

Színes hálózatok

Blázsik Zoltán



2014

A tananyag a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0104 "A felsőfokú informatikai oktatás minőségének fejlesztése, modernizációja" c. projekt keretében a Pannon Egyetem és a Szegedi Tudományegyetem együttműködésében készült.



Színes hálózatok

Blázsik Zoltán

Tartalomjegyzék

1. Bevezető kérdések	6
2. Alapvető fogalmak	8
2.1. Színezés	8
3. A kromatikus szám vizsgálata, becslése	13
4. Síkgráfok színezése	15
5. Mohó színezés	17
6. Kromatikus kritikus gráfok	21
6.1. Maximális fokszám, klikkszám, felső becslés	24
7. Kis körök nélkül is nagy lehet a kromatikus szám	25
8. Perfekt gráfok	27
9. Perfekt gráfosztályok	29
9.1. Intervallumgráfok	31
9.2. Merev körű gráfok részfa reprezentációja	36
9.3. Split gráfok	38
10. A kromatikus polinom	39
10.1. A $P_G(k)$ gyökeiről	44
11. Élek színezése	46

11.1. A kromatikus index	47
12. Vizing tétele, 1964	48
12.1. Tornák szervezése	50
12.2. Melyik osztályba?	51
13. Élszínezés általánosítások	52
14. Multigráfok élszínezései	55
15. g-éllefedő színezés	57
16. Listaszínezés	60
16.1. Dinitz sejtése–Galvin tétele	60
16.2. Stabil párosítás.	61
16.3. Totális színezés, csúcsot is, élet is színezzünk!	63
17. A megkülönböztető kromatikus szám	64
18. Kneser sejtése	68
19. Nagy kromatikus szám, rövid páratlan körök nélkül	71
20. Élszínezés, térképszínezés	73
21. Teljes párosítás létezése páros és általános gráfokban	75
22. Cirkuláris kromatikus szám	81
22.1. Speciális gráfosztályok cirkuláris kromatikus száma	82

23. Poliéder-gráfok	84
24. Kis gráfok	86
25. Gráfszínezés és homomorfizmus	86
25.1. Homomorfizmusok és a kromatikus szám	87
26. Cayley gráfok	89
26.1. Akromatikus szám	90
27. Hipergráfok, színezések	91
28. Alkalmazások, érdekességek	93
28.1. Kromatikus spektrum	93
28.2. Síkhipergráfok	94
28.3. Speciális hipergráfok színezhetősége	95
29. Kromatikus kritikus konstrukciók	96
29.1. Csúcsok hasítása	96
29.2. Dirac konstrukciója	96
29.3. A Dirac–Hajós konstrukció	97
29.4. Toft konstrukciója	98
29.5. Kritikus hipergráfok	101
29.5.1. Kritikus gráfok és az összefüggőség	102
29.5.2. Kritikus gráfok sok éllel	103

30. A négyszínsejtés története	105
31. Szivárvány színezés és egyéb változatok	130
31.1. Schur tétele	131
31.2. Richard Rado, további általánosítások	131
32. Szivárvány színű számtani sorozatok	132
33. Színezési feladatok	135

1. Bevezető kérdések

1.1. feladat. Egy 2013 oldalú sokszög csúcsait ki szeretnénk színezni azzal a feltétellel, hogy bármely két szomszédos csúcsnak különböző legyen a színe. Vajon hány színnel sikerül? Igaz-e, hogy ha k színnel sikerül, akkor $k + 1$ -gyel is? Miért?

1.2. feladat. Egy 2013 oldalú szabályos sokszög csúcsait úgy szeretnénk kiszínezni, hogy bármely 3 egymást követő csúcs három különböző színt kapjon. Sikerül-e 3 színt felhasználva? Meg-e 4 színnel?

1.3. feladat. Egy 2013 oldalú szabályos sokszög átlóit úgy szeretnénk kiszínezni, hogy bármely két egymást belső pontban metsző átló eltérő színű legyen. Lehetséges-e a színezést kivitelezni 1006 színnel? Sikerül-e 1007 szín felhasználásával?

1.4. feladat. Egy 2013 oldalú sokszög csúcsai közül hármat éppen 1357477286 módon lehet kiválasztani. Ezekhez a hármasokhoz rendeljünk egy-egy színt úgy, hogy bármely két diszjunkt csúcshármas azonos színű legyen. Meg lehet-e a színezést tenni 2 színnel? Hány színnel megy? Mit válaszolhatunk ezekre a kérdésekre, ha nem 2013 csúcs van, hanem csak 5?

A fenti négy feladatban közös a színezés. Csúcsokat, szakaszokat, hármasokat színeztünk, bizonyos feltételeknek megfelelően.

Az elsőben a sokszög a feladat szempontjából azonos a körgráffal. Nem fontos a síkba történő lerajzolás módja, a szomszédság struktúrális tulajdonság a gráf éleivel azonos meghatározás. A feltétel tehát az, hogy egy körgráfban nem lehet egy él két végpontjának színe azonos.

A második feladatban sem a geometria számít. Itt is csúcsokat kell színezni, de nem csak a sokszögben szomszédos csúcsokat kell eltérő színnel színezni, hanem még a két lépésben elérhető csúcsoknak is más színt kell kapni! Egy gráfban két csúcs távolsága a közöttük létező legkevesebb élből álló út éleinek száma. Különböznük kell tehát az 1 és a 2 távolságra eső csúcsok színének. Tehát a megfelelő gráf csúcsai azonosíthatók a sokszög csúcsaival, azonban éllel nemcsak a sokszögben szomszédos, hanem a másodsomszédos csúcsokat is összekötjük.

Az átlók színezésekor a követelményt a geometriai ábrázolás segítségével fogalmazhattuk meg egyszerűen. Bonyolultabban azt is mondhatnánk, hogy az $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ alaphalmazon definiáljunk egy $G = (V, E)$ gráfot, melyben $V = \{(s_i, s_j)\}$ ahol az i és a j nem szomszédos egészek $\text{mod } n$ (az átlók), valamint $E = \{((s_i, s_j), (s_k, s_l))\}$, amikor teljesül $i < k < j < l \text{ mod } n$, vagyis az átlók belső pontban metszik egymást. Ebből a megfogalmazásból látszik, hogy itt is egy gráf csúcsait színezzük. Most is ugyanaz a feltétel, a szomszédos csúcsok végpontjai nem lehetnek azonos színűek.

A negyedik, több szempontból különleges feladatban a sokszögnek nincs semmi jelentősége. Egy 2013 elemű halmaz összes 3 elemű részhalmaza legyen a gráfunk csúcsalmaza. De hogyan definiáljuk az éleket, hogy a feltétel itt is az legyen mint eddig, nevezetesen az élek végpontjai más-más színt kapjanak. Ha két hármast akkor kötünk össze éllel, ha metszők, akkor egy másik problémát kapunk. Metszők nem kaphatnak azonos színt! Azonban ez nem mond semmit arra nézve milyen színeket kapjon két hármast, ha nem metszők! Vajon megadható-e olyan gráf, amelynek a szokásos csúcsszínezési feladata lényegében azonos a negyedik kérdéssel?

További általános példák gráfok jól színezésére.

1.5. feladat. *Egy osztálykiránduláson bizonyos lányok ki nem állhatják egymást. Hány elegendően nagy szobában lehet őket úgy elhelyezni, hogy haragosok ne kerüljenek egy szobába?*

1.6. feladat. *Noénak hány óriási bárkára volt szüksége, ha nem akarta, hogy valamelyik állat felfaljon egy másikat?*

1.7. feladat. *A rendező város az olimpia minden eseményét közvetíti a világ televíziós társaságai felé. Hány vonalat kell kiépíteni, ha egyik eseményről sem maradhat le?*

1.8. feladat. [242] *Az egyetemi kurzusok jellemzői pl. az időtartam, az oktató személye valamint az, hogy mely szakoknak szól. A hallgatók látogatása kívánatos, ezért minden hallgató részt szeretne venni minden óráján. Ha mindegyik kurzus 1 órás, valamint egy teremben egy napon 12 óra tartható, akkor megtervezhető-e az órarend 4 napra, 6 teremben?*

Az első három feladat közös modelljét kapjuk, ha az objektumok – lányok, megmentendő állatok, sportesemények – pápjait rendre összekötjük, ha – haragban vannak, egyik veszélyes a másikra, időintervallumaik metszők – egyébként pedig nem kötjük őket össze.

A modell a gráf, az objektumokat csúcsoknak vagy pontoknak, az összekötéseket éleknek nevezzük.

A feladatokban közös, hogy a csúcsokat néhány olyan részre kellene partícionálnunk, mely részekbe eső csúcsok között nem megy él.

A negyedik feladatban ha gráfot vezetünk be, vajon mik legyenek a csúcsok?

Az órarendben elhelyezett kurzusok? Hogyan definiáljuk az éleket?

Jelentsen az él konfliktust, ütközést úgy, mint a többi feladatnál!

Egy terembe, egy adott órában nem rakunk két kurzust, erre nem kell vigyázni! Az jelent konfliktust, ha vagy az oktatónak, vagy a hallgatónak egy időben lenne két kurzusa! Kössük össze minden oktatóra a kurzusainak pápjait!

Kössük össze minden szaknak (tanulócsoportnak) szóló kurzusok pápjait!

Vajon a kurzusok beoszthatók-e a 48 órás munkahét óráiba ütközésmentesen úgy, hogy minden egyes órában legfeljebb 6 kurzus lehet?[237]

2. Alapvető fogalmak

2.1. Színezés

2.1. definíció. A $G = (V, E)$ egy gráf, melyben $V = V(G)$ a csúcsok halmaza, $E = E(G)$ az élek halmaza. Bármely $u, v \in V$ két eleme határoz meg, gondolhatjuk úgy, hogy őket köti össze.

Ha minden $e = \{u, v\} \in E$ esetén az u és a v csúcsok különböznek egymástól, akkor azt mondjuk a G hurokért nem tartalmazó gráf. Ha kételemű multihalmazokat is megengedünk, akkor azt mondjuk hurokért is megengedett.

Ha egyetlen $\{u, v\}$ él van, akkor többszörös vagy párhuzamos éleket nem tartalmaz G , ha előfordulhat több $\{u, v\}$ él is, akkor akkor igen.

Ha egyik sem fordul elő a G egy egyszerű, irányítatlan gráf.

Gráf alatt – ha mást nem mondunk – egyszerű gráfot értünk.

A $D = (V, A)$ gráf irányított, ha az A elemei a V bizonyos rendezett párjaiból állnak. [18]

Bizonyos megmentett vadon élő állatok között a táplálkozási lánc természetes irányítást ad.

2.2. definíció. A $G' = (V', E')$ gráf a $G = (V, E)$ gráf részgráfja, ha $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ és az E' minden elemének mindkét végpontja V' -beli.

A $G' = (V', E')$ gráf a $G = (V, E)$ gráf feszített részgráfja, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$, valamint $u', v' \in V'$, $e = \{u', v'\} \in E$ esetén $e \in E'$ is teljesül.

Egy gráfból egy részgráfját megkaphatjuk csúcsok – és a hozzájuk illeszkedő élek –, valamint esetleg további élek törlésével.

Egy feszített részgráfot elő tudunk állítani csak csúcsok törlésével.

Ha a gráfból csak éleket törölünk, akkor minden csúcs megmarad, az ilyen módon kapott részgráfokat néha megkülönböztetjük, feszítő részgráfnak hívjuk.

2.3. definíció. A $\overline{G}$ komplementer gráfban $\{u, v\}$ pontosan akkor él, ha $\{u, v\}$ a G -ben nem él.

A G gráf G' feszített részgráfja teljes részgráf vagy klikk a G -ben, ha G' -ben bármely két csúcs össze van kötve.

A G gráf G' részgráfja független, stabil vagy üres részgráf a G -ben, ha G' -ben nem megy él.

A G gráf k -részes, ha létezik a csúcsoknak k részre történő partíciója oly módon, hogy mindegyik rész a G üres részgráfja. Speciálisan a kétrészes gráfokat páros körüljárásúaknak (párosnak) is hívjuk. [114][218]

A G csúcsainak színezése egy hozzárendelés, minden csúcs kap egy színt (pl. szokás pozitív egészekkel is színezni).

2.4. definíció. G csúcsainak egy színezése jó, ha mindegyik él két végpontja más-más színt kapott.

G csúcsai jól k -színezhetők, ha G k -részes, minden rész üres, így 1 színnel színezhető.

Ha mást nem mondunk általában színezés alatt jó színezést értünk.
 Egy jó k -színezés színosztályai stabil részgráfok.
 Egy k -színezhető gráf l -színezhető is, ha $l > k$.
 Egy k -színezés nem feltétlenül egyértelmű, még akkor sem, ha a színek permutációjától eltekintünk.

Tekintsünk – ha mást nem mondunk – véges gráfokat, legyen $n = |V(G)|$.

2.5. definíció (Gráfparaméterek). [18] A G gráf G' részgráfja maximális teljes részgráf (klikk), ha teljes és további csúccsal nem tudjuk bővíteni, hogy teljes maradjon.
 Egy G' részgráf maximális független, ha nem vehetünk hozzá újabb csúcsot, amellyel együtt is üres lenne.
 Jelölje $\omega(G)$ a legnagyobb teljes részgráf csúcsainak számát.
 Jelölje $\alpha(G)$ a legnagyobb üres részgráf csúcsainak számát.

Ha G k -résztes, akkor $\omega(G) \leq k \leq n$, valamint $\frac{n}{k} \leq \alpha(G)$ teljesül.

2.6. definíció. Jelölje $\chi(G)$ azt a legkisebb k számot, amelyre létezik a G csúcsainak jó k -színezése, (nem létezik tehát jó $(\chi(G) - 1)$ -színezése).
 $\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma.

2.1. állítás. $\chi(G') \leq \chi(G)$ ha G' a G részgráfja.
 A G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$, valamint $\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$ teljesül.
 Ha G -nek van éle $\chi(G)$ legalább 2.
 $\chi(G) = 2$ pontosan a páros gráfokra teljesül.
 K_n , az n csúcsú teljes gráf kromatikus száma n .
 Ha G nem teljes, $\chi(G)$ kisebb, mint n .

A haragban lévő lányok nem kerülnek egy szobába, ha létezik a haragosság gráfnak k -színezése és van legalább k szoba.
 Ha Noé rendelkezik a vadállatok gráf kromatikus száma sok óriási bárkával, akkor meg lehet szervezni a mentést úgy, hogy egyik bárkában se legyen áldozat.
 Ha az olimpiai események időintervallumainak metszet gráfja kromatikus számánál nem kevesebb csatorna működik, akkor minden esemény látható lesz valahol.

2.1. megjegyzés. Ha valahonnan tudjuk, hogy a G gráf kromatikus száma $\chi(G)$, akkor még nem áll rendelkezésünkre feltétlenül egy jó $\chi(G)$ színnel történő színezése G -nek!
 Megfordítva: Ha nem sikerült még találni k színnel jó színezést, nem biztos, hogy nincs is!

Az órarend készítése nehéz!

A negyedik kérdésben adott egy bemenet - a kurzuslista, az adatokkal - és konkrét, szigorú feltételeket

várunk el!

Ha az ütközés gráfról tudnánk, hogy a kromatikus száma nagyobb mint 48, akkor nemleges választ kapnánk.

Ha azonban a gráfot ki lehet színezni 48, vagy annál kevesebb színnel, akkor még figyelembe kell venni azt a plusz követelményt is, hogy egy órában csak legfeljebb 6 kurzus lehet, mivel csak ennyi terem van! Tehát ez a kérdés ebben a formában nem egyszerű színezési feladat.

2.2. megjegyzés (Egyszerűen színezhető gráfosztályok). *Feltehető a kromatikus szám vizsgálata esetén, hogy a gráf összefüggő.*

[18] Több komponensű gráf kromatikus száma megegyezik a legnagyobb kromatikus számú komponensével, hiszen a különböző komponensek színezése egymástól függetlenül történhet.

A fagráfok kétrészesek, ezért kétszínezhetőek.

Egy színezési mód:

Vegyük a fa egy tetszőleges v csúcsát! Tudjuk, hogy fában bármely két csúcsot összeköt pontosan egy út. A pontok távolsága éppen ennek az egyértelmű útnak a hossza (most az éleinek száma). Színezzük a v -től páros távolságra lévő csúcsokat (tehát v -t is) pirosra, a páratlan távolságra esőket kékre. Így minden csúcsot egyértelműen kiszíneztünk. Ez a színezés egyben meg is ad egy két részre bontást!

Vajon hány módon lehet egy fa csúcsait kiszínezni két színnel, ha a színek cseréjétől eltekintünk?

$\chi(C_n)$ kettő, ha n páros, három, ha n páratlan.

Vajon hány módon lehet egy n hosszú kör csúcsait kiszínezni három színnel, ha a színek cseréjétől eltekintünk?

2.1. következmény. *A kétrészes gráfok és a páros körüljárású (tehát páratlan hosszú kört nem tartalmazó) gráfok ugyanazok. 2.3*

Egyrészt egy páratlan kör nem színezhető két színnel, tehát nem lehet egy kétrészes gráf részgráfja.

Másrészt tegyük fel, hogy G összefüggő és nincs benne páratlan kör.

Ekkor alkalmazhatjuk a fákra alkalmazott alábbi színezési eljárást:

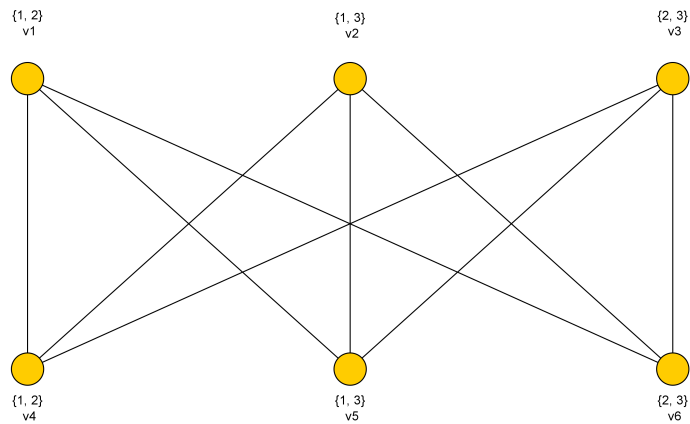
A távolság általában a két pontot összekötő legrövidebb út hossza.

A távolság paritása alapján jó színezni, ugyanis ha $d(v, a) \equiv d(v, b) \pmod{2}$ és az $\{a, b\} \in E(G)$ lenne, akkor ha v -ből a -ba, onnan b -be majd vissza v -be sétálunk az utak és az $\{a, b\}$ él mentén, akkor valahol egy páratlan kör bezáródna.

A három ház, három kút gráfot nem tudjuk lerajzolni a síkra oly módon, hogy az élek közül valamelyik kettő ne messe egymást belső pontban. 1

2.2. feladat (Színezési feladatok). *Az $\{1, 2, \dots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám összege legfeljebb 13 legyen. Legalább hány csoport szükséges? [99, 100]*

2.3. feladat. *Az $\{1, 2, \dots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám szorzata legfeljebb 13 legyen. Legalább hány csoport szükséges?*



1. ábra. A híres három ház, három kút gráf is páros.

2.4. feladat. Az $\{1, 2, \dots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám összege legfeljebb k legyen. Mely k -ra elegendő 9 csoport?

2.5. feladat. Az $\{1, 2, \dots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám szorzata legfeljebb k legyen. Mely k -ra elegendő 9 csoport?

2.6. feladat. Az $\{1, 2, \dots, 20\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám relatív prím legyen. Legalább hány csoport szükséges?

2.7. feladat. Az $\{1, 2, \dots, n\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám relatív prím legyen. Jelölje $rp(n)$ azt a legkisebb k számot ahány csoport elegendő. Igaz-e, hogy az $rp(n)$ monoton függvény? [99, 100]

2.8. feladat. Az $\{1, 2, \dots, 20\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám között oszthatósági reláció áll fenn. Legalább hány csoport szükséges?

2.9. feladat. Az $\{1, 2, \dots, 20\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám összege osztható legyen 3-mal. Legalább hány csoport szükséges?

2.10. feladat. Egy konvex n -szöget egymást nem metsző átlók behúzásával háromszögekre bontottunk.

Rendeljünk a keletkezett háromszögekhez színeket úgy, hogy közös határszakasszal rendelkező háromszögek nem lehetnek azonos színűek. Legalább hány színre van szükség?

2.11. feladat. *Egy konvex n -szöget egymást nem metsző átlók behúzásával háromszögekre bontottunk. Rendeljünk az n -szög csúcsaihoz színeket úgy, hogy olyan két csúcs ne lehessen azonos színű, amelyekhez van olyan kis háromszög aminek ők csúcsai. Legalább hány színre van szükségünk?*

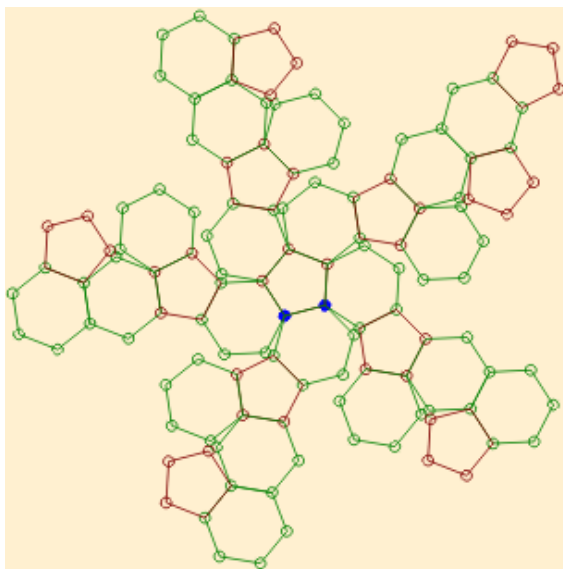
2.12. feladat. *Adjunk meg 8 pontot a síkon úgy, hogy egy szabályos 8-szög csúcsaiban helyezkedjenek el. Vegyük azt a 28 szakaszt, amelyeket a pontpárok meghatároznak. Osszuk a szakaszokat minél kevesebb csoportba úgy, hogy ne kerüljön két szakasz egy csoportba akkor, ha belső pontban metszik egymást!*

2.13. feladat. *Néhány egyenest úgy vettünk fel a síkon, hogy bármely két egyenes metszi egymást, de semelyik 3 egyenesnek nincs közös pontja. Hány szín elegendő az egyenesek által meghatározott tartományok kiszínezéséhez akkor, ha szomszédos szakasszal rendelkező tartományok nem lehetnek azonos színűek? [99, 100]*

2.14. feladat. *Hány színnel színezzhető az n dimenziós hiperkocka csúcshalmaza, ha egy él két végpontja nem lehet azonos színű? [18]*

2.15. feladat. *A focilabda 5- és 6-szögekből áll, ilyenek vannak az azonos hosszúságú élek mentén összevarrva.*

Hány színt kell használni az elemekhez (a sokszöglapokat színezzük), ha ebben a különleges labdában nem lehetnek egyszínű élszomszédos sokszögek? 2



2. ábra. Az öt és hatszögekből álló focilabda.

3. A kromatikus szám vizsgálata, becslése

3.1. definíció. [186] $A v \in V(G)$ csúcs $d(v)$ foka a hozzá illeszkedő élek száma.
 $\Delta(G)$ jelöli a G csúcsainak maximális fokszámát, míg $\delta(G)$ a minimális fokszámot.

Vajon van-e valamilyen általános összefüggés a fokszámok és a kromatikus szám között?

3.1. állítás. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Az állítás nyilvánvaló, $\Delta(G) + 1$ színnel G kiszínezhető.

Amikor a tetszőleges u csúcsot ki akarjuk színezni, akkor az esetleg már kiszínezett szomszédai színei között nem lehet több különböző, mint $\Delta(G)$. Van tehát új szín u -hoz!

Az állítás éles:

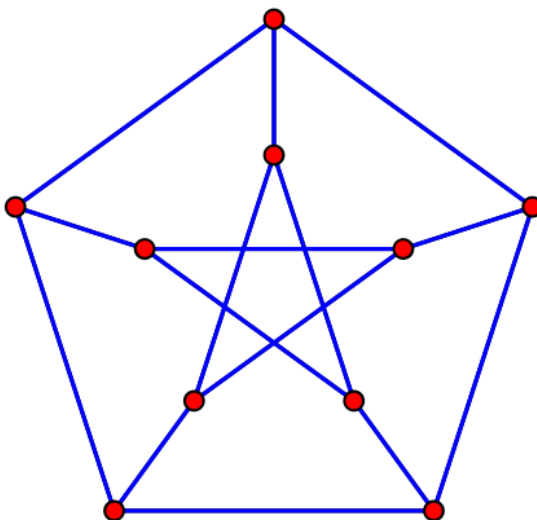
$$\chi(K_n) = n, \Delta(K_n) = n - 1$$

$$\chi(C_{2l+1}) = 3, \Delta(C_{2l+1}) = 2 \text{ Vajon ki lehet-e a következő } P \text{ gráf csúcsait színezni kevesebb színnel, mint } \Delta(G) + 1?$$

[13]

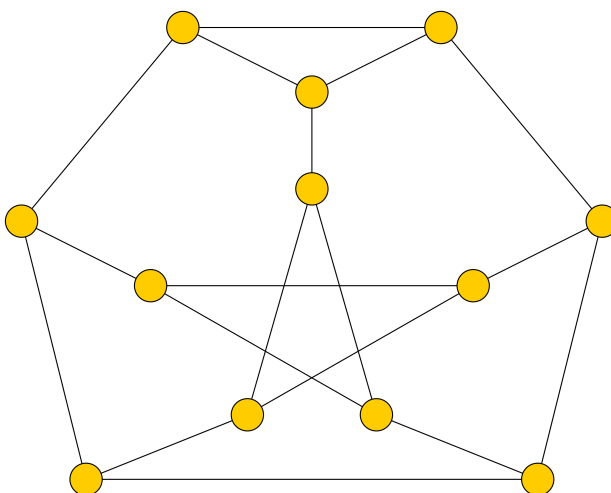
Mint láttuk, $\Delta(G) + 1$ szín akkor is elegendő, ha valaki már hozzáfogott a színezéshez, nem nézett előre, csak a jó színezésre ügyelt!

[155]

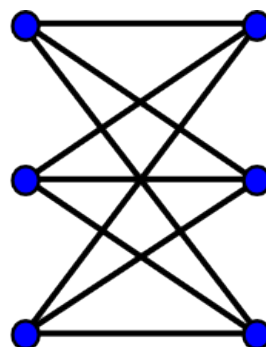
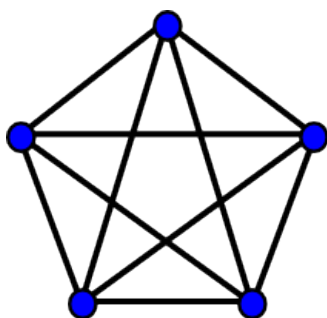


3. ábra. A Petersen-gráf bár 3-reguláris, a csúcsai kiszínezéséhez négy szín kell.

