetszőleges integrálható függvényekre értelmezzük a Fourier-transzformációt. Sőt, a kiterjesztés a mérték- és integrálelméletből ismert Lebesgue-terek jelentős részére lehetséges, nem csupán kompakt Abel-csoportok esetén. Ha m jelöli a Haar-mértéket a G kompakt Abel-csoporton, akkor a megfelelő Lebesgue-féle $L^p(G)$ tér értelmezése $p \geq 1$ esetén a szokásos módon történik: az m mértékre nézve majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítva az $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ mérhető függvény akkor tartozik $L^p(G)$ -be, ha

$$\|f\|_p = \left[\int |f| dm \right]^{1/p} < +\infty.$$

Ismeretes, hogy ezzel a normával, valamint a pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással ellátva az $L^p(G)$ tér Banach-tér. Mindez a $p = +\infty$ esetre is kiterjeszthető, amennyiben ekkor $\|f\|_\infty$ az f mérhető függvény lényegében vett szuprémumát, vagyis az

$$(8.18) \quad \text{ess sup } |f| = \inf \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\}$$

bővített valós számot jelenti, $L^\infty(G)$ pedig a lényegében korlátos mérhető függvények terét, vagyis azon f -ek terét, melyek lényegében vett szuprémuma véges. Mivel kompakt G esetén az 1 függvény integrálható, a Hölder-egyenlőtlenség alapján $L^p(G) \subseteq L^1(G)$ teljesül minden $1 \leq p \leq +\infty$ esetén. Az is világos, hogy bármely χ karakter és $L^p(G)$ -beli f esetén $f \cdot \bar{\chi}$ is $L^p(G)$ -hez tartozik, ezért az f Fourier-transzformáltját a szokásos képlettel

$$\hat{f}(\chi) = \int f \cdot \bar{\chi} dm$$

értelmezhetjük, bármely χ karakter esetén. Az $L^1(G)$ téren a lineáris műveletek mellett még egy fontos művelet értelmezhető, mégpedig a 3.2. szakaszban a véges csoportokon bevezetett konvolúció megfelelője. Ezzel a későbbiekben foglalkozunk részletesen.

7. 8.7 Feladatok

1.

Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Mutassuk meg, hogy az X -en értelmezett kompakt tartójú mértékek $\mathcal{M}(X)$ terén a (8.1) formulával értelmezett $\|\mu\|$ függvény norma!

2.

Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Mutassuk meg, hogy az X -en értelmezett kompakt tartójú folytonos függvények $\mathcal{C}_c(X)$ terén a (4.5) formulával értelmezett $\|f\|$ függvény norma!

3.

Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Mutassuk meg, hogy az X -en értelmezett végtelenben eltűnő folytonos függvények $\mathcal{C}_0(X)$ tere a (4.5) normával Banach-tér!

4.

Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Mutassuk meg, hogy az X -en értelmezett, végtelenben eltűnő folytonos függvények $\mathcal{C}_0(X)$ terén a (8.2) formulával értelmezett $F_\mu(f)$ függvény korlátos lineáris funkcionál!

5.

Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Mutassuk meg, hogy az X -en értelmezett kompakt tartójú mértékek $\mathcal{M}(X)$ terén a $\mu \mapsto F_\mu$ leképezés izometrikus izomorfizmus!

6.

Igazoljuk a 8.1.4. Tételt!

7.

Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ Abel-csoportot a faktortopológiával ellátva $\mathbb{T}$ -vel topologikusan izomorf csoportot kapunk!

8.

Mutassuk meg, hogy a folytonos függvények sűrű halmazt alkotnak $L^2(\mathbb{T})$ -ben!

9.

Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ komplex tagú sor akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha a 8.5. szakaszban definált értelemben konvergens!

10.

Mutassuk meg, hogy ha az X halmazon értelmezett, Hilbert-térbeli értékű φ függvény esetén a $\sum_{x \in X} \varphi$ sor konvergens, akkor a (8.14) képletben szereplő halmaz megszámlálható!

11.

Bizonyítsuk be a 8.5.1. Tételt!

12.

Mutassuk meg, hogy ha X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, μ pedig komplex Borel-mérték X -en, akkor a (8.18) formulával értelmezett $\|f\|_\infty$ mennyiség norma $L^\infty(X)$ -en, mellyel az Banach-tér!

13.

Mutassuk meg, hogy ha G kompakt Abel-csoport, akkor bármely $1 \leq p \leq +\infty$ estén $L^p(G) \subseteq L^1(G)$ teljesül!

14.

Bizonyítsuk be a (11.5) egyenlőtlenséget!

9. fejezet - LOKÁLISAN KOMPAKT ABEL-CSOPORTOK DUALITÁSELMÉLETE

1. 9.1 Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoportok

Egy G lokálisan kompakt Abel-csoportot kompaktan generálnak mondunk, ha van az egységelemnek olyan kompakt lezártú környezete, melyet tartalmazó legszűkebb részcsoporthoz G . Ekkor azt mondjuk, hogy az említett környezet generálja G -t. Ha G kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoport, akkor - mint könnyen látható - van az egységelemnek olyan kompakt lezártú szimmetrikus környezete, mely generálja G -t.

9.1.1. Tétel.

Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoportban bármely elem által generált részcsoporthoz vagy diszkrét, vagy a lezártja kompakt.

Bizonyítás.

Legyen g a G tetszőleges eleme, s H a g által generált zárt részcsoporthoz. Tegyük fel, hogy H nem diszkrét. Ha U az egységelem szimmetrikus környezete H -ban, akkor bármely N természetes szám esetén van olyan $n > N$ természetes szám, hogy g^n az U -hoz tartozik. Ellenkező esetben ugyanis U -ba a g -nek csak véges sok hatványa esne bele, létezne tehát az e egységelemnek olyan környezete, mely g egyetlen zérustól különböző hatványát sem tartalmazná, így H diszkrét lenne.

Ha V a H nem üres, nyílt részhalmaza, akkor V tartalmazza a g valamely pozitív kitevőjű hatványát. Valóban, létezik olyan l egész szám, hogy g^l a V -hez tartozik, hiszen g hatványai sűrűk H -ban. Ekkor van az egységelemnek olyan U szimmetrikus környezete H -ban, hogy $g^l U \subseteq V$ és van olyan $N > |l|$ természetes szám, hogy g^N az U -hoz tartozik, ezért g^{l+N} a V -hez tartozik és $l + N > 0$.

Legyen W az egységelem kompakt lezártú szimmetrikus környezete H -ban. Ekkor tetszőleges H -beli x esetén valamely k pozitív egész mellett g^k az xW -hez tartozik, s így x a $g^k W$ -hez tartozik, tehát a $g^k W$ (k természetes szám) halmazok lefedik H -t, így W^d -t is. Ez utóbbi halmaz kompaktja miatt van olyan N pozitív egész, hogy $W^d \subseteq gW \cup \dots \cup g^N W$ teljesül. Ha x H -beli elem, akkor legyen $m(x)$ az a legkisebb pozitív egész, amelyre $g^{m(x)}$ az xW halmazhoz tartozik. Ekkor $x^{-1}g^{m(x)}$ a W -be tartozik, s így létezik olyan $0 < j \leq N$ egész szám, hogy $x^{-1}g^{m(x)}$ a $g^j W$ halmazhoz tartozik, azaz $g^{m(x)-j}$ az xW halmaz eleme. Tehát $m(x) - j \leq 0$, azaz $0 < m(x) \leq j \leq N$ és x beletartozik a $g^{m(x)}W$ halmazba. Ez azt jelenti, hogy $H \subseteq gW \cup \dots \cup g^N W$ teljesül, s mivel W^d kompakt, így H kompakt. $\square$

9.1.2. Tétel.

Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoportban van olyan végesen generált diszkrét részcsoporthoz, amely szerint vett faktorcsoporthoz kompakt.

Bizonyítás.

Legyen (U, τ) egységelem kompakt lezártú szimmetrikus környezet, mely generálja G -t. Mivel $U^2 \subseteq A_1U \subseteq AU$, így vannak olyan A -beli $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek, hogy $U^2 \subseteq AU$. Legyen az által generált részcsoport. Mivel $U^3 \subseteq AU^2 \subseteq A^2U = AU$,

s hasonlóan, $U^n \subseteq AU$, ezért $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n \subseteq AU$, azaz $G = AU$. Ha minden a_i által generált részcsoport lezártja kompakt, akkor G kompakt, s készen vagyunk. Az előző tétel szerint van tehát olyan a_i , mely diszkrét részcsoportot generál G -ben; legyen b_1 ilyen. Tegyük fel, hogy a $b_1, b_2, \dots, b_i$ elemeket már kiválasztottuk az $a_1, a_2, \dots, a_n$ közül úgy, hogy ezek egy N_i diszkrét részcsoportot generálnak G -ben. Megmutatjuk, hogy ha a G/N_i faktorcsoporthoz nem kompakt, akkor további fenti tulajdonságú b_{i+1} elem választható ki az $a_1, a_2, \dots, a_n$ közül. Ha $\Phi: G \rightarrow G/N_i$ a természetes homomorfizmus, akkor $G/N_i = \Phi(G) = \Phi(A)\Phi(U)$, s ha G/N_i nem kompakt, akkor a $\Phi(a_1), \Phi(a_2), \dots, \Phi(a_n)$ elemek valamelyike diszkrét részcsoportot generál G/N_i -ben; legyen $\Phi(a_j)$ ilyen és legyen $b_{i+1} = a_j$. Ekkor könnyű látni, hogy $b_1, b_2, \dots, b_i, b_{i+1}$ diszkrét részcsoportot generál G -ben. Mivel A véges, eljárásunk véges sok lépésben megszakad. $\square$

Ha G lokálisan kompakt Abel-csoport és H a G zárt részcsoportja, akkor a H annihilátora a $\widehat{G}$ -ben azon karakterek $A(\widehat{G}, H)$ halmaza, melyek H elemein 1 értéket vesznek fel.

9.1.3. Tétel.

Lokálisan kompakt Abel-csoport zárt részcsoportjának annihilátora zárt részcsoport.

Bizonyítás.

Világos, a kompakt-nyílt topológia definíciója alapján. $\square$

9.1.4. Tétel.

Legyen G diszkrét vagy kompakt Abel-csoport, H a G zárt részcsoportja. Ekkor

1.

$$(G/H)^{\sim} = A(\widehat{G}, H);$$

2.

$$A(G, A(\widehat{G}, H)) = H.$$

Bizonyítás.

Az 1. állítás bizonyítása: jelölje Φ a G -nek G/H -ra való természetes homomorfizmusát. Megmutatjuk, hogy a $\psi \mapsto \psi \circ \Phi$ leképezés topologikus izomorfizmusa $(G/H)^{\sim}$ -nak $A(\widehat{G}, H)$ -ra. Világos, hogy ha ψ karaktere G/H -nak, akkor $\psi \circ \Phi$ olyan karaktere G -nek, mely a H elemein 1 értéket vesz fel. Nyilván a $\psi \mapsto \psi \circ \Phi$ megfeleltetés homomorfizmus. Ha $\psi \circ \Phi$ az $A(\widehat{G}, H)$ egységeleme, akkor $\psi(\Phi(x)) = 1$ a G minden x eleme esetén, így ψ a $(G/H)^{\sim}$ egységeleme, tehát a $\psi \mapsto \psi \circ \Phi$ megfeleltetés izomorf leképezése $(G/H)^{\sim}$ -nak $A(\widehat{G}, H)$ -ba. Ha φ a G olyan karaktere, amely a H -n

azonosan 1 , akkor $\Phi(x) = \Phi(y)$ esetén $\Phi(xy^{-1}) = e$, így xy^{-1} a H -ba tartozik, tehát $\varphi(xy^{-1}) = 1$, azaz, $\varphi(x) = \varphi(y)$. Ezért ha ψ -t a $\psi(xH) = \varphi(x)$ összefüggéssel definiáljuk, akkor ψ a G/H karaktere és $\psi \circ \Phi = \varphi$ teljesül, azaz, a $\psi \mapsto \psi \circ \Phi$ leképezés szűrjektív, továbbá nyilván folytonos is. Ha G kompakt, akkor $\widehat{G}$ diszkrét, így $A(\widehat{G}, H)$ is, így az inverz nyilván folytonos, ha pedig G diszkrét, akkor $\widehat{G}$ kompakt, így $A(\widehat{G}, H)$ is, és kompakt Hausdorff-téren folytonos bijektív leképezés inverze folytonos, a 4.3.7. Tétel szerint.

A 2. állítás bizonyítása: világos, hogy $H \subseteq A(G, A(\widehat{G}, H))$, hiszen ha h a H tetszőleges eleme, akkor minden $A(\widehat{G}, H)$ -beli x esetén $h(x) = 1$, az annihilátor definíciója szerint. Tegyük fel, hogy x az $A(G, A(\widehat{G}, H))$ olyan eleme, mely nem tartozik H -ba. Ekkor van a G -nek olyan χ karaktere, melyre $\chi(x) \neq 1$ teljesül és χ azonosan 1 a H -n. Ezért χ az $A(\widehat{G}, H)$ -hoz tartozik, s így minden H -beli x esetén $\chi(x) = 1$ érvényes, ami ellentmondás. $\square$

2. 9.2 Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoportok approximációs tétele

9.2.1. Tétel.

Kompakt Abel-csoport egységelemének bármely környezete tartalmaz olyan zárt részcsoportot, amely szerint vett faktorcsoporthoz elemi csoport.

Bizonyítás.

Legyen U az egységelem környezete G -ben. Mivel $G = \widehat{\widehat{G}}$, ezért van olyan $\varepsilon > 0$ valós szám és vannak a $\widehat{G}$ -nek olyan $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ elemei, hogy azon G -beli x elemek halmaza, melyekre $|\chi_i(x) - 1| < \varepsilon$ teljesül $i = 1, 2, \dots, n$ mellett, az U -nak részhalmaza. Legyen H a $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ elemek által generált részcsoport $\widehat{G}$ -ben, ekkor azon G -beli x elemek N zárt részcsoportja, melyek H elemein 1 értéket vesznek fel, tehát $A(G, H)$, része U -nak. Továbbá, $H = A(\widehat{G}, N) = (G/N)^\wedge$ végesen generált, így $(G/N)^\wedge = \mathbb{Z}^k \times F$ teljesül valamely k nem negatív egész számmal és F véges Abel-csoporttal. Ezért

$$G/N = (G/N)^\wedge = (\mathbb{Z}^k \times F)^\wedge = \mathbb{T}^k \times F$$

elemi csoport. $\square$

A következő fontos tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány segédtétele.

9.2.1. Segédétel.

Legyen G kommutatív topologikus csoport e egységelemmel, H_1, H_2 pedig olyan részcsoportjai, melyekre $H_1 \cdot H_2 = G$ és $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ teljesül. Ha az e bármely H_1 -beli U_1 és H_2 -beli U_2 környezetei esetén $U_1 \cdot U_2$ -nek e belső pontja, akkor G topologikusan izomorf $H_1 \times H_2$ -vel.

Megjegyezzük, hogy U_1 , illetve U_2 a H_1 , illetve a H_2 alterek topológiájában környezetei az egységelemnek.

Bizonyítás.

A feltételekből következik, hogy G algebrailag izomorf H_1 és H_2 direkt szorzatával: a G minden eleme (egyértelműen) felírható $H_1 \times H_2$ alakban, ahol $H_1 \times H_2$ pedig a H_1 és H_2 elemeinek párokból áll. A leképezés szürjektív izomorfizmus. E leképezés folytonossága a szorzás folytonosságából adódik, míg az inverz folytonossága éppen a tételben szereplő feltételből. $\square$

9.2.2. Segédteétel.

Legyen G kommutatív topologikus csoport e egységelemmel, H egy részcsoportja, $\varphi: G \rightarrow H$ pedig egy folytonos szürjektív homomorfizmus, mely H -n az identikus leképezés. Ekkor H zárt, G topologikusan izomorf $H \times \varphi^{-1}(e)$ -vel és $\varphi^{-1}(e)$ topologikusan izomorf G/H -val.

Bizonyítás.

Legyen $L = \varphi^{-1}(e)$, ekkor L zárt részcsoport. Mivel

$$\varphi(\varphi(x^{-1})x) = \varphi(\varphi(x^{-1}))\varphi(x) = \varphi(x^{-1}\varphi(x)) = e,$$

ezért $\varphi(x^{-1})x$ az L -hez tartozik, $x = \varphi(x)\varphi(x^{-1})x$ pedig $H \cdot L$ -hoz. Ezért $G = H \cdot L$. Mivel φ az identikus leképezés H -n, ezért nyilván $H \cap L = \{e\}$. Legyenek U_1, U_2 tetszőleges környezetei e -nek G -ben, V és W pedig olyan szimmetrikus környezetei e -nek G -ben, hogy $V^2 \subseteq U_1 \cap U_2$, $W \subseteq V$ és $\varphi(W) \subseteq H \cap V$. Ekkor könnyen látható, hogy $W \subseteq (U_1 \cap H) \cdot (U_2 \cap L)$. Így az előző 9.2.1. Segédteétel alapján G topologikusan izomorf $H \times L$ -el, amiből az is következik, hogy φ^{-1} topologikusan izomorf G/H -val. $\square$

9.2.3. Segédteétel.

Legyen G kommutatív topologikus csoport, H pedig egy nyílt, osztható részcsoportja. Ekkor G topologikusan izomorf $H \times G/H$ -val.

Bizonyítás.

A H identikus leképezése a 6.3.1. Tétel alapján kiterjeszthető G -nek H -ra való φ homomorfizmusává. Mivel φ folytonos a H nyílt részcsoporton, így folytonos G -n, és alkalmazhatjuk az előző segédteételt. $\square$

9.2.2. Tétel.

Ha a G lokálisan kompakt Abel-csoportnak van olyan diszkrét, végesen generált részcsoportja, amely szerint vett faktorcsoporthoz kompakt elemi csoport, akkor G elemi csoport.

Bizonyítás.