[111]



4. ábra. Ha a Petersen-gráf egyik csúcsát helyettesítjük egy háromszöggel és mindhárom új csúcshoz egy-egy élt kötünk be, akkor elegendő 3 szín.



5. ábra. Kuratovszki tétele szerint ha egy gráf nem síkgráf, akkor megtalálható benne vagy K_5 , vagy $K_{3,3}$ topológikusan.
[208]

Ha eddig még nem használt fel több színt, mint $\Delta(G) + 1$ -et, akkor a színezés be is fejezhető $\Delta(G) + 1$ szín felhasználásával.

4 Adjunk meg – ha lehetséges – olyan előszínezést legfeljebb $\Delta(G)$ színt felhasználva, hogy a befejezéshez rákényszerüljünk $\Delta(G) + 1$ szín használatára! 3

4. Síkgráfok színezése

4.1. definíció. Ha G pontjai a sík bizonyos pontjai, élei pedig a síkban lerajzolt Jordan-görbék, amelyek nem metszik egymást belső pontban, akkor G -t síkgráfnak mondjuk. Valamint minden olyan H gráfot síkba rajzolható gráfnak (röviden síkgráfnak) nevezzünk, amelynek lehetséges a fent leírt beágyazása.

Ilyen gráf pl. a K_4 , azonban K_5 nem síkgráf! Az előbbit csak le kell rajzolni!

Az utóbbit nem lehet, mert véve egy 5 hosszú körét és annak síkbarajzolását a belsejébe is és a külsejébe is be kéne húzni átlókat. Azonban kívül is és belül is legfeljebb 2 átló húzható be metszés nélkül. 5

Ha egy G gráfot beágyazunk egy Σ felületre, akkor a csúcsok a felület különböző pontjai lesznek, az élek pedig egymást belső pontban nem metsző egyszerű görbék lesznek a végpontjaiknak megfelelő pontok között.

A görbék együtt körülhatárolhatnak bizonyos felületrészeket. Ezeket nevezzük országoknak. Ha a felület a sík, akkor síkgráfot tudunk beágyazni, de egyéb felületbe is beágyazhatunk gráfot, akkor az arra a felületre rajzolható.

Legyen G egy a síkra rajzolt gráf, csúcsainak, éleinek és a beágyazáskor keletkező országoknak a

száma rendre: c , e , l , valamint G komponenseinek száma k .
Köztük teremt kapcsolatot az Euler-formula:

4.1. tétel. [194] Az Euler-formula szerint teljesül $c + l - e = 1 + k$ összefüggés.

Bizonyítás: [155] A G élszámára vonatkozó indukcióval.

Ha G -nek nincs éle, akkor minden csúcs egy komponens és egy ország van. Tegyük fel, hogy G síkgráf és minden nálánál kevesebb élű síkgráfra teljesül a formula.

Legyen e a G egy éle.

Tegyük fel először, hogy az e egy híd, vagyis $G \setminus e$ eggyel több komponenssel rendelkezik mint G , Ekkor az e él mindkét oldalon ugyanazzal az országgal érintkezik.

Elhagyásával tehát csak az élek száma csökken eggyel és a komponensek száma nő eggyel. Mivel az így kapott gráfra a formula érvényes, így érvényben marad G -re is. Másodszor tegyük fel, hogy az e nem híd. Ekkor a $G \setminus e$ gráf ugyanannyi komponensű marad, most azonban az országok száma lesz kevesebb eggyel, hiszen az a két ország, amelyet e választott el egybe olvad.

A formula érvényessége így is öröklődik G -re. ■

4.1. következmény. Minden összefüggő síkgráfra $e \leq 3c - 6$ teljesül.

Bizonyítás: A gráf síkbeli beágyazásakor mindegyik országot legalább 3 él határol.

Bármely él legfeljebb két országot választ el. Ha összevetjük az illeszkedő él-ország párokat, akkor $2e \geq 3l$ adódik. Az Euler-formulába a becslést beírva

$c + \frac{2e}{3} \geq e + 2$, tehát $3c - 6 \geq e$ adódik. ■

4.2. tétel (Kenneth Appel és Wolfgang Haken). Négyzintétel:

Minden síkgráf 4-színezhető.

Az első olyan matematikai tétel, amelynek az első bizonyításához a számítógép segítségét is igénybe vették. A hetvenes években a nagy programozási munkát John Koch végezte. Azt már nagyon régen bebizonyították, hogy 5 szín elegendő.

4.3. tétel (Alfred Kempe - Percy John Heawood). Ötszintétel:

Minden síkgráf 5-színezhető.

Bizonyítás: Legyen G egy síkgráf amelynek $n \geq 6$ csúcsa és m éle van. Nyilván a kevesebb, mint 6 csúcsú síkgráf 5-színezhető. Indukcióval bizonyítunk.

Feltehetjük, hogy minden n -nél kevesebb csúcsú síkgráfra igaz az állítás.

A fokszámtálag kisebb, mint 6

$$\frac{2m}{n} \leq \frac{2(3n-6)}{n} < 6$$

mivel az élszámot síkgráfokra az Euler-féle poliédertétel következménye segítségével így becsülhetjük. Legyen $v \in G$ egy olyan csúcs, amelynek a foka legfeljebb 5. Az indukciós feltételből a $G' = G \setminus v$ gráfnak létezik egy 5-színezése. Ha v -nek kevesebb, mint 5 különböző színű szomszédja van, akkor ki tudjuk v -t is színezni. Feltehető, hogy v szomszédjai pl. pozitív forgásirányban v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , az indexek a színeiket mutatják.

Jelölje G_{13} a G' azon részgráfját, amelyet az 1 és 3 színekkel színezett csúcsok és a közöttük haladó élek határoznak meg. A G_{24} hasonlóan definiált.

Ha a v_1 és v_3 a G_{13} nem azonos komponensében vannak, akkor az egyik komponensben felcserélhetők a színek, így a v színezhető lesz pl. 1-gyel.

Ha azonos komponensben vannak, akkor összeköti őket egy út, amelyben csak 1-gyel vagy 3-mal színezett csúcsok vannak.

Hasonlóan gondolkodva a G_{24} -ben kell lennie egy a v_2 és v_4 pontokat összekötő, 2 és 4 színekkel színezett útnak.

De akkor metszené egymást a két út, ami ellentmond az indukciós feltételnek! [18] ■

5. Mohó színezés

A G gráfot szeretnénk kiszínezni a $c_1, \dots, c_k$ színek felhasználásával.

Rendezzük a G gráf csúcsait, legyen a rendezés: $v_1, \dots, v_n$.

Mohón színezünk, ha v_1 megkapja az első színt, c_1 -et, majd általában, ha már a $v_1, \dots, v_j$ csúcsokat jól kiszíneztük, akkor a v_{j+1} kapja azt a legkisebb indexű színt amit kaphat, a c_i -t, ha $c_1, \dots, c_{i-1}$ színű szomszédjai már vannak v_{j+1} -nak.

A színezés eredménye a csúcsok sorrendjétől függ.

5.1. állítás. G csúcsainak van olyan sorrendje, amelyre a mohó színezés $\chi(G)$ színt használ fel. [155] [13]

Létezik a G -nek $\chi(G)$ színezése. Egy ilyen színezés ismeretében rendezzük a csúcsokat így: Először a c_1 színűek, majd a c_2 színűek jönnek és így tovább. Ekkor a mohó színezés nem kényszerül arra, hogy a sorrendben valamikor nagyobb indexű színt használjon fel, mint a kiinduló $\chi(G)$ színezés.

Az azonban nem igaz, hogy mindig éppen a kiinduló színezést adja vissza.

Vajon mennyire lehet rossz a mohó színezés?

Azt biztosan tudjuk, hogy nem használ $(\Delta(G) + 1)$ -nél több színt!

Vegyünk a $(K_{n,n} \setminus M)$ -t, a teljes páros gráfból kitöröltük egy teljes párosítás éleit.

A kétrészes gráf 2-színezhető.

Ha azonban azt a szerencsétlen sorrendet adjuk meg, hogy rendre a párosítás éleinek két végpontját soroljuk egymás után, akkor a mohó algoritmus az első két csúcsot c_1 -gyel színezi, a második két csúcsot c_2 -vel, és így tovább, az utolsó két csúcsnál már a c_n -t használja fel.

5.1. definíció (Színes sakktábla). Bevezetjük a sakkfiguragráfokat.

Ha tudjuk, hogyan lép egy sakkbábu, akkor azt az üres sakktábla egy mezőjére helyezve meg tudjuk adni, mely mezőkre léphet.

Az F figura gráfja $F(V,E)$, ahol a V a sakktábla összes mezője, $E = \{(i, j), (k, l) : (i, j) \leftrightarrow (k, l)\}$ pedig azon mezőpárokat tartalmazza, melyek között az F figura lépni tud.

Csak a tiszteket tekintjük, a gyalog menetmódja nem szimmetrikus, sőt speciális szabályok vonatkoznak rá.

5.2. feladat. Határozzuk meg a bástya-, a király-, a futógráf kromatikus számát!

5.3. feladat. Mit mondhatunk általánosított, $n \times n$ -es sakktábla esetén? Mennyire lehet rossz a mohó algoritmus?

5.4. feladat. Mennyi a huszár- és vezérgráf kromatikus száma?

5.5. feladat. Adjunk alsó és felső becsléseket a huszár- és a vezérgráf kromatikus számára az általánosított, $n \times n$ -es sakktábla esetén!

Érdekeselek, az általános gráfoktól egyszerűbbek a geometriai tartományok, metszéspontok, szakaszok színezéseinek kérdései.

5.6. feladat. Néhány egyenes a síkon úgy helyezkedik el, hogy bármely kettő metsző, de bármely metszésponton legfeljebb két egyenes halad át. Hány szín kell a tartományok kiszínezéséhez, ha közös szakasz vagy félegyenes esetén a színek nem lehetnek azonosak?

5.7. feladat. Hány szín kell a metszéspontok kiszínezéséhez, ha két pont nem lehet egyszínű, ha valamilyik egyenesen közvetlenül egymást követő metszéspontok?

5.8. feladat. Legyenek a G gráf csúcsai azon "kis" szakaszok, amelyek valamely egyenesen egymást követő metszéspontokat kötik össze. G -ben két kis szakaszt él köt össze, ha valamelyik végpontjuk egybeesik. Hány színnel színezhető G ?

További felső korlátok adhatók meg foksámok alapján.

5.2. definíció. Legyen $col(G) := \max_{G' \subseteq G} \delta(G') + 1$ ahol G' a G összes feszített részgráfján fut végig.

A mohó színezés egy változatával G kiszínezhető $col(G)$ színnel.

5.1. tétel (Szekeres–Wilf-tétel). [18] $\chi(G) \leq \text{col}(G)$

Bizonyítás: Egy ügyes sorrend segít a mohó színezésnek, rendezzük a csúcsokat a következőképpen:

v_n ,

v_{n-1} legyen a $G \setminus v_n$ gráf egyik legkisebb fokú csúcsa, $\dots$,

v_i a $G \setminus \{v_n, \dots, v_{i+1}\}$ gráf egyik legkisebb fokú csúcsa, $\dots$

Ha ilyen rendezéssel alkalmazzuk a mohó színezést, akkor a v_i csúcs színezéséhez elegendő az első $\delta(G \setminus \{v_n, \dots, v_{i+1}\}) + 1$ szín, amiből tudunk választani, hiszen $\text{col}(G)$ ezen értékek maximuma. ■

5.9. állítás. Legyen G összefüggő gráf.

$\Delta(G) = \text{col}(G) - 1$ pontosan akkor áll fenn, ha G reguláris.

Bizonyítás: Egyrészt ha G reguláris, akkor bármely csúcsot hagyjuk is utolsónak, neki éppen $\Delta(G)$ szomszédja lesz.

Másrészt ha pl. a v_1 csúcs foka kisebb mint $\Delta(G)$, akkor őt hagyjuk utoljára, valamint vigyázzunk arra, hogy mindegyik csúcsnak legyen szomszédja, amely még utána lesz a rendezésben.

Mivel a gráf összefüggő, így pl. egy feszítő fa alapján vegyük előbbre a v_n -től távolabbi csúcsokat. Ekkor $\Delta(G) > \text{col}(G) - 1$. ■

A reguláris gráfokra nehezebb mohón színezni!

5.1. következmény. Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

A teljes gráfokra és a páratlan körökre $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ áll fenn.

5.2. tétel (Brooks tétele). [41] Legyen G összefüggő. Ha nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$ teljesül.

A Brooks-tétel bizonyításához szükségünk lesz két segédállításra. [155][18]

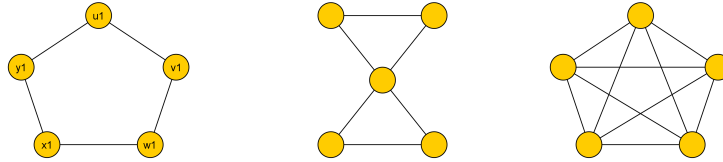
5.10. lemma. Legyen G összefüggő, de nem teljes gráf. Ekkor létezik három csúcs, melyek között pontosan két él megy G -ben.

Bizonyítás: Mivel G nem teljes, így pl. u és v nincs összekötve.

Mivel összefüggő, létezik egy u -ból v -be vezető legrövidebb út G -ben.

Az u utáni első (x) és második (w) csúcs az úton (ez utóbbi lehet v is) és u éppen megfelelő hármas, hiszen x mindkettőnek szomszédja, viszont u és w nem szomszédos. ■

5.11. lemma. Legyen G kétszeresen összefüggő, legalább 3 minimális fokú gráf. Ha G nem teljes, akkor léteznek x, y, z csúcsok, melyekre $\{x, y\}, \{x, z\} \in E(G)$ és $\{y, z\} \notin E(G)$, valamint $G \setminus \{y, z\}$ összefüggő.



6. ábra. Az első és harmadik gráf a Brooks-tétel szerint kivétel, egyébként elegendő $\Delta(G)$ szín.

Bizonyítás: Ha G 3-szorosan összefüggő, akkor az állítás egyszerűen következik az előző lemmából. Ha G nem 3-szorosan összefüggő, akkor pl. $\{x, y\}$ egy kételemű elvágó halmaz. Mivel G kétszeresen összefüggő, $G \setminus x$ összefüggő.

A $G \setminus x$ gráfnak az y elvágó csúcsa, így az y illeszkedik legalább két, B_1, B_2 blokkra (összefüggő részgráfja $G \setminus x$ -nek).

Mivel a G kétszeresen összefüggő, így $i=1$ és 2-re a B_i -beli y_i elvágó pont nem elvágó pont G -ben, így az x csúcs szomszédos valamely $v_i \in B_i \setminus \{y_i\}$ ponttal. Így a $G \setminus \{x, v_1, v_2\}$ összefüggő.

De az x foka legalább 3 a G -ben, így van szomszédja $G \setminus \{v_1, v_2\}$ -ben.

Tehát $G \setminus \{v_1, v_2\}$ összefüggő. ■

Bizonyítás: Brooks tételének bizonyítása, (Lovász László, 1975)

[155] Ha G nem reguláris, akkor az előző 5.1 következményből következik az állítás.

Feltehetjük, hogy G reguláris és $\Delta(G) \geq 3$.

A $\Delta(G) = 2$ esetben G kör. Megadunk egy megfelelő sorbarendezést a csúcsokon, melyre a mohó színezés jól teljesít!

Ha a G -nek az x egy elvágó pontja, legyenek a $G \setminus x$ komponensei $G'_1, \dots, G'_s$.

Továbbá jelölje G_i a G'_i és az x által feszített gráfot ($i = 1, \dots, s$).

G_i nem reguláris, mert az x foka kisebb. Így alkalmazva a következményt újra mindegyik G_i -nek létezik $\Delta(G)$ színezése.

Mivel a színeket lehet cserélni, elérhető, hogy a minden G_i -ben azonos legyen az x színe.

Egyesítve a színezéseket a G egy jó $\Delta(G)$ színezését kapjuk.

Tegyük fel, hogy G kétszeresen összefüggő!

Az előző lemma szerint van egy v_n csúcs, melynek v_1, v_2 szomszédai és $G \setminus \{v_1, v_2\}$ összefüggő.

Számozzuk a további csúcsokat egy v_n gyökerű feszítőfa szerint.

Így biztosítjuk, hogy a $v_3, \dots, v_{n-1}$ csúcsoknak is legyen nagyobb indexű szomszédja.

A mohó algoritmus a v_1, v_2 csúcsoknak adja az első színt. Így amikor a v_n -t kell kiszínezni, akkor biztos nem lesz neki több, mint $\Delta(G) - 1$ különböző színű szomszédja. Tehát $\Delta(G)$ színnel kiszíneztük G -t! ■

6. Kromatikus kritikus gráfok

Mitől nagy a kromatikus szám? Hogyan tanulmányozzuk egy gráf kromatikus számát? A kromatikus szám egy globális gráfparaméter, nem elég a gráf egy kisebb részét ismerni ahhoz, hogy meg tudjuk mondani mennyi a kromatikus száma. Egy teljes gráfból egy csúcsot - vagy akár csak egy élt - törölve eggyel csökken a kromatikus szám. Ha egy páratlan hosszú kör egyetlen csúcsát vagy élt töröljük szintén ezt tapasztaljuk, pedig egy kör kevés élt tartalmaz, nagyon ritka. Másrészt egy kétrészes gráf kromatikus száma 2 egészen addig, amíg egyetlen éle van. Sok élet kell tehát törölnünk ahhoz, hogy csökkenjen ez az érzékeny gráfparaméter.

Ha $\chi(G) = k$, akkor minden $G' \subseteq G$ részgráfra $\chi(G') \leq k$.

Így ha G -ből elhagyunk egy élt, akkor a kromatikus szám vagy megmarad vagy 1-gyel csökken.

Ha G -ből elhagyunk egy csúcsot, akkor ugyanez igaz.

6.1. definíció. [59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63] A G gráf χ -élkritikus, ha bármely $e \in E(G)$ élre $\chi(G \setminus e) < \chi(G)$

6.2. definíció. A G gráf χ -pontkritikus, ha bármely $v \in V(G)$ csúcsra $\chi(G \setminus v) < \chi(G)$

Ha G -ből igyekezünk úgy elhagyni pl. éleket egyesével, hogy ne csökkenjen a kromatikus szám, akkor egyszer azt tapasztaljuk, hogy már egyik él sem hagyható el.

Így kaptunk egy χ -élkritikus részgráfját G -nek.

Ha G -ből csúcsokat hagyunk el, akkor ugyanez igaz.

Természetesen élek vagy csúcsok törlési folyamata végén nem feltétlenül egyértelmű a megkapott kritikus gráf.

6.1. állítás. Ha G χ - pontkritikus, akkor G blokk (kétszeresen összefüggő). [155]

Bizonyítás: Ha G nem összefüggő, akkor minden komponense kiszínezhető kevesebb, mint $\chi(G)$ színnel (hiszen ha egy másik komponensből törölünk egy csúcsot, akkor a tekintett komponens megmarad és kiszínezhető kevesebb mint $\chi(G)$ színnel).

De akkor G is kiszínezhető lenne kevesebb, mint $\chi(G)$ színnel! Tehát G összefüggő.

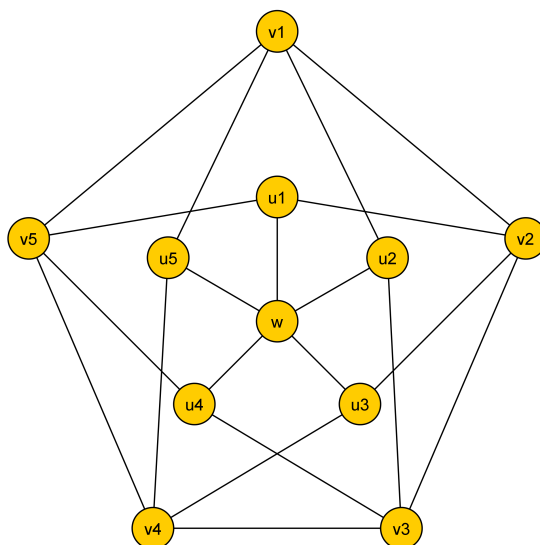
Ha G csak egyszeresen összefüggő lenne, akkor van egy u elvágó pont, $V \setminus u$ felbomlik $V_1, \dots, V_s$ diszjunkt részekre.

Legyenek G_i -k a $V_i \cup \{u\}$ csúcshalmazok által feszített részgráfok.

Mindegyik G_i kiszínezhető $\chi(G) - 1$ színnel.

Mivel csak az u csúcs közös a G_i -kben, így kaphat olyan színt, hogy a G is $\chi(G) - 1$ színezhető legyen.

Tehát G egy blokk. ■



7. ábra. A Mycielski-féle konstrukció a kritikus ötszögből egy nagyobb kritikus gráfot állít elő.

6.2. állítás. [59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63] Ha G χ -pontkritikus, $\chi(G) = k$, akkor $\delta(G) \geq (k - 1)$

Bizonyítás: Ha lenne $(k-1)$ -nél is kisebb fokú v csúcs, akkor őt törölve a maradék gráf a kritikusság miatt kiszínezhető $(k-1)$ színnel.

Mivel v -nek nincs annyi szomszédja, mint ahány színosztály, így az egyik színét megkaphatja, vagyis G is $(k-1)$ - színezhető lenne.

Tehát $\delta(G) \geq (k - 1)$. ■

6.3. állítás. [59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63] Ha $\chi(G) = k$, akkor van G -nek legalább k olyan csúcsa, amely legalább $(k-1)$ fokú.

Bizonyítás: Hagyjunk el addig csúcsokat, amíg nem kapunk egy G' k -kritikus részgráfot. Az előző állítás szerint minden megmaradt csúcs foka legalább $(k-1)$. Mivel k -szín kell a G' kiszínezéséhez, így van legalább k csúcsa. ■

Bizonyítás: A Szekeres–Wilf-tétel egy másik bizonyítása

Legyen G' a G egy $\chi(G) = k$ -kromatikus kritikus részgráfja.

Ekkor $\chi(G) = \chi(G') \leq \delta(G') + 1 \leq \max_{G'' \subseteq G'} \delta(G'') + 1$, ahol a maximumot - mint a tételben - a G összes feszített G'' részgráfjaira is vehetjük. ■

6.1. tétel (Dirac tétele). [18][59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63] $\chi(G) \geq k$, valamint adott G -nek egy $[X, Y]$

csúcspartíciója úgy, hogy mind a $G(X)$, mind a $G(Y)$ feszített részgráfok $(k-1)$ színezhetőek. Ekkor az X és Y között menő vágásbeli élek száma legalább $(k-1)$.

Bizonyítás: Legyenek $G(X)$ és $G(Y)$ színosztályai rendre

$X_1, \dots, X_{k-1}; Y_1, \dots, Y_{k-1}$

Vezessük be a H kétrészes gráfot, amelynek az egyik részében az X_i -knek, a másik részében az Y_i -knek felel meg egy-egy pont.

Pontosan akkor kötünk össze két pontot, ha különböző oldalon vannak és a nekik megfelelő X_i és Y_j részek között G -ben nem megy él.

Tegyük fel, hogy kevesebb, mint $(k-1)$ él lenne az $[X, Y]$ vágásban. Ekkor a H -nak több, mint $(k-1)(k-2)$ éle van. $(k-2)$ csúccsal lehetetlen lefogni több, mint $(k-2)(k-1)$ élt, tehát a lefogó pontok minimális száma legalább $(k-1)$.

König tétele szerint ekkor a H -ban van $(k-1)$ elemű párosítás, vagyis teljes párosítás.

Emiatt, ha a párba állított színosztályokat azonos színűekre színezzük, akkor ez a színezés a G egy $(k-1)$ -színezése.

Tehát a vágásban valóban lennie kell legalább $(k-1)$ élnek. ■

6.1. következmény. Ha G k -pontkritikus gráf, akkor $(k-1)$ -szeresen élösszefüggő. [155] [18] [59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63]

Bizonyítás: Ha $k = 1$, akkor $G = K_2$, amely élösszefüggő.

Ha $k = 2$, akkor G egy páratlan kör, amely 2-élösszefüggő.

Ha $k \geq 4$, akkor tegyük fel, hogy G nem $(k-1)$ élösszefüggő.

Ekkor létezik olyan $[X, Y]$ csúcspartíciója, hogy a részek között kevesebb, mint $(k-1)$ él megy.

A $G(X)$ és $G(Y)$ $(k-1)$ -színezhetőek a kritikusság miatt.

Az előző tétel miatt ellentmondásra jutottunk. ■

6.4. állítás. [59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63] G k -pontkritikus, $W \subseteq V(G)$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor $G(W)$ nem teljes gráf.

Bizonyítás: Legyenek a $G \setminus W$ komponenseinek csúcshalmazai: $V_1, \dots, V_s$.

Legyen G_i a $V_i \cup W$ által feszített részgráf; hívjuk ezeket W -komponenseknek. Mindegyik G_i $(k-1)$ -színezhető.

Tegyük fel, hogy mindegyik G_i -ben különböző színeket kaptak a W pontjai.

Ekkor a színek alkalmas permutációjával elérhető, hogy mindegyik G_i -ben a W ugyanúgy legyen színezve. Ekkor mindegyik G_i maradék részét kiszínezve, a G egy jó $(k-1)$ -színezését kapjuk.

Ha a W teljes gráfot feszítene, akkor ellentmondásra jutnánk. ■

6.1. megjegyzés. [59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63] Speciálisan ha egy k -pontkritikus gráf elvágó halmaza kételemű, akkor a két csúcs között nincs él. [18]

6.2. tétel (Dirac tétele). [59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63] Ha G k -élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor pontosan két W -komponens keletkezik és a G az uniójuk.

Bizonyítás: Az előző megjegyzés azt is mondja, hogy u és v nincs összekötve G -ben.

Mindegyik W -komponens $(k-1)$ -színezhető. Ha lennének a W -komponenseknek olyan $(k-1)$ színezései, hogy az u és v mindegyikben ugyanúgy lenne színezve (lényegében elég lenne az, hogy vagy egyszínűre, vagy különböző színűre), akkor G is $(k-1)$ színezhető lenne.

Emiatt kell, hogy legyen olyan G_1 W -komponens, amelynek minden $(k-1)$ színezésében u és v azonos színt kap és lennie kell olyan G_2 W -komponensnek is, amely minden $(k-1)$ színezésében az u és a v más-más színt kap. Ekkor ezen két komponens uniója kiadja a G -t, hiszen k -kritikus, további W -komponense nem lehet. ■

6.3. tétel (Dirac tétele). [59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63] Ha G k -élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor létezik a G fenti felbontása a G_1 és G_2 uniójára.

Állítás:

Ha G_1 -ben az u -t és v -t összekötjük, akkor k -élkritikus gráfot kapunk.