Legyen N a G olyan diszkrét, végesen generált részcsoportja, amely szerint vett faktorcsoporthoz kompakt elemi csoport: $G/N = \mathbb{T}^r \times F$, ahol r nem negatív egész szám, F pedig véges Abel-csoport.

Először tegyük fel, hogy G összefüggő, ekkor G/N is összefüggő, így $G/N = \mathbb{T}^r = \mathbb{R}^r / \mathbb{Z}^r$. Legyen ψ az $\mathbb{R}^r$ -nek $\mathbb{T}^r$ -re, φ pedig a G -nek $\mathbb{T}^r$ -re való természetes homomorfizmusa. Mivel $\mathbb{Z}^r$ és N az $\mathbb{R}^r$ -nek, illetve G -nek diszkrét részcsoportja, van olyan U környezete a 0 -nak $\mathbb{R}^r$ -ben, s olyan V környezete az

egységelemnek G -ben, hogy ψ kölcsönösen egyértelmű U -n, φ kölcsönösen egyértelmű V -n és $\varphi(v) = \psi(U)$. Valóban, legyen U_0 a 0 -nak $\mathbb{R}^r$ -ben és V_0 az egységelemnek G -ben olyan szimmetrikus környezete, hogy

$$U_0^2 \cap \mathbb{Z}^r = \{0\}, V_0^2 \cap N = \{e\},$$

és $\varphi(V_0) \subseteq \psi(U_0)$. Ekkor legyen $U \subseteq U_0 \cap \psi^{-1}(\varphi(V_0))$ és $V = V_0 \cap \varphi^{-1}(\psi(U))$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $U = \{x \in \mathbb{R}^r : \|x\| < \alpha\}$. Legyen minden U -beli x esetén $\Phi(x)$ az az egyértelműen meghatározott V -beli elem, amelyre $\varphi(\Phi(x)) = \psi(x)$ teljesül, ekkor tehát $\Phi = \varphi^{-1} \circ \psi$. Ekkor Φ az U -nak V -re való folytonos lokális izomorfizmusa, azaz ha x, y és $x + y$ az U -hoz tartozik, akkor $\Phi(x + y) = \Phi(x)\Phi(y)$, továbbá $\Phi(-x) = \Phi(x)^{-1}$. A Φ -t kiterjesztjük $\mathbb{R}^r$ -re a következő módon: ha x az $\mathbb{R}^r$ eleme, akkor valamely n pozitív egész mellett $y = \frac{x}{n}$ az U -ba esik és ekkor legyen $\Phi(x) = \Phi(y)^n$. Könnyű látni, hogy ezzel egyértelműen definiáljuk Φ -t az x pontban és a kiterjesztett Φ az $\mathbb{R}^r$ folytonos és nyílt homomorfizmusa $\mathbb{R}^r$ -nek G -be. Mivel $\Phi(\mathbb{R}^r)$ tartalmazza a G egységelemének valamely környezetét és G összefüggő, így $\Phi(\mathbb{R}^r) = G$. Mivel U generálja $\mathbb{R}^r$ -t és $\varphi \circ \Phi(x) = \psi(x)$ az U -beli x elemekre, ezért $\varphi \circ \Phi = \psi$. Így a Φ homomorfizmus H magja része a ψ homomorfizmus $\mathbb{Z}^r$ magjának. Ha $H = \{0\}$, akkor G topologikusan izomorf $\mathbb{R}^r$ -el. Ha $H \neq \{0\}$, akkor van a $\mathbb{Z}^r$ -ben olyan $e_1, e_2, \dots, e_r$ bázis és vannak olyan $d_1, d_2, \dots, d_k$ ($1 \leq k \leq r$) pozitív egészek, hogy a $d_1 e_1, d_2 e_2, \dots, d_k e_k$ elemek generálják H -t. Az $e_1, e_2, \dots, e_r$ nyilván bázisa $\mathbb{R}^r$ -nek, így minden H szerinti mellékosztály tartalmaz olyan $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_r e_r$ alakú elemet, amelynél

$$0 \leq x_1 < d_1, 0 \leq x_2 < d_2, \dots, 0 \leq x_k < d_k,$$

és $x_{k+1}, \dots, x_r$ tetszőleges valós számok, továbbá a különböző ilyen elemek különböző mellékosztályokban fekszenek, tehát $\mathbb{R}^r/H$ topologikusan izomorf $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{r-k}$ -val, így

$$G = \mathbb{R}^r / \text{Ker } \Phi = \mathbb{R}^r / H = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{r-k}.$$

Legyen ezek után G tetszőleges csoport, mely teljesíti a tétel feltételeit, amelyre tehát $G/N = \mathbb{T}^r \times F$, ahol N diszkrét és végesen generált részcsoportja G -nek, r nem negatív egész és F véges Abel-csoport. Legyen φ a G -nek G/N -re való természetes homomorfizmusa, π pedig a $\mathbb{T}^r \times F$ -nek a $\mathbb{T}^r$ -re való projekciója. Ekkor $\pi \circ \varphi$ nyílt és folytonos homomorfizmusa G -nek $\mathbb{T}^r$ -re, melynek M magja véges számú N szerinti mellékosztály egyesítése:

$$M = N \cup x_1 N \cup \dots \cup x_l N.$$

Mivel N diszkrét, így zárt, tehát minden $x_j N$ zárt, s mivel ezek $x_j \neq e$ esetén nem tartalmazzák az egységelemet, így M -ben N az egységelemnek környezete, tehát nyílt is és zárt is, vagyis M diszkrét és végesen generált részcsoportja G -nek. Másrészt, $G/M = \mathbb{T}^r$. Ha $r = 0$, akkor $M = G$, így G végesen generált, tehát $G = \mathbb{Z}^k \times F$, valamely k nem negatív egész és F véges Abel-csoporttal. Legyen $r > 0$. Mivel M diszkrét, a $\pi \circ \varphi$ homomorfizmus kölcsönösen egyértelmű, s így homeomorfizmus a G egységelemének valamely U környezetén. Mivel $\mathbb{T}^r$ lokálisan összefüggő, feltehetjük, hogy U összefüggő és szimmetrikus. Ekkor U^n összefüggő (n természetes szám), így $\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ a G összefüggő és nyílt részcsoportja, mely nyilván zárt is, ezért a G egységelemének C komponensével egyenlő. Mivel $\mathbb{T}^r$ összefüggő, így $\pi \circ \varphi(U)$ generálja $\mathbb{T}^r$ -t, ezért

$$\mathbb{T}^r = \pi \circ \varphi(C) = \pi \circ \varphi(G),$$

és így $T^* = C/C \cap M$. Mivel C összefüggő és $C \cap M$ diszkrét és végesen generált részcsoporthoz a tétel első részében bizonyítottak alapján elemi összefüggő csoport, azaz $\pi \circ \varphi(C) = \pi \circ \varphi(C)$ teljesül $G = CM$ nem negatív egész esetén. Mivel $\pi \circ \varphi(C) = \pi \circ \varphi(C)$, így . A homomorfia-tétel szerint

$$G/C = CM/C = M/M \cap C.$$

Itt valójában nem egyenlőségről, hanem izomorfizmusról van szó, de ezek az izomorfizmusok egyben topologikus izomorfizmusok, hiszen a szereplő csoportok diszkrét, így azonosnak tekinthetjük őket. Következésképpen G/C végesen generált, tehát $G/C = \mathbb{Z}^l \times F$ teljesül valamely l nem negatív egész számmal és F véges Abel-csoporttal. Mivel C nyílt és osztható, a 9.2.3. Segéd-tétel szerint G topologikusan izomorf $C \times (G/C)$ -vel, s a tételt bebizonyítottuk. $\square$

9.2.3. Tétel.

(Approximációs tétel) Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoport egységelemének bármely környezete tartalmaz olyan kompakt részcsoporthoz, amely szerint vett faktorcsoporthoz elemi csoport.

Bizonyítás.

A 9.1.2. Tétel szerint a G kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoportban van olyan végesen generált diszkrét N részcsoporthoz, hogy a $G^* = G/N$ faktorcsoporthoz kompakt. Jelölje f a G -nek G/N -re való természetes homomorfizmusát. Legyen V az e egységelem tetszőleges környezete G -ben, s legyen $W \subseteq V$ az egységelem olyan szimmetrikus környezete, melynek lezártja kompakt és $W^3 \cap N = \{e\}$. Az előző tétel szerint a G^* -nak létezik olyan $H^* \subseteq f(W)$ zárt részcsoporthoz, hogy G^*/H^* elemi csoport. Ekkor legyen $H' = f^{-1}(H^*)$ és $H = H' \cap W$. Megjegyezzük, hogy f homeomorfizmus W^d -nek $f(W^d)$ -ra, s így homeomorfizmus H -nak H^* -ra. Ezért H kompakt. Megmutatjuk, hogy $HH^{-1} \subseteq H$, azaz H részcsoporthoz. Valóban, ha $x, y \in H$ -beli elemek, akkor xy^{-1} a H' -höz tartozik és létezik olyan $z \in H$ -beli, hogy $f(z) = f(xy^{-1})$. Ezért $xy^{-1}z^{-1}$ az N -hez és a W -hez tartozik, tehát $xy^{-1} = z \in H$ -nak eleme. Most megmutatjuk, hogy $H' = HN$. Legyen z a H' tetszőleges eleme, ekkor van olyan $x \in H$ -beli, hogy $f(x) = f(z)$, így $y = zx^{-1}$ az N -nek eleme. Tehát $H' = HN$. Mivel $H \subseteq W$, ezért H és N közös eleme csak az egységelem. A G/H faktorcsoporthoz az N természetes képe legyen $\tilde{N}$. A bizonyítottak alapján $\tilde{N}$ izomorf N -nel, azaz, végesen generált diszkrét csoport, másrészt a G/H -nak $\tilde{N}$ szerint vett faktorcsoporthoz izomorf G/H' -vel, hiszen

$$(G/H) / \tilde{N} = (G/H) / N = (G/H) / (HN/H) = G/HN = G/H',$$

azaz, $(G/H) / \tilde{N}$ izomorf G^*/H^* -al, ami kompakt elemi csoport. Ezért G/H elemi csoport. $\square$

3. 9.3 Lokálisan kompakt Abel-csoportok dualitáselmélete

9.3.1. Tétel.

(Pontrjagin) Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoport topologikusan izomorf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k \times K$ -vel, ahol n, k nem negatív egészek, K pedig kompakt Abel-csoport.

Bizonyítás.

A 9.2.3. Tétel alapján a G -nek van olyan H kompakt részcsoportja, amely szerint vett faktorcsoporthoz elemi csoport, azaz

$$G/H = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k \times F,$$

ahol F véges Abel-csoport, n, k pedig nem negatív egészek. Legyen φ a G -nek G/H -ra való természetes homomorfizmusa, és legyen $K = \varphi^{-1}(F)$. Ekkor K a G -nek kompakt részcsoportja, valójában, mint azt könnyű látni, a G legbővebb kompakt részcsoportja. A homomorfia-tétel szerint

$$G/K = (G/H) / (K/H) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k \times F / F = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k.$$

A 4.1.2. Zorn-lemma alapján következik, hogy G -nek van olyan minimális zárt L részcsoportja, melyre $G = LK$. Ekkor azt kapjuk, hogy $L \cap K = \{e\}$, így G topologikusan izomorf $L \times K$ -vel, valamint L topologikusan izomorf $G/K = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k$ -vel. Tehát

$$G = L \times K = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k \times K.$$

□

9.3.2. Tétel.

Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoport természetes leképezése topologikus izomorfizmus a csoport második duálisára.

Bizonyítás.

Világos. □

9.3.3. Tétel.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport és legyen H a G nyílt részcsoportja. Ekkor az a leképezés, amely G minden karakteréhez annak H -ra való szűkítését rendeli hozzá, a $\widehat{G}$ -nek $\widehat{H}$ -ra való nyílt folytonos homomorfizmusa, melynek magja H annihilátora. Ezért H duális topologikusan izomorf G duálisának H annihilátora szerint vett faktorcsoporthoz.

Bizonyítás.

Világos, hogy az a leképezés, amely G minden karakteréhez annak H -ra való szűkítését rendeli hozzá, homomorfizmusa a $\widehat{G}$ csoportnak a $\widehat{H}$ csoportba, s mivel nyílt részcsoport minden karaktere kiterjeszthető az egész csoport karakterévé, így ez a leképezés szürjektív. A szóbanforgó leképezés folytonossága és nyíltsága a topológiák definíciójának egyszerű következménye. □

9.3.4. Tétel.

(Pontrjagin) Lokálisan kompakt Abel-csoport természetes leképezése topologikus izomorfizmus a csoport második duálisára.

Bizonyítás.

Legyen H a G kompaktan generált nyílt részcsoportja és jelölje $\Phi(H)$ természetes leképezését második duálisába. Nyilván, minden $f \in A(\widehat{G}, A(\widehat{G}, H))$ -beli esetén f annihilátorra, H -ba. Megmutatjuk, hogy minden f eleme H alakú, valamilyen $f(x_1) = f(x_2)$ elemmel. Ha $\psi \in H$ olyan karakterei, melyek H -n egyenlők, akkor χ legyen a karaktere, ekkor az előző tétel szerint a valamilyen karakterének H -ra való szűkítése. Legyen H . Az előbbiek szerint $\Phi(H)$ a definíció korrekt, választásától függetlenül, és a duálisát képezi H -be. Nyilván homomorfizmus, mely folytonos is, hiszen az előző tétel szerint a karakterekhez H -ra való szűkítésüket rendelő leképezés nyílt. Tehát a karaktere, de $\psi(x)$ H -ra érvényes a dualitási tétel 9.3.2. szakaszban megfogalmazott változata, így $f(\psi) = \psi(x) = \chi(x)$ érvényes valamilyen H -beli χ elemmel, azaz H $A(\widehat{G}, H)$ teljesül minden H -beli f -re és minden H -beli χ -re. Tehát $\Phi(H) = A(\widehat{G}, A(\widehat{G}, H))$ az G/H annihilátorára képezi nyilván izomorf módon. Mivel nyílt, diszkrét, s mivel G/H duálisa $A(\widehat{G}, H)$, így $\Phi(H)$ kompakt. Amint az könnyen látható, kompakt részcsoport annihilátora mindig nyílt, így H $\Phi(H)$ nyílt, ezért $\Phi(H)$ nyílt és folytonos, tehát topologikus izomorfizmusa H -nak H -ra, s ezért H -nek H -re.

Még azt kell igazolni, hogy $\Phi(G) = \widehat{G}$. Megmutatjuk, hogy bármely $\widehat{G}$ -beli f esetén van a G -nek olyan H kompaktan generált nyílt részcsoportja, hogy f a $\Phi(H)$ -hoz tartozik. Legyen $U(F, \varepsilon)$ a $\widehat{G}$ egységelemének olyan környezete, hogy $|f(\chi) - 1| < \sqrt{3}$, ha χ az $U(F, \varepsilon)$ -hoz tartozik. Legyen U a G egységelemének tetszőleges szimmetrikus, kompakt lezárású környezete és jelölje H_1 az U által generált részcsoportot. Ekkor H_1 nyílt és kompaktan generált részcsoport, így G/H_1 diszkrét. Legyen a ρ a $(G/H_1)^\wedge$ csoport topologikus izomorfizmusa $A(\widehat{G}, H_1)$ -re a következő összefüggéssel definiálva:

$$\rho(\psi) = \psi \circ \varphi, (\psi \in (G/H_1)^\wedge),$$

ahol φ a G -nek G/H_1 -re való természetes homomorfizmusa. Mivel

$$U(F, \varepsilon) \cap A(\widehat{G}, H_1)$$

az egységelem környezete $A(\widehat{G}, H_1)$ -ben, ezért

$$\rho^{-1}(U(F, \varepsilon) \cap A(\widehat{G}, H_1))$$

az egységelem környezete $(G/H_1)^\wedge$ -ben, így létezik G/H_1 -ben olyan kompakt, azaz, véges $x_1 H, x_2 H, \dots, x_n H$ részhalmaz, amely által generált C részcsoportra fennáll

$$A((G/H_1)^\wedge, C) \subseteq \rho^{-1}(U(F, \varepsilon) \cap A(\widehat{G}, H_1)).$$

Legyen most H a G -nek olyan nyílt, kompaktan generált részcsoportja, mely tartalmazza az U lezárását és az $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemeket. Ha χ az $A(\widehat{G}, H)$ eleme, akkor χ a H_1 elemein 1 értéket vesz fel és $\chi(x_j) = 1$ minden $j = 1, 2, \dots, n$ -re. Ezért χ az $A(\widehat{G}, H_1)$ -hez tartozik, és $\rho^{-1}(\chi)$ az $A((G/H_1)^\wedge, C)$ -nek eleme. Így χ az $U(F, \varepsilon)$ -hoz tartozik, tehát

$$|f(\chi) - 1| < \sqrt{3}.$$

Következésképpen, $|f(\chi) - 1| < \sqrt{3}$ teljesül minden $\chi \in A(\widehat{G}, H)$ esetén, s mivel $A(\widehat{G}, H)$ kompakt, így $\Phi(H)$ érvényes minden $\chi \in A(\widehat{G}, H)$ mellett. Ezért az χ -nek eleme, így $\Phi(H)$ -nak is. $\square$

4. 9.4 Feladatok

1.

Bizonyítsuk be, hogy kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoportot az egységelem valamely kompakt lezártú szimmetrikus környezete generálja!

2.

Bizonyítsuk be, hogy ha egy lokálisan kompakt Abel-csoport valamely zárt részcsoportja esetén van az egységelemnek olyan környezete, mely nem tartalmazza a részcsoport egyetlen egységelemtől különböző elemét sem, akkor a részcsoport diszkrét!

3.

Egy lokálisan kompakt Abel-csoport valamely részhalmazának annihilátora alatt a duális csoport mindazon elemeinek halmazát értjük, amelyek a részhalmaz elemein 1 értéket vesznek fel. Bizonyítsuk be, hogy bármely nem üres részhalmaz annihilátora zárt részcsoport!

4.