Ha G_2 -ben az u -t és v -t azonosítjuk, akkor k -élkritikus gráfot kapunk.

Bizonyítás: A G_1 -ben minden színezésnél u és v más színt kap, vagyis $G'_1 = G_1 \cup \{u, v\}$ k -kromatikus. G'_1 k -élkritikus is, mivel $G'_1 \setminus f$ tetszőleges f élre $(k-1)$ -kromatikus.

Ha $f = e$ az nyilvánvaló.

Más f élre a G k -kritikussága miatt G_2 kikényszeríti, hogy u és v más-más színű legyen, ezzel a feltétellel azonban már van $(k-1)$ színezése a $G'_1 \setminus f$ gráfnak. Ha G_2 -ben összeragasztjuk u -t és v -t, akkor éppúgy megmarad a k -kromatikussága, valamint k -élkritikussága is. ■

6.4. tétel. Ha G k -élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor $d(u) + d(v) \geq (3k - 5)$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $G_1 \cup \{u, v\}$ egy k -élkritikus gráf.

Tudjuk, hogy csak $G_1 \cup \{u, v\}$ -ben mind u -nak, mind v -nek legalább $(k-1)$ szomszédja van.

Így összesen u és v -nek van legalább $(2k-4)$ G_1 -beli szomszédja.

Hasonlóan a G'_2 gráf is k -élkritikus, így az összeforrasztott u - v csúcsnak együtt van legalább $(k-1)$ szomszédja.

Így $d(u) + d(v) \geq (3k - 5)$ teljesül G -ben. ■

6.1. Maximális foksám, klikkszám, felső becslés

- (A Brooks-tétel ekvivalens megfogalmazása)

Ha G k -pontkritikus, $(k-1)$ reguláris gráf, akkor G vagy a K_k , vagy egy páratlan kör ($k=2$).

- $\Delta(G) > 2$, $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ pontosan akkor teljesül, ha G tartalmaz egy $\Delta(G) + 1$ méretű klikket.

6.5. feladat. Igaz-e, hogy $\chi(G) \geq \Delta(G) + 1 - k$ maga után vonja, hogy G tartalmaz egy $\Delta(G) + 1 - k$ klikket?

6.6. sejtés (Reed sejtése, 1998). [80] $\chi(G) \geq \Delta(G) + 1 - k$ esetén $\omega(G) \geq \Delta(G) + 1 - 2k$ vagy $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+1+\omega(G)}{2} \right\rceil$ a szimmetrikusabb formája.

6.7. állítás. [68] Legyen G háromszögmentes gráf. Ekkor $\chi(G) \leq 3 \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{4} \right\rceil$.

Bizonyítás: Legyen $k = \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{4} \right\rceil$. $V(G)$ -t partícionáljuk fel a $V_1, \dots, V_k$ részekre úgy, hogy a részeken belül haladó élek száma a lehető legkisebb legyen.

A V_i által feszített G_i gráf maximális foka legfeljebb 3!

Valóban, hiszen tegyük fel, hogy valamelyik $x \in V_i$ csúcs belső foka nagyobb háromnál. Ekkor van egy olyan rész pl. V_2 , amelyben az x -nek legfeljebb 3 szomszédja van, különben az x -nek legalább $4k \geq \Delta(G) + 1$ szomszédja lenne, ami nem lehet.

Így ha az x -et áttesszük V_2 -be, kevesebb lesz a belső él, ami ellentmond annak, hogy a felosztás a legjobb volt.

Tehát $\Delta(G_i) \leq 3$ és $\omega(G_i) \leq 2$, mert a G -ben nincs háromszög. A Brooks-tétel szerint tehát $\chi(G_i) \leq 3$.

Így kiszínezzük egymás után mindegyik G_i -t, mindig 3 színt használunk, a G egy $3k$ -színezését kapjuk.

■

6.8. sejtés (Borodin, Kostochka, 1977). Ha a G gráfra $\Delta(G) \geq 9$ és $\chi(G) = \Delta(G)$, akkor $\omega(G) = \Delta(G)$ teljesül.

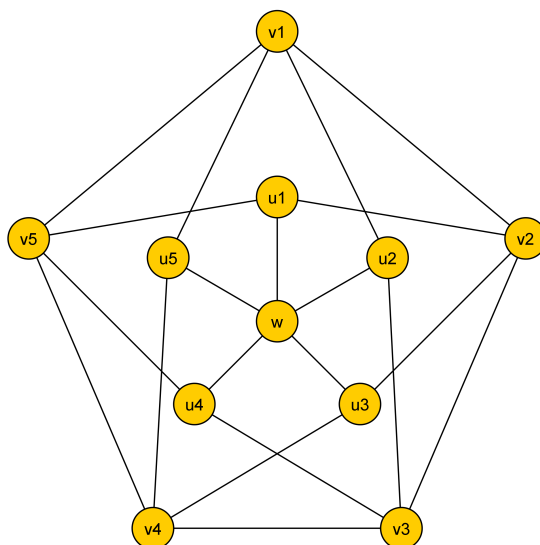
6.3. definíció. Egy G gráfban a legkisebb kör hosszát jelölje $g(G)$ (az angol elnevezése *girth*), nevezzük *derékbőségnak* vagy *kerületnek*.

Ha egy gráfban van egy k méretű klikk, akkor kell legalább k szín a kiszínezéséhez. Tudjuk, hogy egy hosszabb páratlan körben nincs háromszög, mégis 3 szín kell a színezéséhez. Viszont elegendő is ennyi szín. Megfordítva, vajon mekkora tud lenni a kromatikus szám, ha a lehető legkisebb klikk van csak, tehát még háromszög sincsen?

7. Kis körök nélkül is nagy lehet a kromatikus szám

7.1. definíció (A Mycielski-konstrukció). [155] [33] Legyen $G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E)$. Vegyünk fel, mind-egyik csúcsához egy második példányt, $V' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$, valamint egy extra u csúcsot. Legyen $G' = (V \cup V' \cup \{u\}, E \cup E' \cup E'')$, ahol $E' = \{\{v_i, v'_j\} : \{v_i, v_j\} \in E, v_i \in E, v'_j \in E'\}$ és $E'' = \{\{v'_j, u\} : v'_j \in E'\}$

7.1. tétel (J. Mycielski). [18] Ha G k -élkritikus gráf, akkor G' is az, eggyel nagyobb kromatikus számmal. ??



8. ábra. Az ábrával könnyebb követni a bizonyítás részleteit.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy $\chi(G') > k$. Tegyük fel, hogy G' -nek mégis lenne egy c k -színezése. Legyen pl. $c(u) = 1$.

Ekkor a G egy színezése f , amely meghagyja az 1-től különböző színeket c -ből, míg az 1-színű v_i színét $c(v'_i)$ -re változtatja. Ha $\{x, y\}$ egy él G -ben, akkor az egyik nem volt 1-es, így megmaradt a színe.

Ha a másik is maradt akkor különböznek, mert a c egy jó színezés volt.

Ha 1 volt és változott, akkor sincs gond, mert pl. az y másodpéldánya össze volt kötve az x szomszédjaival, tehát nem okoz ezután sem konfliktust a színe.

Az f azonban csak $(k-1)$ színt használt, ez ellentmondás. A kritikusság igazolása:

Legyen $e \in E(G')$, megmutatjuk, hogy $\chi(G' \setminus e) \leq k$.

Három típusú él elhagyásakor kell k -színezést találni, kihasználva a G k -kritikusságát!

?? Ha $e = \{u, v'_j\}$, akkor legyen c a $G \setminus \{v_j, s\}$ egy $(k-1)$ színezése, ahol az s a v_j egy szomszédja G -ben.

Ekkor megfelelő lesz a G' következő f átszínezése:

$G \setminus \{v_j\}$ -ben maradjon a c színe.

Fessük k -ra a v_j, v'_j, u csúcsokat. A további v'_i csúcsokra $f(v'_i) = c(v_i)$ legyen.

Ha az $e = \{v_i, v'_j\}$ típusú, akkor legyen c a $G \setminus \{v_i, v_j\}$ egy $(k-1)$ színezése.

Maradjon meg a c színe $G \setminus \{v_i\}$ -ben, $f(v_i) = f(u) = k$ és legyen $f(v'_i) = c(v_i)$ minden i -től különböző indexre.

Végül ha az $e = \{v_i, v_j\}$ típusú, akkor legyen c a $G \setminus \{v_i, v_j\}$ egy $(k-1)$ színezése.

Maradjon meg a c színe $G \setminus \{v_i\}$ -ben, legyen $f(v'_i) = k$ és $f(u) = 1$.

Tehát a G' $(k+1)$ -kritikus. ■

A Mycielski-féle gráfsorozat ismerete előtt is tudták, hogy létezik olyan háromszögmentes gráf, amelynek nagy a kromatikus száma. Később érintjük a híres Erdős-Rényi elméletet, a véletlen gráfokat, a valószínűség-számítási módszert. Erdős Pál módszerével sokkal többet is bizonyított, létezik olyan

gráf, amelynek nagyobb mint b a derékbősége (kerület, a legrövidebb körének hossza) és egyben nagyobb mint k a kromatikus száma. A konstrukció minden k értékre megad háromszögmentes, k -kromatikus gráfot, ráadásul k -élkritikus! A bizonyításban elmélyedve egyrészt látható, hogy a kiindulásul vett gráf bármely élkritikus gráf lehet, tehát sok sorozatot kapunk. Másrészt annak bizonyítása, hogy G' eggyel nagyobb kromatikus számú mint G , nem használja ki, hogy G élkritikus.

7.1. feladat. *Igazoljuk, hogy $2 \leq t \leq k$ egészekre létezik olyan gráf, melyre $\omega(G) = t$ és $\chi(G) = k$.*

7.2. feladat. *Létezik-e olyan gráf, melyre az $\omega(G) = \chi(G)$ nemcsak magára a G gráfra áll fenn, hanem annyira tökéletes, hogy minden G' feszített részgráfra is teljesül az $\omega(G') = \chi(G')$ egyenlőség? Az él nélküli vagy éppen a teljes gráfok ilyenek, de vajon mennyire bonyolult ezzel a szép tulajdonsággal rendelkező gráfok osztálya, a benne lévő gráfok szerkezete?*

A Claude Berge által bevezetett, a 7.2.feladatban említett tulajdonsággal a következő fejezetben foglalkozunk.

8. Perfekt gráfok

8.1. feladat. *Az oktaéder szabályos test, 6 csúccsal, 8 háromszög lappal, 12 éllel. Vajon igaz-e rá a 7.2. feladat feltétele?*

8.1. definíció (Claude Berge, 1960). [93] A G gráfot perfektnak mondjuk, ha bármely F feszített részgrájára fennáll az $\omega(F) = \chi(F)$ összefüggés.

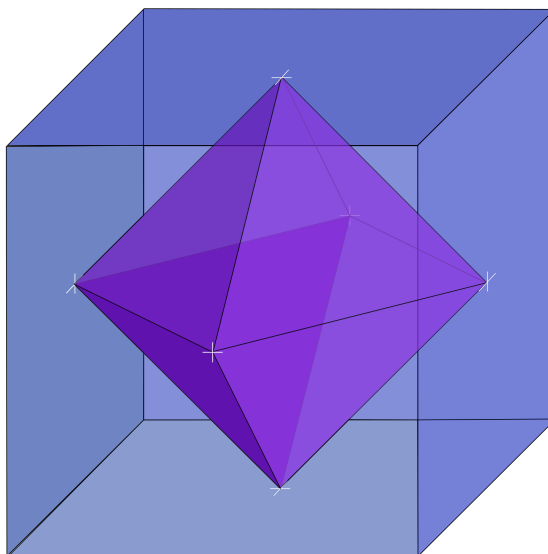
8.2. definíció. $k(G)$ -vel szokás jelölni az ún. klikk fedési számot. Legalább ennyi klikk részgráf kell a G összes csúcsának lefedéséhez.

Mivel egy maximális üres részgráf csúcsait csak egyenként lehet klikkkel lefedni, így $\alpha(G) \leq k(G)$. Vegyük észre, hogy $k(G) = \chi(\overline{G})$.

8.2. feladat. $\chi(\overline{C_n}) = ?$

A perfekt gráf fogalmát tehát meghatározhatjuk ekvivalens módon így is:

8.3. definíció. G perfekt, ha $\overline{G}$ bármely H feszített részgrájára $\alpha(H) = k(H)$.



9. ábra. Az oktaéderen kívül van még négy további szabályos test is! Vajon perfektek?

Berge első sejtése (1963) azt állította, hogy G pontosan akkor perfekt gráf, amikor a komplementere.

8.1. tétel (A perfektgráf-tétel, Lovász László tétele, 1972). [155], [153] G pontosan akkor perfekt gráf, amikor a komplementere.

Egy véges G gráf bármely F feszített részgráfjára vonatkozóan a következő három tulajdonság ekvivalensen teljesül.

$$\omega(F) = \chi(F) \quad (1)$$

$$\alpha(F) = k(F) \quad (2)$$

$$\omega(F)\alpha(F) \geq |F| \quad (3)$$

A rövidebb szóhasználat miatt a G χ -perfekt, ha az első, α -perfekt ha a második tulajdonság teljesül. A tétel ezek ekvivalenciája. A bizonyításhoz hasznos és önmagában is szép a harmadik ekvivalens tulajdonság. A harmadik tulajdonság szimmetrikus a gráf és komplementere cserére!

8.2. tétel. A G gráf perfekt, akkor és csak akkor, ha $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$ minden G' feszített részgráfjára teljesül.

Bizonyítás: [Gasparian bizonyítása] [155] [153] Az elegendőség következik, mivel ha G perfekt, akkor $\omega(G') = \chi(G')$ mindegyik feszített részgráfjára teljesül, valamint jól ismert, hogy $\alpha(G')\chi(G') \geq |V(G')|$. A szükségességhez tegyük fel, hogy az állítással ellentétben lenne egy G nem perfekt gráf, amelyre teljesülne az egyenlőtlenség.

Ha ilyen van, akkor válasszunk ki egy olyan G ellenpéldát, amelynek a rendje minimális.

Tehát $\chi(G) > \omega(G)$, de $\chi(G') = \omega(G')$ mindegyik valódi feszített részgrádjára. Rövidítve, legyen $\omega = \omega(G)$ és $\alpha = \alpha(G)$, $V(G) = \{1, \dots, n\}$.

Először megmutatjuk, hogy léteznek $C_0, \dots, C_{\alpha\omega}$ független halmazok, amelyek minden egyes csúcsot pontosan α -szeresen fednek le.

Legyen C_0 egyik tetszőleges α méretű stabil részhalmaza G -nek. A G minimalitása miatt tudjuk, hogy mindegyik $v \in C_0$ csúcsra a $V(G) \setminus \{v\}$ által feszített részgráfa G -nek perfekt, így tehát kiszínezhető ω színnel.

Tehát a $V(G) \setminus \{v\}$ partícionálható ω stabil halmazra. Ha ezt meg tesszük a C_0 minden csúcsával, akkor megkapjuk a C_i -ket.

Minden $i = 0, \dots, \alpha\omega$ indexre létezik egy K_i , ω méretű klikk, amely nem metszi C_i -t.

Ha nem így lenne, akkor a $V(G) \setminus C_i$ által feszített G' részgrádjára a G -nek, $\omega(G') < \omega$ teljesülne, tehát ki lehetne színezni $(\omega - 1)$ színnel.

Hozzávéve a C_i független halmazt, kapnánk a G -nek egy ω csúcsszínezését, ami ellentmondana annak, hogy $\chi(G) > \omega(G)$.

Másrészt $|K_j \cap C_i| = 1$ ha i és j különböző indexek $\{0, \dots, \alpha\omega\}$ -ből. Ez abból a tényből következik, hogy egy teljes és egy üres részgráf metszete legfeljebb 1 elemű, viszont tudjuk, hogy K_j egy kivételével (ez a C_j) metsz minden C_i -t.

Tekintsük az $(\alpha\omega + 1) \times n$ -es M és N illeszkedési mátrixokat! Az M általános eleme m_{ij} pontosan akkor 1, ha $j \in C_i$, egyébként 0; míg az N általános eleme n_{ij} pontosan akkor 1, ha $j \in K_i$, egyébként 0.

A fenti megállapítások szerint $MN^T = J - I$, ahol a J az $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ -es csupa 1-et tartalmazó mátrixot jelöli, az I pedig az $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ -es egységmátrixot.

Mivel a $J - I$ rangja $(\alpha\omega + 1)$, az $n \geq \alpha\omega + 1$. Ez azonban ellentmond a kiindulási feltételnek. ■

Berge erős perfekt gráf sejtése, 1963 óta megoldatlan volt. Sok kitűnő kutató munkájára építve egy igazi összefogás végül még Berge életében az erősebb állítással is megbírkózott.

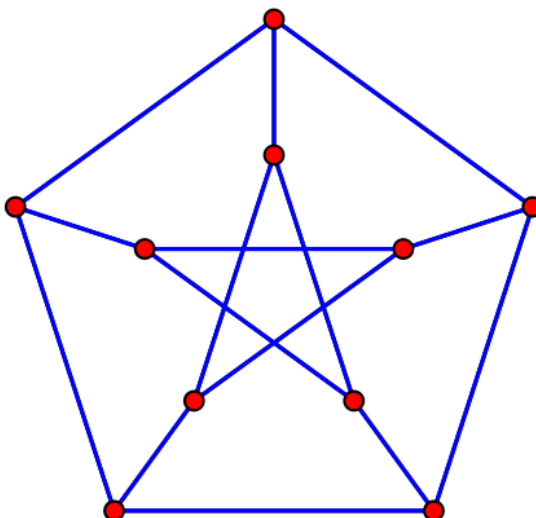
8.3. tétel (Chudnovsky, Robertson, Seymour és Thomas, 2006).

[54] *G perfekt akkor és csak akkor, ha G -ben nincs háromnál hosszabb páratlan kör vagy annak komplementere feszített részgráfként.*

A tétel igazolta egy színezési tulajdonság és bizonyos feszített részgráfok hiányának ekvivalenciáját. A kutatócsoport tagjai egyébként is a hasonló szerkezetű tételek leghíresebb kutatói.

9. Perfekt gráfosztályok

Amíg Berge erős perfekt gráf sejtése (1963 óta) eldöntetlen volt a kutatások több gráfosztályt megvizsgáltak, számos fontos gráfosztályról derült ki, hogy elemei perfekt gráfok. [93] A páratlan körök kitüntetett szerepe már a Brooks-tételnél megjelent. A teljes gráf mellett ez a másik kivétel, jó kiszínezéséhez nem elég maximális fokszámnyi szín.



10. ábra. A Petersen-gráfban sok kör van.

Egy érdekes állítás azt mondja, csak ha nagyon átszövik a gráfot a páratlan körök, akkor nagy a gráf kromatikus száma. Milyen hosszú páratlan körök vannak a Petersen-gráfban? A szimmetria miatt minden csúcson ugyanannyi páratlan kör megy keresztül! Számoljuk meg, a Petersen-gráfban (10. ábra) hány páratlan kör megy keresztül egy-egy csúcson? A páratlan körök számával kapcsolatban felső becslés adható a kromatikus számra.

9.1. tétel. Ha a G gráf minden csúcsa legfeljebb k páratlan kör eleme, akkor $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\sqrt{8k+9}+1}{2} \right\rceil$.

Bizonyítás: Ha nincs is páratlan kör G -ben, a 2 valóban pontos becslés. Ha a $k = 1$, akkor addig, amíg egyik csúcs sem tartozik egynél több körhöz nem lesz nagyobb $\chi(G)$ háromnál az állítás formulája szerint. Már ez is érdekes.

Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és legyen $t = \left\lceil \frac{\sqrt{8k+9}+1}{2} \right\rceil$.

Alkalmazzunk indukciót a G n rendjére.

Könnyű elindulnunk, mert amíg az n nem haladja meg a t -t, addig az egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

Az indukciós feltevésünk $n \geq t$ esetére: Ha H n rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van, akkor $\chi(H) \leq t$.

Legyen G egy $(n+1)$ rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van.

Megmutatjuk, hogy $\chi(G) \leq t$.

Legyen v a G egy csúcsa.

Ekkor $G \setminus v$ -re teljesülnek a feltételek, vagyis t színnel kiszínezhető.

$\frac{\sqrt{8k+9}+1}{2} \leq t$, amiből $k \leq \frac{t^2-t-2}{2} = \binom{t}{2} - 1$ adódik.

A $\binom{t}{2}$ színpár közül van legalább 1 pár (pl. (piros, kék)), amely nem fordult elő, mint a v szomszédai valamely páratlan körben.

Legyen G' a $G \setminus v$ azon részgráfja, amelyet a piros és kék pontok feszítenek ki. A G' páros gráf!

Ha a G' -ben nincs olyan piros pont, amelynek szomszédja v a G -ben, akkor a v -t pirosra színezhajjuk és nem kell új szín, az egyenlőtlenség G -re is teljesül.

Vegyük a G' azon komponenseit, amelyekben van piros szomszédja v -nek.

Állítjuk, hogy ezekben a komponensekben nincs v -nek kék szomszédja!

Ellenkező esetben menne a komponensben egy piros szomszédától egy kék szomszédig vezető út, amely páratlan hosszú.

Kiegészítve még a v -ből kiinduló csatlakozó 1-1 éllel egy páratlan kört kapnánk. Ez azonban egy olyan kör lenne, amelyben a v -nek éppen van egy (piros, kék) szomszédpárja, amit feltettünk, hogy nem lehet. Tehát egyik komponensben sincs v -nek kék szomszédja.

Így a komponensekben felcserélve a piros és kék színeket, az új színezés már olyan, hogy a v -nek nincs piros szomszédja.

Így kiterjeszthető a v -re a színezés, nem kell több szín. Tehát $\chi(G) \leq t$. ■

Keressünk olyan gráfokat, amelyekre az egyenlőtlenség éles! A valóban perfekt gráfok tanulmányozása a hatvanas években Berge sejtései miatt is gyorsabban folytatódott. Még mielőtt bármelyik kérdés pozitívan eldőlne volna, máris különböző speciális tulajdonságú gráfokat vizsgáltak meg, vajon perfektek-e? Több, nagyon fontos gráfosztályról kiderült nem csak az, hogy perfekt gráfokat tartalmaz, hanem az is, hogy mindezt már a fogalom megszületése előtt bizonyították!

Mielőtt a refchud. tétel feltette az i -re a pontot sok szép eredmény megszületett.

9.1. Intervallumgráfok

Bizonyos gráfoknak létezik metszet reprezentációja. Ha S egy halmaz, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ egy halmazrendszer, akkor $\mathcal{F}$ meghatároz egy gráfot. A csúcsok az $\mathcal{F}$ elemei, valamint két elemet pontosan akkor köt össze él, ha metszetük nem üres. Ha a G gráf előáll mint egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer metszetgráfja, akkor a G reprezentálható.[14]

9.1. definíció. A számegeyenes intervallumainak valamely rendszere által meghatározott metszetgráfokat **intervallum gráfoknak** nevezzük.

9.1. feladat. Vajon különböznek-e a nyitott intervallumokkal meghatározott intervallumgráfok? És ha csak zárt intervallumokat engedünk meg? Bővebb-e a tetszőleges intervallumok által reprezentált gráfok halmaza, az 1 hosszúságú intervallumoktól? Milyen gráfokat lehet nem tartalmazkodó intervallumokkal reprezentálni? [97]

A bevezetőben említett kurzus elhelyezési problémát egyszerűsítsük le.

Adottak a kurzusok időintervallumai, amelyek rögzítettek.

A kérdés az, hány terembe helyezhetők el a kurzusok. A termek állandóan rendelkezésre állnak.

Ez egy intervallumgráf színezési problémája.

Egy színosztály független csúcsokat tartalmaz, az ezeknek megfelelő intervallumok nem metszik egymást. Ők egy terembe kerülhetnek.
Ha a kromatikus számát ismerjük, akkor megtudjuk legkevesebb hány teremre van szükség.

9.2. állítás. *Ha G intervallumgráf, $G' \subseteq G$, akkor G' is intervallumgráf.*

9.2. definíció. *G háromszögezett gráf, ha bármely legalább 4 hosszú körében van átló.*

9.3. állítás. *Ha G intervallumgráf, akkor G háromszögezett gráf.*

Bizonyítás: Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy a G intervallumgráfnak van olyan legalább négy hosszú C köre, amelyben nincs átló.

Ha v_1, v_2, v_3 ebben a sorrendben a C egymást követő csúcsai, akkor a nekik megfelelő I_1, I_2, I_3 intervallumok közül az I_2 metszi a másik kettőt, azonban az I_1, I_3 nem metszők.

Ha pl. az I_2 -től az I_1 balra esik, akkor a metszéspontjaik is balra esnek az I_2 és I_3 metszéspontjaiktól.

Ha a körön tovább megyünk, akkor a szomszédos csúcsokhoz tartozó intervallumok metszéspontjai mindig jobbra kerülnek.

Azonban egy körön haladunk, így nem tud bezáródni, az I_1 -et balról nem tudja metszeni egyik intervallum sem.

Ez ellentmondás. ■

Egy $G(V, E)$ gráf összehasonlítási gráf (vagy tranzitívan irányítható gráf), ha létezik az éleinek olyan $G(V, A)$ irányítása - az egyik irányban -, melyre bármely $u, v, w \in V$ esetén, ha $(u, v), (v, w) \in A$, akkor $(u, w) \in A$.

A feltétel szerint az $(u, w) \in A$ azt is jelenti, hogy létezik él a két pont között; csak akkor lehet jól irányítani!

9.4. állítás (Ghouila-Houri, 1962). *Egy intervallumgráf komplementere tranzitívan irányítható.*

Bizonyítás: A G intervallumgráfban ha $\{u, v\} \notin E$, akkor a neki megfelelő I_u és I_v intervallumokra pl. I_u balra van a másiktól.

Íranyítsuk a G komplementerében az $(u, v) \in A$ élt.

Ha az I_u, I_v és I_w az egyenesen diszjunktak és balról jobbra sorakoznak, akkor $(u, v) \in A$ és $(v, w) \in A$ esetén $(u, w) \in A$. ■

9.2. tétel (Gilmore-Hoffman, 1964). *[155] [93] G irányítatlan gráf.*

A következő állítások ekvivalensek:

(i) *G intervallumgráf.*

(ii) *G nem tartalmaz legalább 4 hosszú, átlómentes kört és a komplementere összehasonlítási gráf.*

(iii) *A G maximális klikkjeit lineárisan rendezni lehet oly módon, hogy bármely u csúcsra az u -t tartalmazó maximális klikkek egymást követően állnak.*

Bizonyítás: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Az előző két bebizonyított állítás éppen ezt mondta ki. ■

A következő implikáció igazolásához szükségünk van egy lemmára.

9.5. lemma. *Tegyük fel, hogy a $G(V,E)$ gráf nem tartalmaz háromnál hosszabb feszített kört és legyen F a $\overline{G}$ éleinek egy tranzitív irányítása. Legyenek A_1 és A_2 G maximális klikkjei.*

Minden A_1 és A_2 közötti él G komplementerében azonosan van F által irányítva.

Bizonyítás: Van él A_1 és A_2 között a komplementerben, egyébként az uniójuk nagyobb klikk lenne G -ben.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $(a,b), (d,c) \in F$, $a, c \in A_1$ és $b, d \in A_2$.

Ha az a és c vagy a b és d azonos lenne, akkor a tranzitivitással ez ellentmondana, hiszen az egyik klikk csúcsai között a komplementerben is kellene, hogy legyen él.

Tegyük fel, hogy mind a négy csúcs más.

Az nem lehet, hogy $\{a,d\}$ és $\{b,c\}$ is E -ben legyen, mert akkor kialakulna egy feszített 4-kör G -ben.

Feltehetjük, hogy pl. $\{a,d\}$ a komplementerben él. Azonban az F akármelyik irányítást is adta az élnek a tranzitivitással ellentmondásba kerülünk.

Ezzel a lemmát igazoltuk. ■

A 9.2. tétel további két implikációjának igazolása:

Bizonyítás:

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Tegyük fel tehát, hogy a $G(V,E)$ gráf nem tartalmaz háromnál hosszabb feszített kört és legyen F a $\overline{G}$ éleinek egy tranzitív irányítása.

A G maximális klikkjei között tekintsük a következő rendezést:

$A_1 < A_2 \Leftrightarrow$ Ha az F szerint létezik A_1 -ből az A_2 -be mutató él.

A klikkek között ez az irányítás a lemma miatt teljes, másrészt pedig tranzitív.

Valóban, ha $A_1 < A_2$ és $A_2 < A_3$, akkor léteznek a $(w,x), (y,z) \in F$ élek, $w \in A_1$, $x,y \in A_2$, $z \in A_3$.

Ha vagy w és y között vagy x és z között G -ben nincs él, akkor a komplementerben az irányításuk adódik és a $(w,z) \in F$ következik.

Feltehetjük tehát, hogy $\{w,y\}, \{x,z\}, \{x,y\} \in E$.

Mivel G -ben nem lehet átlómentes 4 hosszú kör $\{w,z\} \notin E$ és $(w,z) \in F$.

Ebből adódik, hogy $A_1 < A_3$.

Feltehetjük tehát, hogy az összes klikket rendeztük, $A_1 < A_2 < \dots < A_t$.

Tegyük most fel, hogy a még igazolandó tulajdonság nem teljesül, vagyis léteznek $A_i < A_j < A_k$ klikkek, melyekre valamely x csúcsra $x \in A_i$, $x \notin A_j$, és $x \in A_k$.

Mivel $x \notin A_j$, létezik olyan $y \in A_j$, amelyre $\{y,x\} \notin E$.

De $A_i < A_j$ -ből az jön, hogy $(x,y) \in F$, míg $A_j < A_k$ -ből az jön, hogy $(y,x) \in F$.

Ez ellentmondás.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Rendeljük hozzá minden $u \in V(G)$ csúcsához az őt tartalmazó klikkek $K(u)$ halmazát.

A $K(u)$ klikkhalmaz felfogható a sorbarendezett klikkek egy intervallumának is.

A $K(u)$ és $K(v)$ a klikk-intervallumok ugyanakkor metszik egymást, amikor van olyan klikk amelyik mindkettőjüket tartalmazza.

Másrészt u és v pontosan akkor van összekötve éllel, amikor létezik olyan klikk, amelyben mindketten benne vannak. ■

A merev körű, átlós vagy háromszögezett (l. 9.2) gráfokra megismertünk egy szűkebb gráfosztályt, az intervallumgráfokat.

A merev körű tulajdonság (l. 9.2) szintén öröklődő, tehát ha egy G gráfnak nem létezik 3-nál hosszabb feszített köre, akkor ez minden feszített részgrádjára is igaz.

9.3. definíció (Szimpliciális csúcsok.). Egy G gráf x csúcsát szimpliciális csúcsnak nevezzük, ha az x szomszédai páronként szomszédosak egymással is.

Másképpen mondva az x nyitott és zárt szomszédsága is teljes gráf.

Dirac Gábor Endre (1961) igazolta, hogy egy merev körű gráfnak mindig van legalább két szimpliciális csúcsa.

Vegyük észre mennyire hasonlít ez az állítás ahhoz, miszerint a fának van legalább két levele.

Mivel a fának, erdőnek nincs is körük, így merevkörű gráfok.

Egy izolált csúcs szimpliciális, egy levél 1-fokú csúcsa szintén az.

Csakúgy, mint ahogyan a fákat lebonthatjuk egymás után törölve egy-egy levélpontot, a merev körű gráfokra is létezik ilyen lebontás.

Kiválasztjuk egyik szimpliciális csúcsát és töröljük.

Ha egyszer nem találunk szimpliciális csúcsot, akkor nem merevkörű a gráf.

Másrészt ha az eljárást végig folytathatjuk, akkor biztosan merev körű a gráf.

9.4. definíció. Legyen $G(V,E)$ irányítatlan gráf és az $o = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ egy rendezése a csúcsoknak.

Az o rendezést perfekt eliminációs sémának nevezzük, ha mindegyik v_i a $[v_i, v_{i+1}, \dots, v_n]$ csúcsok által feszített gráfnak egy szimpliciális csúcsa. [55]

9.5. definíció. G -ben u és v nem szomszédos csúcsok.

Az $S \subset V(G)$ az u és v csúcsokat szeparáló minimális ponthalmaz, ha egyrészt elhagyásával az u és v különböző komponensekbe kerülnek, másrészt nincs $S' \subset S$ ugyanezzel a tulajdonsággal.

9.3. tétel. G irányítatlan gráf.

A következők ekvivalensek: [55] [163]

(i) G merevkörű.

(ii) G -nek van eliminációs sémája, sőt bármely szimpliciális csúcs lehet az első csúcs.

(iii) G minden S minimális szeparáló halmaza teljes gráfot feszít G -ben.

Bizonyítás:

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Ha vesszük egy legalább 4 hosszú kör két nem szomszédos csúcsát, akkor őket szeparálni S csak úgy tudja, ha mindkét keletkezett ívről egy-egy csúcs belekerül S -be.

(iii) szerint ez a két csúcs össze van kötve, tehát a körnek egy átlója.

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Tegyük fel, hogy S egy minimális $u - v$ elválasztó halmaz.

Legyen G_U és G_V az S elhagyása után keletkező u -t és v -t tartalmazó két komponens.

Mivel az S minimális, minden eleme szomszédos valamely G_U és G_V -beli csúccsal.

Ha tehát $x, y \in S$ különböző csúcsok, akkor vegyünk egy legrövidebb utat x -től y -ig a G_U érintésével, illetve hasonlóan egy legrövidebb utat a G_V érintésével.

A két út együtt egy legalább 4 csúcsú kör és nincs a G_U -n belül sem egy él ami átlója lenne a minimalitás miatt, és hasonlóan nincs a G_V -n belül sem.

Természetesen nem lehet él a két komponens csúcsai között sem.

Így az átlósság miatt x és y szomszédos. Tehát S teljes.

■ A ??-tétel további implikációinak

igazolásához igazoljuk a következőt:

9.6. lemma (Dirac, 1961). [18] [84, 85, 86] Minden merev körű G gráfnak van szimpliciális csúcsa.

Ha G nem teljes, akkor van két, nem szomszédos szimpliciális csúcsa.

Bizonyítás: G rendjére vonatkozó indukcióval bizonyítunk.

Ha G teljes, akkor nincs mit bizonyítani.

Tegyük fel, hogy u és v a G nem szomszédos csúcsai és már minden kevesebb csúcsú gráfra tudjuk, hogy az állítás igaz.

Legyen az S egy minimális $u - v$ elválasztó halmaz. Legyen G_U és G_V az S elhagyása után keletkező, u -t és v -t tartalmazó két komponens.

Az indukció erejével $G_{U \cup S}$ tartalmaz két nem szomszédos, benne szimpliciális csúcsot.

Az egyiknek a G_U -ban kell lennie, mert az S teljes gráfot feszít, tehát abban két csúcs szomszédos.

Vagy a $G_{U \cup S}$ maga teljes, ekkor a G_U minden csúcsa szimpliciális a $G_{U \cup S}$ -ban.

Mivel $U \cup S$ -be mennek csak G_U -ból élek, így ha egy csúcs szimpliciális $G_{U \cup S}$ -ben az U -ból, akkor G -ben is.

Hasonlóan van a B -ben is egy G -beli szimpliciális csúcs. ■

A ??-tétel bizonyításának folytatása:

Bizonyítás:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

A most bizonyított lemma szerint ha G merev körű, akkor van egy szimpliciális csúcsa, ezt elvéve a kisebb gráf szintén merev körű, így létezik egy perfekt eliminációs sémája, így az első lépéssel kiegészítve a G -nek is van.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Legyen C a G egy legalább 4 hosszú köre.

Legyen u az első C -beli csúcs, amely benne van az eliminációs sorrendben.

Mivel u -nak a C körben van két szomszédja, így azok össze vannak kötve, tehát C -nek van átlója. ■

9.2. Merev körű gráfok részfa reprezentációja

A merev körű gráfok osztálya reprezentálható egy fa részfáinak metszetgráfként. Tudjuk, hogy az intervallumgráfok a merev körű gráfok egy részosztálya. Az intervallumgráfok reprezentálhatók mint egy út részútjainak metszetgráfjai. Ennek általánosítása, ha utak helyett fákat veszünk.

9.6. definíció. Egy T halmaz $T_i \ i \in I$ részhalmazainak családját *Helly-tulajdonságúnak* mondunk, ha $J \subseteq I, T_i \cap T_j \neq \emptyset$ minden $i, j \in J$ teljesülése esetén következik, hogy $\bigcap_{j \in J} T_j \neq \emptyset$.

Ha T egy fa, és T_i mindig egy részfája, akkor igaz a következő állítás.

9.7. állítás. Egy fa részfáinak egy családjá kielégíti a Helly-tulajdonságot.

Bizonyítás: Tehát, ha tudjuk a részfák egy családjáról, hogy bármely kettő metszete nem üres, akkor az összes metszete sem üres.

Kínálkozik a teljes indukció a család méretére vonatkozóan.

Induló lépésünk éppen a feltétel.

Tegyük tehát fel, hogy legfeljebb k részfa esetén igaz az állítás.

Legyenek $T_{i_1}, \dots, T_{i_k}, T_{i_{k+1}}$ részfák.

Az indukciós feltevés miatt létezik három pont, a, b és c , melyekre

$$a \in \bigcap_{j=1}^k T_{i_j}, b \in \bigcap_{j=2}^{k+1} T_{i_j}, c \in T_{i_1} \cap T_{i_{k+1}}.$$

Vegyük észre, hogy minden T_{i_j} tartalmaz legalább két pontot az a, b és c pontokból. A fában két pont között pontosan egy út van. Így ha egy fa tartalmaz 2 csúcsot, akkor az őket összekötő utat is.

Egy fában 3 csúcs közötti páronkénti utaknak van közös pontja.

$$\text{Emiatt } \bigcap_{j=1}^{k+1} T_{i_j} \neq \emptyset. \quad \blacksquare$$

9.4. tétel (Walter 1972, Gavril 1974, Buneman 1974). [155] [114] A $G(V, E)$ irányítatlan gráfra ekvivalensek a következő állítások:

(i) G merev körű gráf

(ii) G reprezentálható, mint egy fa bizonyos részfáinak metszetgráfja.

(iii) Létezik egy $T(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ fa, amelynek csúcshalmaza a G maximális klikkjeinek olyan halmaza, hogy a $T_{\mathcal{K}_v} : v \in V$ feszített részgráf összefüggő (a $\mathcal{K}_v$ a v -t tartalmazó maximális klikkekből áll).

Bizonyítás:

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Feltehetjük tehát (iii) szerint, hogy létezik egy $T(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ fa.

Legyen $u, v \in V, \{u, v\} \in E$.

Ha u és v valamely $\mathcal{K}$ -beli klikk két eleme, akkor $\mathcal{K}_u \cap \mathcal{K}_v \neq \emptyset$, valamint $T_{\mathcal{K}_u} \cap T_{\mathcal{K}_v} \neq \emptyset$.

Így tehát a G metszetgáfja a $T_{\mathcal{K}_v} : v \in V$ T-részfák családjának.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Léteznek tehát minden v csúcshoz T_v részfák úgy, hogy $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy legalább 4 hosszú, átlómentes kör az így reprezentált G gráfban.

Ennek legyen 2 egymást követő csúcsa v_i, v_{i+1} és a nekik megfeleltetett részfák T_i, T_{i+1} .

Létezik $a_i \in T_i \cap T_{i+1}$.

Egyértelmű úton el lehet jutni a_i -ből a_{i-1} -be és a_{i+1} -be.

Lehet, hogy egy darabig közös ez a két út a T_i -ben. Az utolsó közös pontja a két útnak legyen b_i .

Mivel T_{i-1} és T_{i+1} nem metszők, így a b_i pontokat egymás után úgy lehet összekötni, hogy az összekötő $b_i - b_{i+1}$ utaknak nincs közös belső pontjuk, így egy kört alakítanak ki. De a T_i -k egy fa részfái, így ez lehetetlen.

Az (i) $\Rightarrow$ (iii) esetet nem bizonyítjuk. ■

9.1. megjegyzés. Egy korábbi észrevételből következik az alábbi tétel.

Legyen S egy teljes, elvágó csúcshalmaz.

A keletkezett $G_1, \dots, G_l$ komponensekhez az S -et hozzá vesszük, jelölje $G_i \cup S$ az általuk feszített gráfokat (S -komponenseket). Ekkor

$$\chi(G) = \max_i \chi(G_i \cup S)$$

és

$$\omega(G) = \max_i \omega(G_i \cup S)$$

fennáll.

9.1. következmény. Legyen S a G gráf egy teljes, elvágó csúcshalmaza.

Az S -komponensek perfektek.

Ekkor a G gráf perfekt.

Bizonyítás: Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden, a G -nél kevesebb csúcsot tartalmazó gráfra.

Elegendő megmutatni, hogy $\chi(G) = \omega(G)$.

Mivel az S -komponensek perfektek, felhasználva az előző állítást:

$$\chi(G) = \max_i \chi(G_i \cup S) = \max_i \omega(G_i \cup S) = \omega(G)$$

■

9.5. tétel (Berge 1960, Hajnal és Surányi 1958). [114] A merev körű gráfok perfektek. [155]

Bizonyítás: Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden, a G -nél kevesebb csúcsot tartalmazó háromszögezett gráfra.

Feltehető, hogy G összefüggő, hiszen korábbi állításunk szerint mindkét gráfparaméterünk a komponensekre vonatkozó értékek maximuma.

Ha G teljes, akkor nincs mit bizonyítani.

Legyen S egy minimális elvágó halmaz. Tudjuk, hogy az S teljes gráf.
Mivel az S -komponensek perfektek az indukció miatt, az előző következmény szerint G is az. ■

9.6. tétel (Meyniel, 1976). *Ha a G irányítatlan gráf minden páratlan köre rendelkezik legalább 2 átlóval, akkor G perfekt gráf.*

9.8. állítás (Fulkerson és Gross, 1965). *Egy merev körű, n csúcsú gráf legfeljebb n klikkel rendelkezik. Egyenlőség csak az üres gráf esetén áll fenn.*

9.9. állítás. *Merev körű gráfokra létezik $O(|V| + |E|)$ idejű algoritmus, amely megadja a $\chi(G)$ -t és G klikkjeit.*

Irányított körmentes gráfok csúcsaihoz nemcsak az irányítással kompatibilis lineáris rendezés található, hanem színtezhetők is a gráfok. Az első szinten a nyelők, a második szinten a csak nyelőkhöz irányított csúcsok, sít. vannak.

Ha veszünk egy tranzitív irányítást, akkor a szintek sorszámaival történő színezés nemcsak jó, hanem a leghosszabb irányított út (egy forrásból egy nyelőbe) pontjai teljes gráfot alkotnak.

Emiatt az egyik színezés éppen $\omega(G)$ színnel tudja kiszínezni a G gráfot.

Az összehasonlítási gráf tulajdonság öröklődik a feszített részgráfokra, így $\chi(G') = \omega(G')$ teljesül G minden feszített részgráfjára is. Tehát G perfekt.

9.7. tétel. *A tranzitíven irányítható gráfok perfektek.*

A perfektgráf-tétel segítségével a fenti, a híres Dilworth tételt eredményezi.

Ugyanis így tehát egy G tranzitíven irányítható gráf komplementere is perfekt, tehát $\alpha(G) = k(G)$.

9.8. tétel (Dilworth, 1950). *Legyen $(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz.*

A minimális lineárisan rendezett részhalmazokra (láncokra) történő bontás mérete megegyezik a legnagyobb antilánc (nem összehasonlítható elemek halmaza) számosságával.

9.3. Split gráfok

9.7. definíció. *A $G=(V,E)$ irányítatlan gráf split gráf, ha a csúcshalmaza partícionálható egy teljes és egy üres részre $V = S + K$.*

A két rész közötti élekre nincs megkötés. A split gráfokat magyarul hívjuk – mondjuk – hasított gráfnak.

9.2. megjegyzés. *A definícióban szereplő felbontás nem feltétlenül egyértelmű. Egy split gráf komplementere split gráf. A következők közül pontosan egy teljesül egy split gráfra.*

- (i) $|S| = \alpha(G)$ és $|K| = \omega(G)$
- (ii) $|S| = \alpha(G)$ és $|K| = \omega(G) - 1$
- (iii) $|S| = \alpha(G) - 1$ és $|K| = \omega(G)$

A hasított gráfok jellemzése. A következő állítások ekvivalensek:

9.9. tétel.

- (i) G split gráf.
- (ii) G is és a komplementere is merev körű.
- (iii) G nem tartalmaz feszített részgráfként $2K_2$ -t, C_4 -et vagy C_5 -öt.

Bizonyítás:

citebp (i) $\Rightarrow$ (ii)

Nem képzelhető el egy legalább 4 hosszú feszített kör egy split gráfban.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

A $2K_2$ a C_4 komplementere.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Válasszunk ki a G -nek egy legnagyobb olyan K klikkjét, melyre a $G_{V \setminus K}$ legkevesebb élű.

Megmutatjuk, hogy az $S = V \setminus K$ független csúcshalmaza G -nek.

Tegyük fel, hogy G_S -ben mégis van egy $\{x, y\}$ él.

A K maximális, így nem lehet sem x sem y szomszédos az összes K -beli csúccsal. Ha egy z pont kivételével minden más K -beli csúcs szomszédai lennének, akkor elhagyva a z -t és az x és y csúcsokat K -hoz véve nagyobb klikket kapnánk.

Léteznek tehát u és v csúcsok, amelyekre $\{x, u\} \notin E$ és $\{y, v\} \notin E$

Mivel G nem tartalmaz C_4 -et és $2K_2$ -t, így az $\{x, v\}$, $\{y, u\}$ élek közül pontosan az egyik van G -ben.

Legyen ez pl. az utóbbi.

Valamely további K -beli w csúcsra ha $\{y, w\} \notin E$ és $\{x, w\} \notin E$, akkor az $\{x, y, v, w\}$ csúcsok $2K_2$ -t feszítenek, ha pedig $\{y, w\} \notin E$ de $\{x, w\} \in E$, akkor $\{x, y, u, w\}$ csúcsok kifeszítenek egy C_4 -et.

Tehát y -nak szomszédja minden $K \setminus v$ csúcs, és ha kicseréljük v -vel, akkor a $K' = K \setminus \{v\} \cup \{y\}$ is maximális klikk.

Mivel S a legkevesebb élt tartalmazta, és x szomszédja y -nak, de nem szomszédja v -nek, így léteznie kell egy y -tól különböző $t \in V \setminus K$ csúcsnak, amely szomszédos v -vel, de nem szomszédos y -nal.

A t és az x össze van kötve, különben $\{t, x, y, v\}$ egy $2K_2$ -t feszítene.

Hasonlóan t és u is szomszédos, mert másképpen $\{t, x, y, u\}$ egy C_4 -et feszít.

Ezekből azonban az következik, hogy $\{t, x, y, u, v\}$ egy C_5 -öt feszít.

Ellentmondásra jutottunk, vagyis S független halmaz, tehát G split gráf. ■

10. A kromatikus polinom

[155] [211][219, 220] Ha a G egyszerű gráf csúcsait ki lehet az $\{1, 2, \dots, k\}$ színekkel jól színezni, akkor vajon hányféleképpen?

Ezt csak úgy tudjuk megválaszolni, ha eldöntjük mikor tekintünk két színezést különbözőnek?

A továbbiakban a G csúcsait $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ számozottnak tekintjük. Két színezés különböző, ha van olyan csúcs, amely más színt kap az egyik, mint a másik színezésnél.

Így például K_n színezéseinek száma $k(k-1) \cdots (k-n+1)$.

A v_1 kaphat k féle színt. A v_2 már csak $(k-1)$ színt kaphat és így tovább, ha a v_i -nek már van $(i-1)$ különböző színű szomszédja, akkor $(k-i+1)$ szín közül választhatunk.

Abban az esetben, ha $k < n$, akkor nincs jó színezés.

Ekkor a szorzat nullát ad, tehát a fenti formula még ekkor is pontos válasz a színezések számára.

George David Birkhoff 1912-ben vezette be a $P_G(k)$ függvényt a G gráf k -színezéseinek számára.

Vajon mennyire nehéz a függvény kiszámolása tetszőleges gráfra?

100 évvel ezelőtt a 4-szín sejtés nagyon népszerű probléma volt.

Ha síkgráfokra Birkhoff függvényét könnyen ki lehetett volna számolni, akkor a négyszínsejtésre is jó segédeszközt kaptak volna.

A sejtés ekvivalens formája lett volna a következő:

Ha S síkgráf, akkor $P_S(4) > 0$.

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legtöbb módon lehet kiszínezni?

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legkevesebb módon lehet kiszínezni?

10.1. állítás. Ha G -nek n csúcsa van és nincs éle, akkor $P_G(k) = k^n$.

Az n csúcsú útra $P_{P_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$.

Ha T n csúcsú fagraf, akkor $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$

Bizonyítás: Az út első pontját k módon színezhetjük. A következőt $(k-1)$ módon és így tovább.

Fákra azonos a formula! Minden fára!

Teljes indukcióval triviálisnak tekinthetjük.

$n = 1$ -re k -féle színnel színezhetjük az egyetlen pontot.

Ha feltesszük, hogy n -nél kevesebb csúcsú fára fennáll a képlet, akkor vegyünk az n csúcsú T fának egy levelét. Töröljük az 1-fokú csúcsot.

A maradék fát $k(k-1)^{(k-2)}$ módon színezhetjük.

A levél $(k-1)$ szín közül kaphat, csak az egyetlen szomszédja színét nem, így $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$. ■

Megállapíthatjuk, hogy a kombinatorikai jelentése miatt a $P_G(k)$ függvény 0-ra biztosan 0-t ad, de az $1, \dots, \chi(G) - 1$ egészekre is 0-t ad, hiszen nem lehet ilyen kevés színnel a G -t jól kiszínezni. citeAT97 Minden k nemnegatív egészre egy egész szám lesz a függvény értéke. Vajon milyen típusú függvény $P_G(k)$?

Tudjuk, hogy egy színezés elképzelhető úgy is, hogy a csúcsokat partícionáljuk független halmazokba, majd ezután egy-egy részt egy-egy színnel kiszínezzük.

Ez azt jelenti, hogy a k -színezéseket megkapjuk, ha minden lehetséges partícionálás esetén a független részeket minden lehetséges módon más-más színűre kiszínezzük. Világos, hogy ha más a partíció, más a színezés!

Egy r -részes partíció esetén k színnel $k(k-1) \cdots (k-r+1)$ módon tudunk színezni.

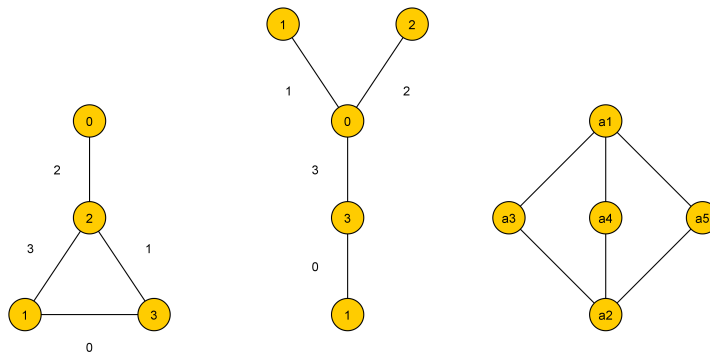
Ilyen szorzatokat kell összeadni. Mivel minden ilyen tag egy r -ed fokú polinom, így az összeg is egy polinomja k -nak.

Egyetlen n részes partíció van, tehát egyetlen összeadandó n -ed fokú polinom.

Ez az, amikor mindegyik csúcs külön részbe kerül. A tag k^n , így a $P_G(k)$ kromatikus polinom n -edfokú és a főegyütthatója 1.

10.2. állítás. Ha G több komponensből áll, akkor a komponensek kromatikus polinomjainak szorzata megadja a G kromatikus polinomját.

10.3. állítás. Ha egy G gráf rendelkezik elvágó ponttal, akkor lényegében függetlenül színezhettük a pont elhagyásával keletkező komponenseket. Amikor azonban összeillesszük őket ebben a közös pontban, akkor mindegyikük számára - egy kivételével - ennek a pontnak a színe adott, így a komponensek kromatikus polinomjainak szorzatát el kell osztani a k -nak a komponensek száma mínusz egyedik hatványával. Pl. egy csillagnak van u elvágó pontja. Az u -komponensek mind egy-egy él. Így az n csúcsú CS_n csillag kromatikus polinomja $P_{CS_n}(k) = \frac{(k(k-1))^{n-1}}{k^{n-2}} = k(k-1)^{n-1}$. Mint fára ugyanezt kaptuk.



A fákra könnyű volt indukcióval számolni, mert egy fának létezik lebontása, egy-egy levél egymás utáni törlésével.

Pl. egy körre nem létezik ilyen.

$P_{C_m}(k) = ?$

$P_{C_3}(k) = k(k-1)(k-2)$ ezt tudjuk, hiszen a háromszög teljes gráf is.

Ha úgy kezdenénk színezni mint egy utat, az m -edik pontnál lennénk bajba, mert neki két színezett szomszédja lenne, így ha azok eddig azonos színt kaptak volna, akkor most több lehetőségünk lenne eggyel, mint ha nem.

Emiatt különböztessünk meg két esetet.

Színezzünk ki egy P_m fát úgy, hogy végpontjaik azonos színűek és úgylis, hogy különbözők.

Ha P_1 és P_m azonos színű, akkor olyan, mintha egy $(m-1)$ csúcsú kört színeztünk volna, ha egyesítjük a két végpontot.