Bizonyítsuk be, hogy ha U egy lokálisan kompakt Abel-csoport egységelemének szimmetrikus nyílt környezete, akkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} U^n$ nyílt részcsoport!

5.

Bizonyítsuk be, hogy ha U egy lokálisan kompakt Abel-csoport egységelemének szimmetrikus, nyílt, összefüggő környezete, akkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} U^n$ az egységelem komponense!

10. fejezet - HAAR-INTEGRÁL LOKÁLISAN KOMPAKT ABEL- CSOPORTOKON

1. 10.1 A Haar-mérték és a Haar-integrál

A 8. Fejezetben láttuk, hogy a Haar-mérték és a Haar-integrál kompakt Abel-csoportokon a Fourier-analízis és az absztrakt harmonikus analízis alapvető eszköze. Az előző fejezetben a Pontrjagin-féle dualitástételt kiterjesztettük tetszőleges lokálisan kompakt Abel-csoportokra, s célunk az, hogy a Fourier-transzformáció elméletének legfontosabb eredményeit is átültessük erre az általánosabb esetre. Ehhez szükségünk van a Haar-mérték megfelelőjére nem kompakt lokálisan kompakt Abel-csoportokon. Kézenfekvőnek látszik annak vizsgálata, hogy létezik-e minden lokálisan kompakt Abel-csoporton olyan mérték, amely a 8.1.4. Tételben felsorolt tulajdonságokkal rendelkezik. Kiderül, hogy ez nem kompakt esetben csak akkor lehetséges, ha az első tulajdonságot elvetjük. Így a következő definíciókat fogalmazzuk meg.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. A G -n adott nem nulla Radon-mértéket Haar-mértéknek nevezzük, ha eltolásinvariáns: minden B Borel-halmaz és G -beli g elem esetén $\mu(g \cdot B) = \mu(B)$.

Világos, hogy ha G kompakt, akkor pozitív konstans szorzótól egyetlen ilyen mérték létezik G -n, s az pontosan a 8. Fejezetben tárgyalt Haar-mérték valamely pozitív számszorosa. Az is világos, hogy minden diszkrét Abel-csoporton létezik ilyen Haar-mérték, hiszen a számláló mérték bármely pozitív számszorosa rendelkezik a felsorolt tulajdonságokkal. Ugyanakkor kompakt Abel-csoportokon azt láttuk, hogy a Haar-mérték létezése egyenértékű a folytonos függvények terén egy olyan pozitív lineáris funkcionál létezésével, amely eltolásinvariáns. Lokálisan kompakt Hausdorff-tereken a 8.1.1. Riesz-féle reprezentációs tétel létesít kapcsolatot mértékek és lineáris funkcionálok között. Ez a megfontolás a következő definícióhoz vezet.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. A $C_0(G)$ tér egy F nem azonosan nulla, pozitív lineáris funkcionálját Haar-integrálnak nevezzük G -n, ha bármely $C_0(G)$ -beli f és G -beli g esetén

$$F(f) = F(\tau_g f)$$

teljesül. Érvényes a következő tétel.

10.1.1. Tétel.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. Ha μ Haar-mérték G -n, akkor a $C_0(G)$ -beli f függvényre

$$(10.1) \quad F(f) = \int f d\mu$$

definícióval értelmezett F Haar-integrál G -n. Megfordítva, ha F Haar-integrál G -n, akkor a 8.1.1 tétel alapján egyértelműen hozzárendelt olyan μ mérték, melyre $F = F_\mu$ teljesül, Haar-mérték G -n.

A 9.3. szakaszban nyert eredmények alapján a következő tételt kapjuk.

10.1.2. Tétel.

Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoporton konstans szorzótól eltekintve egyértelműen létezik Haar-integrál.

Bizonyítás.

Figyelembe véve a kompaktan generált lokálisan kompakt csoportok 9.3.1. Tételben ismertetett előállítását, s azt a nyilvánvaló tény, hogy az ott szereplő direkt tényezők mindegyikére igaz a tétel állítása, a direkt tényezőkön adott Haar-integrálok szorzata éppen a keresett Haar-integrál. $\square$

Ebből a tételből tehát tetszőleges kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoporton kapunk Haar-mértéket, konstans szorzótól eltekintve egyértelműen. Tetszőleges lokálisan kompakt Abel-csoportokon Haar-mérték létezését a következő szakaszban bizonyítjuk.

2. 10.2 A Haar-mérték létezése lokálisan kompakt Abel-csoportokon

Szükségünk lesz a következő, technikai jellegű segédtetelekre.

10.2.1. Segédétel.

Legyen G csoport, A, B, C pedig a G tetszőleges részhalmazai. Ekkor

$$(10.2) \quad (AB) \cap C \neq \emptyset \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad B \cap (A^{-1}C) \neq \emptyset.$$

Bizonyítás.

Az $(AB) \cap C$ halmaz akkor és csak akkor nem üres, ha

$$e \in (AB)^{-1}C = B^{-1}(A^{-1}C),$$

ami akkor és csak akkor teljesül, ha $B \cap (A^{-1}C)$ nem üres. $\square$

10.2.2. Segédétel.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport, U pedig az egységelem szimmetrikus környezete. Ekkor van olyan S részhalmaza G -nek, hogy bármely G -beli a elem esetén az aU^2 halmaz az S -nek legalább egy, az aU halmaz pedig az S -nek legfeljebb egy elemét tartalmazza.

Bizonyítás.

Jelölje $\mathcal{K}$ a G mindazon T részhalmazainak családját, melyekre

$$q \notin pU^2$$

teljesül tetszőleges $p \neq q$ elemekre a T -ből. Megjegyezzük, hogy ilyenkor p sem tartozhat qU^2 -hez. Valóban, ha $p = qu_1u_2$ teljesülne valamely u_1, u_2 elemekre az U halmazból, akkor $q = pu_2^{-1}u_1^{-1}$, ami az U szimmetriája miatt pU^2 eleme. Nyilvánvaló, hogy G minden legfeljebb egyelemű részhalmaza $\mathcal{K}$ -hoz tartozik, s könnyű látni, hogy $\mathcal{K}$ teljesíti a 4.1.2. Zorn-lemma feltételeit, ezért van S maximális eleme. Legyen a a G tetszőleges eleme, és tegyük fel, hogy aU^2 nem tartalmaz S -beli elemet, vagyis

$$S \cap aU^2 = \emptyset.$$

Most alkalmazzuk a 10.2.1. Tételt $A = U^2$, $B = \{a\}$ és $C = S$ választással, ekkor, az U szimmetriája alapján

$$\{a\} \cap U^2 S = \emptyset,$$

következik, vagyis a nem tartozik az $U^2 S$ halmazhoz, s így a egyetlen S -beli s esetén sem tartozik az sU^2 halmazhoz. A fentiek alapján ez azt jelenti, hogy s nem tartozik az aU^2 halmazhoz, tehát $S \cup \{a\}$ a $\mathcal{K}$ -hoz tartozik, ami ellentmondás, hiszen szigorúan bővebb S -nél. Ezzel megmutattuk, hogy bármely G -beli a esetén az aU^2 tartalmazza S -nek legalább egy elemét. Most azt tegyük fel, hogy vannak S -nek olyan $s_1 \neq s_2$ elemei, hogy mindkettő az aU halmazhoz tartozik. Ekkor $\{s_1\} \cap (aU)$ nem üres, és alkalmazhatjuk a 10.2.1. Tételt, ezúttal az $A = A^{-1} = U$, $B = \{s_1\}$ és $C = \{a\}$ választással. Azt kapjuk, hogy $(s_1 U) \cap \{a\}$ nem üres, ezért a az $s_1 U$ -ban van, a^{-1} pedig $s_1^{-1} U$ -ban. Hasonlóan kapjuk, hogy a az $s_2 U$ -hoz tartozik. Ebből az adódik, hogy e az $s_1^{-1} s_2 U^2$ halmazban van, ami azt jelenti, hogy az $s_1^{-1} s_2 U^2$ halmaz nem üres. Most a 10.2.1. Tételt $A = \{s_1\}$, $B = \{e\}$ $C = s_2 U^2$ választással alkalmazva az adódik, hogy s_1 az $s_2 U^2$ halmazhoz tartozik, ami ellentmond az S definíciójának. Így az aU halmaz az S -nek legfeljebb egy elemét tartalmazza, s ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

10.2.1. Tétel.

Minden lokálisan kompakt Abel-csoporton létezik Haar-integrál.

Bizonyítás.

A bizonyítás az 5.2.1. Markov-Kakutani-féle fixpont-tételen alapul. Legyen adott a G lokálisan kompakt Abel-csoport. Jelölje $\mathcal{C}_c(G)^*$ a $\mathcal{C}_c(G)$ duális terét a gyenge*-topológiával ellátva. Bármely G -beli a esetén csakúgy, mint korábban, $T_a : \mathcal{C}_c(G)^* \rightarrow \mathcal{C}_c(G)^*$ jelöli a

$$T_a \Lambda(f) = \Lambda(\tau_a f)$$

módon értelmezett leképezést, tetszőleges $\mathcal{C}_c(K)$ -beli f mellett. Ekkor minden T_a folytonos lineáris operátora a $\mathcal{C}_c(G)^*$ lokálisan konvex topologikus vektortérnek. A T_a operátorok nyilván felcserélhetők. A tétel bizonyításához meg kell mutatnunk, hogy létezik olyan nem azonosan nulla, pozitív lineáris funkcionál $\mathcal{C}_c(G)$ -n, amelyet minden T_a operátor fixen hagy. Ehhez elegendő megadnunk $\mathcal{C}_c(G)^*$ -ban egy olyan nem üres, kompakt, konvex részhalmazt, melyet az összes T_a operátor önmagába képez, ekkor ugyanis állításunk a Markov-Kakutani-féle fixpont-tételből következik. Mindenekelőtt rögzítsünk a G egységelemének egy kompakt, szimmetrikus környezetét, legyen ez U . Legyen C mindazon Λ pozitív lineáris funkcionálok halmaza, melyek rendelkeznek a következő két tulajdonsággal:

1.

$\Lambda(f) \leq 1$, hacsak f a $\mathcal{C}_c(G)$ olyan eleme, melyre $0 \leq f \leq 1$, valamint f tartója benne van az aU halmazban a G valamely a eleme esetén;

2.

$\Lambda(f) \geq 1$, hacsak f a $\mathcal{C}_c(G)$ olyan eleme, melyre $0 \leq f$, valamint $f = 1$ az aU^2 halmazon a G valamely a eleme esetén.

Világos, hogy C a $\mathcal{C}_c(G)^*$ konvex, zárt részhalmaza. A 4.5.1. egységfelbontási tétel alapján látjuk, hogy $\mathcal{C}_c(G)$ minden nem negatív eleme véges sok olyan nem negatív folytonos függvény összege, melyek mindegyikének tartója beleesik az aU halmazba valamely G -beli a -val. Így a C definíciójában szereplő első feltételből következik, hogy bármely $\mathcal{C}_c(G)$ -

beli f függvény mellett a $\{\Lambda(f) : \Lambda \in \mathcal{C}\}$ halmaz korlátos. Ezért, a Tyihonov-tétel bizonyításában alkalmazott gondolat megismétlésével kapjuk, hogy a $\mathcal{C}$ halmaz kompakt. Világos, hogy a T_a leképezések $\mathcal{C}$ -t önmagába képezik. Azt kell csupán megmutatnunk, hogy $\mathcal{C}$ nem üres. Ám ha a 10.2.2. Tételben szereplő S halmazt éppen U -hoz választjuk, akkor az $f \mapsto \sum_{s \in S} f(s)$ lineáris funkcionál $\mathcal{C}$ -hez tartozik.

Végül tehát, a Markov-Kakutani-féle fixpont-tétel szerint az összes T_a operátoroknak van közös fixpontjuk, ami éppen egy Haar-integrál G -n, s ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

3. 10.3 A Haar-integrál egyértelműsége

Ebben a szakaszban igazoljuk, hogy lokálisan kompakt Abel-csoportokon a Haar-integrál pozitív konstans szorzótól eltekintve egyértelmű. A 10.1.2. Tételben ezt kompaktan generált lokálisan kompakt esetben már igazoltuk, de most azt az eredményt nem használjuk fel, új bizonyítást adunk ebben az általánosabb esetben.

10.3.1. Tétel.

Lokálisan kompakt Abel-csoporton bármely két Haar-integrál közül egyik a másiknak pozitív konstansszorososa.

Bizonyítás.

Legyen I és J két Haar-integrál G -n, f egy kompakt tartójú folytonos függvény, h pedig egy kompakt tartójú, nem azonosan nulla, szimmetrikus folytonos függvény, azaz $h(x) = h(x^{-1})$ teljesül minden G -beli x -re. Ekkor a Fubini-tétel és a két integrál invarianciája miatt a következő számítást végezhetjük el:

$$I(h)J(f) = I_y J_x h(y)f(x) = I_y J_x h(y)f(xy),$$

valamint

$$J(h)I(f) = I_y J_x h(x)f(y) = I_y J_x h(y^{-1}x)f(y) = J_x I_y h(x^{-1}y)f(y) = J_x I_y h(y)f(xy).$$

Ebből $I(h)J(f) = I(f)J(h)$ adódik, s $I(h) \neq 0$ miatt az állítást kapjuk. $\square$

4. 10.4 Haar-mérték elemi, és kompaktan generált Abel-csoportokon

A fentiekben látottak alapján áttekinthetjük az elemi csoportokon, illetve a kompaktan generált Abel-csoportokon mindazt, amit a Haar-mértékről és a Haar-integrálról tudni kell. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy az általános mértékelmélet alapján következik, hogy véges sok lokálisan kompakt Abel-csoport szorzatán Haar-mértéket kapunk az egyes tényezőkhöz vett Haar-mértékek szorzataként. Így az elemi, illetve a kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoportokra megismert struktúra-tételek lehetőséget nyújtanak arra, hogy ezekben az esetekben a csoporton teljesen leírjuk a Haar-mértékeket. Először az elemi csoportokkal foglalkozunk.

Az elemi csoportok definíció szerint a

$$G = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k \times \mathbb{T}^m \times F$$

alakúak, ahol n, k, m nem negatív egész számok, F pedig egy véges Abel csoport. Világos, hogy $\mathbb{R}^n$ -en a Lebesgue-mérték bármely pozitív számszorosa, $\mathbb{Z}^m$ -en pedig a számláló mérték bármely pozitív számszorosa rendelkezik a Haar-mérték tulajdonságaival, így G -n bármely μ Haar-mérték ezeknek, és a $\mathbb{T}^m \times F$ csoporton a 8.11. egyenlőséggel megadott mérték szorzatának pozitív számszorosa. Ha λ jelöli a Lebesgue-mértéket $\mathbb{R}$ -en, $|F|$ pedig az F csoport elemszámát, akkor G -n a következő módon normált Haar-integrált szokás használni:

$$(10.3) \quad \int f \, d\mu = \frac{1}{(2\pi)^{m+\frac{n}{2}} |F|} \sum_{l \in \mathbb{Z}^k} \sum_{v \in F} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{[0, 2\pi]^m} f(x, l, t, v) \, d\lambda^n(x) \, d\lambda^m(t) .$$

Nyilván minden elemi csoport kompaktan generált és lokálisan kompakt, így az előbbi formula speciális esete a kompaktan generált lokálisan kompakt Abel-csoportokra vonatkozó megfelelő képletnek. Mivel az ilyen csoportok a 9.3.1. Tétel szerint

$$G = \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^k \times K$$

alakúak, ahol K kompakt Abel-csoport, így ezeken a μ Haar-mértékhez tartozó Haar-integrál egy lehetséges normálása

$$(10.4) \quad \int f \, d\mu = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^k} \int_{\mathbb{R}^n} \int_K f(x, l, k) \, d\lambda^n(x) \, d\kappa(k) ,$$

ahol κ a Haar-mérték K -n.

5. 10.5 Feladatok

1.

Bizonyítsuk be, hogy ha I egy Haar-integrál a G lokálisan kompakt Abel-csoporton és f nem azonosan nulla, nem negatív, folytonos kompakt tartójú függvény G -n, akkor $I(f) > 0$!

2.

Bizonyítsuk be, hogy a Haar-integrál inverzió-invariáns, azaz, ha bármely f függvény esetén $\tilde{f}$ jelöli az $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})$ módon értelmezett függvényt, akkor $I(f) = I(\tilde{f})$ teljesül minden folytonos kompakt tartójú f esetén!

3.

Bizonyítsuk be, hogy a $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multiplikatív csoporton egy Haar-integrál a következő:

$$\int f = \int \frac{f(x)}{|x|} \, dx .$$

4.