Másképp ha más színt kaptak a végpontok, akkor ha egy éllel összekötjük őket, akkor jó színezését kapjuk az m hosszú körnek.

Tehát a $P_{P_m}(k) = P_{C_{m-1}}(k) + P_{C_m}(k)$ összefüggést kapjuk.

$$P_{C_m}(k) = k(k-1)^{m-1} - P_{C_{m-1}}(k)$$

$$P_{C_4}(k) = k(k-1)^3 - P_{C_3}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$

$$P_{C_5}(k) = k(k-1)^4 - P_{C_4}(k) = k(k-1)^4 - k(k-1)(k^2 - 3k + 3) = k(k-1)(k^3 - 4k^2 + 6k - 4) = (k-1)^5 + (-1)^5(k-1)$$

$$P_{C_m}(k) = k(k-1)^{m-1} - P_{C_{m-1}}(k) = k(k-1)^{m-1} - ((k-1)^{m-1} + (-1)^{m-1}(k-1)) = (k-1)^m + (-1)^m(k-1)$$

Ezzel igazoltuk, hogy körökre $P_{C_m}(k) = (k-1)^m + (-1)^m(k-1)$.

Általában is alkalmazható a körre megismert módszer.

Ha G -ben az u és v két nem összekötött pont, akkor jelölje $G + uv$ azt a gráfot, amit az u és v összekötésével kapunk a G -ből.

Valamint G/uv azt a gráfot, amelyet az u és v összeolvasztásával kapunk. Az új uv csúcs 1-1 éllel szomszédos minden olyan csúccsal, amely szomszédja volt az u és v közül legalább az egyiknek.

A következő összefüggés igaz:

$$P_G(k) = P_{G+uv}(k) + P_{G/uv}(k).$$

Hasznos a következő alak is:

$$P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k).$$

Itt az $\{u, v\}$ élt a G tartalmazza és $G - uv$ azt a gráfot jelenti, amit az él elhagyása után kapunk.

Ebben az az előnyös, hogy a jobboldalon a G -nél kisebb gráfok vannak, az egyik pontszámában, míg a másik ugyan pontszámában egyforma, de az éleinek száma eggyel kevesebb.

Ez a redukció alkalmas arra, hogy bármely gráf kromatikus polinomát meghatározzuk.

Ez mégsem hatékony, hiszen túl sok részgráfja van egy gráfnak, és nem világos melyek kromatikus polinomára lesz szükségünk.

Hagyjunk el egy élt a 4 csúcsú teljes gráfból. Mi a kromatikus polinomja? Az első ekvivalens alakból

$$P_{K_4-uv}(k) = P_{K_4}(k) - P_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k-2)(k-2)$$

A második alapján

$$P_{K_4-12}(k) = P_{K_4-12-34}(k) - P_{P_3}(k) = P_{C_4}(k) - P_{P_3}(k) = (k-1)^4 + (-1)^4(k-1) - k(k-1)^2 = (k-1)((k-1)^3 + 1 - k(k-1)) = (k-1)k(k-2)^2$$

10.4. feladat. Határozzuk meg a két, egymást nem metsző átlót tartalmazó ötszög kromatikus polinomját!

- Vajon mit állapíthatunk még meg egy gráf kromatikus polinomjáról?
- Ki lehet-e - izomorfia erejéig - találni a polinomból, hogy milyen gráfhoz tartozik?
- Ki lehet-e a polinomból következtetni a gráf bizonyos tulajdonságait?
- Vajon mit állapíthatunk meg egy gráf kromatikus polinomjáról még?

Tudjuk, hogy a polinom foka megegyezik a G csúcsainak számával. A főegyüttható 1.
 Az $(n-1)$ fokú tag együtthatójának vajon van-e valamilyen jelentése? Amikor kevesebb mint $(k-1)$ részre partícionáljuk a csúcsokat, akkor ezek kiszínezéseinek számából nem adódik hozzá semmi az $(n-1)$ fokú tag együtthatójához.
 Az egyesével történő partícióval a $k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$ szorzatban a k^{n-1} együtthatója $-\frac{n(n-1)}{2}$ lesz. $(n-1)$ független részre úgy lehet osztani n csúcsot, hogy egy részbe két csúcs kerül, ezek éppen nem lehetnek szomszédosak.
 Tehát annyi $(n-1)$ részre történő partíció van, ahány nem szomszédos csúcspár. Így a $k(k-1)\cdots(k-n+2)$ tagok száma éppen ennyi. Összevonva a két adalékot, éppen az élszám ellentettjét kapjuk.
 Nem lehet egyértelműen következtetni a polinomból a gráfra, pl. mindegyik n -csúcsú fának ugyanaz a kromatikus polinomja.

10.5. állítás. [187] Ha $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ akkor G egy fa.

Bizonyítás: A polinom n -edfokú, így G n csúcsú. A második együttható $-(n-1)$, tehát G $(n-1)$ élű. Ha nem fa lenne, akkor több komponensből állna.
 Mivel 0 színnel 0 féleképpen lehet kiszínezni egy gráfot, így bármely gráf kromatikus polinomja osztható k -val. A komponensek kromatikus polinomjainak szorzata adja a G kromatikus polinomját, azonban az nem osztható k^2 -tel. Tehát G fa. ■

10.6. állítás. Ha G -nek van éle, akkor $P_G(k)$ együtthatóinak összege zérus.

Bizonyítás: Ha van éle, 1 színnel nem lehet kiszínezni, tehát $P_G(1) = 0$. ■

10.7. állítás. $P_G(k)$ együtthatóinak alternál az előjele.

Bizonyítás: Az n csúcsú gráfokra az éleinek m számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk.
 Az üres gráfokra k^n valóban ilyen. Tegyük fel, hogy a G n csúcsú és m élű, valamint a kisebb gráfokra feltesszük az állítást. Alkalmazzuk a redukciós formulát!
 $P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k)$.
 Tudjuk, hogy $G-uv$ -re és G/uv -ra igaz! A $G-uv$ főegyütthatója 1, az $(n-1)$ -edik hatványé negatív, majd így alternálva jönnek az előjelek.
 A G/uv viszont csak $(n-1)$ csúcsú, így a főegyüttható itt az $(n-1)$ -edik fokú taghoz tartozik, majd így tovább változva. Ha tehát kivonjuk őket egymásból, akkor a $G-uv$ főegyütthatója megmarad, majd később a negatívból vonunk ki egy nemnegatívot, és a nemnegatívhoz adunk hozzá egy nemnegatívot. Tehát az együtthatók előjele változni fog. ■

10.8. állítás. Ha G összefüggő, akkor a $P_G(k)$ együtthatóinak abszolútértékei - a magasabb fokú tagtól az alacsonyabb felé haladva - nőnek az $\left\lfloor \frac{n}{2} + 1 \right\rfloor$ kitevőig.

Bizonyítás: Az állítás igaz a fákra. Alkalmazzunk indukciót az élek számára. Ha az összefüggő gráfnak több éle van, akkor kereshetünk egy kört, ennek egy éle legyen e . Alkalmazzuk a redukciós eljárást!

$$P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k).$$

Ha az előző bizonyításra gondolunk most is készen vagyunk, hiszen az új együtthatók abszolút értékei a két másik polinom megfelelő együtthatóinak abszolút értékeinek összegeként adódnak. Az előbbi két kisebb összege, a következő két nagyobb összege. ■

10.1. következmény. Ha a G n csúcsú összefüggő gráf, akkor a $P_G(k)$ -ban az i -edik hatvány együtthatójának abszolútértéke legalább $\binom{n-1}{i-1}$.

Bizonyítás: Már az n csúcsú fára is igaz az állítás, az előző bizonyítás alapján ez minden él hozzávételével csak nő. ■

A kromatikus polinom néhány tulajdonsága:

- A $P_G(k)$ foka a G rendje.
- A főegyüttható 1.
- A k^{n-1} együtthatója $-m$ (m a G éleinek száma).
- A szabad tag 0.
- Az együtthatók váltakozó előjelűek.
- A G összefüggő, akkor $P_G(k) \leq k(k-1)^{n-1}$ minden pozitív k -ra.

10.1. A $P_G(k)$ gyökeiről

A következő felsorolt tulajdonságok bár igazak, de nem jellemzik a kromatikus polinomot.[32]

- $P_G(k)$ -nak a 0 gyöke.
- Nincs negatív gyöke.
- Ha egy gyök racionális, akkor egész.

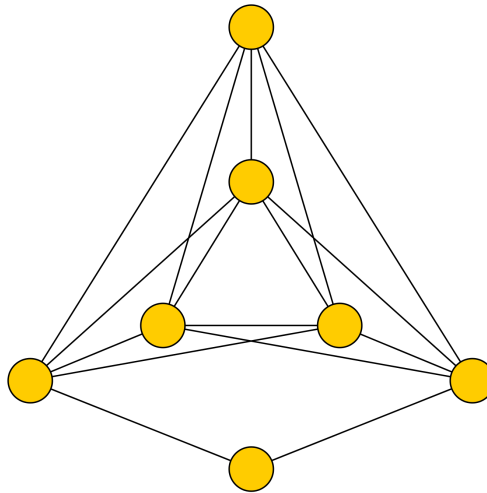
- A racionális (egész) gyökök a $0, 1, \dots, \chi(G) - 1$ számok közül kerülhetnek ki.

10.1. tétel. *Nincs egynél kisebb pozitív gyök.*

Bizonyítás: Többet látunk be. Ha $0 < x < 1$ és n páros, akkor $P_G(x) < 0$, ha n páratlan, akkor $P_G(x) > 0$. Feltehetjük, hogy G összefüggő. Fákra igaz az erősebb állítás. Ha egy kör élét elhagyjuk, akkor a redukciós összefüggésben a különbség előjele az indukciós feltevés miatt valóban az n paritásától függ. ■

Emlékezzünk arra, a merev körű gráfoknak van perfekt eliminációs sémája. Fel lehet őket építeni oly módon, hogy az új csúcs mindig pontosan egy teljes részgráf összes csúcsához fog illeszkedni. Másrészt ha ez így van, akkor a merevkörű gráfok kromatikus polinomját ennek alapján el tudjuk képzelni. Tudni fogjuk milyen alakú lesz. Ha az építésben gondolkodunk, akkor az új csúcsot biztosan éppen annyi színnel nem színezzhetjük, ahány elemű az a teljes gráf amelyhez illeszkedik.

10.2. tétel. *Ha G merev körű gráf, akkor $P_G(k) = \prod_{i=1}^n (k - c_i)$, ahol a nemnegatív c_i számok rendre a teljes gráfok méretét jelentik. Tehát a merev körű gráfok kromatikus polinomjainak nemnegatív egész gyökei vannak.*



Van-e olyan, csak egész gyökökkel rendelkező $P_G(k)$, melyre a G nem merev körű gráf?

Ez a 7 csúcsú gráf ilyen!

$$P_R(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)^3(k-4).$$

R. C. Read példája a legkisebb, csak egész gyökök kromatikus polinommal rendelkező nem merev körű gráf.

Kutatási problémáknak tekinthetjük az alábbiakhoz hasonló kérdéseket.

- Határozzuk meg a négyzetrács, háromszögrács, hatszögrács - mint gráfosztály - egy részének kromatikus polinomját!
- Osztályozzuk - kis n -re - az egyszerű gráfokat a kromatikus polinom szerint. Vajon adott n -re melyik polinomhoz tartozik a legtöbb nem izomorf n csúcsú gráf?
- Ha G 3-szorosan összefüggő és nem páros gráf, akkor nincs gyöke az $(1, 2)$ intervallumban. (Jackson sejtése, 1993)

11. Élek színezése

Egy G gráf két éle szomszédos, ha van közös csúcsuk.

G éleit k -színezhetőnek mondjuk, ha létezik a G éleinek címkézése az $1, \dots, k$ számokkal oly módon, hogy szomszédos élek különböző számot kapnak.

Egy ilyen jó címkézést k -színezésnek, vagy jó k -színezésnek mondunk. A csúcsok színezésénél a G esetleges párhuzamos éleinek nem volt szerepe, hiszen két csúcs különböző színt kellett, hogy kapjon akkor is ha csak egy él kötötte össze őket.

Az élek színezését vizsgálva általában nem kötjük ki G -ről, hogy egyszerű gráf, azonban a hurokért nem engedjük meg.

Ha u és v csúcsok között p él fut, akkor ezeket mind más-más színűre kell színeznünk.

11.1. A kromatikus index

11.1. definíció. [221] Azt a legkisebb nemnegatív egész k számot, amelyre G élei k -színezhetők $\chi'(G)$ -vel jelöljük és élkromatikus számnak, vagy kromatikus indexnek nevezzük.

11.1. állítás. $\Delta(G) \leq \chi'(G)$

A színosztályok a G éleinek független halmazai.

Egy színosztály a G -ben egy párosítás.

Az élszínezés a G éleinek partícionálása párosításokra.

Jelölje $\alpha'(G)$ a legnagyobb G -beli párosítás méretét.

11.2. állítás. $\alpha'(G) \leq \frac{n}{2}$.

11.3. állítás. Ha G -nek van $m \geq 1$ éle, akkor $\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}$ fennáll.

Általánosan, párhuzamos élekre is gondoljunk.

11.4. állítás.

- Az üres gráf kromatikus indexe nulla.
- $\chi'(P_t) = 2$, egy út éleit alternálva színezhetjük.
- $\chi'(C_t) = 2$, ha t páros,
 $\chi'(C_t) = 3$, ha t páratlan.
- $\chi'(T) = 2$, hiszen indukcióval a T csúcsszáma könnyű belátni, hogy egy levél pontot bekötő él színezését a $\Delta(T)$ szín valamelyikével megtehetjük.

11.5. állítás.

Egy páros gráf élgráfja perfekt.

Ha G egy kétrészes multigráf, akkor $\chi'(G) = \Delta(G)$ fennáll.

Bizonyítás: Az üres gráfra teljesül. Bizonyítsunk az élszáma vonatkozó teljes indukcióval.

Tegyük fel, hogy G egy $e = \{u, v\}$ élet elhagyva $G \setminus e$ $\Delta = \Delta(G)$ színnel élszínezhető.

Jelölje S_u, S_v az u és v csúcsokhoz illeszkedő élekhez még fel nem használt színek halmazát.

Nyilván S_u és S_v nem üresek, valamint ha metszetük nem lenne üres, belőlük bármely alkalmas lenne e

kiszínezésére.

Feltehető tehát, hogy a metszetük üres. Szemeljük ki egy-egy színt, S_u -ból a pirosat, S_v -ből a zöldet. Tekintsük a $H_u(p, z)$ részgráfot, amely áll az u -ból és a belőle piros vagy zöld éleken haladva elérhető csúcsokból és élekből a $G \setminus e$ gráfban.

Ha ebben a v is benne lenne, akkor egy u -ból v -be vezető alternáló piros - zöld utat az e éllel kiegészítve páratlan kört kapnánk a kétrészes G -ben. Tehát v nincs $H_u(p, z)$ -ben.

Most cseréljük fel a színeket $H_u(p, z)$ -ben!

Ezután az e élt kiszínezhetjük pirossal!

Elegendőnek bizonyult a $\Delta(G)$ szín. ■

11.1. következmény. *König tétele*[84, 85, 86] $\chi'(K_{n,m}) = \max\{n, m\}$ fennáll.

11.1. példa. *Szigorú vizsgáztatás!*[4] Egy szemeszter végén ha egy tanár k tárgyat tanított egy hallgatónak, akkor k szóbeli vizsgán kell résztvennie, amelyek egyenként t órásak.

Határozzuk meg a tanszék minimális, vizsgákra fordítandó idejét!

Legyen $G(H, T, E)$ egy páros gráf, amely leírja a szituációt!

H a hallgatók, T a tanárok halmaza. Kössünk össze egy hallgatót k éllel egy tanárral, ha nála k kurzusa van.

$\chi'(G) = \Delta(G)$ a legkevesebb vizsgaalkalom, amennyire biztosan szükség van.

Így ha t -vel szorzunk, megkapjuk a teljes időt.

12. Vizing tétele, 1964

12.1. tétel. [224, 226, 225, 227, 228] Egy G egyszerű gráf kromatikus indexe vagy a maximális fokszám vagy eggyel több.

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Bizonyítás: Elegendő a felső korlátot igazolni.

Ha az állítás nem lenne igaz, akkor létezne minimális ellenpélda, vagyis olyan G egyszerű gráf, amelyre $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$ teljesül, de bármely e élre $\chi'(G \setminus e) \leq \Delta(G \setminus e) + 1$ áll fenn.

Jelölje röviden $\Delta = \Delta(G)$ a maximális fokszámot és legyen $e = \{u, v\}$ egy rögzített él, $H = G \setminus e$.

Tegyük fel, hogy H színezése a $\Delta + 1$ nagyságú S színhalmazból megtörtént.

Valamely csúcsnál hiányzó színnek mondjuk az s színt, ha ebben a színezésben neki nincs s színű illeszkedő éle.

Mivel több szín van S -ben mint a maximális fok, így minden csúcshoz tartozik egy vagy több hiányzó szín S -ből.

Ha lenne u -nak és v -nek közös hiányzó színe, akkor az e -t ezzel kiszínezhetnénk.

Tegyük fel tehát, hogy nincs közös hiányzó színük. Ekkor próbáljunk úgy átszínezni, hogy az u -nak egy másik w szomszédjával legyen közös hiányzó színe.

Így kapnánk ellentmondást!

Induljunk tehát az $e_1 = \{u, v_1\}$ élből és tegyük fel, hogy $H = G \setminus e_1$ egy S színezésében közös hiányzó színük nincs, de pl. s hiányzik u -nál, t_1 hiányzik v_1 -nél.

Ekkor az $e_2 = \{u, v_2\}$ él lesz a t_1 színű u-nál.

Hogy ne legyünk készen, v_2 -nél a t_2 lesz a hiányzó szín és hasonlóan definiálhatjuk rendre a $v_1, v_2, \dots, v_i$ pontsorozatot, amelyek az u szomszédai, valamint egy $t_1, t_2, \dots, t_i$ színsorozatot, melyre t_i hiányzik a v_i -nél és az e_i u-t és v_i -t köti össze, a színe pedig t_{i-1} .

Legfeljebb egy t_i színű él van, amely az u-hoz vagy a v-hez illeszkedik.

Ha $v \notin \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$, akkor legyen $v = v_{i+1}$, és a hiányzó szín legyen t_{i+1} .

Ezek a sorozatok legfeljebb Δ hosszúak.

Legyenek v_k és t_k az utolsó elemük.

Az egyik oka lehet annak, hogy a sorozat megállt, hogy nincs u-nak olyan új szomszédja amelynek színén van t_k színű illeszkedő éle.

Színezzük át az éleket, kapjon az e_i, t_i színt ($i = 1, 2, \dots, k$).

Ekkor a G-t is ki tudtuk színezni Δ színnel.

A másik ok, amiért elakadhatunk a sorozat folytatásában az az, hogy valamely $j < k$ értékre a v_k hiányzó t_k színe megegyezik t_{j-1} -vel, az u-t és v_j -t összekötő e_{j-1} színével.

Ebben az esetben a j előtti i-kre színezzük át e_i -t t_i színűre.

Az $\{u, v_j\}$ él színét töröljük, a v_j hiányzó színe legyen legyen $t_{i-1} = t_k$.

A további élekkel már ne törődjünk. Így tehát minden G-beli él ki lesz színezve, kivéve $e_{j-1} = \{u, v_j\}$ -t.

A továbbiakban hozzájutunk egy olyan átszínezéshez, amelyben lesz olyan szín, amely hiányzó az u-nál is és a v_j -nél is.

Tekintsük a $G(s, t_k)$ részgráfot, amelyet a s-színű és a t_k színű élek és a végpontjaik alkotnak. A részgráf minden komponense vagy út, vagy kör.

Az s az u-nál hiányzó, a t_k pedig a v_j és a v_k -nál.

A három említett csúcs foka a részgráfban legfeljebb 1.

Emiatt ez a három csúcs nem lehet a $G(s, t_k)$ részgráf egy komponensében.

Két esetet különböztetünk meg.

1. eset

Az u és v_j csúcsok különböző komponensben vannak.

Az v_j -t tartalmazó komponensben cseréljük fel az s és a t_k színeket! Ekkor az s hiányzó lesz a v_j -nél.

Mivel az s szín az u-nál is hiányzó, így jó lesz az e_{j-1} -t s-sel kiszínezni.

2. eset

Az u és v_k csúcsok különböző komponensben vannak.

Változtassuk meg az $\{u, v_i\}$ él színét t_i -re, minden k-nál kisebb i esetén!

Az átszínezés nem hat ki $G(s, t_k)$ -ra.

Most az egyetlen színezetlen él G-ben az $\{u, v_k\}$.

Mint az előbb, cseréljük meg az élek színét a v_k -t tartalmazó komponensben!

Ekkor az s hiányzó színe lesz a v_k -nak.

s-sel kiszínezhetjük az $\{u, v_k\}$ élt.

Ezzel ellentmondásra jutottunk, a G kiszínezhető Δ színnel. ■

A maximális fokszám, vagy a következő szám egy egyszerű gráf kromatikus indexe.

Ez két osztályba sorolja az egyszerű gráfokat.

A páros körök élei kiszínezhetők 2 színnel, de a páratlan körök csak 3-mal!
A páros rendű teljes gráfok élei kiszínezhetők a maximális foksámnyi színnel.
A páratlan rendű teljes gráfok élei kiszínezéséhez eggyel több szín szükséges, mint a maximális foksám.

12.1. Tornák szervezése

12.1. állítás. Ha G $(2n + 1)$ -rendű, Δ -reguláris gráf, akkor $\chi'(G) = \Delta + 1$ teljesül.

Egy színosztályba nem eshet n -nél több él!

A körmérkőzéses versenyeket úgy próbálják lebonyolítani, hogy minél kevesebb forduló alatt elérjék, hogy mindenki játsszon mindenkivel egy mérkőzést.

Ahhoz, hogy a Vizing-tétel erejével kapott minimális forduló számot el tudják érni, a párokba állítást meg kell szervezni.

12.2. feladat. Adjuk meg a teljes gráfok élhalmazának párosításokra bontását úgy, hogy a lehető legkevesebb párosításból álljon!

12.3. feladat. A kollégiumban öten szeretnek teniszezni.

A kieséses bajnokságot hamar elvetették.

Egy jó versenyforma a páros játék.

Bármely két játékos mint pár egy meccset játszik bármely másik két játékosból összeállított párral (összesen 15 meccsre kerül sor).

Egyik pár sem akar egy napon egynél több meccset játszani.

Legalább hány nap kell a lebonyolításhoz?

Adjunk is meg egy menetrendet a meccsek lejátszására!

12.4. feladat. Az előző tenisztorna lejátszásához legalább hány nap kell, ha senki nem akar egy napon egynél több meccset játszani?

12.5. feladat. Az ulti nevű népszerű magyar kártyajátékot n hallgató kedveli a kollégiumban.

Egyszerre három fő játszhat a játék szabályai szerint.

Abból lehet igazságos egyéni eredményt hirdetni, ha bármely 3 játékos játszik együtt azonos időtartamban (pl. egy órát).

Hány nap alatt lehet lebonyolítani az egész tornát, ha egy napon mindenki legfeljebb k órában képes játszani a vizsgákra készülés miatt?

Ki tud nagyobb (n, k) mátrixot kitölteni?

12.6. feladat. Ha G 3-reguláris, hídmentes és 3-színezhető gráf, akkor egy jó élszínezés esetén bármely vágásban a három különböző színben megjelenő élek számának paritása megegyezik egymással.

12.2. Melyik osztályba?

12.7. feladat. Ha egy 3 reguláris G gráf nem kétszeresen élösszefüggő, akkor $\chi'(G) = 4$.

12.8. állítás. Ha a G gráfnak m éle van és $m > \Delta(G)\alpha'(G)$, akkor $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Bizonyítás: Korábban megjegyeztük, hogy triviálisan teljesül, hogy a maximális párosítás méretének és az élszínezés osztályai számának szorzata legalább az élek száma, azaz $\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}$. Tehát

$$\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)} > \frac{\Delta(G)\alpha'(G)}{\alpha'(G)} = \Delta(G),$$

vagyis $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. ■

Tehát, ha egy gráfnak bizonyos értelemben túl sok éle van, akkor a Vizing-tétel szerinti 2. osztályba tartozik.

12.1. definíció. Az n csúcsú, m élű G gráf telített, ha $m > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \Delta(G)$.

12.9. állítás. Ha n páros, akkor G nem lehet telített.

12.10. állítás. Minden telített gráf a 2. osztályban van.

12.2. definíció. Az n csúcsú, m élű G gráf n' (páratlan) csúcsú, m' élű H részgráfja telített, ha $m' > \left\lfloor \frac{n'}{2} \right\rfloor \Delta(G) = \Delta(G) \frac{n'-1}{2}$.

12.11. állítás. Ha H a G telített részgráfja, akkor $\Delta(H) = \Delta(G)$ fennáll, tehát a H önmagában is telített, vagyis H a 2. osztályban van..

12.12. állítás. Ha H a G egy telített részgráfja, akkor G a 2. osztályban van.

Az állítás nyilvánvaló, hiszen a kromatikus index monoton paraméter, a H a 2. osztályban van és $\Delta(H) = \Delta(G)$.

Egyrészt a fenti állítás miatt egy részgráf telítettsége miatt maga a gráf is a 2. osztályban van.

Másrészt nyilván léteznek olyan gráfok, amelyeknek nincs valódi telített részgráfja.

Azonban vannak olyan gráfok is, amelyek a 2. osztályban vannak, de nincs telített részgráfjuk.

Ilyen pl. a Petersen-gráf, hiszen páros rendű.

Az alábbi telítettségi sejtést Amanda G. Chetwynd és Anthony J. W. Hilton fogalmazta meg.

12.13. sejtés. Legyen G maximális foka nagyobb, mint a csúcsszám harmada. Ekkor G pontosan akkor tartozik a 2. osztályba, ha G -nek van telített részgráfja.

Ha a Petersen-gráfban törölünk egy csúcsot, még akkor is a 2. osztályban marad, nem tartalmaz telített részgráfot, és 9 csúcsú, 3 maximális fokszerű. Tehát a sejtés hasonló alakban nem erősíthető. Szorosan kapcsolódik a telítettség sejtés az 1-faktor sejtéshez.

12.14. sejtés. Ha G n (páros) rendű, Δ reguláris és $\Delta \geq \frac{n}{2}$, akkor G élhalmazát fel lehet bontani Δ teljes párosítás diszjunkt uniójára. ($\chi'(G) = \Delta(G)$)

12.2. tétel. A telítettség sejtésből következne az 1-faktor sejtés.

13. Élszínezés általánosítások

Adott G gráf és egy f függvény, amely G csúcsaihoz pozitív egészeket rendel.

13.1. definíció. [4] A G f -színezésének nevezzük az éleinek egy olyan színezését amelyre teljesül, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsához legfeljebb $f(v)$ számú egyszínű él illeszkedik. Azt a legkisebb k számot, amelyre létezik G -nek f -színezése k színnel a G f -kromatikus indexének nevezzük, jelölése $\chi'_f(G)$.

Ha az f minden csúcsra egyet rendel, akkor a hagyományos élszínezésről van szó.

A Vizing-tételhez hasonló tételek igazak $\chi'_f(G)$ -re is. Jelölje

$$\Delta_f(G) = \max_{v \in V(G)} \left\lceil \frac{d(v)}{f(v)} \right\rceil$$

a maximális fokszerű általánosítását.

13.1. lemma. Legyen G egyszerű gráf. Ekkor a G f -kromatikus számára fennáll a

$$\Delta_f(G) \leq \chi'_f(G) \leq \max_{v \in V(G)} \left\lceil \frac{d(v) + 1}{f(v)} \right\rceil \leq \Delta_f(G) + 1$$

egyenlőtlenség.

A G egyszerű gráfokat most is két osztályba lehet sorolni, C_f1 -be, ha $\chi'_f(G) = \Delta_f(G)$, valamint C_f2 -be, ha $\chi'_f(G) = \Delta_f(G) + 1$.

13.1. tétel (Hakimi és Kariv, 1986). [103] Ha G páros gráf, akkor $\chi'_f(G) = \Delta_f(G)$.

13.2. tétel (Hakimi és Kariv, 1986). Ha G egy egyszerű gráf és az f függvény minden csúcshoz páros számot rendel, akkor G a C_f1 -be tartozik.

Legyen

$$V_0(G) = \left\{ v : \Delta_f(G) = \frac{d(v)}{f(v)}, v \in V(G) \right\}$$

azon csúcsok halmaza, amelyeknél a $\Delta_f(G)$ definíciójában az egyenlőség adódik. A definiált halmaz üres, ha a hányadosok közül a maximális nem egész szám.

Jelölje $d_f(v) = \frac{d(v)}{f(v)}$ a v csúcs f -arányát.

13.3. tétel (Zhang és Liu, 2005). A G egyszerű gráfra $V_0(G) = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $G \in C_f1$.

13.2. definíció. A $V_0(G)$ csúcshalmaz által feszített G_{Δ_f} részgráfot a G f -magjának nevezzük.

13.4. tétel (Zhang és Liu, 2006). A G egyszerű gráf a C_f1 osztályba tartozik, ha G_{Δ_f} egy erdő.

13.3. definíció. A G gráfot $\Delta_f(G)$ -meghámozhatónak nevezzük, ha a G összes u csúcsát egymás után levághatjuk úgy, hogy amikor az u levágása történik legfeljebb egy szomszédja marad, amelynek az f -aránya $\Delta_f(G)$.

13.5. tétel (Zhang és Liu). Ha a G egyszerű gráf $\Delta_f(G)$ -meghámozható, akkor a C_f1 osztályba tartozik.

Ha a G gráf f -magja erdő, akkor G $\Delta_f(G)$ -meghámozható, mivel a $V_0(G)$ csúcsait egyesével levághatjuk, minden lépésben levél pontot választva, annak legfeljebb egy szomszédja marad G_{Δ_f} -ben. Több is igaz, nem csak a fa-magú gráfok meghámozhatók.

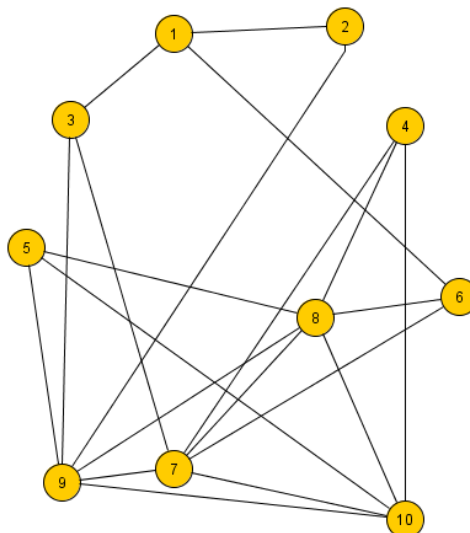
13.1. példa. A 10 csúcsú G példához az első 5 csúcsra $f(v_i) = 1$, a következő 5 csúcsra $f(v_i) = 2$. Így $\Delta_f(G) = 3$.

$V_0(G) = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9\}$.

A 11. ábrán látható G gráf $\Delta_f(G)$ -meghámozható, ugyanis a csúcsokat sorszám szerint eltávolíthatjuk!

Mi mondható a teljes gráfra?

13.6. tétel (Zhang és Liu, 2005). Ha a K_n teljes gráf minden v csúcsára $f(v) = k$ és $k|(n-1)$, akkor K_n a C_f2 osztályba tartozik, egyébként a C_f1 osztályba.



11. ábra. Egy meghámozható gráf.

Mit mondhatunk a reguláris gráfokra?

13.7. tétel (Zhang, Wang és Liu). A $\Delta(G)$ -reguláris G gráf az első osztályban van, ha $f_{\min}$ páros szám, vagy nem osztója $\Delta(G)$ -nak ($f_{\min}$ a legkisebb érték, amit az f csúcshoz rendelt).

13.8. tétel (Zhang, Wang és Liu). A G $\Delta(G) = 2n + 1$ -reguláris gráf és az f minden csúcshoz a $(2s + 1)$ páratlan számot rendeli. Ha $(2s + 1) \mid \Delta(G)$, akkor G a második osztályban van.

13.9. tétel (Zhang, Wang és Liu). Legyen G n rendű, Δ -reguláris, nem teljes gráf. Egyetlen w csúcsban $f(w) > f_{\min}$. G pontosan akkor van C_f1 -ben, ha $G \setminus w$ is.

13.10. tétel (Zhang, Wang és Liu). Legyen G páros rendű, nem teljes, Δ -reguláris gráf. Az f függvény minden csúcshoz ugyanazt rendeli. Ekkor G pontosan akkor tartozik C_f1 -be, ha bármely csúcsát törölve is az első osztályba tartozik.

1. probléma. Találjunk a fentiekhez hasonló állítást Δ -reguláris gráfokra, amikor $f_{\min} \mid \Delta$ és $f_{\min}$ páratlan!

2. probléma. Mely gráfosztályok tartoznak a C_f1 osztályba bármely pozitív egész f függvényre?

3. probléma. Adjunk szükséges és elégséges feltételeket arra, vajon mely G egyszerű gráf tartozik C_f1 -be és C_f2 -be

14. Multigráfok élszínezései

[155] Az élszínezési problémák vizsgálatának egyik gyakorlati motivációja a számítógépek közötti szövegek átküldésének problémája.

Tegyük fel ugyanis, hogy a v számítógépnek $f(v)$ kommunikációs portja van.

Bármely komputer-párhoz adott, hány fájl kell a gépek között átküldeni. A feladat az átküldések ütemezése. Célunk a leggyorsabb teljes állománycsere.

Feltéve, hogy mindegyik fájl azonos hosszú (az átküldések azonos ideig tartanak) éppen az f -színezés a megfelelő modell.

A G multigráf csúcsai legyenek a hálózat aktív pontjai, a számítógépek.

Mindegyik fájlnak feleljen meg egy él a két gép között. Az időt mérjük egy fájl átküldési idejében, legyen ez az egység.

Az éleket - vagyis a fájlkat - színezzük meg az egységnyi időintervallumokkal. Mindegyik azt a színt kapja, amikor átküldjük. Egy v gép egyszerre - egy színben - legfeljebb $f(v)$ fájl küldhet, illetve fogadhat.

Az f -színezési problémában minimális számú szín felhasználását szeretnénk.

Ez megfelel az átküldés összes ideje minimalizálásának.

A szövegek továbbításának problémája természetes módon általánosabbá válik, ha figyelembe vesszük a kommunikációs csatornák kapacitását is.

Adott egy G multigráf és egy f függvény, amely G csúcsaihoz pozitív egészeket rendel, valamint adott egy g függvény, amely mindegyik csúcspárhoz egy-egy pozitív egészet rendel.

14.1. definíció. [171] A G multigráf olyan f -színezését, amelyben be kell tartanunk azt is, hogy gép párok között $g(uv)$ felülről korlátozza az u és v csúcsok közötti $E(uv)$ párhuzamos élhalmazban előforduló azonosan színezett élek számát, fg -színezésnek nevezzük.

Azt a legkisebb számot, amennyi szín elegendő a G multigráf fg -színezéséhez a G fg -kromatikus indexének nevezzük és $\chi'_{fg}(G)$ -vel jelöljük.

14.1. tétel (Vizing, Gupta). Minden nemüres multigráfra

$$\chi'(G) \leq \max_{v,w \in V(G)} \{d(v) + p(vw)\},$$

ahol $p(vw)$ a párhuzamos élek száma a két csúcs között.

14.2. tétel (Shannon). [193] A G multigráfra $\chi'(G) \leq \frac{3\Delta(G)}{2}$.

Egy H multigráfban nyilvánvalóan legfeljebb $\left\lfloor \frac{|V(H)|}{2} \right\rfloor$ élt tartalmazhat egy párosítás, tehát ez egy színosztály méretének is felső korlátja. Legyen

$$l(G) = \max_{H \subseteq G, |V(H)| \geq 3} \left\lceil \frac{|E(H)|}{\left\lfloor \frac{|V(H)|}{2} \right\rfloor} \right\rceil.$$

Nyilvánvalóan $l(G) \leq \chi'(G)$

14.3. tétel (Nishizeki, T., Kashiwagi, K., 1990). $\chi'(G) \leq \max \left\{ l(G), \left\lfloor \frac{11\Delta(G)+8}{10} \right\rfloor \right\}$.

14.1. sejtés (Goldberg sejtése). Minden $5 \leq k$ páratlan egészre fennáll a

$$\chi'(G) \leq \max \left\{ l(G), \left\lfloor \frac{k\Delta(G) + (k-3)}{k-1} \right\rfloor \right\}$$

felső becslés.

14.2. sejtés (Goldberg és Seymour sejtése). $\chi'(G) \leq \max\{l(G), \Delta(G) + 1\}$.

f-színezésre a korábbi, egyszerű gráfokra vonatkozó állításhoz hasonló igaz.

14.4. tétel (Hakimi és Kariv). Minden G multigráfra

$$\chi'_f(G) \leq \max_{v,w \in V(G)} \left\lfloor \frac{d(v) + p(vw)}{f(v)} \right\rfloor$$

teljesül.

Visszakapunk egy másik korábbi állítást, ha az f függvény azonosan 1. Legyen

$$l_f(G) = \max_{H \subseteq G, |V(H)| \geq 3} \left\lfloor \frac{|E(H)|}{\left\lfloor \frac{\sum_{v \in V(H)} f(v)}{2} \right\rfloor} \right\rfloor.$$

14.5. tétel (Nakano, S., Nishizeki, T., Saito, N.). $\chi'_f(G) \leq \max \left\{ l_f(G), \left\lfloor \frac{9\Delta_f(G)+6}{8} \right\rfloor \right\}$.

14.6. tétel (Nakano, S., Nishizeki, T.). $\chi'_{fg}(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta_{fg}(G)}{2} \right\rfloor$,

ahol

$\Delta_{fg}(G) = \max\{\Delta_f(G), \Delta_g(G)\}$, valamint

$$\Delta_f(G) = \max_{v \in V(G)} \left\lfloor \frac{d(v)}{f(v)} \right\rfloor, \text{ és}$$

$$\Delta_g(G) = \max_{vw \in E(G)} \left\lfloor \frac{p(vw)}{g(vw)} \right\rfloor.$$

15. g-éllefedő színezés

A G éleinek színezésekor írjuk elő, hogy minden v csúcsnál mindegyik színű élből legalább $g(v)$ legyen. Speciálisan, ha $g(v) = 1$ minden csúcsra, akkor éllefedő színezésről beszélünk. Ellentétben az eddigi színezési problémákkal itt kevesebb színnel könnyebb teljesíteni a feltételt.

15.1. definíció. Jelölje $\chi'_{gc}(G)$ azt a legnagyobb k számot, melyre létezik a G -nek g -éllefedő színezése k színnel. Ha a g függvény azonosan 1 a csúcsokra, akkor $\chi'_c(G)$ jelenti az éllefedő színezési számot.

Vezessük be a $\mu(v) = \max\{p(uv) : u \in V(G)\}$ jelölést és legyen $\mu(G) = \max\{\mu(v) : v \in V(G)\}$, ahol $p(uv)$ az u és v csúcsok közötti párhuzamos élek számát jelöli.

15.1. tétel (Gupta, 1974). Minden G multigráfra
 $\min\{d(v) - \mu(v) : v \in V(G)\} \leq \chi'_c(G) \leq \delta(G)$.

Legyen $\delta_g(G) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{d_G(v)}{g(v)} \right\rfloor : v \in V(G) \right\}$.

Egy adott C élszínezésre legyen $E(i)$ az i színt kapott élek halmaza.

Jelölje $i_C(v)$ a C színezésnél a v -hez illeszkedő i színű élek számát.

15.2. tétel (Song és Liu, 2005). Legyen G páros gráf. Ekkor $\chi'_{gc}(G) = \delta_g(G)$. Továbbá, ha $\chi'_{gc}(G) = k \geq 2$, akkor létezik olyan g -éllefedő C színezése G -nek, melyre $\|E(i) - E(j)\| \leq 1$, bármely $i, j \in \{1, \dots, k\}$ esetén, valamint teljesül még az $|i_C(v) - j_C(v)| \leq 1$ is minden $v \in V(G)$ csúcs és $i, j \in \{1, \dots, k\}$ esetén.

15.3. tétel (Song és Liu, 2005). Legyen G tetszőleges gráf. Ha $g(v)$ pozitív páros szám minden csúcsra, akkor $\chi'_{gc}(G) = \delta_g(G)$ teljesül.

15.4. tétel (Song és Liu, 2005). Legyen G tetszőleges gráf. Ha az $1 \leq g(v) \leq d(v)$ feltétel minden csúcsra teljesül, akkor $\chi'_{gc}(G) \geq \min_{v \in V(G)} \left\{ \left\lfloor \frac{d(v) - \mu(v)}{g(v)} \right\rfloor \right\}$.

Vezessük be a következő jelölést: $\delta'_g(G) = \min_{v \in V(G)} \left\{ \left\lfloor \frac{d(v) - 1}{g(v)} \right\rfloor \right\}$.

15.5. tétel (Xu és Liu, 2008). Legyen G tetszőleges gráf. Ha az $1 \leq g(v) \leq d(v)$ feltétel minden csúcsra teljesül és $1 \leq \delta'_g(G) \leq 4$ is fennáll, akkor

$$\chi'_{gc}(G) \geq \delta'_g(G).$$

Szokás egy gráfot $gc1$ osztályban lévőnek mondani, ha teljesül rá a $\chi'_{gc}(G) = \delta'_g(G)$ egyenlőség, egyébként pedig $gc2$ osztályúnak.

Egy G egyszerű gráfot gc -kritikusnak mondunk, ha a G a $gc2$ osztályban van és $\chi'_{gc}(G + e) > \chi'_{gc}(G)$ minden új élre.

4. probléma. Jellemezzük azokat a G gráfokat, amelyek a $gc1$ osztályban vannak!

5. probléma. Milyen tulajdonságai vannak a gc -kritikus gráfoknak?

15.2. definíció. Egy G gráfnak a (g, f) -színezése egy olyan élszínezése, amelyre teljesül, hogy minden v csúcsonál, minden színű élből előfordul legalább $g(v)$, de legfeljebb $f(v)$. Jelölje $\chi'_{gf}(G)$ azt a legkisebb k számot, melyre létezik G -nek (g, f) -színezése k színnel.

$\chi'_{gf}(G)$ -t a G (g, f) -kromatikus indexének nevezzük.

Azt a legnagyobb k számot, melyre létezik G -nek (g, f) -színezése k színnel, $\overline{\chi'}_{gf}(G)$ -vel jelöljük és a G felső (g, f) -kromatikus indexének nevezzük.

15.3. definíció. [104] A G egy H részgráffját a G (g, f) -faktorának nevezzük, ha $|V(H)| = |V(G)|$ és $g(v) \leq d_H(v) \leq f(v)$ minden v csúcsra teljesül.

Ha a G maga is egy (g, f) -faktora önmagának, akkor a G -t (g, f) -gráfnak hívjuk.

Legyen $\Delta_f(G) = \max \left\{ \left\lceil \frac{d_G(v)}{f(v)} \right\rceil : v \in V(G) \right\}$.

A G gráf egy (g, f) -faktorizációja az éleknek egy olyan $F_1, \dots, F_m$ partíciója, melyre mindegyik F_i egy (g, f) -faktor.

Egy G -nek pontosan akkor van (g, f) -színezése, ha az éleinek van (g, f) partíciója.

15.6. tétel (Xu és Liu, 2008). Legyen a G egy gráf, g és f nemnegatív egész értékű függvények a csúcsokon és $g(v) \leq f(v)$ minden csúcsra.

Ha G -nek létezik (g, f) színezése, akkor

$$\chi'_f(G) \leq \chi'_{gf}(G) \leq \overline{\chi'}_{gf}(G) \leq \chi'_{gc}(G)$$

15.7. tétel (Xu és Liu, 2008). Legyen G egyszerű gráf. Tegyük fel, hogy $\chi'_f(G) = \max_{v \in V(G)} \left\lceil \frac{d(v) + 1}{f(v)} \right\rceil$,

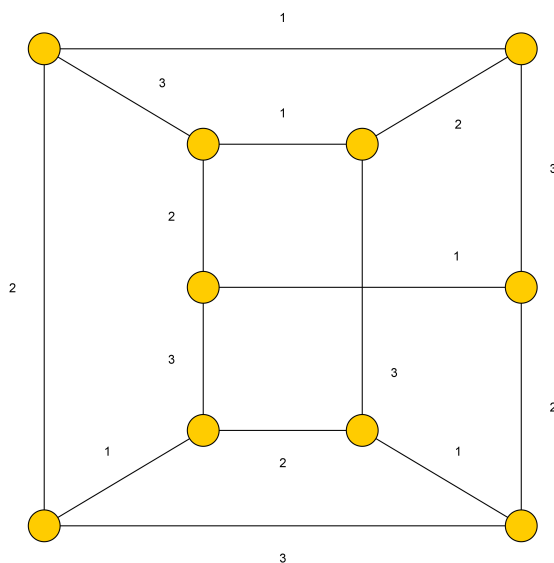
$$\chi'_{gc}(G) = \min_v \left\lceil \frac{d(v) - 1}{g(v)} \right\rceil, \text{ és}$$

$$\chi'_{gc}(G) \geq \chi'_f(G) \text{ teljesül.}$$

Ekkor van a G -nek (g, f) -színezése és

$$\chi'_{gf}(G) = \chi'_f(G), \text{ valamint } \overline{\chi'}_{gf}(G) = \chi'_{gc}(G).$$

15.4. definíció. A G gráf k színnel történő C élszínezése kiegyensúlyozott, ha $|i_C(v) - j_C(v)| \leq 1$, minden $1 \leq i < j \leq k$ színpárra és $v \in V(G)$ csúcsra (l. a 12. ábrát).



12. ábra. Kiegyensúlyozott élszínezés.

Legyen $V_t(G) = \{v \in V(G) : t|d(v)\}$, ahol t pozitív egész.

A G azon részgráffját, amelyet a $V_t(G)$ feszít a G t -magjának hívjuk.

15.8. tétel (Hilton és de Werra, 1994). Legyen G egyszerű gráf és $k \geq 2$.

Ha k nem osztója egyik csúcs fokának sem, akkor létezik a G -nek kiegyensúlyozott k -élszínezése.

Ha G egyszerű gráf, akkor a $k = \Delta(G) + 1$ esetben az előző tétel Vizing tételét adja vissza. Ha $k = \delta(G) - 1$, akkor Gupta tétele következik.

15.9. tétel. Legyen G egy multigráf és $k \geq 2$.

Ha $\mu(G) \leq d(v) \pmod{k} \leq k - \mu(v)$ mindegyik csúcsra teljesül, akkor G -nek van egy kiegyensúlyozott k -élszínezése.

15.10. tétel (Zhang és Liu). Legyen G egyszerű gráf és $k \geq 2$.

Ha G k -magja erdő, akkor G -nek létezik kiegyensúlyozott k -élszínezése.

16. Listaszínezés

Legyen G egy gráf. G minden e éléhez tartozik színek egy $L(e)$ listája.

A G gráf a listákból jól kiszínezhető, ha van olyan élszínezése, hogy a színt az él listájából választjuk és szomszédos élek nem kapnak azonos színt.

Adott egy pozitív k szám.

Azt mondjuk, hogy a G k -lista élszínezhető, ha bármilyen, legalább k hosszú listákat is rendelnek a csúcsokhoz, a G a listákból jól élszínezhető. [133]

16.1. definíció. Jelölje $\chi'_l(G)$ azt a legkisebb k számot, melyre a G k -lista élszínezhető, a neve lista kromatikus index.

A listaszínezés a klasszikus színezés általánosítása, hiszen ha mindegyik lista az $\{1, \dots, k\}$, akkor a normál színezést kapjuk.[69]

Ezért $\chi'(G) \leq \chi'_l(G)$.

A mohó színezés adja a $\chi'_l(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ felső becslést.

A csúcsok színezésekor a lista kromatikus szám lehet sokkal nagyobb, mint a kromatikus szám. [96][241]

16.1. sejtés.

A lista élszínezési sejtés:[122][139] [213] $\chi'(G) = \chi'_l(G)$.

16.1. Dinitz sejtése–Galvin tétele

[1] [87] [178]

Speciálisan Jeffrey Howard Dinitz 1979-ben sejtette a 16.1. sejtést speciálisan $K_{n,n}$ -re. Úgy is elképzelhetjük a kérdést, hogy egy általánosított $n \times n$ -es sakktábla mezőit szeretnénk kiszínezni úgy, hogy minden sorban és oszlopban csupa különböző színek kerüljenek, de a színeket csak a mezőkhöz rendelt n hosszú listák elemeiből választhatjuk.

Fred Galvin, aki a magyar kombinatorika fellelőjében, Budapesten is dolgozott Erdős Pál és Hajnal András környezetében, 1994-ben bebizonyította a híres Dinitz-sejtést!

Erdős Pál előadásában gyakran emlegette a KÖNYVET, amelyben minden matematikai tétel a legegyszerűbb, legegánsabb bizonyítással szerepel.

Ha valaki gyönyörű megoldást talált egy problémára, akkor azt mondta: ez a KÖNYVBŐL való, elmondom.

16.1. tétel (Fred Galvin, 1994).

[1] [87] $\chi'(K_{n,n}) = \chi'_l(K_{n,n})$.

Először belátunk egy irányított gráfokra vonatkozó segédállítást.

16.2. definíció. Legyen $G(V,A)$ egy irányított gráf.

A csúcsok egy $M \subseteq V$ halmaza mag, ha M független G -ben és minden $u \notin M$ csúcshoz létezik olyan $v \in M$ melyre $(u,v) \in A$, vagyis létezik bármely M -en kívüli csúcsból egy irányított él M -be (a mag, több matematikai jelentéssel bíró szó).

16.2. lemma. Legyen $G(V,A)$ egy irányított gráf, és tegyük fel, hogy minden $v \in V$ csúcshoz adott egy $L(v)$ színhalmaz, amelynek mérete nagyobb mint a v kifoka.

Ha G minden feszített részgráffjának van magja, akkor G -nek van listaszínezése az $L(v)$ listákból.

Bizonyítás: A csúcsok száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

1 csúcsú gráfra nincs mit meggondolni.

Válasszunk egy $c \in L = \cup_{v \in V} L(v)$ színt és legyen $A(c) := \{v \in V : c \in L(v)\}$ azon csúcsok halmaza, amelyek listája tartalmazza a c színt.

Az indukciós feltevés miatt a $G_{A(c)}$ feszített részgráfnak van egy $M(c)$ magja.

Színezzük ki minden $M(c)$ -beli csúcst a c színnel, hiszen a $K(c)$ független halmaz, majd töröljük a $M(c)$ -t G -ből és a c színt az L -ből.

Legyen G' a $V \setminus M(c)$ által feszített részgráf, melyben minden v csúcshoz az $L(v) \setminus c$ listák tartoznak.

Minden $v \in A(c) \setminus M(c)$ -re a mag tulajdonsága miatt a kifok eggyel csökkent.

De az $L(v) \setminus c$ listák hossza is csökkent eggyel.

A G' egyéb csúcsaiban pedig nem változott sem a kifok, sem a listaméret.

Tehát teljesül G' -re a lemma feltétele.

Mivel kisebb gráf, így az indukciós feltevés miatt G' is színezhető, így G is a listákból. ■

16.2. Stabil párosítás.

Az előbbi lemma használatához találni kellene olyan irányítást a $K_{n,n}$ élgráfjában, melyre a $d^+(v) \leq n-1$ teljesül minden v -re, és amelyben minden feszített részgráfnak van magja.

A következő fogalomhoz képzeljük el, hogy egy páros gráf egyik osztálya, az Y bizonyos férfiakat jelent, az X bizonyos nőket.

Él köt össze egy nőt és egy férfit, ha ismerősök.

Egy párosítás házaspárokat határozzon meg.

Minden nőnek és férfinak van egy preferencia sorrendje az ellenkező neműek között.

Ha pl. $N(v) = \{u_1 > \dots > u_{d(v)}\}$ a v ismerőseinek halmaza, akkor a v -nek u_1 tetszik a legjobban.

16.3. definíció (Stabil párosítás). [1] A $G = (X \cup Y, E)$ kétrészes gráf egy M párosítását stabilnak nevezzük, ha a következő feltétel teljesül:

Ha $\{u, v\} \in E \setminus M$, $u \in X$, $v \in Y$, akkor vagy $\{u, v\} \in M$ és az $N(u)$ -ban $y > v$, vagy $\{x, v\} \in M$ és $N(v)$ -ben $x > u$, vagy mindkettő teljesül.

16.3. lemma. Mindig létezik stabil párosítás.

16.2. tétel. $\chi'(K_{n,n}) = \chi'_l(K_{n,n})$.

Bizonyítás: Gondolhatunk a $K_{n,n}$ éleire, mint egy $n \times n$ -es sakktábla mezőire, és hivatkozhatunk egy élre a koordinátaival.

Az (i, j) és (r, s) élek pontosan akkor szomszédosak, ha $i = r$ vagy $j = s$.

Írjuk a mezőkbe az $\{1, \dots, n\}$ számokat úgy, hogy Latin négyzetet kapjunk (minden sorban és oszlopban pontosan egy álljon minden számból).

Jelölje $L(i, j)$ az (i, j) mezőbe írt számot.

Írányítsuk az éleket!

$(i, j) \rightarrow (i, j')$, ha $L(i, j) < L(i, j')$.