Bizonyítsuk be, hogy a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ multiplikatív csoporton egy Haar-integrál a következő:

$$\int f = \int \int \frac{f(x + iy)}{x^2 + y^2} \, dx \, dy .$$

11. fejezet - HARMONIKUS ANALÍZIS LOKÁLISAN KOMPAKT ABEL- CSOPORTOKON

1. 11.1 Harmonikus analízis az egészek csoportján

Legyen $G = \mathbb{Z}$, az egész számok additív csoportja a diszkrét topológiával. Mint minden diszkrét Abel-csoporton, $\mathbb{Z}$ -n is a Haar-mérték a számláló mérték tetszőleges pozitív konstansszorosa. A kompakt Abel-csoportok tanulmányozásakor az inverziós tétellel kapcsolatban láttuk, hogy ezt a pozitív konstans 1 -nek célszerű választani, amit a következőkben mindig fel fogunk tételezni. Tehát diszkrét Abel-csoport esetén Haar-mérték alatt mindig a számláló mértéket fogjuk érteni. A $\mathbb{Z}$ duálisa $\mathbb{T}$ -vel azonosítható, s az azonosítást a $z \longleftrightarrow \chi_z$ megfeleltetés adja, ahol $|z| = 1$ komplex szám, s a χ_z karakter a

$$\chi_z(n) = z^n$$

egyenlőséggel van értelmezve, minden n egész szám esetén. Természetesen ez a duális csoport, amint azt a 8.3. szakaszban láttuk, az $e^{it} \longleftrightarrow \chi_t$ megfeleltetés révén a $[0, 2\pi]$ intervallumon a modulo 2π összeadással ellátott csoporttal is azonosítható, ahol $0 \leq t < 2\pi$, s a χ_t karakter a

$$\chi_t(n) = e^{i, nt}$$

módon van értelmezve, minden n egész szám esetén. Az $L^2(\mathbb{Z})$ tér tehát mindazon $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények halmaza, melyekre a

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} |f(x)|^2$$

összeg véges. Ez természetesen azonosítható a $l^2(\mathbb{Z})$ térrel. Ha tovább akarunk haladni a kompakt Abel-csoportok esetében bejárt úton, akkor a Fourier-transzformáció értelmezése következik, s bár a Haar-integrál rendelkezésünkre áll, ezen a ponton mégis egy akadály tornyosul előttünk: a $\mathbb{Z}$ csoport karakterei nyilvánvalóan nem tartoznak $L^2(\mathbb{Z})$ -hez, tehát nem képezhetik annak ortonormált bázisát, így a Hilbert-terek általános elméletét ebben az esetben nem alkalmazhatjuk, már a legegyszerűbb nem véges, diszkrét Abel-csoport esetében sem. Vajon mi jelenthet kiutat ebből a látszólag reménytelen helyzetből? Hiszen tudjuk jól, hogy például a valós egyenesen a klasszikus Fourier-transzformáció kitűnően működik, a modern analízisnek és alkalmazásainak nélkülözhetetlen eszköze. Vajon az hogyan illeszthető be ebbe az általunk felépítendő absztrakt elméletbe?

A következőkben látni fogjuk, hogy a megoldást a Banach-algebrák, közelebbről az L^1 -algebrák elmélete jelenti. Ezt az elméletet nem kell korlátozni a $\mathbb{Z}$ csoport esetére, a 9. Fejezet eredményeit felhasználva azonnal rátérhetünk az általános lokálisan kompakt Abel-csoportok harmonikus analízisének tárgyalására. A Banach-algebrák elméletének részletes tárgyalása természetesen meghaladja e jegyzet kereteit, így a következő szakasz ismertető jellegű lesz.

2. 11.2 Kommutatív algebrák

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport, melyen a műveletet összeadással fogjuk jelölni, egy rögzített Haar-mértéket pedig m -el. Ismeretes, hogy az m mértékhez tartozó $L^1(G)$ tér a pontonkénti összeadással és skalárral való szorzással, valamint az

$$(11.1) \quad \|f\| = \int |f| dm$$

módon értelmezett normával Banach-tér. Sőt, amint azt a 11.3. Tételben láttuk a konvolúcióval ellátva ez a tér kommutatív Banach-algebra. Még tovább haladva, ha az $L^1(G)$ -beli elem és minden $L^1(G)$ -beli esetén az függvényt

$$(11.2) \quad f^*(x) = \overline{f(x^{-1})},$$

módon értelmezzük, s az f involúciójának nevezzük, akkor ezzel az involúcióval $L^1(G)$ kommutatív B^* -algebra, melyet a G csoport L^1 -algebrájának nevezünk. Amint azt könnyű látni, $L^1(G)$ pontosan akkor egységelemes, ha a G csoport diszkrét, s ebben az esetben az egységelem a csoport egységeleméből álló egyponthalmaz karakterisztikus függvénye. Bizonyos nehézséget okoz az a tény, hogy nem diszkrét esetben az L^1 -algebra nem egységelemes, így a kommutatív egységelemes B^* -algebrák elmélete közvetlenül nem alkalmazható. Az alábbiakban vázoljuk, hogy miként küzdhetjük le ezt a nehézséget. Legyen A kommutatív algebra, I pedig egy ideál A -ban. Akkor mondjuk, hogy I maximális ideál, ha nem valódi része egyetlen valódi ideálnak sem. Akkor mondjuk, hogy az A algebra u eleme egységelem modulo I , ha bármely A -beli x esetén $ux - x$ az I -hez tartozik. Az I ideált regulárisnak mondjuk, ha létezik A -ban egységelem modulo I . Ha I valódi reguláris ideál, akkor egyetlen modulo I vett egységelemet sem tartalmaz.

11.2.1. Tétel.

Az A kommutatív algebra minden valódi reguláris ideálja benne van valamely reguláris maximális ideálban.

Bizonyítás.

Legyen I reguláris ideál, u pedig egységelem modulo I . Az A algebra összes I -t tartalmazó összes olyan ideáljainak halmaza, melyek nem tartalmazzák u -t, a halmazelméleti tartalmazásra nézve feligrendezett halmaz, melyre - mint könnyen látható - teljesül a 4.1.2. Zorn-lemma feltétele, így van maximális eleme, melyről könnyű látni, hogy I -t tartalmazó reguláris maximális ideál. $\square$

Kommutatív algebrában az x elem adverzének nevezzük az y elemet, ha $x + y - xy = 0$ teljesül. Nem nehéz belátni, hogy az x elemnek pontosan nincs adverze, ha x egységelem modulo valamilyen reguláris maximális ideálra nézve.

Egy kommutatív egységelemes algebra x elemének spektruma alatt értjük mindazon λ komplex számok halmazát, melyekre az $x - \lambda e$ elem nem invertálható, ahol e az algebra egységelemét jelöli. Nem egységelemes kommutatív algebra eseteén az x elem spektruma azon λ komplex számokból áll, melyekre vagy $\lambda = 0$, vagy az x/λ elemnek van adverze.

11.2.2. Tétel.

Kommutatív Banach-algebra minden reguláris maximális ideálja zárt, s a szerinte vett faktoralgebra izometrikusan izomorf a komplex számok Banach algebrájával. Így minden reguláris maximális ideál egyenlő valamely, a komplex számok Banach-algebrájára való folytonos homomorfizmus magjával. Megfordítva, minden ilyen homomorfizmus magja reguláris maximális ideál.

Egy Banach-algebrának a komplex számok Banach-algebrájára való folytonos homomorfizmusait multiplikatív funkcionáloknak nevezzük. A multiplikatív funkcionálokhoz magjukat rendelő $h \longmapsto \text{Ker } h$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a Banach-algebra összes reguláris maximális ideáljai és az összes multiplikatív funkcionáljai között. Ezek halmazát Δ jelöli, melyet a Banach-algebra struktúra-terének, vagy maximális ideál-terének nevezünk.

Legyen x az A Banach-algebra tetszőleges eleme. A Δ bármely h eleme esetén

$$(11.3) \quad \hat{x}(h) = h(x)$$

módon értelmezett $\hat{x} : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt az x elem Gelfand¹ $\times$ -transzformáltjának nevezzük, az $x \mapsto \hat{x}$ leképezést pedig Gelfand-transzformációnak. Könnyen látható, hogy

$$(11.4) \quad \|\hat{x}\|_{\infty} \leq \|x\|$$

teljesül minden A -beli x esetén. A következő tétel alapvető fontosságú.

11.2.3. Tétel.

Ha A kommutatív Banach-algebra, akkor a Δ struktúra-téren az $\hat{A} = (\hat{x})_{x \in A}$ függvénycsalád által indukált topológia lokálisan kompakt, mely kompakt, ha A egységelemes. Ha Δ nem kompakt, akkor az $\hat{A}$ -beli függvények eltűnnek a végtelenben.

Az $\hat{A}$ függvénycsalád, vagyis a Gelfand-transzformáció értékkészlete tehát egy folytonos függvényekből álló halmaz egy lokálisan kompakt Hausdorff-téren, mely nyilván algebra a lineáris műveletekre és a pontonkénti szorzásra nézve, ám az általában nem igaz, hogy az egész $\mathcal{C}(\Delta)$, vagy $\mathcal{C}_0(\Delta)$ lenne, de még az sem biztos, hogy ezen terek valamelyikében sűrű. A Gelfand-elmélet egyik alaptétele a következő.



I. M. Gelfand

11.2.4. Tétel.

(Gelfand-Naimark² $\times$ -tétel) Kommutatív egységelemes B^* -algebra maximális ideáltere kompakt Hausdorff-tér, s az algebra izometrikusan $*$ -izomorf a maximális ideálterén

¹Iszrail Mojszejevics Gelfand, orosz matematikus (1913-2009)

²Mark Aronovics Naimark, orosz matematikus (1909-1978)

értelmezett összes folytonos komplex értékű függvények B^* -algebrájával. Az izomorfizmust a Gelfand-transzformáció létesíti.

Ez a tétel a kommutatív egységelemes B^* -algebrákat teljesen leírja, amennyiben azonosítja őket egy kompakt Hausdorff-téren értelmezett összes folytonos komplex értékű függvények B^* -algebrájával. Különösen nagy a jelentősége annak, hogy az azonosítást egy konkrét leképezés, a Gelfand-transzformáció írja le. Látni fogjuk, hogy ez a tétel speciális esetként alkalmazható kompakt Abel-csoportokon az integrálható függvények Fourier-transzformációjára.



M. A. Naimark A nem egységelemes esetben a következő tétel érvényes.

11.2.5. Tétel.

Kommutatív nem egységelemes B^* -algebra maximális ideáltere lokálisan kompakt Hausdorff-tér, s az algebra izometrikusan $*$ -izomorf a maximális ideálteren értelmezett összes végtelenben eltűnő folytonos komplex értékű függvények B^* -algebrájával. Az izomorfizmust a Gelfand-transzformáció létesíti.

3. 11.3 Konvolúció

A konvolúció értelmezéséhez a következő tételt használjuk fel.

11.3.1. Tétel.

(Általánosított Young³ $\times$ -egyenlőtlenség) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, valamint legyenek $1 \leq p \leq +\infty$ és $C > 0$ valós számok. Ha $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ mérhető függvény, melyre

³William Henry Young, angol matematikus (1863-1942)

$$\int |K(x, y)| d\mu(y) \leq C \quad \text{teljesül majdnem minden } X\text{-beli } x \text{ esetén,}$$

és

$$\int |K(x, y)| d\mu(x) \leq C \quad \text{majdnem minden } X\text{-beli } y \text{ esetén,}$$

akkor bármely $L^p(X)$ -beli f esetén az X -beli x -re

$$Tf(x) = \int K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

módon értelmezett Tf függvény az $L^p(X)$ -hez tartozik, és

$$\|Tf\|_p \leq C \|f\|_p$$

teljesül.

Bizonyítás.

A $p = +\infty$ esetben az állítás nyilvánvaló.

Legyen $1 < p < +\infty$, és q olyan, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. A Hölder⁴-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \left(\int |K(x, y)| d\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |K(x, y)| |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq C^{\frac{1}{q}} \left(\int |K(x, y)| |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

teljesül minden X -beli x -re. Mindkét oldalt p -edik hatványra emelve és x szerint integrálva, a Fubini⁵-tétel alapján a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \int |Tf(x)|^p d\mu(x) &\leq C^{\frac{p}{q}} \int \int |K(x, y)| |f(y)|^p d\mu(y) d\mu(x) \leq \\ &\leq C^{\frac{p}{q}+1} \int |f(y)|^p d\mu(y), \end{aligned}$$

majd p -edik gyököt vonva az adódik, hogy:

$$\|Tf\|_p \leq C^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \|f\|_p = C \cdot \|f\|_p.$$

Ezért $Tf(x)$ majdnem minden X -beli x -re véges. A $p = 1$ eset hasonlóan kezelhető, így a tételt bebizonyítottuk. $\square$

⁴Otto Ludwig Hölder, német matematikus (1859-1937)

⁵Guido Fubini, olasz matematikus (1879-1943)



W. H. Young



O. L. Hölder



G. Fubini

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport, melyen rögzítünk egy m Haar-mértéket. Akkor mondjuk, hogy az $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvény lokálisan integrálható, ha mérhető és minden kompakt halmazra való szűkítése integrálható. Például, G -n minden folytonos függvény lokálisan integrálható. Legyenek f, g lokálisan integrálható függvények G -n. Ha valamely G -beli x esetén az

$$y \mapsto f(x - y)g(y)$$

függvény integrálható, akkor az

$$f * g(x) = \int f(x - y)g(y) dm(y)$$

definícióval értelmezzük f és g konvolúcióját az x pontban. Ekkor nyilvánvalóan fennáll az $f * g(x) = g * f(x)$ azonosság.

11.3.2. Tétel.

(Young-egyenlőtlenség) Legyen $1 \leq p \leq +\infty$. Ha f az $L^1(G)$ -nek, g pedig az $L^p(G)$ -nek eleme, akkor majdnem minden G -beli x esetén létezik $f * g(x)$, továbbá az $f * g : x \mapsto f * g(x)$ módon értelmezett $f * g$ függvény $L^p(G)$ -hez tartozik, és

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

Bizonyítás.

Az állítás a 11.3.1. általánosított Young-egyenlőtlenségből a $K(x, y) = f(x - y)$ választással adódik. $\square$

A tétel állítását szimbolikusan $L^1 * L^p \subseteq L^p$ alakban fejezhetjük ki. Speciálisan, fennáll $L^1 * L^1 \subseteq L^1$, tehát az $L^1(G)$ tér a konvolúcióra nézve zárt.

11.3.3. Tétel.

Az $L^1(G)$ tér a vektortér-műveletekkel, a konvolúcióval, és a $\|\cdot\|_1$ normával kommutatív Banach-algebra.

Bizonyítás.

A konvolúció asszociativitása a Fubini-tétel következménye. $\square$

A Hölder-egyenlőtlenség alapján, ha $1 \leq p \leq +\infty$, és q olyan, hogy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

akkor bármely $L^p(G)$ -beli f és $L^q(G)$ -beli g esetén az $f * g$ függvény $L^\infty(G)$ -hez tartozik, és

$$(11.5) \quad \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Itt a szokásos módon $p = 1$ esetén $q = +\infty$ és $p = +\infty$ esetén $q = 1$ értendő.

4. 11.4 Integrálható függvények Fourier-transzformációja

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport, melyen rögzítsünk egy m Haar-mértéket. A fentiekben láttuk, hogy az $L^1(G)$ -beli f, g függvényekre minden G -beli x eseteén

$$f * g(x) = \int f(xy^{-1})g(y) dm(y)$$

módon értelmezett konvolúcióval az $L^1(G)$ kommutatív algebra, mely az $\|\cdot\|_1$ normával és a (11.2) módon értelmezett involúcióval kommutatív B^* -algebra. Nagy jelentőségű a következő tétel.

11.4.1. Tétel.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. Az $L^1(G)$ algebra bármely Φ multiplikatív funkcionálja esetén van olyan egyértelműen meghatározott χ_Φ karaktere G -nek, hogy

$$(11.6) \quad \Phi(f) = \int f \bar{\chi}_\Phi dm.$$

Bizonyítás.

Ismeretes, hogy bármely $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér esetén az $L^1(X)$ tér minden φ lineáris funkcionálja előállítható

$$\varphi(f) = \int f \bar{\alpha}_\varphi d\mu$$

alakban, ahol f az $L^1(G)$ tetszőleges eleme, α pedig az L^∞ egyértelműen meghatározott eleme. Mivel az minden multiplikatív funkcionálja lineáris funkcionál, ezt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\Phi(f) = \int f \overline{\alpha_\Phi} dm$$

teljesül minden $L^1(G)$ -beli f -re valamely lényegében korlátos mérhető $\alpha_\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvénnyel, mely majdnem mindenütt egyértelműen meg van határozva. Legyen f az $L^1(G)$ -ből való, x, y pedig legyenek a G tetszőleges elemei. A következő számítást végezzük el:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau_x f) &= \int f(xz) \overline{\alpha_\Phi(z)} dm(z) = \int f(z) \overline{\alpha_\Phi(x^{-1}z)} dm(z) = \\ &= \alpha_\Phi(x) \int f(z) \overline{\alpha_\Phi(z)} dm(z) = \alpha_\Phi(x) \cdot \Phi(f), \end{aligned}$$

amiből x helyett xy -t, f helyett $\tau_y f$ -et írva

$$\alpha_\Phi(xy) \Phi(f) = \Phi(\tau_{xy} f) = \Phi(\tau_y(\tau_x f)) = \alpha_\Phi(y) \Phi(\tau_x f) = \alpha_\Phi(y) \cdot \alpha_\Phi(x) \cdot \Phi(f)$$

következik. Ebből nyilván

$$\alpha_\Phi(xy) = \alpha_\Phi(x) \cdot \alpha_\Phi(y)$$

adódik, hiszen Φ nem a nulla funkcionál. Mivel α_Φ mérhető, a mértékelméletből ismert, hogy α_Φ majdnem mindenütt egyenlő egy folytonos függvénnyel, s mivel α_Φ korlátos, így szükségképpen 1 abszolút értékű, tehát karakter. $\square$

Azt kaptuk tehát, hogy az $L^1(G)$ tér Δ maximális ideáltere, mint halmaz, azonosítható a G duális csoportjával. Nem nehéz megmutatni, hogy a Δ tér topológiája azonos a G duálisának topológiájával, a 6.5. szakaszban értelmezett kompakt-nyílt topológiával. Ennek megfelelően a továbbiakban az $L^1(G)$ tér esetében a Δ maximális ideálteret azonosnak tekintjük $\widehat{G}$ -vel. Ez az azonosítás lehetővé teszi, hogy az $L^1(G)$ téren a Fourier-transzformációt az $L^1(G)$ -nek, mint B^* -algebrának a Gelfand-transzformációjával azonosítsuk. Tehát az $L^1(G)$ -beli f függvény és a G csoport χ karaktere esetén legyen

$$(11.7) \quad \hat{f}(\chi) = \int f \overline{\chi}.$$

Az $\hat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt az f Fourier-transzformáltjának nevezzük, az $f \mapsto \hat{f}$ leképezést pedig Fourier-transzformációnak. Világos, hogy amennyiben G kompakt Abel-csoport és f az $L^2(G)$ eleme, akkor ez megegyezik a kompakt Abel-csoportok esetében értelmezett Fourier-transzformációval. A következő állítás a 4.13.6. Stone-Weierstrass-tételből és a Gelfand-transzformáció általános tulajdonságaiból következik.