$(i, j) \rightarrow (i', j)$, ha $L(i, j) > L(i', j)$.

azaz a sorokban a kisebbtől a nagyobb felé irányítunk, míg az oszlopokban éppen fordítva.

Minden (i, j) -re $d^+(i, j) = n - 1$.

Valóban, ha $L(i, j) = k$, akkor a sorában van nála $(n-k)$ nagyobb érték és az oszlopában pedig $(k-1)$ nála kisebb érték.

A 16.2. lemma szerint elegendő megmutatnunk, hogy az irányított gráfunkban minden feszített részgráfnak van magja!

Tekintsük mezőknek egy $A \subseteq V$ részhalmazát.

Legyen X azon soroknak a halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező, ill. Y azon oszlopok halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező.

Rendeljük hozzá A -hoz a $G = (X \cup Y, E)$ páros gráfot, ahol minden $(i, j) \in A$ esetén legyen az $i \in X$ és $j \in Y$ összekötve G -ben.

Az irányított gráfunk természetes módon meghatározza a G páros gráf egy csúcsa szomszédságának egy sorrendjét.

$N(i)$ -ben $j' > j$, ha $(i, j) \rightarrow (i, j')$

$N(j)$ -ben $i' > i$, ha $(i, j) \rightarrow (i', j)$

A stabil párosítás létezése miatt G -ben van egy M stabil párosítás.

Az M mint az A egy részhalmaza lesz a kívánt mag.

Valóban mag lesz, mert M független, valamint, ha $(i, j) \in A \setminus M$, akkor a stabil párosítás definíciója szerint vagy létezik $(i, j') \in M$, melyre $j' > j$, vagy $(i', j) \in M$, melyre $i' > i$, és ez az irányított gráfunkra nézve azt jelenti, hogy $(i, j) \rightarrow (i', j')$ $\in M$, vagy $(i, j) \rightarrow (i', j) \in M$.

Ezzel a bizonyítás teljes.

Bár a páros gráfok éleinek színezése mindig megy legalább n méretű listákból, az általános esetre vonatkozó sejtés máig is nyitott kérdés. ■

16.4. sejtés (A lista élszínezési sejtés). [39] $\chi'(G) = \chi'_l(G)$.

16.3. Totális színezés, csúcsot is, élet is színezzünk!

A G gráf k -színnel történő totális színezésében a csúcsokhoz is és az élekhez is rendelünk színeket a megadott k színből.

Akkor jó a színezés, ha nem kap azonos színt sem két szomszédos csúcs, sem két szomszédos él, sem egy illeszkedő csúcs és él. G totálisan k -színezhető, ha létezik totális k -színezése.

16.3. tétel. A G gráf totális kromatikus száma $\chi''(G)$ az a legkisebb pozitív egész k szám, melyre a G totálisan k -színezhető.

Nyilvánvaló, hogy $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ minden gráfra igaz.

16.5. sejtés (A totális színezési sejtés). [39] $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Nagyon érdekes a totális kromatikus szám és a lista kromatikus index egy kapcsolata.

16.4. tétel. Minden G gráfra $\chi''(G) \leq \chi'_l(G) + 2$ teljesül. [105]

Bizonyítás: Legyen $\chi'_l(G) = k$.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq \chi'(G) + 1 \leq \chi'_l(G) + 1 < \chi'_l(G) + 2 = k + 2$$

Így tehát a G kiszínezhető $(k+2)$ színnel, legyen c egy ilyen színezés, L a színek halmaza.

A G tetszőleges $e = \{u, v\}$ éléhez rendeljük az $L'(e) = L \setminus \{c(u), c(v)\}$ színlistát.

Mivel mindegyik élhez legalább k elemű listát rendeltünk, így ki lehet színezni a G éleit a listájukból, legyen ez a színezés a c' .

Nem használjuk fel az $e = \{u, v\}$ kiszínezéséhez a $c(u)$ és $c(v)$ színek egyikét sem.

Ha tehát az éleket a c' szerint, a csúcsokat a c szerint színezzük, az egy jó totális színezés $(k+2)$ színnel.

Tehát $\chi''(G) \leq \chi'_l(G) + 2$ teljesül. ■

17. A megkülönböztető kromatikus szám

17.1. feladat. [19] Egy kulcskarikán vannak a fontos szobák kulcsai. Külsőre a kulcsok egyformák. Legkevesebb hány színnel jelöljük meg a kulcsokat, hogy mindig meg tudjuk állapítani melyik ajtót melyik kulcs nyitja?

Ha pl. három kulcs van a karikán, akkor mindháromat más színnel kell kiszínezni. Ha két színnel színeznénk, akkor pl. nem tudnánk eldönteni melyik a középső. Nincs a karikán külön jelzés, melyik kulcs az első.

Ha egyetlen kulcsot pl. pirossal színeznénk, akkor sem tudjuk melyik a második kulcs, mert haladhatunk az óra szerint és ellenkezőleg is! Ha a másodikat zöldre színezzük, akkor már mindegyikről fogjuk tudni hányadik, akkor is ha a többi mind fehér.

De elegendő lehet-e kevesebb szín használata?

Könnyen belátható, hogy 3,4 vagy 5 kulcs esetén nem.

Azonban ha van legalább 6 kulcsunk, akkor ha pirossal megjelöljük az elsőt, harmadikat és negyediket, akkor a többi lehet kék, minden kulcsot megtalálunk.

17.1. definíció. Egy G egyszerű gráf automorfizmusa a csúcsainak egy olyan permutációja, hogy az él és nem él reláció megmarad.

Ha G csúcsai címkézettek, akkor ha minden csúcs olyan csúcsba megy, amelynek azonos a címkéje vele, akkor megőrzi a címkét a leképezés.

17.2. definíció. Ha a G gráf csúcsai r különböző címkével jelöltek, akkor a címkézést r -megkülönböztetőnek nevezzük, ha nincs G -nek olyan automorfizmusa amely megőrzi a címkéket.

Jelölje $D(G)$ a G gráf megkülönböztető számát, amely az a legkisebb r , amennyi címkével létezik r -megkülönböztető címkézése G -nek.

Ha a címkézés egy jó színezés, vagyis szomszédos csúcsok nem kaphatnak egyforma címkét, akkor jó r -megkülönböztető színezésről beszélünk.

17.3. definíció. Jelölje $\chi_D(G)$ a G gráf megkülönböztető kromatikus számát, amely azt a legkisebb r -et jelenti, amennyi színnel létezik jó r -megkülönböztető színezése G -nek.

A konferenciák szervezésével kapcsolatban is megfogalmazható a megkülönböztető kromatikus szám fogalma.

Egy konferenciaközpontban a különböző konferenciákhoz termeket rendelnek. Az egyes konferenciák legyenek egy G gráf csúcsai, a szomszédság legyen az időbeni átfedés, ütközés.

A csúcsokhoz színeket - mint előadótermeket - rendelünk. $\chi(G)$ éppen a minimális előadóterem számot jelenti, amennyiben még megtartható az összes konferencia.

Ha a színezés egy jó r -megkülönböztető színezés, akkor az így színezett G egyértelműen megmutatja melyik konferencia melyik teremben van.

17.2. állítás. Minden G gráfra $\chi_D(G) \geq \max\{\chi(G), D(G)\}$.

Ha G -nek csak a triviális automorfizmusa van, akkor $D(G) = 1$ és $\chi_D(G) = \chi(G)$.

A $\chi_D(G)$ lehet sokkal nagyobb, mint $D(G)$.

Jelölje $G + H$ azt a gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy diszjunkt csúcsokkal vesszük a G -t és a H -t és mindegyik $V(G)$ -beli pontot összekötjük minden $V(H)$ -beli ponttal.

Csakúgy, mint a kromatikus számra $\chi_D(G + H) = \chi_D(G) + \chi_D(H)$.

17.3. állítás. Az utaknak van nem triviális automorfizmusuk, így $D(P_m) \geq 2$.

A páros hosszú (csúcsok száma) utakat felváltva pirosra, kékre színezve megkülönböztető színezést kapunk, tehát $\chi_D(P_{2m}) = D(P_{2m}) = 2$.

Páratlan hosszú útra is jó, ha piros az egyik vége, a többi kék, tehát $D(P_{2m+1}) = 2$.

Páratlan sok csúcsú útra a váltakozó színezés nem különbözteti meg a balról a jobbra, így kell 3 szín.

Ha egyik végpont piros, majd utána felváltva fehéret és zöldet rendelünk a csúcsokhoz, akkor egy jó 3-megkülönböztető színezést kaptunk, tehát $\chi_D(P_{2m+1}) = 3$.

17.4. állítás.

Körökre $\chi_D(C_4) = 4$, $\chi_D(C_5) = 3$, $\chi_D(C_6) = 4$.

Ha a kör hatnál hosszabb, akkor legyen az első és negyedik csúcs piros, fehér a többi páros és zöld a többi páratlan.

Két színnel nem csak páratlan esetben nem megy a jó 2-megkülönböztető színezés.

Tehát $\chi_D(C_n) = 3$, ha n nagyobb, mint 6.

$\chi_D(\text{Petersen gráf}) = 4$

17.1. tétel. $\chi_D(G) = |V(G)|$ akkor és csak akkor, ha G teljes többrészes gráf.

Bizonyítás: ($\Leftarrow$) Ha a G két csúcsa ugyanazt a színt kapja egy jó színezésben, akkor nem szomszédosak, így egy részben vannak.

De ekkor ha minden más csúcsot helyben hagyunk és ezt a két csúcsot megcseréljük, akkor egy valódi, színtartó automorfizmusát kapjuk G -nek.

Tehát nem lehetnek különböző színű csúcsok.

($\Rightarrow$) Tegyük fel indirekt, G nem egy teljes többrészes gráf, de $\chi_D(G) = |V(G)| = n$.

Van G -nek u, v csúcsa amelyek nem szomszédosak, sőt amelyeknek a szomszédsága nem azonos. Színezzük u -t és v -t pirossal, a többi csúcsot pedig más-más színnel. Ez egy jó $(n-1)$ -megkülönböztető színezése G -nek.
Tehát $\chi_D(G) \leq n - 1$, ami ellentmondás. ■

17.4. definíció. Legyen $K_{a_1j_1, a_2j_2, \dots, a_rj_r}$ az a többrészes gráf, amelynek j_i darab a_i méretű része van. Tegyük fel továbbá, hogy $a_1 > \dots > a_r$.

Ahhoz, hogy a definiált általános többrészes gráfnak meg tudjuk határozni a megkülönböztetési számát szükség van arra, hogy elég szín legyen ahhoz, hogy meg tudjuk különböztetni a részeken belüli csúcs-párokat is és meg tudjuk különböztetni az azonos méretű részeket egymástól.
Az a_i méretű részek között sem lehet kettő, amelyek ugyanazon színeket kapták.

17.2. tétel. $D(K_{a_1j_1, a_2j_2, \dots, a_rj_r}) = \min \left\{ p : \binom{p}{a_i} \geq j_i \right\}$ minden $i - re$.

Bizonyítás: Mivel egy független részben csak két pont cseréje egy automorfizmus, így minden részben a csúcsokat páronként más színűre kell színezni.
Továbbá elegendő szín kell ahhoz, hogy két azonos méretű részt meg tudjunk egymástól különböztetni.
Ehhez $\binom{D(G)}{a_i} \geq j_i$ szükséges mindegyik indexre.
Elegendő is annyi szín, hogy az egyenlőtlenség minden indexre teljesüljön. ■

17.5. definíció. Egy T fagraf közepének nevezzük azon csúcsok által feszített részgráfot, amelyektől a legtávolabbi csúcs minimális távolságra van.
A centrum vagy egyetlen pont, vagy két összekötött pont.

17.3. tétel. Ha a T fának több csúcsa van, akkor $\chi_D(T) = 2$ pontosan azon fákra áll amelyeknek csak a triviális automorfizmusa van, vagy a közepe egyetlen élből áll és az egyetlen nem triviális automorfizmusa megcseréli az él két végpontját.

Bizonyítás: $(\Rightarrow)$ Nyilván $\chi_D(T)$ legalább 2.

Meg kell adni egy jó 2-megkülönböztető színezést. Csak a váltakozó színezés jó, azonban ez jó is ha csak triviális automorfizmusa van.

Ha az $\{x, y\}$ él a közepe, akkor csak az x -t és y -t megcserélő egyetlen nem triviális automorfizmusa van a fának. De x és y színe különböző, mert szomszédosak, így ez nem őrzi meg a színt.
Ebből következik, hogy ez a színezés jó 2-megkülönböztető színezés.

$(\Leftarrow)$ Tegyük fel, hogy $\chi_D(T) = 2$.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a centrum egy csúcs, vagy egy él.

1. A T közepe a v csúcs. Tekintsünk egy jó 2-megkülönböztető színezését a fának, v kapja a piros színt.

Nyilván v -től páros távolságra piros, páratlan távolságra kék a csúcsok színe.

Minden automorfizmusra a v fix marad, hiszen a távolságoknak is meg kell maradni és az egyetlen centrum.

Valamint a 2-színezésnek is meg kell maradni. Ezért nem lehet más csak a triviális automorfizmus.

2. A T közepe egy $\{x, y\}$ él.

Képzeljük el a $T = T_x \cup \{x, y\} \cup T_y$ felbontást, ahol az x és y is eleme a két lelógó részfának, az él elvágásával kapott két komponensnek.

Tekintsük a létező jó 2-megkülönböztető színezését G -nek! Legyen x piros, y kék. Ha T -nek csak a triviális automorfizmusa van, akkor készen vagyunk.

Legyen h egy valódi automorfizmusa T -nek. Akkor az x és y vagy fix marad, vagy egymással cserélődik. Ha az x és az y is fix, akkor a T_x is és a T_y is megőrzi minden színét, mert a távolság meg kell, hogy maradjon és így a szín is.

Mivel $\chi_D(T) = 2$, így a h mégsem lehet valódi.

Az x és y -t felcserélő esetet nem tárgyaljuk. ■

17.6. definíció. A G gráfban z egy kitüntetett csúcs, a gyökér. G, z egy gyökeres gráf. A G csúcsainak egy címkézését r -megkülönböztetőnek mondjuk, ha nincs olyan automorfizmusa amely a címkeket megőrzi és a gyökeret fixen tartja. A megkülönböztető kromatikus száma a G, z gyökeres gráfnak $\chi_D(G, z)$ az a minimális r , amelyre van a G, z -nek jó r -megkülönböztető színezése.

17.7. definíció. Jelölje egynél nagyobb k -ra $T_{k,h}$ az olyan gyökeres fát, amelyre mindegyik levél éppen h távolságra van a gyökértől, és minden nem levélcúcs foka k .

Brooks tétele a kromatikus szám és a maximális fok közötti mély kapcsolatáról szól.

A megkülönböztető kromatikus számmal kapcsolatban analóg állítást mondhatunk.

17.4. tétel (Mike Albertson és Karen Collins tételei, 1999). A T fára $\chi_D(T) \leq \Delta(T) + 1$ mindig teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $T = T_{\Delta,h}$ valamely nemnegatív h -ra.

17.5. tétel. A T fára $D(T) \leq \Delta(T)$ mindig teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $T = T_{\Delta,h}$ valamely nemnegatív h -ra.

17.6. tétel. A G összefüggő gráfra $D(G) \leq \Delta(G) + 1$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $G = K_{\Delta(G)+1}$, $K_{\Delta(G), \Delta(G)}$ vagy C_5 .

17.7. tétel. A G összefüggő gráfra $\chi_D(G) \leq 2\Delta(G)$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $G = K_{\Delta(G), \Delta(G)}$ vagy C_6 .

17.5. sejtés. Nincs olyan G összefüggő gráf, amelyre $\chi_D(G) = 2\Delta(G) - 1$.

17.6. sejtés. Legyen G legalább 5 derékbőségű összefüggő gráf.
Ekkor $\chi_D(G) \leq \Delta(G) + 1$.

18. Kneser sejtése

Martin Kneser 1955-ben definiálta a következő gráfcsaládot.

Legyen $k \leq n$ két természetes szám.

Jelölje $N = [n] = \{1, \dots, n\}$ az alaphalmazt.

Jelölje $\binom{[n]}{k}$ az N összes k elemű részhalmazának halmazát.

Definiáljuk a $KG_{n,k}$ gráfot, amelynek a csúcshalmaza $\binom{[n]}{k}$, és két elemet pontosan akkor köt össze egy él, ha diszjunktak.

Vajon mennyi $\chi(KG_{n,k})$?

A Kneser-gráfok néhány tulajdonsága:

- $KG_{n,1}$ az n csúcsú teljes gráf, $\chi(K_n) = n$.
- Ha $n < 2k$, $\chi(KG_{n,k}) = 1$, hiszen egyetlen éle sincs.
- $\chi(KG_{2k,k}) = 2$, hiszen mindegyik k elemű halmaz csak a komplementerével van összekötve, az élek egy párosítást adnak. [7]

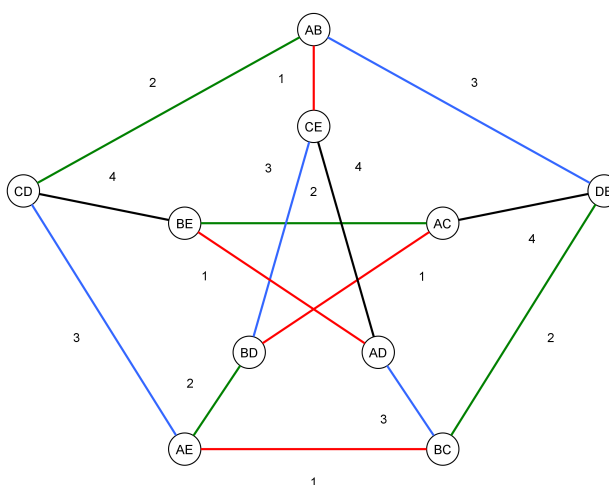
$KG_{5,2}$ az első érdekes Kneser-gráf (13. ábra), ez éppen a Petersen-gráf, amely számos esetben, mint ellenpélda bukkan fel. Az ábrán látható, hogy a csúcsokat hogyan lehet a kételemű részhalmazokkal megfeleltetni.

$$\chi(KG_{5,2}) = 3$$

- $KG_{n,k}$ csúcsainak száma: $\binom{n}{k}$.
- $KG_{n,k}$ éleinek száma: $\frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}}{2}$.
- A szimmetria –csúcstranzitív, éltranzitív – miatt reguláris, minden pont foka $\binom{n-k}{k}$.

18.1. definíció. A $G(V,E)$ és $G'(V',E')$ gráfok **izomorfak**, ha létezik V és V' között egy f éltartó bijekció, melyre $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$.

A Petersen gráf egy Kneser gráf



13. ábra. A Petersen-gráf a $KG_{5,2}$ Kneser-gráf

A $G(V,E)$ gráf **automorfizmusa** a csúcsainak egy olyan σ permutációja amely éltartó, vagyis $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\sigma(u), \sigma(v)\} \in E$. Tehát egy automorfizmus egy izomorfizmus önmagával.

Mivel az izomorfizmus ekvivalenciareláció, így az egymással izomorf gráfok egy osztályba kerülnek. Az azonos osztályba kerülő gráfokra szoktuk mondani, hogy lényegében nem különböznek, a szerkezetük egyforma, a gráfparamétereik megegyeznek.

Megszámolni bizonyos tulajdonsággal rendelkező számozott csúcsú gráfokat más feladat, mint megszámolni a lényegében különböző gráfokat, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal. Az az egyszerű (?) döntési probléma, vajon a G és G' gráfok izomorfak-e az NP osztályban van, hiszen gyorsan ellenőrizhető egy hozzárendelésről, hogy éltartó-e.

Azonban nem világos, hogy P-ben van-e!

Az általánosabb **részgráf izomorfizmus** probléma azt kérdezi:

Ha G és H két gráf, vajon létezik-e G -nek olyan részgráfja, amely izomorf H -val?

Ez a probléma NP-teljes, hiszen ha $H = C_n$ és G n csúcsú, akkor annak eldöntéséről van szó, vajon létezik-e G -ben Hamilton-kör?

Ez önmagában NP-teljes probléma.

Ha G és H két gráf, vajon létezik-e G -nek olyan feszített részgráfja, amely izomorf H -val?

Hasonlóan a részgráf izomorfizmus problémához ez is NP-teljes, hiszen ha H üres gráf, akkor az a kérdés, vajon van-e G -ben adott méretű stabil részgráf? Ennek eldöntése NP-teljes.

18.2. definíció.

- G csúcstranzitív gráf, ha bármely $u, v \in V(G)$ csúcspárra létezik olyan $f : V(G) \rightarrow V(G)$ automorfizmus, amelyre $f(u) = v$.
- G éltranzitív gráf, ha bármely $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\} \in E(G)$ élpárra létezik olyan $f : V(G) \rightarrow V(G)$ automorfizmus, amelyre $f(u_1) = u_2$ és $f(v_1) = v_2$, vagy $f(u_1) = v_2$ és $f(v_1) = u_2$. Másképpen, létezik bármely két élre olyan automorfizmus, amely az egyiket a másikba viszi.

18.3. definíció.

- Az n csúcsú, reguláris G gráfban minden pont foka k . G erősen reguláris, ha léteznek p, q egészek, melyekre igaz, hogy G -ben bármely két szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédok száma p , míg két nem szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédok száma q .

Mit mondhatunk a $KG_{n,k}$ gráfokról?

$KG_{n,k}$ csúcstranzitív, éltranzitív, erősen reguláris?

Mekkora a $KG_{n,k}$ derékbősége?

Mekkora a leghosszabb kör $KG_{n,k}$ -ban?

$\omega(KG_{n,k}) = ?$

$\alpha(KG_{n,k}) = ?$

18.1. sejtés (Martin Kneser, 1955). [7]

$$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

Az állítás elegáns, egy két paraméterrel meghatározott szép, szimmetriákkal rendelkező gráf kromatikus számát állítja, egységesen, kivételek nélkül.

Az állítás igaz, Lovász László bizonyította be. 1977. március 4-én kapta meg a kéziratot a Journal of Combinatorial Theory, Series A folyóirat szerkesztősége. A cikk a 25. kötetben jelent meg, 1978-ban.

Ezekben az években Lovász László Szegeden, a József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetének Geometria tanszékét vezette. A bizonyítás a topológia bizonyos eszközeit is használta.[27] [158]
A kombinatorikus topológia egyik legelső nagy eredménye, a témakör fejlődését megalapozó gondolatokat tartalmaz.

18.1. tétel (Lovász László, 1978). [155][7] [165]

$$\chi(KG_{r,s}) = r - 2s + 2$$

Természetesen feltehetjük, hogy $r > 2s$. Alkalmazzuk az $r = 2n + k$ és $s = n$ jelölést.

Az átfogalmazott állítással:

$$\chi(KG_{2n+k,n}) = k + 2$$

18.2. tétel. *Ha $(2n+k)$ elem n -eseit $(k+1)$ osztályba partícionáljuk, akkor valamelyik osztályba kerül két diszjunkt n -es.*

$(k+2)$ osztályba könnyű szétosztani őket! Tegyük a K_i osztályba azon n -eseket, amelyeknek a legkisebb eleme i , $i = 1, \dots, k+2$. Ekkor a $K_1, \dots, K_{k+1}$ és a $K_{k+2} \cup \dots \cup K_{k+n+1}$ az n -esek egy megfelelő partíciója lesz $(k+2)$ osztályba.

Bármely osztályba eső két n -es metsző.

A tétel tehát éppen a Kneser-sejtést állítja.

19. Nagy kromatikus szám, rövid páratlan körök nélkül

A Kneser-gráfok egy tulajdonsága, hogy nincs $(\frac{2n}{k} + 1)$ -nél rövidebb páratlan körük.

Emiatt a gráfcsalád is példa háromszögmentes, magas kromatikus számú gráfokra.

Erdős Pál és Hajnal András 1966 és 1967-ben vizsgálta a Borsuk-gráfokat.

Vegyük az S^k -t, a k dimenziós egységgömb felületét. Legyen $\epsilon > 0$ egy kis szám.

Legyenek a B_k csúcsai az S^k pontjai.

Legyen két pont (csúcs) éllel összekötve, ha távolságuk legalább $2 - \epsilon$.

Ez a gráf, ha kicsi az ϵ nem tartalmaz rövid páratlan kört! Ebben a tulajdonságban hasonlít a Kneser-gráfokra.

Jegyezzük itt meg, hogy B_k végtelen gráf! Azonban igaz a következő tétel!

19.1. tétel (DeBruijn–Erdős, 1951). *Ha a G végtelen gráf csúcsai nem színezhetők ki k színnel, akkor létezik olyan véges G' részgráfja G -nek, amely szintén nem színezhető ki k színnel.*

19.2. tétel. *Borsuk[155] Ha $S^k = F_1 \cup \dots \cup F_{k+1}$, ahol az $F_1, \dots, F_{k+1}$ az S^k zárt részhalmazai, akkor valamelyik F_i biztosan tartalmaz két átellenes pontot.*

[8] Borsuk tétele ekvivalens azzal, hogy a B_k Borsuk gráf kromatikus száma $(k+2)$.

Erdős, Hajnal, Simonovits és Lovász ötletét felhasználva Bárány Imre topológia nélkül igazolta Lovász tételét.

19.3. tétel. *Ha $(2n+k)$ elem n -eseit $(k+1)$ osztályba partícionáljuk, akkor valamelyik osztályba kerül két diszjunkt n -es.*

Legyen $H(a) = \{x \in S^k : \langle a, x \rangle > 0\}$, ahol az a az egységgömb egy tetszőleges pontjába mutat. A Borsuk tételén kívül szükség volt még egy további erős állításra is.

19.4. tétel (Gale tétele).

Ha n és k nemnegatív egészek, akkor van egy $V \subset S^k$ pontthalmaz, amelynek $(2n+k)$ eleme van és $|H(a) \cap V| \geq n$ teljesül minden $a \in S^k$ -ra.

Fent Borsuk tétele az eredeti megfogalmazásban szerepel, vagyis minden halmaz zárt. Bárány cikkében a következő változatot használja, amely kijön az eredeti tételből.

Borsuk tételének változata:

19.5. tétel. *Ha $S^k = F_1 \cup \dots \cup F_{k+1}$, ahol az $F_1, \dots, F_{k+1}$ az S^k nyitott részhalmazai, akkor valamelyik F_i biztosan tartalmaz két átellenes pontot.*

Bizonyítás: Bárány Imre bizonyítása, 1978[22]

A Gale tételben szereplő V pontthalmazt tekintsük a $(2n+k)$ csúcsnak. Tegyük fel, hogy az n -eseit $(k+1)$ részre partícionáltuk, vagyis $(k+1)$ színnel színeztük az n -eseket.

Ez a színezés meghatározza az S^k egy $(k+1)$ színezését a következő módon: Ha $a \in S^k$, akkor az a pont megkapja mindegyik n -es színét, amely benne van a $H(a) \cap V$ -ben.

Gale tétele szerint minden $a \in S^k$ pont kap legalább egy színt.