11.4.2. Tétel.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. Ha G kompakt, akkor a Fourier-transzformáció $L^1(G)$ -nek $\mathcal{C}(G)$ egy sűrű alterére való kontrakciós $*$ -homomorfimusa. Ha G nem kompakt, akkor a Fourier-transzformáció $L^1(G)$ -nek $\mathcal{C}_0(G)$ egy sűrű alterére való kontrakciós $*$ -homomorfimusa.

5. 11.5 Fourier-transzformáció lokálisan kompakt Abel-csoportokon

Ebben a szakaszban összefoglaljuk lokálisan kompakt Abel-csoportokon a Fourier-transzformációval kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat.

11.5.1. Tétel.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. Ha f az $L^1(G)$ -ből, x a G -ből, χ, η pedig a $\widehat{G}$ -ből való, akkor

1.

$$(\tau_x f)^\sim(\chi) = \chi(x) \hat{f}(\chi),$$

2.

$$(\eta f)^\sim(\chi) = \hat{f}(\eta^{-1} \chi).$$

Bizonyítás.

A következő számítást végezhetjük el:

$$\begin{aligned} (\tau_x f)^\sim(\chi) &= \int f(xy) \overline{\chi(y)} dm(y) = \chi(x) \int f(xy) \overline{\chi(xy)} dm(y) = \\ &= \chi(x) \int f(y) \overline{\chi(y)} dm(y), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} (\eta f)^\sim(\chi) &= \int \eta(y) f(y) \overline{\chi(y)} dm(y) = \int f(y) \overline{\eta^{-1}(y) \chi(y)} dm(y) = \\ &= \hat{f}(\eta^{-1} \chi). \end{aligned}$$

□

11.5.2. Tétel.

(Konvolúció-tétel) Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. Ekkor bármely $L^1(G)$ -beli f, g függvényekre

$$(11.8) \quad (f * g)^\sim = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Bizonyítás.

Az állítás a Gelfand-transzformáció általános tulajdonságaiból következik. □

11.5.3. Tétel.

(Egyértelműségi tétel) Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. Ha az $L^1(G)$ -beli f függvényre $\hat{f} = 0$, akkor f majdnem mindenütt nulla.

Bizonyítás.

Az állítás a Gelfand-transzformáció általános tulajdonságaiból következik. $\square$

11.5.4. Tétel.

(Inverziós tétel) Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. Ekkor az m Haar-mérték G -n és az $\hat{m}$ Haar-mérték $\hat{G}$ -n megválasztható úgy, hogy ha f az $L^1(G)$ -nek, $\hat{f}$ pedig az $L^1(\hat{G})$ -nek eleme, akkor majdnem minden x -re fennáll

$$(11.9) \quad f(x) = \int \hat{f}(\chi) \chi(x) d\hat{m}(\chi).$$

Ha f folytonos, akkor ez minden x -re fennáll.

11.5.5. Tétel.

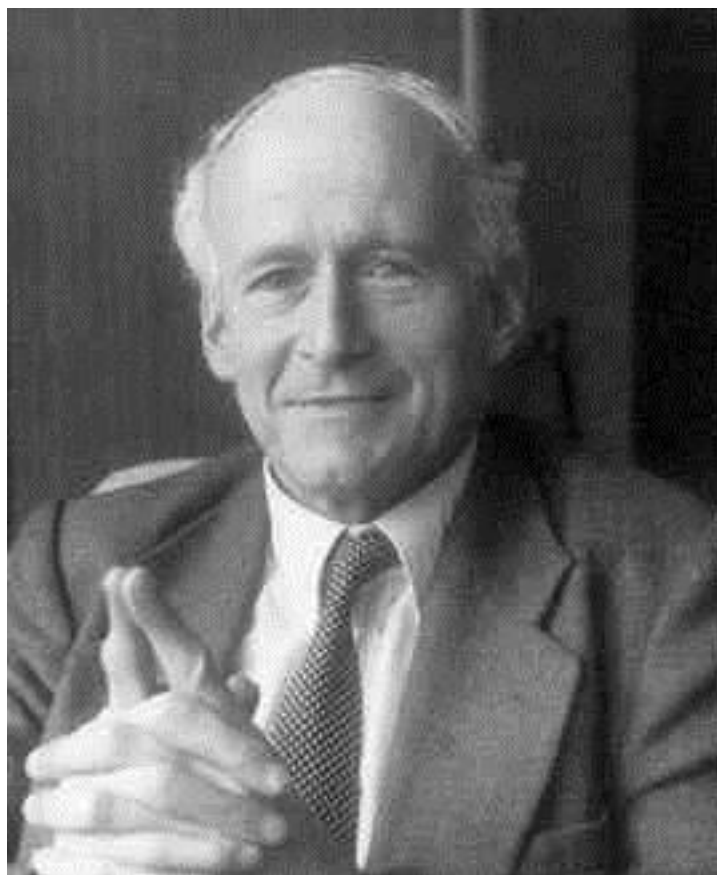
(Plancherel-tétel) Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. Ekkor a Fourier-transzformáció $L^1(G) \cap L^2(G)$ -re való szűkítése egyértelműen kiterjeszthető $L^2(G)$ -nek $L^2(\hat{G})$ -re való unitér operátorává.

12. fejezet - SPEKTRÁLANALÍZIS ÉS SPEKTRÁLSZINTÉZIS

1. 12.1 A spektrálanalízis és spektrálszintézis problémaköre

A spektrálanalízis és spektrálszintézis problémaköre a klasszikus harmonikus analízis alapkérdéseivel kapcsolódik. A vizsgálatok célja az eltolásinvariáns függvényterek szerkezetének leírása. A leírás eszközei az eltolásoperátorok közös sajátfüggvényei, melyek szerencsés esetben megtalálhatók az illető eltolásinvariáns függvénytérben, sőt, elegendő mennyiségben vannak ahhoz, hogy a térnek valamilyen értelemben bázisát alkossák. A klasszikus harmonikus analízisben az eltolásinvariáns függvényteret bizonyos korlátozásnak eleget tevő függvények generálják. Ilyen korlátozás lehet a periodicitás, a korlátosság, a majdnem periodicitás, az integrálhatóság, vagy a négyzetes integrálhatóság. Ezek a korlátozások lehetővé teszik, hogy a modern analízis leghatékonyabb eszközeit, leggyakrabban az integrálelméletet használjuk fel a szóban forgó függvényterek leírásához.

A spektrálanalízis és a spektrálszintézis lokálisan kompakt topologikus csoportokon értelmezett folytonos komplex értékű függvények eltolásinvariáns lineáris tereinek leírásával foglalkozik. A cél az, hogy a folytonosságon kívül semmilyen feltételt ne kelljen alkalmazni a leíráshoz. Diszkrét csoportok esetén ez azt jelentené, hogy tetszőleges komplex értékű függvényekből álló eltolásinvariáns tereket kellene leírni, ami semmiképpen sem tűnik egyszerű feladatnak. Másrészt, ebben az esetben kizárólag algebrai eszközöket alkalmazhatunk, semmilyen analitikus apparátus nem áll rendelkezésre. Mindenekelőtt pontosan meg kellene határozni, hogy milyen problémát akarunk megoldani. Az eltolásinvariancia nyilván fontos szerepet játszik, valamint a karakterek, vagy azokhoz hasonló tulajdonságú függvények. Mintául álljon itt Laurent Schwartz¹ híres tétele, amely a spektrálanalízis és a spektrálszintézis vizsgálatai kiindulópontjának tekinthető.



L. Schwartz

¹Laurent Schwartz, francia matematikus (1915-2002)

12.1.1. Tétel.

(L. Schwartz) Legyen adott a valós egyenesen folytonos komplex értékű függvények egy olyan eltolásinvariáns lineáris tere, amely zárt a kompakt konvergenciára nézve. Ekkor ebben a térben az $x \mapsto x^n e^{\lambda x}$ alakú függvények sűrű alteret generálnak (n nem negatív egész, λ komplex szám).

Egy másik példát szolgáltat számunkra a differenciaegyenletek klasszikus elmélete. Legyen ugyanis $n > 0$ egész szám, s legyenek c_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$) komplex számok. Ismeretes, hogy az

$$(12.1) \quad f(x+n) + \sum_{j=0}^{n-1} f(x+j) = 0$$

állandó együtthatós homogén lineáris differenciaegyenletnek minden $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos megoldása

$$f(x) = \sum_{s=1}^k p_s(x) e^{\lambda_s x}$$

alakú, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ az egyenlet karakterisztikus polinomjának összes különböző komplex gyökei rendre $n_1, n_2, \dots, n_k$ multiplicitásokkal, p_s pedig legfeljebb $n_s - 1$ -edfokú polinom $s = 1, 2, \dots, k$ esetén. Ez más szavakkal úgy fogalmazható, hogy a (12.1) egyenlet folytonos megoldásainak terében, ami nyilván egy lineáris eltolásinvariáns függvénytér, az $x \mapsto x^n e^{\lambda x}$ alakú függvények sűrű alteret generálnak (n nem negatív egész, λ komplex szám), olyannyira, hogy ez a megoldástér valójában ilyen megoldások lineáris kombinációiból áll. Számos további példát említhetnénk, melyek azt a jelenséget illusztrálják, hogy egy folytonos függvényekből álló eltolásinvariáns lineáris teret valamilyen értelemben meghatározzák az $x \mapsto x^n e^{\lambda x}$ alakú elemei. Már az önmagában nem nyilvánvaló, hogy a térnek vannak ilyen nullától különböző elemei, ráadásul mindkét példában az ilyen elemek elég sokan vannak ahhoz, hogy a tér tetszőleges elemét közelíteni lehessen velük - a második esetben egészen pontosan. E két tulajdonság: a speciális alakú elemek, építőkövek létezése, illetve elegendően soknak a létezése a spektrálanalízis és a spektrálszintézis vizsgálatának célja. Felmerül a kérdés: vajon miért pont az $x \mapsto x^n e^{\lambda x}$ alakú függvények az építőkövek, vajon mi az a speciális tulajdonsága ezeknek a függvényeknek, ami az eltolásinvariáns függvényterek szerkezetének leírása során ilyen különleges szerephez juttatja őket? Az exponenciális függvények fontosságát nyilván az magyarázza, hogy ezek a függvények pontosan az eltolásoperátorok közös sajátfüggvényei. A klasszikus harmonikus analízis vizsgálatai során a tanulmányozandó függvényekre olyan feltételeket tettünk, mint korlátosság, integrálhatóság, négyzetes integrálhatóság, stb., melyekkel az exponenciális függvények közül csak a karakterek rendelkeztek, s azok elegendőnek is bizonyultak a függvényterek leírásához, amint azt elsősorban az inverziós tételek mutatják. Ha azonban a folytonosságon kívül semmilyen egyéb feltételt nem alkalmazunk, akkor várható, hogy a karakterek nincsenek elég sokan ahhoz, hogy a tér felépíthető legyen belőlük. S vajon mi a szerepe a fellépő exponenciális függvények polinom-együtthatóinak? A második példára gondolva jól tudjuk, hogy azok a karakterisztikus polinom gyökeinek többszörösségével függnek össze, illetve azzal, hogy az ilyen többszörös sajátértékeknek megfelelő sajátaltér egynél több dimenziós.

Ez a gondolatmenet arra is rávilágít, hogy amennyiben a fenti két példában a valós számokon értelmezett függvények helyét valamilyen általánosabb struktúrán értelmezett függvények veszik át, akkor a következő alapfogalmaknak kell megfelelő jelentést tulajdonítani: lineáris tér, eltolás, sűrű részhalmaz, exponenciális függvény, polinomfüggvény. Az eltolásinvariáns lineáris tér egy csoporton értelmezett függvénytér lehet, a sűrű halmaz fogalmához valamilyen topológiára van szükség ezen a függvénytéren, ami jó esetben a csoporton értelmezett alkalmas topológiával függ össze, az exponenciális függvények szerepét pedig természetesen a csoportnak a komplex számok multiplikatív csoportjába való bizonyos, nem feltétlenül korlátos homomorfizmusai játszhatják. Bár egyelőre nem világos, hogy miként, de látni fogjuk, hogy az esetlegesen fellépő polinomegyütthatók is természetes módon definiálhatók egy, a fenténél jóval általánosabb szituációban.

2. 12.2 Varietások, exponenciális polinomok

Legyen G lokálisan kompakt csoport. Vizsgálataink alapvető függvénytere a G -n értelmezett összes folytonos komplex értékű függvények tere lesz, a következő módon topologizálva. A K bármely kompakt részhalmaza és bármely f -beli függvény esetén legyen

$$(12.2) \quad p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Könnyen látható, hogy p_K szeminorma, és az összes ilyen szeminormák családja a 4.3.1. Uriszon-lemma alapján elválasztó család. Tetszőleges $K \subseteq G$ kompakt halmaz, $\mathcal{C}(G)$ -beli f_0 és $\varepsilon > 0$ esetén legyen

$$(12.3) \quad U_{K, f_0, \varepsilon} = \{f : f \in \mathcal{C}(G), p_K(f - f_0) < \varepsilon\}.$$

az f_0 függvény ε sugarú nyílt K -gömbje. Tudjuk a 4.9. szakaszból, hogy ez a szeminorma család a $\mathcal{C}(G)$ lineáris téren vektortopológiát indukál, melyet a kompakt konvergencia topológiájának nevezünk, s ezzel ellátva a $\mathcal{C}(G)$ tér lokálisan konvex topologikus vektortér. Könnyen látható, hogy a $\mathcal{C}(G)$ térben egy sorozat, illetve általánosított sorozat konvergenciája egyet jelent az összes kompakt halmazon való egyenletes konvergenciával. Különösen fontos az a speciális eset, amikor G diszkrét csoport. Ekkor ugyanis $\mathcal{C}(G)$ az összes, G -n értelmezett komplex értékű függvények tere, mely, mint halmaz, a $\mathbb{C}^G$ szorzathalmazzal azonosítható, s rajta a kompakt konvergencia topológiája éppen a pontonkénti konvergencia, ami viszont nem más, mint a szorzattopológia ezen a szorzattéren. Megjegyezzük, hogy az általános esetben $\mathcal{C}(G)$ a lineáris műveletekkel és a függvények pontonkénti szorzásával nyilván komplex algebra, melyen a szorzás, mint kétváltozós függvény, folytonos, amit úgy mondhatunk, hogy ez egy topologikus algebra. Varietásnak nevezzük a $\mathcal{C}(G)$ tetszőleges zárt, eltolásinvariáns alterét. Ha G kommutatív, akkor ez természetesen azt jelenti, hogy egy varietás minden f elemével együtt az f összes $\tau_y f$ eltoljtját is tartalmazza, a G bármely y eleme esetén. Nem kommutatív G esetén viszont különbséget kell tennünk az f függvényen

$$\lambda_y f(x) = f(yx),$$

illetve

$$\rho_y f(x) = f(xy^{-1})$$

módon értelmezett baleltolások, illetve jobbeltolások között, s ilyenkor eltolásinvariancia alatt azt értjük, hogy az alter mindkét típusú eltolásokra nézve zárt, míg a csak a baleltolásokra, illetve csak a jobbeltolásokra nézve zárt altereket balinvariáns, illetve jobbinvariáns alternek, másszóval balvarietásnak, illetve jobbvarietásnak mondjuk, együttesen egyoldali varietásnak, röviden vaietásnak. A nyomaték kedvéért a mindkét típusú eltolásra nézve invariáns varietást kétoldali varietásnak is nevezhetjük. A $\mathcal{C}(G)$ -től különböző varietásokat valódinak nevezzük, a csupán a 0 függvényt tartalmazót pedig triviálisnak. Bármely $\mathcal{C}(G)$ -beli f függvény esetén az összes f -et tartalmazó varietások metszete ugyancsak egy varietás, melyet az f által generált varietásnak nevezünk, és $\tau(f)$ módon jelölünk. Általánosabban, ha H tetszőleges függvényhalmaz, akkor $\tau(H)$ jelenti a H halmazt tartalmazó összes varietások metszetét, melyet a H által generált varietásnak mondunk. Most a spektrálanalízis és spektrálszintézis szempontjából legfontosabb függvényosztályokat értelmezzük. Ebben a fejezetben kizárólag kommutatív csoportokkal fogunk foglalkozni, s a csoportműveletet összeadásként jelöljük. Legyen tehát G lokálisan kompakt Abel-csoport. A G csoportnak a nullától különböző komplex számok multiplikatív csoportjába való folytonos homomorfizmusait exponenciális függvényeknek, vagy röviden exponenciálisoknak nevezzük. Használatos a multiplikatív függvény elnevezés is. A G csoportnak a komplex számok additív csoportjába való folytonos homomorfizmusait additív függvényeknek nevezzük. Az összes additív függvények nyilván komplex lineáris teret alkotnak, mely a $\mathcal{C}(G)$ tér zárt altere. Ezt a teret szokás $\text{Hom}(G, \mathbb{C})$ módon jelölni. Megjegyezzük, hogy a valós értékű additív függvényeket valós karaktereknek szokás nevezni.

Könnyű látni, hogy minden exponenciális függvény egydimenziós varietást generál, s megfordítva, minden egydimenziós varietást valamely exponenciális függvény generálja. A nullától különböző additív függvények

kétdimenziós varietást generálnak, hiszen az általuk generált varietást, mint lineáris teret, az illető additív függvény és az azonosan 1 függvény generálja, s ezek lineárisan függetlenek.

A $\mathcal{C}(G)$ algebrának a konstans függvények és az additív függvények által generált részalgebráját polinomok algebrájának, vagy polinomgyűrűnek, elemeit polinomoknak nevezzük. A G -n értelmezett bármely P polinom tehát felírható

$$(12.4) \quad p(x) = P(a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))$$

alakban, ahol x a G eleme, $a_1, a_2, \dots, a_n$ additív függvények, $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ pedig polinom. Az itt fellépő additív függvényekről nyilván feltételezhetjük, hogy $\text{Hom}(G, \mathbb{C})$ egy rögzített bázisából valók, s ilyenkor - amint az könnyen látható - a (12.4) előállítás egyértelmű. Az itt fellépő P polinom fokszámát fogjuk a P fokszámának nevezni. A többváltozós Taylor²-formula polinomokra felírt alakjából könnyen látható, hogy minden polinom véges dimenziós varietást generál. Egészen pontosan, meg lehet mutatni, hogy a (12.4) alakban a felírt P polinom által generált varietást, mint lineáris teret az

$$x \mapsto \partial_1^{k_1} \partial_2^{k_2} \dots \partial_n^{k_n} P(a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))$$

polinomok generálják, ahol $k_1, k_2, \dots, k_n$ olyan természetes számok, melyeknek összege nem nagyobb, mint a P polinom fokszáma. A $\mathcal{C}(G)$ algebrának a polinomok és az exponenciális függvények által generált részalgebráját exponenciális polinomok algebrájának, elemeit exponenciális polinomoknak, vagy polinom-exponenciálisoknak nevezzük. A G -n értelmezett bármely φ exponenciális polinom tehát felírható

$$(12.5) \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^n p_k(x) m_k(x)$$

alakban, ahol x a G eleme, $m_1, m_2, \dots, m_n$ exponenciális függvények, $p_1, p_2, \dots, p_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ pedig polinomok. Ha az itt szereplő exponenciális függvények páronként különbözők, a polinomok pedig nem azonosan nullák, akkor - amint az könnyen látható - a (12.5) előállítás egyértelmű. Ha a (12.5) előállítás jobboldala egyetlen tagot tartalmaz, ami nulla is lehet, akkor φ -t exponenciális monomnak nevezzük. A (12.5) előállítás egyértelműsége nyilván pontosan azzal egyenértékű, hogy különböző exponenciális függvényekhez tartozó nem azonosan nulla exponenciális monomok lineárisan függetlenek.

²Brook Taylor, angol matematikus (1685-1731)



B. Taylor

3. 12.3 Spektrálanalízis és spektrálszintézis

Az előző szakasz fogalmainak birtokában megfogalmazhatjuk a kommutatív spektrálanalízis és spektrálszintézis alapproblémáit.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport, V pedig varietás. Akkor mondjuk, hogy spektrálanalízis érvényes V -n, ha V bármely nem triviális részvarietása tartalmaz exponenciális függvényt. Ha a $\mathcal{C}(G)$ varietásra spektrálanalízis érvényes, akkor azt mondjuk, hogy a G csoporton spektrálanalízis érvényes. Ez tehát azt jelenti, hogy a G csoporton bármely nem nulla varietásban van exponenciális függvény. A klasszikus harmonikus analízisben ez karakterek létezésének felel meg. Mivel a varietások pontosan a csoport eltolásoperátorainak közös sajátalterei, az exponenciálisok pedig a közös sajátfüggvények, így a spektrálanalízis érvényessége olyasmint jelent, hogy minden közös invariáns altérben van közös sajátfüggvény.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport, V pedig egy varietás. Akkor mondjuk, hogy spektrálszintézis érvényes V -n, ha V bármely részvarietásában az exponenciális monomok sűrű alteret feszítenek fel. Ha a $\mathcal{C}(G)$ varietásra spektrálszintézis érvényes, akkor azt mondjuk, hogy a G csoporton spektrálszintézis érvényes. Ez tehát azt jelenti, hogy a G csoport bármely varietásában sűrűn helyezkednek el azok az exponenciális polinomok, amelyek az illető varietáshoz tartozó exponenciális monomok lineáris kombinációi. Ez a klasszikus harmonikus analízisben annak felel meg, hogy elegendően sok karakter létezik, nem csupán ahhoz, hogy elválasszák a csoport elemeit, hanem még ahhoz is, hogy a varietásokban lineáris kombinációik, vagyis a trigonometrikus polinomok sűrűn helyezkedjenek el.

Ahhoz, hogy világosan lássuk a spektrálanalízis és a spektrálszintézis közti összefüggést, a következő tételre van szükség.

12.3.1. Tétel.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport, V pedig egy varietás. Ha p nem nulla polinom, m pedig exponenciális függvény, valamint a pm exponenciális monom V -hez tartozik, akkor m a V -hez tartozik.

Bizonyítás.

Világos, hogy bármely G -beli y esetén a

$$x \mapsto q(x) = m(-y)p(x+y)m(x+y) - p(x)m(x)$$

függvény ugyancsak V -hez tartozik, és

$$q(x) = (p(x+y) - p(x))m(x).$$

Könnyű látni, hogy ha p fokszáma $n \geq 1$, akkor y megválasztható úgy, hogy az

$$x \mapsto p(x+y) - p(x)$$

polinom fokszáma $n-1$, így tételünk állítása indukcióval következik. $\square$

Ebből azonnal adódik a következő tétel.

12.3.2. Tétel.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. Egy varietáson pontosan akkor érvényes spektrálanalízis, ha minden nem triviális részvarietásában van nem nulla exponenciális monom. Speciálisan, ha egy nem triviális varietáson spektrálszintézis érvényes, akkor spektrálanalízis is. Így, ha G -n spektrálszintézis érvényes, akkor spektrálanalízis is.

Ennek az állításnak a megfordításával kapcsolatban egyelőre semmit nem tudunk mondani, a válasz ugyanis nem triviális. Mindenekelőtt olyan Abel-csoportokat, illetve varietásokat kellene felkutatnunk, amelyeken biztosan érvényes, vagy éppen nem érvényes spektrálanalízis, illetve spektrálszintézis. Mindenesetre, a bevezetőben idézett Schwartz-féle 12.1.1. Tétel a következő módon fogalmazható.

12.3.3. Tétel.

(L. Schwartz) A valós számok euklideszi topológiával ellátott additív csoportján spektrálszintézis érvényes.

Diszkrét Abel-csoportok esetén az első fontos eredmény a következő.

12.3.4. Tétel.

(M. Lefranc) $A \mathbb{Z}^k$ rács-csoporton spektrálszintézis érvényes.

A következő tétel olyan varietásokat mutat be, amelyeken - a csoport tulajdonságaitól függetlenül - mindig spektrálanalízis érvényes.

12.3.5. Tétel.

Legyen G lokálisan kompakt Abel-csoport. Ha V véges dimenziós nem triviális varietás, akkor spektrálanalízis érvényes V -n.

Bizonyítás.

A G -beli y elemekhez tartozó összes T_y eltolásoperátoroknak V invariáns altere, így ezek az operátorok egy nem nulla, véges dimenziós lineáris tér felcserélhető lineáris operátorai. Ismeretes, hogy az ilyen operátoroknak van a térben, s természetesen annak minden nem nulla invariáns alterében közös sajátvektora, jelen esetben sajátfüggvénye, ami nyilván valamely exponenciális függvény nem nulla konstansszorozója. $\square$

Legyenek G, H lokálisan kompakt Abel-csoportok, $\Phi : G \rightarrow H$ pedig egy szürjektív, folytonos és nyílt homomorfizmus. Bármely $V \subseteq G$ -beli varietás esetén természetes módon, a következőképpen generál egy varietást V_Φ -ben:

$$V_\Phi = \{f \circ \Phi; f \in V\}.$$

Világos, hogy ha V nem triviális, akkor V_Φ sem az.

12.3.6. Tétel.

Legyenek G, H diszkrét Abel-csoportok, $\Phi : G \rightarrow H$ pedig egy szürjektív homomorfizmus, továbbá V egy varietás $\mathbb{C}^H$ -ban. Ha spektrálanalízis érvényes V_Φ -n, akkor V -n is, s ha spektrálszintézis érvényes V_Φ -n, akkor V -n is. Speciálisan, ha spektrálanalízis érvényes G -n, akkor H -n is, s ha spektrálszintézis érvényes G -n, akkor H -n is.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy spektrálanalízis érvényes V_Φ -n, $W \subseteq V$ pedig egy nem triviális részvarietás. Ekkor W_Φ nem triviális részvarietás V_Φ -ben, így van benne m exponenciális függvény. A W_Φ definíciója szerint $m = M \circ \Phi$ teljesül valamely W -beli függvénnyel. Ha u, v a H tetszőleges elemei, akkor a Φ szürjektivitása miatt $u = \Phi(x)$ és $v = \Phi(y)$ teljesül valamely G -beli x, y elemekkel, így

$$\begin{aligned} M(u + v) &= M(\Phi(x) + \Phi(y)) = M(\Phi(x + y)) = m(x + y) = m(x)m(y) \\ &= M(\Phi(x))M(\Phi(y)) = M(u)M(v), \end{aligned}$$

tehát M exponenciális függvény W -ben. Ugyanígy láthatjuk be, hogy ha a h exponenciális monom W_Φ -hez tartozik, akkor felírható $h = H \circ \Phi$ alakban, ahol H egy exponenciális monom W -ben. Végül, ha W_Φ -ben az exponenciális monomok lineáris burka sűrű, és F a W varietás tetszőleges eleme, akkor van olyan W_Φ -beli exponenciális monomok lineáris kombinációinak (f_i) általánosított sorozata, mely a G minden pontjában a W_Φ varietás $F \circ \Phi$ eleméhez konvergál. Ekkor, az eddigiek alapján

$$f_i = F_i \circ \Phi$$

alakú, ahol F_i a W varietáshoz tartozó exponenciális monomok lineáris kombinációja minden i -re. Ha $\Phi(x)$ a H tetszőleges pontja, akkor az

$$F(\Phi(x)) = \lim_i f_i(x) = \lim_i F_i(\Phi(x))$$

egyenlőség azt mutatja, hogy az F a W varietáshoz tartozó exponenciális monomok lineáris kombinációjából álló általánosított sorozat pontonkénti határértéke, vagyis spektrálszintézis érvényes V -n. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

Mivel diszkrét Abel-csoport minden faktorcsoportha egyben homomorf képe a csoportnak, így az alábbi következményt kapjuk.

12.3.1. Következmény.

Legyen G diszkrét Abel-csoport. Ha spektrálanalízis, vagy spektrálszintézis érvényes G -n, akkor ugyanaz érvényes bármely faktorcsoportján.

Részcsoportokra hasonló eredményt kapunk.

12.3.7. Tétel.

Legyen G diszkrét Abel-csoport. Ha spektrálanalízis, vagy spektrálszintézis érvényes G -n, akkor ugyanaz érvényes bármely részcsoportján.

Az utóbbi tételek azt mutatják, hogy a csoportelméletben szokásos olyan alapvető operációk, melyekkel adott csoportokból újabbakat lehet képezni, úgymint a homomorf kép és a faktorcsoporthoz képzés, valamint a részcsoport képzés, legalábbis diszkrét esetben, nem vezetnek ki azon csoportok osztályából, melyeken spektrálanalízis, vagy spektrálszintézis érvényes. Egy további ilyen operáció két csoport direkt szorzatának képzése. A spektrálanalízis és a spektrálszintézis legújabb eredményei alapján tudjuk, hogy ez sem vezet ki az illető osztályokból, ám erre mindeddig közvetlen, csupán az eddigi eredményeket felhasználó bizonyítást nem sikerült találni, pedig egy ilyen bizonyításnak az elmélet szempontjából nagy jelentősége lenne. Mindenesetre megjegyezzük, hogy az előző három operáció révén egy adott csoportból mindig bizonyos értelemben „kisebb” csoport keletkezik, míg a direkt szorzattal „nagyobb” csoport jön létre.

A direkt szorzat képzésével kapcsolatban érvényes a következő tétel.

12.3.8. Tétel.

Legyen G diszkrét, T pedig véges diszkrét Abel-csoport. Ha G -n spektrálanalízis, vagy spektrálszintézis érvényes, akkor $G \times T$ -n is.

Bizonyítás.

Bevezetjük a következő jelölést: ha $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ és $\varphi: T \rightarrow \mathbb{C}$ függvények, akkor tetszőleges $G \times T$ -beli (x, t) esetén

$$f \otimes \varphi(x, t) = f(x) \cdot \varphi(t).$$

A következő állítást bizonyítjuk be, amelyből tételünk állítása nyilván következik: ha V egy varietás a $G \times T$ csoporton, és T elemszáma k , karakterei pedig $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, akkor a V bármely g eleme esetén vannak olyan $f_1, f_2, \dots, f_k: G \rightarrow \mathbb{C}$ függvények, hogy $f_i \otimes \gamma_i$ a V -hez tartozik, ha $i = 1, 2, \dots, k$, továbbá minden $G \times T$ -beli (x, t) esetén

$$(12.6) \quad g(x, t) = \sum_{i=1}^k f_i(x) \gamma_i(t)$$

teljesül, s ez az előállítás egyértelmű. Valóban, mivel a $\mathbb{C}^T$ tér k dimenziós lineáris tér, melynek $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ bázisát képezik, e tér minden eleme ezek lineáris kombinációja. Így minden G -beli x mellett vannak olyan $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ számok, hogy fennáll (12.6). A $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ függvények lineáris függetlensége miatt vannak a T -ben olyan $t_1, t_2, \dots, t_k$ elemek, hogy a $(\gamma_i(t_j))_{i,j=1}^k$ mátrix reguláris. Ha (12.6)-ban t helyére a $t + t_j$ elemeket helyettesítjük $j = 1, 2, \dots, k$ -ra, akkor a $f_i(x) \gamma_i(t)$ ismeretlenekre egy olyan lineáris egyenletrendszert kapunk, melyből azok a $g(x, t + t_j)$ számok lineáris kombinációjaként egyértelműen kifejezhetők. Mivel az $(x, t) \mapsto g(x, t + t_j)$ függvények V -hez tartoznak, ezért az $f_i \otimes \gamma_i$ függvények is, $i = 1, 2, \dots, k$ esetén. Ha G -n spektrálanalízis érvényes, és V egy nem triviális varietás $G \times T$ -n, akkor mindazon $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ függvények, melyek fellépnek a V -beli g függvények (12.6) alakú előállításában, nyilván egy V_0 nem triviális varietást alkotnak G -n, melyben egy exponenciális függvényt jelöljön m . Ekkor az imént bizonyítottak szerint $m \otimes \gamma$ a V -hez tartozik a T valamely γ karaktere esetén, s nyilván ez a függvény exponenciális függvény $G \times T$ -n.

A spektrálszintézissel kapcsolatos állítás teljesen kézenfekvő. $\square$

Ebből a tételből azonnal adódik az alábbi - természetesen eléggé nyilvánvaló - következmény.

12.3.2. Következmény.

Spektrálszintézis érvényes minden véges Abel-csoporton.

4. 12.4 Spektrálanalízis és spektrálszintézis diszkrét Abel-csoportokon

Ebben a szakaszban ismertetjük a spektrálanalízis és spektrálszintézis elméletének legújabb eredményeit diszkrét Abel-csoportokon. Mivel ezek tárgyalásához olyan eszközök is szükségesek, melyek részletes ismertetése meghaladja e munka kereteit, többnyire csak az eredményeket, s azok legfontosabb összefüggéseit mutatjuk be.

Ebben a szakaszban tehát G diszkrét Abel-csoport, melyen a műveletet összeadásnak írjuk. Emlékeztetünk rá, hogy G -t végesen generáltnak nevezzük, ha van olyan véges részhalmaza, melyet tartalmazó összes részcsoport metszete G , másszóval, az illető részhalmazt tartalmazó legszűkebb részcsoport maga G . A G csoportot torziócsoportnak nevezzük, ha bármely elemét tartalmazó legszűkebb részcsoport véges. A G csoportot szabad csoportnak nevezzük, ha van olyan κ számosság, hogy G izomorf a $\mathbb{Z}^\kappa$ csoporttal. Megjegyezzük, hogy itt a direkt hatvány a teljes direkt szorzatot jelenti, amely egy tetszőleges κ számosságú halmazon értelmezett összes egész értékű függvények halmaza, a függvények pontonkénti összeadásával. Ilyenkor természetesen a κ számosság egyértelműen meg van határozva, s a G szabad Abel-csoport rangjának nevezzük. A G torziómentes rangjának azt a legnagyobb κ számosságot nevezzük, melyre G -nek van κ rangú szabad részcsoportja. Nyilván a torziómentes rang kisebb, vagy egyenlő a rangnál, szabad Abel-csoportok esetén pedig egyenlők. Torziócsoport torziómentes rangja nulla, míg rangja - a triviális esettől eltekintve - nagyobb, mint nulla.

A csoportelméletből ismert a következő egyszerű tétel.

12.4.1. Tétel.

Minden Abel-csoport valamely szabad Abel-csoport homomorf képe. Minden végesen generált Abel-csoport valamely véges rangú szabad Abel-csoport homomorf képe.

Ennek figyelembevételével a 12.3.4. és 12.3.6. tételek alapján a következő eredményt kapjuk.

12.4.2. Tétel.

Minden végesen generált Abel-csoporton spektrálszintézis érvényes.

Mindeztideig nem láttunk példát olyan diszkrét Abel-csoportra, de még varietásra sem, amelyen nem érvényes spektrálanalízis, és az a kérdés is nyitott, hogy vajon van-e olyan varietás, amelyen spektrálanalízis érvényes, de spektrálszintézis nem. Most egy ilyen példa következik. Ehhez egy fogalomra van szükségünk. Ha G diszkrét Abel-csoport, akkor a $B : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt biadditívnak nevezzük, ha az $x \mapsto B(x, y)$ függvény minden G -beli y mellett, és az $y \mapsto B(x, y)$ függvény minden G -beli x mellett additív. A B -t szimmetrikusnak mondjuk, ha $B(x, y) = B(y, x)$ teljesül minden G -beli x, y mellett.

12.4.1. Lemma.

Legyen G diszkrét Abel-csoport. Ha $B : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ olyan szimmetrikus biadditív függvény, hogy az $x \mapsto B(x, x)$ függvény által generált varietás végtelen dimenziós, akkor erre a varietásra nem érvényes spektrálszintézis.

Bizonyítás.

Legyen $f(x) = B(x, x)$, ha x a G eleme. Azt fogjuk megmutatni, hogy az f által generált varietásban minden polinom legfeljebb elsőfokú, ezek lineáris burkának lezártja is legfeljebb elsőfokú polinomokból áll, pedig nem legfeljebb elsőfokú polinom.

Mindenekelőtt a G tetszőleges x, y elemeire fennálló

$$(12.7) \quad f(x+y) = B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y) = f(x) + 2B(x, y) + f(y)$$

egyenlőség alapján világos, hogy a $\tau(f)$ varietás az 1 függvény, az f függvény, és az összes $x \mapsto B(x, y)$ alakú additív függvények lineáris burka, ahol y végigfutja G elemeit. Ebből a varietás dimenziójára tett feltevés alapján az következik, hogy az $x \mapsto B(x, y)$ függvények végtelen sok y -ra lineárisan függetlenek. Ebből az is adódik, hogy nincs olyan természetes szám, hogy B előállítható volna

$$(12.8) \quad B(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(y)$$

alakban valamilyen $a_k, b_k : G \rightarrow \mathbb{C}$ additív függvényekkel ($k = 1, 2, \dots, n$). Valóban, egy ilyen előállítás azt jelentené, hogy az $x \mapsto B(x, y)$ függvények között a lineárisan függetlenek száma legfeljebb n . Bevezetjük a következő jelölést: tetszőleges G -beli x, y és $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvény esetén legyen

$$\Delta_y h(x) = h(x+y) - h(x).$$

A $\Delta_y h : G \rightarrow \mathbb{C}$ a h függvény differenciája, az y növekménnyel. Bármely G -beli y esetén nyilván Δ_y egy lineáris operátor $\mathcal{C}(G)$ -n, melynek hatványait értelemszerűen definiáljuk. Mint könnyen látható, bármely m exponenciális függvény, G -beli x, y elemek és n természetes szám esetén

$$(12.9) \quad \Delta_y^n m(x) = m(x)(m(y) - 1)^n,$$

továbbá a $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csak akkor legfeljebb elsőfokú polinom, ha bármely G -beli x, y elemek esetén

$$(12.10) \quad \Delta_y^2 g(x) = 0$$

teljesül. Ez tehát pontosan akkor teljesül, ha g egy additív függvénynek és egy konstansnak az összege. Végül azt is könnyű ellenőrizni, hogy a $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvényre akkor és csak akkor teljesül bármely G -beli x, y elemek esetén

$$(12.11) \quad \Delta_y^3 g(x) = 0,$$

ha g előáll a G -beli x -ekre

$$(12.12) \quad g(x) = A(x, x) + c(x) + d$$

alakban, ahol $A : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ szimmetrikus biadditív függvény, $c : G \rightarrow \mathbb{C}$ additív függvény, pedig egy konstans. Valóban, (12.11) alapján könnyű ellenőrizni, hogy az

$$A : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}[g(x+y) - g(x) - g(y) + g(0)]$$

függvény szimmetrikus biadditív függvény, az $x \mapsto g(x) - A(x, x)$ függvényre pedig teljesül (12.10), minden G -beli x, y esetén. Megjegyezzük, hogy a (12.12) előállítás nyilván egyértelmű. Láttuk, hogy az azonosan 1 függvény $\tau(f)$ -hez tartozik. Mivel f -re, így annak minden eltoltjára is, tehát $\tau(f)$ minden g elemére fennáll (12.11), így az a $\tau(f)$ -hez tartozó minden m exponenciális függvényre is teljesül, amiből minden G -beli x, y -ra (12.10) adódik, ami csak $m = 1$ esetén állhat fenn, ezért $\tau(f)$ -ben az egyetlen exponenciális függvény az 1, vagyis $\tau(f)$ -ben minden exponenciális polinom valójában polinom. Az előbbi megjegyzéseink alapján tehát azt kaptuk, hogy, egyrészt a $\tau(f)$ -beli exponenciális monomok mind (12.12) alakú függvények, ahol A szimmetrikus biadditív függvény, c additív, d pedig konstans, másrészt polinomok is, melyek közül a (12.11) egyenletnek - amint az könnyen látható - csak a legfeljebb másodfokúak, azaz, a

$$(12.13) \quad p(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m c_{k,l} a_k(x) b_l(x) + c(x) + d = p_2(x) + c(x) + d$$

alakúak tesznek eleget, ahol n, m pozitív egészek, $a_k, b_l, c : G \rightarrow \mathbb{C}$ additív függvények, $c_{k,l}, d$ pedig konstansok ($k = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, m$). Tegyük fel, hogy valamely $\tau(f)$ -beli p polinom esetén a (12.13) egyenletben p_2 nem azonosan nulla. A 4.2.3. Tétel és a feltevésünk alapján, miszerint p a $\tau(f)$ eleme, p egy olyan általánosított sorozat pontonkénti határértéke, melynek tagjai f eltoltjainak, vagyis (12.7) alakú függvényeknek a lineáris kombinációi. Ezek maguk is

$$\varphi(x) = cB(x, x) + A(x) + D$$

alakúak valamilyen $A : G \rightarrow \mathbb{C}$ additív függvénnyel és c, D konstansokkal. Következésképpen p egy ilyen függvények általánosított sorozatának pontonkénti határértéke, azaz minden G -beli x -re

$$p(x) = \lim_i c_i B(x, x) + A_i(x) + D_i$$

teljesül, amiből

$$\lim_i \frac{1}{2} \Delta_y^2 \varphi_i(x) = \frac{1}{2} \Delta_y^2 p(x) = p_2(y)$$

következik minden G -beli x, y esetén. Ugyanakkor

$$\lim_i \frac{1}{2} \Delta_y^2 \varphi_i(x) = B(y, y) \lim_i c_i$$

is fennáll minden G -beli x, y mellett, vagyis $\lim_i c_i = c \neq 0$ létezik, és $B(x, x) = \frac{1}{c} p_2(x)$ érvényes, ami lehetetlen, a B -re tett feltevés miatt, ugyanis a $B(x, x)$ egy ilyen előállításából $B(x, y)$ -nak (12.8) alakú előállíthatósága következne. Azt kaptuk tehát, hogy minden $\tau(f)$ -beli exponenciális polinom teljesíti a (12.10) egyenletet, amit az exponenciális polinomok lineáris burkában levő minden függvény ugyancsak teljesít. Ám f

nem teljesíti (12.10)-et, tehát a $\tau(f)$ -beli exponenciális polinomok lineáris burka nem sűrű $\tau(f)$ -ben. $\square$

Ez az eredmény tehát példát adna olyan varietásra, tehát egyben olyan diszkrét Abel-csoportra is, amelyen nem érvényes spektrálszintézis, ha példát adnánk olyan diszkrét Abel-csoportra, melyen van az iménti tételben szereplő tulajdonságú szimmetrikus biadditív függvény. A következő tételben ezt megteszük, s egyben szükséges feltételt adunk arra, hogy egy diszkrét Abel-csoporton spektrálszintézis legyen érvényes.

A következő tételben $\mathbb{Z}^\infty$ az egész számok $\mathbb{Z}$ additív csoportja megszámlálhatóan végtelen sok példányának (nem teljes) direkt összegét jelenti, ami egy megszámlálhatóan végtelen halmazon, például a természetes számok halmazán vett összes véges tartójú egész értékű függvények halmaza, a függvények pontonkénti összeadásával.

12.4.3. Tétel.

Ha spektrálszintézis érvényes egy diszkrét Abel-csoporton, akkor annak torziómentes rangja véges.

Bizonyítás.

Ha a G diszkrét Abel-csoport torziómentes rangja végtelen, akkor van olyan részcsoportha, mely izomorf a $\mathbb{Z}^\infty$ csoporttal. Így, a 12.3.7. Tétel alapján elegendő megmutatnunk, hogy a $\mathbb{Z}^\infty$ csoporton nem érvényes spektrálszintézis, ehhez viszont, az előző, 12.4.1. Tétel alapján elegendő megmutatni, hogy létezik rajta olyan $B : \mathbb{Z}^\infty \times \mathbb{Z}^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ szimmetrikus biadditív függvény, hogy végtelen sok $\mathbb{Z}^\infty$ -beli y esetén az $x \mapsto B(x, y)$ függvények lineárisan függetlenek.

Jelölje minden n természetes szám esetén π_n a $\mathbb{Z}^\infty \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ szorzattér n -edik projekcióját, tehát a direkt összeg n -edik példányára való projekciót. Szemléletesen, a $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ halmazt olyan egész tagú sorozatok alkotják, melyek tagjai véges sok kivételtől eltekintve nullák, s π_n minden ilyen sorozathoz hozzárendeli az n -edik tagját. Világos, hogy π_n additív minden n természetes számra. Legyen továbbá

$$B(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \pi_n(x) \pi_n(y),$$

hacsak x, y a $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ elemei. Ez az összeg minden rögzített x, y mellett véges, valamint B nyilvánvalóan szimmetrikus és biadditív függvény. Ha $k = 0, 1, 2, \dots$ eseteén $y^{(k)}$ azt a $\mathbb{Z}^\infty$ -beli függvényt jelenti, amely a k pontban 1, egyébként 0, akkor $B(x, y^{(k)}) = \pi_k(x)$, s mivel a különböző projekciók nyilván lineárisan függetlenek, ezzel tételünket bebizonyítottuk. $\square$

Ebből a tételből tehát csoportoknak, s így varietásoknak széles osztályát kapjuk, amelyeken nem érvényes spektrálszintézis. Például ilyen a tételben szereplő $\mathbb{Z}^\infty$ csoport, vagy a valós számok additív csoportja a diszkrét topológiával, valamint minden végtelen rangú szabad Abel-csoport. Úgy tűnik tehát, hogy a spektrálszintézis érvényessége eléggé erős megszorítás a diszkrét Abel-csoportokra. Mindazonáltal ez a feltétel csak a torziómentes részre vonatkozik, így például nyitva marad az a kérdés, hogy vajon torziócsoportokra, amelyek torziómentes rangja nulla, érvényes-e spektrálszintézis? Egyáltalán: mi a helyzet ennek a feltételnek az elegendőségével? Véges torziómentes rangú diszkrét Abel-csoportokon érvényes spektrálszintézis? Erre a kérdésre az eddig látottak alapján még az 1 torziómentes rangú, eléggé jól ismert racionális számok diszkrét csoportja esetében sem tudunk választ adni. Természetesen hasonló kérdések vetődnek fel a spektrálanalízissel kapcsolatban, hiszen attól, hogy spektrálszintézis nem érvényes egy diszkrét Abel-csoporton, spektrálanalízis még érvényes lehet rajta. Ezekre a felvetésekre pontos választ ad a következő két karakterizációs tétel, melyek részletes tárgyalása meghaladja jegyzetünk kereteit.

12.4.4. Tétel.

Diszkrét Abel-csoporton akkor és csak akkor érvényes spektrálanalízis, ha torziómentes rangja kisebb, mint a kontinuum.

12.4.5. Tétel.

Diszkrét Abel-csoporton akkor és csak akkor érvényes spektrálszintézis, ha torziómentes rangja véges.

E két tétel alapján tehát a spektrálszintézis erősebb követelmény, mint a spektrálanalízis. Másrészt, ha feltételezzük a kontinuum-hipotézis érvényességét, mely szerint nincs olyan számosság, ami nagyobb, mint a megszámlálhatóan végtelen és kisebb, mint a kontinuum, akkor a spektrálanalízis pontosan a megszámlálható torziómentes rangú, a spektrálszintézis pedig a véges torziómentes rangú csoportokat jellemzi a diszkrét kommutatív esetben.

Napjainkban további vizsgálatok folynak abban az irányban, amikor nem az egész csoportot, hanem annak csak egy varietását kívánjuk jellemezni abból a szempontból, hogy érvényes-e rajta spektrálanalízis, vagy spektrálszintézis. Ugyancsak érdekes lenne a diszkrét esetben nyert eredményeket valamilyen módon kiterjeszteni nem diszkrét lokálisan kompakt Abel-csoportokra. Sajnálatos módon a következő eredménynek némileg visszatartó ereje lehet az ilyen jellegű vizsgálatokra nézve.

12.4.6. Tétel.

(Gurevič) Az $\mathbb{R}^2$ lokálisan kompakt Abel-csoporton nem érvényes spektrálanalízis.

D. I. Gurevič dolgozatában példát ad egy olyan, két konvolúció-típusú egyenletből álló egyenletrendszerre, melynek megoldástere varietás $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ -ben, és ebben a megoldástérben az exponenciális monom megoldások lineáris kombinációi nem alkotnak sűrű halmazt, így erre a varietásra nem érvényes spektrálszintézis. Ugyancsak példát ad egy olyan, hat konvolúció-típusú egyenletből álló egyenletrendszerre, melynek megoldástere nemtriviális varietás $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ -ben, de nincs benne exponenciális függvény, így erre a varietásra nem érvényes spektrálanalízis. Természetesen az $\mathbb{R}^2$ additív csoportjáról van szó, a szokásos, euklideszi topológiával, így e példák alapján úgy tűnik, hogy L. Schwartz korábban idézett, $\mathbb{R}$ -re vonatkozó eredménye már a második legegyszerűbb esetre sem terjeszthető ki...

5. 12.5 Feladatok

1.

Mutassuk meg, hogy ha egy lokálisan kompakt Abel-csoporton egy exponenciális függvény korlátos, akkor karakter!

2.

Mutassuk meg, hogy ha egy lokálisan kompakt Abel-csoporton egy polinom korlátos, akkor konstans!

3.

Mutassuk meg, hogy ha egy lokálisan kompakt Abel-csoporton egy exponenciális polinom korlátos, akkor trigonometrikus polinom!

4.

Mutassuk meg, hogy diszkrét kommutatív torziócsoporton minden exponenciális függvény karakter!

5.

Mutassuk meg, hogy diszkrét kommutatív torziócsoporton minden polinom konstans!

6.

Mutassuk meg, hogy diszkrét kommutatív torziócsoporton minden exponenciális polinom trigonometrikus polinom!

7.

Mutassuk meg, hogy a diszkrét $\mathbb{Q}$ csoport torziómentes rangja 1 !

13. fejezet - FÜGGELÉK A: KARAKTEREK

A következő három szakaszban néhány ábrát, függvénygörbét, hanghullámot, animációt mutatunk be a harmonikus analízis és a Fourier-transzformáció köréből. Ezeket a Wolfram Mathematica 8.0.0.0 verziójával (Mac OS X, x86, 32-bit, 64-bit kernel) készítettük.

Először a $\mathbb{T}$ csoport néhány karakterének és néhány trigonometrikus polinomnak a „hangját hallgatjuk” meg. Ez alatt azt kell érteni, hogy ezek a periodikus függvények alkalmas módon hanghullámot modelleznek, melyet meg lehet hallgatni. Először a

$$\chi_k(t) = \sin kt$$

függvények „egymásba való áttűnését” látjuk a $0 \leq k \leq 50$ értékekre. Az animáció során ezt az „áttűnést” folytonosnak látjuk.



Most „meghallgatjuk” az

$$f(t) = \sin 100t + \sin 101t$$

trigonometrikus polinomot:



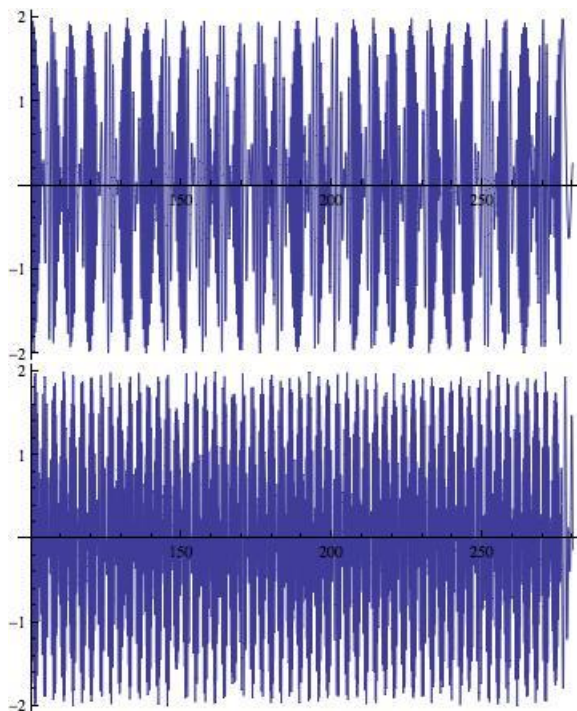
Tegyük egy próbát a

$$g(t) = \cos 200t - \sin 198t$$

trigonometrikus polinommal:



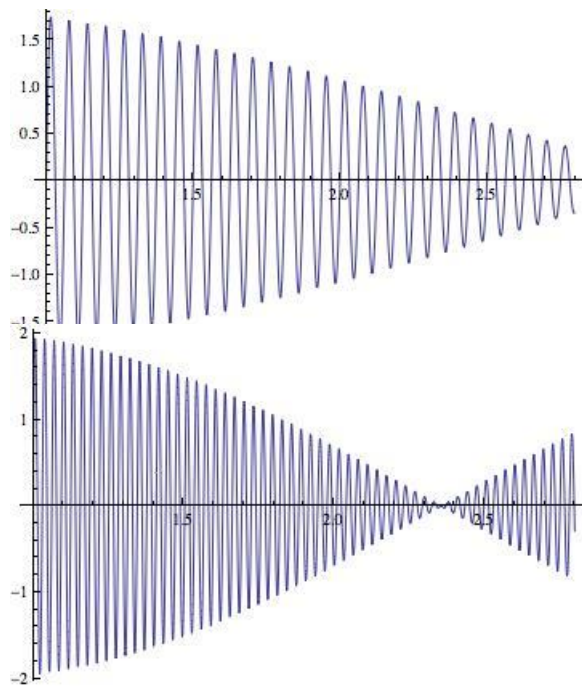
Ezeknek a trigonometrikus polinomoknak a képe a következő ábrákon látható.



$$f(t) = \sin 100t + \sin 101t$$

$$g(t) = \cos 200t - \sin 198t$$

Ha egy kicsit megváltoztatjuk a léptéket a t tengelyen, akkor jobban bepillantunk e hullámok természetébe.



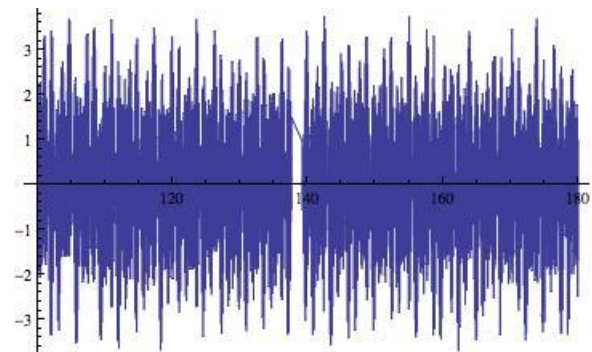
$$f(t) = \sin 100t + \sin 101t$$

$$g(t) = \cos 200t - \sin 198t$$

A függvénygörbék képét összevetve a hallható hanggal a legszembetűnőbb az, hogy a hullám amplitúdója, vagyis $|f(t)|$ akkor kisebb, vagy nagyobb, amikor a hang halkabban, illetve hangosabban szól.

A valamivel bonyolultabb

$$h(t) = \sin 100t - \cos 105t + \sin 200t + \cos 207t$$



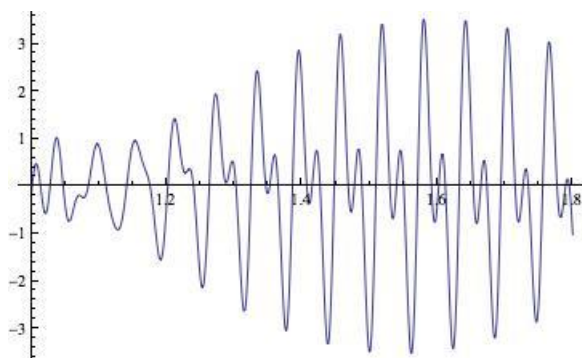
trigonometrikus polinomnak, melynek képe

$$h(t) = \sin 100t - \cos 105t + \sin 200t + \cos 207t$$

még érdekesebb hangja van ugye?



Ezt is megtekinthetjük megnövelt léptékű ábrán.



$$h(t) = \sin 100t - \cos 105t + \sin 200t + \cos 207t$$

A $\mathbb{T}^2$ csoport trigonometrikus polinomjai a

$$\chi_{k,l}(t,s) = \cos(kt + ls) + i \sin(kt + ls)$$

alakúak karakterek lineáris kombinációi, ahol k, l egész számok, t, s pedig valós számok. Nézzük meg ezek közül a

$$\chi_k(t,s) = \sin(kt + (1-k)s)$$

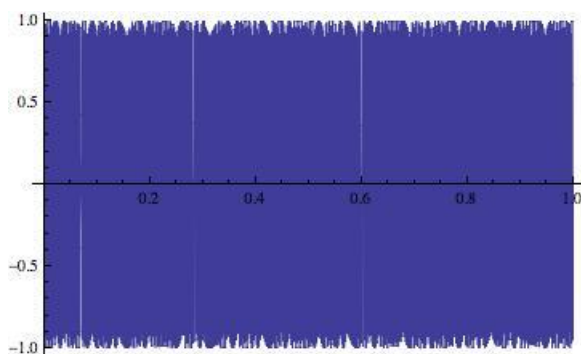
alakúakat, amint a k paraméter -10 és 10 között „folytonosan” változik, oda-vissza.



14. fejezet - FÜGGELÉK B: HANGHULLÁMOK, HANGKÖZÖK

A zenében a normál „A” hangot az

$$f(t) = \sin(440 \cdot 2\pi \cdot t)$$



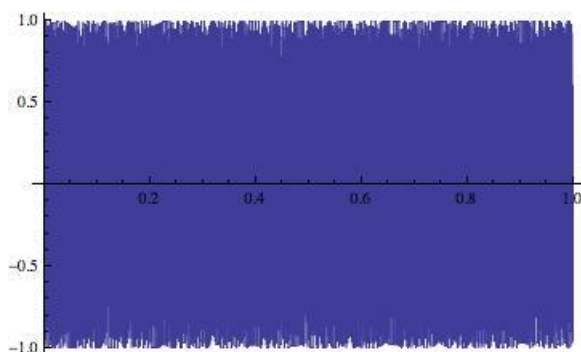
függvény írja le, melynek képe:
hangja pedig ez:



$$f(t) = \sin(440 \cdot 2\pi \cdot t)$$

Már a régi görögök tudták, hogy az emberi fül számára „jól hangzó”, konzonáns hangközök azok, melyeknél az egyszerre megszólaló hanghullámok frekvenciái egymásnak kis pozitív egész számú többszörösei. Így kapjuk a zenében leggyakrabban használt hangközöket. Ha ez a kis egész szám **1**, akkor természetesen két azonos hangról van szó, a zenei hangköz a tiszta prím. A következő legtermészetesebb, szinte megkülönböztethetetlen együtthangzás az, amikor az egyik frekvencia a másiknak kétszerese, az így kapott hangköz a tiszta oktáv. Az előbbi normál A hang oktávját tehát a

$$f(t) = \sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$$



függvény írja le, melynek képe:
hangja pedig egy oktávval magasabb.



$$f(t) = \sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$$

Az ilyen módon kapott hangok képezik az alaphang, esetünkben a normál A hang felhangjainak sorozatát, amelyek a fizikai megszólaltatás során, tehát például egy alaphangra hangolt húr megpendítése esetén egyidejűleg megszólalnak az alaphanggal, mintegy „benne vannak”. A fentiek folytatásaként kapjuk a következő két felhangot: a hármas szorzóhoz tartozó kvintet, az E hangot:



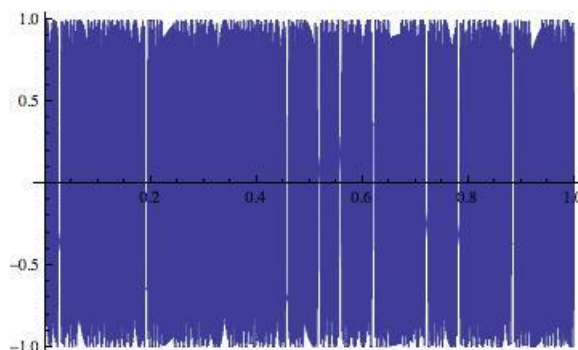
melyet tehát az

$$f(t) = \sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$$

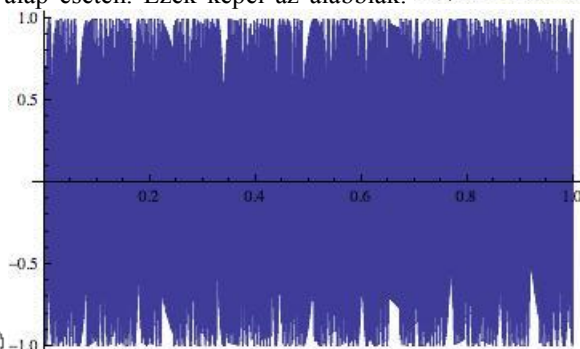
függvény ír le, valamint az ötös szorzóhoz tartozó, az

$$f(t) = \sin(2200 \cdot 2\pi \cdot t)$$

függvény által leírt nagytercet, mely így hangzik:



Ez a Cisz hang, A alap esetén. Ezek képei az alábbiak:



$$f(t) = \sin(880 \cdot 2\pi \cdot t)$$

$$f(t) = \sin(2200 \cdot 2\pi \cdot t)$$

Ahhoz, hogy ezek egy oktávon belül szóljanak, a terc esetén a frekvenciát el kell osztani négygyel, a kvint esetén pedig $3/2$ -el. Ezek tehát az egyvonalas oktávban a következő függvényekkel írhatók le: az alaphang a normál A:



melynek terce az egyvonalas Cisz hang,



kvintje pedig a kétvonalas E hang:



Ezekből már könnyen összerakhatjuk az ismert gyermekdal kezdetét:

Bo-



Ci,



bo-



ci



Tar-



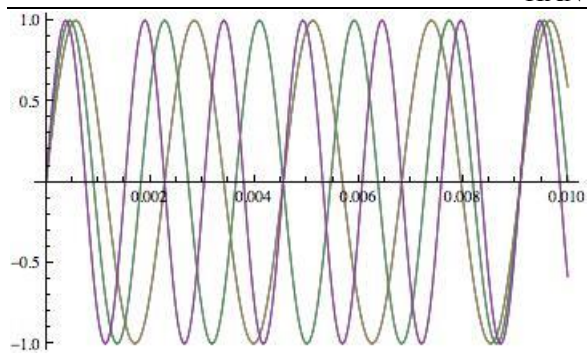
ka



...

Ennek „képi megvalósítása” - a vízszintes tengelyen az egység alkalmas megválasztásával a következő lehet:

FÜGGELÉK B:
HANGHULLÁMOK,
HANGKÖZÖK



Bo-ci, bo-ci tar-ka...

15. fejezet - FÜGGELÉK C: FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

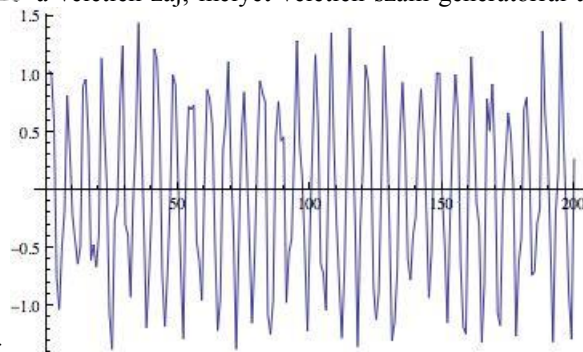
Ebben a szakaszban a Fourier-transzformációval kapcsolatban mutatunk néhány vizuális példát.

A diszkrét Fourier-transzformációt többek között a digitális jelfeldolgozásban alkalmazzák. Mivel ilyenkor a vizsgált jellemzőről csak a mintavételi pontokban van információ, ezért olyan függvényt keresünk, amely a mintavételi pontokban felveszi a mért értékeket, interpolál. Ám a diszkrét Fourier-transzformáció esetében csak a mért értékeket használjuk fel, amelyeket egy vektor, egy adatsor jellemez. Erre az adatsorra a DFT-t alkalmazva újabb ismereteket nyerhetünk az adatsor által reprezentált jelsorozatról, jelenségről.

A következő példában egy 200 elemű adatsort generálunk, amely egy periodikus jelnek és egy véletlen zajnak a szuperpozíciója, s a következő függvény írja le:

$$f(t) = \sin(30 \cdot 2\pi \cdot t) + R(t),$$

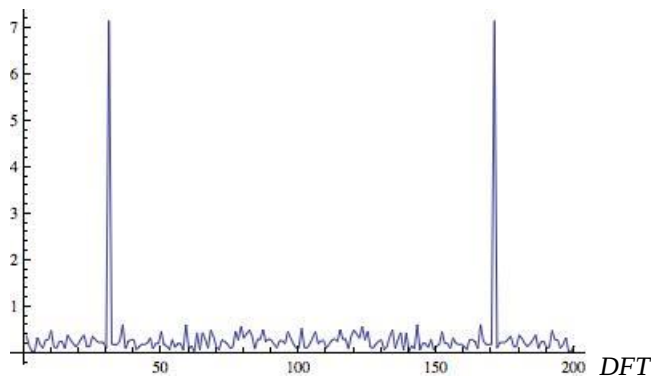
ahol R a véletlen zaj, melyet véletlen szám generátorral állítottunk elő. A mintára illesztett interpoláló görbe



képe:

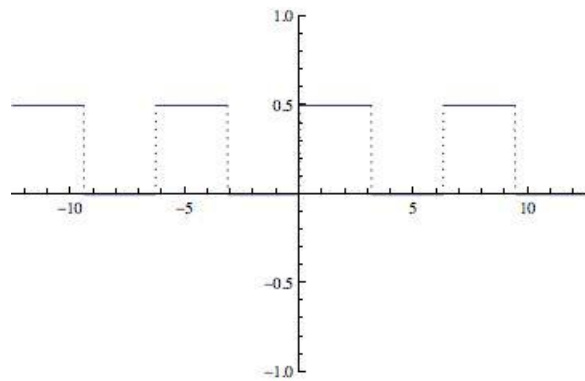
Periodikus jel véletlen zajjal

Látható, hogy ez még mindig meglehetősen „véletlennak” tűnik. Ám a DFT a $t = 30$ és $t = 200 - 30$ közelében „csúcsra jár”, ami a frekvencia-összetevőknek köszönhető:



A Fourier-sorokat alkalmas függvények trigonometrikus polinomokkal való közelítésére használhatjuk. Tekintsük például az

$$f(t) = \begin{cases} 0.5 & \text{ha } 0 \leq t\pi, \\ 0 & \text{ha } \pi < t \leq 2\pi, \end{cases}$$



függvény 2π szerint periodikus folytatását. Képe:
„szögletes” hullám

A

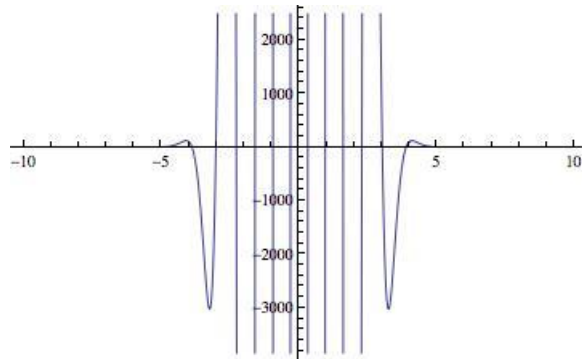
Most pedig lássuk ennek közelítését Fourier-sorának néhány kezdő részletösszegével - oda- és vissza:



A Fourier-transzformáció $\mathbb{R}$ -en a Fourier-sor „folytonos” megfelelője. Tekintsük például az n -edik Hermite-függvényt:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

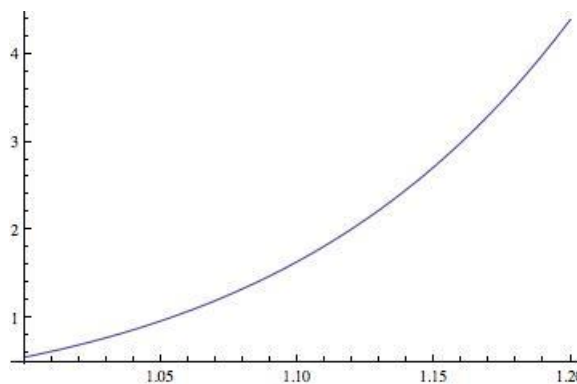
ahol H_n az n -edik Hermite-polinom. Képe $n = 12$ esetén



A 12. Hermite-függvény

Fourier-transzformáltja a következő függvény:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}} x^{12}}{\sqrt{2}},$$



amelynek képe:
transzformáltja

A 12. Hermite-függvény Fourier-

16. fejezet - IRODALOMJEGYZÉK

- [1] J. J. Benedetto, *Spectral Synthesis*, Academic Press, New York, London, San Fransisco, 1975.
- [2] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [3] J. Dieudonné, *Treatise on Analysis I,II,III,VI.*, Academic Press, New York, London, San Fransisco, 1970-1993.
- [4] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators. Part 1: General Theory*, Interscience Publishers, New York, 1958.
- [5] G. B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software, Pacific Grove, California, 1992.
- [6] D. I. Gurevič, *Counterexamples to a problem of L. Schwartz*, Funkcional. Anal. i Priložen., 9(2) (1975), 29-35. (Angol fordítás: Functional Anal. Appl. 9(2) (1975), 116-120.)
- [7] P. R. Halmos, *Mértékelmélet*, Gondolat, Budapest, 1984.
- [8] H. Helson, *Harmonic Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, London, Amsterdam, Sydney, Tokyo, 1983.
- [9] E. Hewitt, K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I,II.*, Springer Verlag, Berlin, 1963.
- [10] A. J. Izzo, *A Functional Analysis Proof of the Existence of Haar-Measure on Locally Compact Abelian Groups*, Proc. Amer. Math. Soc., 115(2) (1992), 581-583.
- [11] N. Jacobson, *Basic Algebra I., II.*, W. H. Freeman and Company, New York, 1989.
- [12] A. Járai, *Modern alkalmazott analízis*, Typotex, Elméleti matematika, Budapest, 2007.
- [13] J. L. Kelley, *General Topology*, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 1975.
- [14] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge Mathematical Library, 2004.
- [15] M. Laczkovich, G. Székelyhidi, *Harmonic analysis on discrete Abelian groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 133(6) (2005), 1581-1586.
- [16] M. Laczkovich, L. Székelyhidi, *Spectral synthesis on discrete Abelian groups*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 143(1) (2007), 103-120.
- [17] M. Lefranc, *L'analyse harmonique dans $\mathbb{Z}^n$* , C. R. Acad. Sci. Paris 246 (1958), 1951-1953.
- [18] L. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, Princeton, Toronto, London, Melbourne, 1953.
- [19] L. Losonczi, *Funkcionálanalízis*, Debreceni Egyetem, természettudományi Kar, Debrecen, 2009.
- [20] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, John Wiley and Sons, Interscience Publishers, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, New York, London, 1960.
- [21] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc. , McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, New York, St. Louis, San Fransisco, 1973.
- [22] L. Schwartz, *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques*, Ann. of Math., Vol. 48(2) (1947), 857-929.
- [23] L. Székelyhidi, *Convolution type functional equations on topological Abelian groups*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1991.
- [24] L. Székelyhidi, *The failure of spectral synthesis on some types of discrete Abelian groups*, Jour. Math. Anal. Appl. 291 (2004), 757-763.
- [25] L. Székelyhidi, *Erdős Jenő válogatott előadásai*, Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet, Debrecen, 2005.
- [26] L. Székelyhidi, *Discrete Spectral Synthesis and its Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, Dordrecht, The Netherlands, 2006.
- [27] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative Algebra I., II.*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1958, 1960.