Megmutatható, hogy az azonos színű pontok az S^k nyílt részhalmazát határozzák meg.

Alkalmazva Borsuk tételének nyílt változatát létezik olyan a pontja a gömbfelületnek, melynek átellenes pontja, $-a$ is ugyanolyan színű.

Az a a színét egy $H(a) \cap V$ -beli n -estől kapta, míg a $-a$ pedig a $H(-a) \cap V$ egyik n -esétől.

A halmazok diszjunktak, azonos színt kapott tehát két diszjunkt n -es. ■

19.1. definíció. Egy $S \in \binom{[n]}{k}$ részhalmazt stabilnak mondunk, ha nem tartalmaz két szomszédos elemet modulo n , vagyis ha $i \in S$, akkor $(i+1) \notin S$, valamint ha $n \in S$, akkor $1 \notin S$.

Jelölje $\left(\binom{[n]}{k}\right)_{\text{stab}}$ az alaphalmaz k -asai közül a stabilokat.

A Schrijver gráfok $SG_{n,k} := KG\left(\left(\binom{[n]}{k}\right)_{\text{stab}}\right)$ a Kneser gráfok bizonyos feszített részgráfjai.[7]

Pl. a Petersen gráfból egy ötszög adódik, ha vesszük a Schrijver részgráfját!

Ha G -ben minden csúcs foka legalább kettő, akkor hozzárendelhető egy G' 3-reguláris, összefüggő, hídmentes síkbeli térkép amely éppen akkor színezhető k színnel, ha G is.

Az átalakításban minden v , több mint 3 fokú csúcsnál a v szomszédjaihoz futó élre felvesszünk egy-egy csúcsot, ezeket a síkbeli elhelyezkedés szerint - egy él kivételével - körbe fűzzük, majd elhagyjuk a v -t és a v -ből az új csúcsokhoz vezető "élt". Ha egy u kettő fokú, akkor szomszédai legyenek x és y . Az u -t helyettesítsük egy $K_4 \setminus e$ "kis" gráffal úgy, hogy x -et és y -t a kettő fokú csúcsokkal kötjük össze. A kapott gráf 3-reguláris, összefüggő, híd nélküli síkgráf.

20.1. állítás. *A 4-szín tétel pontosan akkor igaz, ha minden kétszeresen összefüggő 3-reguláris gráfra, síkbeli térképre (3-térképre) igaz.* [18] [38]

Tegyük fel, hogy egy 3-térképet kiszíneztünk 4 színnel (A,B,C,D).

Ennek alapján ki fogjuk színezni a tartományok közös határszakaszait 3 színnel úgy, hogy a gráf éleit jól színezzük.

Ha egy él két partján adott a két szín, leírjuk milyen színt kap a határszakasz:

$A, B \rightarrow B$

$A, C \rightarrow C$

$A, D \rightarrow D$

$B, C \rightarrow D$

$B, D \rightarrow C$

$C, D \rightarrow B$.

Visszafelé, ha a B,C és D színekkel sikerült a 3-térkép éleit kiszínezni, akkor az egyik tartományt színezzük ki A-val, majd az élszomszédait a fenti formulák alapján színezzük ki megfelelő módon, az új ország színe a már kiszínezett szomszéd színe és a közös határszakasz színéből következik a fenti szabályok alapján. (M. Gardner színezése, 1976)

20.1. tétel. *Tait tétele* [18] [38] *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

- (i) *Bármely síkgráf kiszínezhető 4 színnel.*
- (ii) *Bármely 3-térkép gráfjának kromatikus indexe 3.*
- (iii) *Bármely 3-térkép gráfja tartalmaz 1-faktort.*
- (iv) *Bármely 3-térkép gráfja az 1. osztályba tartozik.*

Tait először azt hitte, hogy minden 3-reguláris gráf élei 3-színezhetőek.

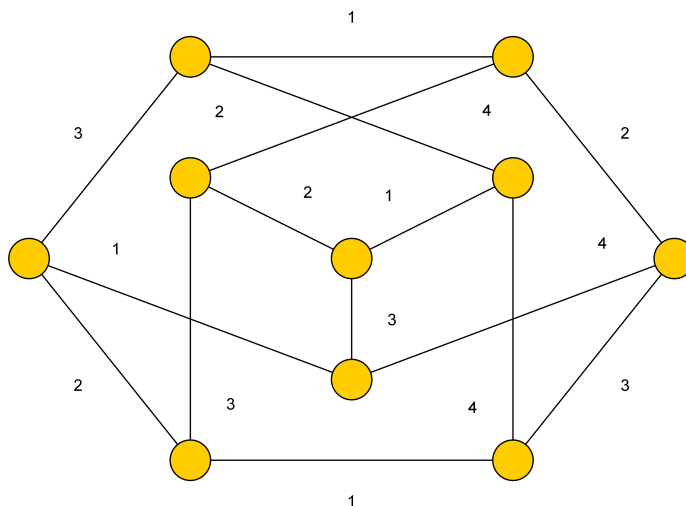
Ha így lenne, akkor az előző tétele szerint a térképek 4-szín tételére következne.

Azonban nem csak olyan 3-reguláris gráfok léteznek, amelyek térkép gráfjaként előállnak.

Ha létezik híd, akkor könnyű ellenpélda, ha két K_4 egy-egy élére felvett csúcsokat egy híddal összekötjük.

Természetesen olyan 3-reguláris gráfok is vannak, amelyek nem ágyazhatók be a síkba és élei nem 3-színezhetők.

Egy ilyen a Petersen gráf. [176]



20.2. feladat. A Petersen-gráfban van teljes párosítás.

20.3. feladat. A Petersen gráfban nincs három diszjunkt 1-faktor, vagyis az élei nem színezhetők 3 színnel.

20.4. állítás. Minden híd nélküli 3-reguláris gráfban van teljes párosítás.

21. Teljes párosítás létezése páros és általános gráfokban

Legyen G egy kétrészes gráf, A és B színosztályokkal. König és Hall tétele szerint G -ben akkor és csak akkor létezik A -t lefedő teljes párosítás, ha bármely $S \subseteq A$ esetén $|N(S)| \geq |S|$. ($N(S)$ az S szomszédainak halmaza G -ben.)

Általában is sikerült szükséges és elégséges feltételét megadni annak, hogy egy G gráfnak legyen teljes párosítása.

William Tutte 1954-ben bizonyította tételét:

21.1. tétel. [159] Egy nem üres G gráfnak akkor és csak akkor létezik teljes párosítása, ha $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ minden $S \subseteq V(G)$ valódi részhalmazra. ($k_o(H)$ a H gráf páratlan nagyságú komponenseinek számát jelenti, míg a $G \setminus S$ a $V(G) \setminus S$ csúcshalmaz által feszített részgráffát jelenti G -nek.)

Bizonyítás: [155] Szükségesség:

Tegyük fel, hogy létezik a G csúcsainak teljes párosítása.

Legyen S egy tetszőleges részhalmaza $V(G)$ -nek. Ha $G \setminus S$ -nek nincs páratlan komponense, akkor teljesül az egyenlőtlenség.

Jegyezzük meg, hogy még az $S = \emptyset$ esetén is! Tegyük fel, hogy $k_o(G \setminus S) = k \geq 1$. A komponensek között nincs él, így mindegyik páratlan méretű komponensben van legalább egy olyan csúcs, amely az S egy elemével van párosítva.

Emiatt $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ kell, hogy teljesüljön.

Elegendőség:

Tegyük most fel, hogy minden valódi S részhalmazra $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ teljesül.

Jegyezzük meg, hogy az $S = \emptyset$ esetre alkalmazva a feltételt azt kapjuk, hogy G -nek nincs páratlan komponense, vagyis minden komponense páros sok csúcsból áll. Ellenkező esetben nyilván nem lehetne párosítani a csúcsokat!

Megmutatjuk, hogy van G -ben teljes párosítás!

Alkalmazzunk teljes indukciót a páros rendű G gráfokra. A két csúcsú nemüres gráf éppen egy él.

Legyen $n = |V(G)| \geq 4$ és tegyük fel, hogy minden kisebb gráfra igaz az állítás vizsgált iránya! Tegyük fel, hogy G -re $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ teljesül minden valódi S csúcshalmazra.

G -nek minden komponense páros rendű. Ha G -ből elhagyunk egy olyan v csúcsot, amely nem elvágó pont a komponensében (ilyen van, mert egy feszítő fájának egy levele mindig ilyen), akkor $k_o(G \setminus v) = 1$. Van tehát olyan nemüres S' csúcs részhalmaz, amelyre $k_o(G \setminus S') = |S'| = k' \geq 1$ és legyen S az ilyenek közül egy maximális elemszámú ($|S| = k$), valamint a $G \setminus S$ páratlan komponensei legyenek rendre $G_1, \dots, G_k$.

Belátjuk, hogy a $G \setminus S$ -nek más komponensei nincsenek (páros méretűek)!

Tegyük fel indirekt, hogy a G_0 egy páros komponense $G \setminus S$ -nek és v_0 ennek egy nem elvágó pontja!

Legyen $S_0 = S \cup \{v_0\}$. Ekkor az S_0 elhagyásával egy újabb páratlan komponens keletkezik így továbbra is fennáll, hogy a páratlan komponensek száma $|S_0|$.

Ez ellentmond annak, hogy S volt a legnagyobb ilyen. Tehát a komponensek: $G_1, \dots, G_k$.

Legyen $S_i \subseteq S$ a G_i legalább egy csúcsával szomszédos pontok halmaza ($1 \leq i \leq k$). S_i nem lehet üres, mert mindegyik komponens páratlan.

Belátjuk, hogy bármely i db. S_i halmaz uniója legalább i elemű. Ha nem így lenne, akkor léteznének $S_{j_1}, \dots, S_{j_l}$ halmazok, melyekre

$$S' = S_{j_1} \cup \dots \cup S_{j_l}$$

és $|S'| < j$.

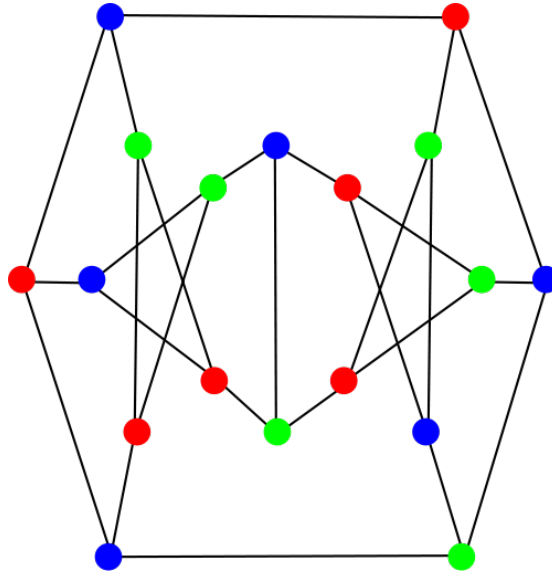
Ekkor $G_{j_1}, \dots, G_{j_l}$ a $G \setminus S'$ komponensei között vannak, vagyis $k_o(G \setminus S') \geq j > |S'|$, amely ellentmond az alapfeltevésnek.

Tehát nem lehet az S_i halmazokból olyan módon kiválasztani néhányat, hogy kisebb legyen az uniójuk elemszáma, mint amennyien vannak.

Ebben az esetben azonban ki lehet választani egy reprezentáns rendszert az S_i -kből, vagyis olyan $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq S$ csúcsokat, melyekre $v_i \in S_i$ ($1 \leq i \leq k$) teljesül.

Mivel a $G \setminus S$ mindegyik G_i komponensében van olyan u_i pont amely szomszédja v_i -nek, így a $\{u_i, v_i\}$ élek adnak egy párosítást.

Meg kell még mutatnunk, hogy a $G_i \setminus u_i$ gráfoknak van teljes párosítása.



14. ábra. Blanusa-snark

Legyen W a $V(G_i \setminus u_i)$ egy valódi részhalmaza.

Belátjuk, hogy

$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) \leq |W|$$

teljesül!

Ebből már következik az elégségesség, hiszen a kisebb komponensekre azt feltettük.

Tegyük fel indirekt, hogy

$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) > |W|$$

teljesül!

Mivel a G_i páratlan, így a $k_o(G_i \setminus u_i \setminus W)$ és $|W|$ azonos paritású.

Tehát

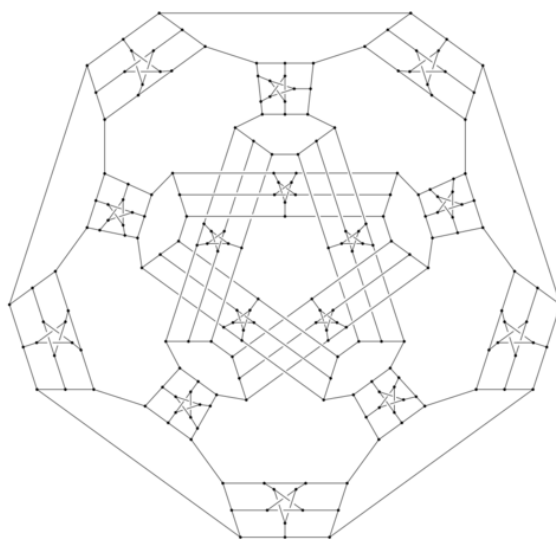
$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) \geq |W| + 2.$$

Legyen $X = S \cup W \cup \{u_i\}$. Ekkor

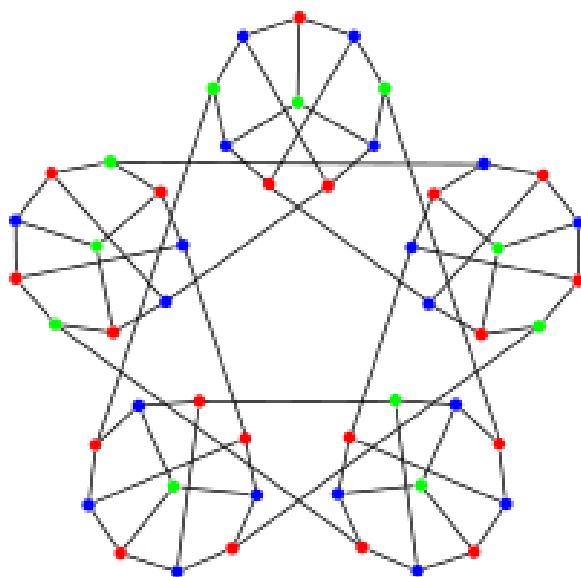
$$\begin{aligned} |X| &= |S| + |W| + 1 = |S| + (|W| + 2) - 1 \\ &\leq k_o(G \setminus S) + k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) - 1 \\ &= k_o(G \setminus X) \leq |X| \end{aligned}$$

Ebből $k_o(G \setminus X) = |X|$, ami ellentmond az S választásának. ■

21.1. állítás. Minden híd nélküli 3-reguláris G gráfban van teljes párosítás.



15. ábra. Descartes-TUTTE snarkja



16. ábra. Szekeres-snark

Bizonyítás: Legyen G egy elvágó élt nem tartalmazó 3-reguláris gráf.

Alkalmazzuk Tutte tételét!

Belátjuk, hogy bármely $S \subseteq V(G)$ valódi részhalmazra $k_o(G \setminus S) \leq |S| = k$.

Tegyük fel, hogy a $G \setminus S$ páratlan komponensei $G_1, \dots, G_l$.

Jelölje E_i az S és G_i között menő élhalmazt ($1 \leq i \leq l$)!

Mivel minden csúcs foka 3 a G -ben, így bármely páratlan G_i komponens a belül futó páros sok él mellett az S -hez páratlan számú éllel kapcsolódik, vagyis $|E_i|$ páratlan szám.

Mivel G -ben nincs híd, így $|E_i| \geq 3$, minden ($1 \leq i \leq l$) esetén.

Mivel az S -beli pontoknak is 3 a foka, így

$$3k_o(G \setminus S) = 3l \leq 3k = 3|S|$$

tehát $k_o(G \setminus S) \leq |S|$. ■

21.1. megjegyzés. A bizonyítást óvatosan átgondolva kiderül, hogy ha legfeljebb 2 híd van G -ben, akkor létezik teljes párosítása.

21.2. feladat. Adjunk meg olyan 3-reguláris gráfot, amelyben 3 híd van és nincs is teljes párosítása!

21.1. következmény. Minden hídmentes 3-reguláris síkgráf az 1. osztályba tartozik (vagyis 3-színezhető az élei).

21.3. feladat. Vannak olyan G síkgráfok, amelyekre $\Delta(G) = k$ és az élei színezhetőek k színnel, valamint olyanok is, amelyek csak $(k+1)$ -élszínezhetőek ($2 \leq k \leq 5$) esetén.

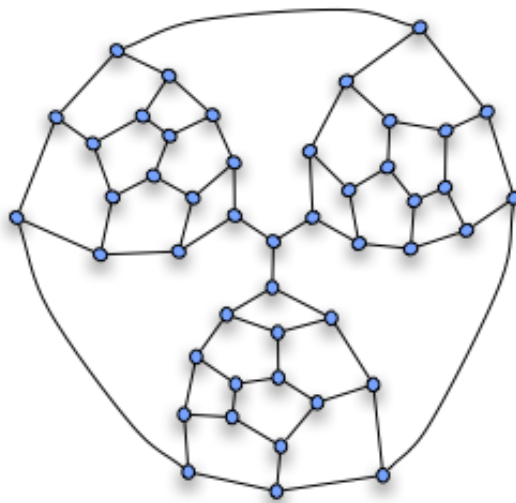
21.2. tétel (Vadim Vizing, 1965). Ha G síkgráf és $\Delta(G) \geq 8$, akkor G az 1. osztályba tartozik.

21.3. tétel (Daniel Sanders, Yue Zhao, 2001). Ha G síkgráf és $\Delta(G) = 7$, akkor G az 1. osztályba tartozik.

21.4. sejtés (Vizing síkgráf sejtése). [56] Ha G síkgráf és $\Delta(G) = 6$, akkor G az 1. osztályba tartozik.

Milyenek azok a 3-reguláris, hídmentes gráfok, amelyek a 2. osztályba tartoznak, tehát az élei 4-színezhetőek?

- Nem síkgráfok.



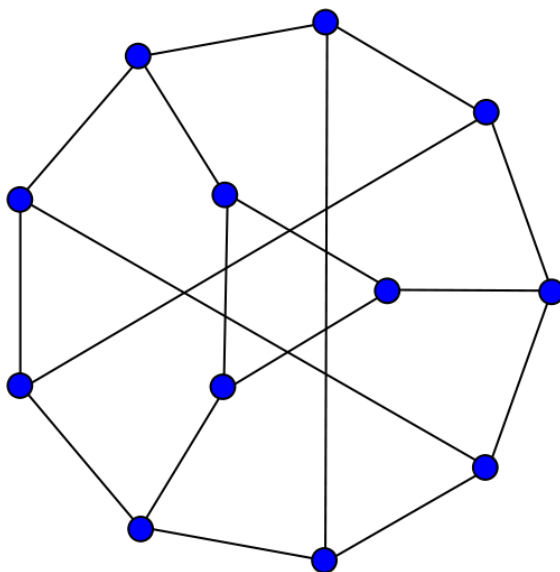
17. ábra. Tutte-snark

- Nem tartalmaznak Hamilton kört.

Lewis Carrol: The hunting of the **Snark** (An agony in 8 fits)
 nonszensz verse alapján kapta nevét az a gráfcsalád, amelynek jellemzői:
 összefüggő, hídmentes, 3-reguláris, 4 szín kell az élei kiszínezéséhez.
 Gyakran felteszik még azt is, hogy a legrövidebb köre legyen legalább 5 hosszú!

Maga a 4-szín tétel ekvivalens azzal, nincs olyan Snark (magyarítási kísérlet: snyárk), amely síkba rajzolható? Nem csoda, hogy vadászni kezdtek ezen különleges gráfokra! Néhány ilyet mutatnak az ábrák, közöttük Szekeres Györgyét is!

A harmincas évek elején Budapesten olyan matematikus közösség gondolkodott együtt, akik forradalmasították a diszkrét matematikát! Erdős Pál az egész világon, Szekeres György Ausztráliában emelte a matematikát magasabb szintre!



18. ábra. Tietze-snark

22. Cirkuláris kromatikus szám

Egy útkereszteződésnél különböző irányokból áramlik a forgalom. Mindegyik bejövő úthoz hozzá kell rendelni egy idő intervallumot, amikor az út zöld lámpát kap, és az onnan érkezők használhatják az utat.

A teljes lámpa periódust fel kellene osztani a bejövő utak között. Tegyük fel, hogy egységnyi az az idő, ameddig egy-egy útnak egyfolytában zöld a lámpája. Állapítsunk meg egy legrövidebb lámpa periódus hosszát, amely majd ismétlődik.

Rendeljünk minden bejövő úthoz egy gráfcsúcsot. Két csúcs szomszédos az épülő gráfban, ha a nekik megfelelő utakon egyszerre nem engedhető el a forgalom.

Az így definiált G gráf kromatikus számának meghatározása a probléma. Ha minimális számú, független halmazra partícionáljuk a G csúcsalmazát, akkor egy-egy független halmazhoz hozzárendelünk egy-egy egységnyi időintervallumot, amikor éppen azokból az utakból engedhető a forgalom, amelyek a csúcsoknak felelnek meg.

Az egységnyi időhöz képest megkapjuk a legrövidebb lámpaperiódus-hosszát, de igazából azt szeretnénk, ha hosszú idő alatt optimális lenne a forgalom.

Tekinthetünk a forgalomra, mint egy C körre, melynek egy-egy egységnyi intervallumához hozzárendeljük valamelyik bejövő út szabad jelzését.

Szomszédos csúcsok idő intervallumai a körön nem metszhetik egymást.

22.1. definíció. [50] [151][238] Legyen C egy r sugarú kör. Ekkor egy gráf r -cirkuláris színezése a C kör nyílt egység-hosszú íveinek egy c' hozzárendelése a csúcsokhoz oly módon, hogy $c'(v_1) \cap c'(v_2) = \emptyset$,

amennyiben v_1 és v_2 között fut él. Ekkor a gráf cirkuláris kromatikus száma:

$$\chi_c(G) = \inf \{r \mid \text{ahol } G\text{-nek van } r\text{-cirkuláris színezése}\}$$

22.2. definíció. [77] Ha k és d pozitív egészek úgy, hogy $k \geq 2d$, akkor a gráf egy (k, d) -színezése a színek egy olyan c hozzárendelése, amire teljesül, hogy $d \leq |c(v_1) - c(v_2)| \leq (k - d)$, ahol a v_1 és v_2 csúcsokat él köti össze. Ekkor a gráf cirkuláris kromatikus száma (vagy eredeti nevén: csillag-kromatikus száma) $\chi^*(G)$: $\chi_c(G) = \inf \left\{ \frac{k}{d} \mid \text{ahol } G\text{-nek van } (k, d)\text{-színezése} \right\}$
(Így is definiálható, a két definíció ekvivalens)

Az nyilvánvaló, hogy egy $(k, 1)$ -színezés egy k -színezés is, amiből következik, hogy $\chi_c(G) \leq \chi(G)$.

22.1. állítás.

$$\chi_c(G) = \min \left\{ \frac{k}{d} \mid \text{ahol } G\text{-nek van } (k, d)\text{-színezése} \right\}$$

22.2. állítás.

$$\chi(G) - 1 \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$$

22.3. állítás. Ha H részgráfja G -nek ($H \subseteq G$), akkor:

$$\chi_c(H) \leq \chi_c(G)$$

22.1. Speciális gráfosztályok cirkuláris kromatikus száma

22.4. állítás. Néhány gráfra (pl.: teljes gráfok, páros gráfok, körök és kerek) a cirkuláris kromatikus szám értéke [50]:

$$\begin{aligned} \chi_c(K_p) &= p \quad ; \quad \chi_c(K_{m,n}) = 2 \quad ; \\ \chi_c(C_{2n}) &= 2 \quad ; \quad \chi_c(C_{2n+1}) = 2 + \frac{1}{n} \quad ; \\ \chi_c(W_{2n}) &= 3 \quad ; \quad \chi_c(W_{2n+1}) = 4 \end{aligned}$$

22.1. tétel. Legyen $\chi(G) = n$. Ha létezik $\emptyset \subset A \subset V$ valódi csúcs részhalmaz, amely a G minden c n -színezésére vagy beleesik egy X színosztályba, vagy idegen tőle. Ekkor $\chi_c(G) = \chi(G)$.

22.1. következmény. Ha G komplementere nem összefüggő gráf, akkor $\chi_c(G) = \chi(G)$.

22.2. következmény. Ha G -nek van olyan csúcsa, amely mindegyik másik csúccsal szomszédos, akkor $\chi_c(G) = \chi(G)$.

22.3. következmény. Ha $\chi(G) = n$ és G egyértelműen n -színezhető, akkor $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Mivel bármely $n \geq 1$ -re és $g \geq 3$ -ra létezik olyan G gráf, amelynek derékbősége legalább g , és G egyértelműen n -színezhető, így következik az előző állításból egy újabb következmény.

22.4. következmény. Minden $n \geq 1$ -re és $g \geq 3$ -ra, létezik olyan G gráf, amelynek legalább g a kerülete és $\chi_c(G) = \chi(G)$.

22.2. tétel. Legyenek m és t pozitív egészek. Ha G -nek van olyan x csúcsa, hogy $G \setminus x$ m -színezhető, és G minden x -et tartalmazó köre legalább $m(t-1) + 2$ hosszú, akkor $\chi_c(G) \leq m + \frac{1}{t}$.

22.5. következmény. Ha G $(n+1)$ -kritikus és G -nek a derékbősége legalább $n(t-1) + 2$, akkor $\chi_c(G) \leq m + \frac{1}{t}$.

Vannak-e olyan síkgráfok, melyekre $\chi_c(G) = 4$?

Vannak-e olyan síkgráfok, melyekre $\chi_c(G) = 3$?

A páratlan kerékre $\chi_c(W_{2n+1}) = 4$, hiszen van olyan csúcsa, amely minden más ponttal össze van kötve.

Milyen racionális számok lehetnek egy síkgráf cirkuláris kromatikus számai?

A Kneser-gráf cirkuláris kromatikus számáról:

- $\chi_c(KG_{2n+1,n}) = 3 = \chi(KG_{2n+1,n})$
- $\chi_c(KG_{2n+2,n}) = 4 = \chi(KG_{2n+2,n})$
- $\chi_c(KG_{m,2}) = m - 2 = \chi(KG_{m,2})$

22.5. sejtés (Johnson sejtése, 1997). $\chi_c(KG_{m,n}) = m - 2n + 2 = \chi(KG_{m,n})$,

Vagyis mindig megegyezik a cirkuláris kromatikus szám a kromatikus számmal.

6. probléma. Jellemezzük azokat a síkgráfokat, amelyekre $\chi_c(G) = 3$, pedig $\chi(G) = 4$!

7. probléma. Igazoljuk, hogy síkgráfokra $\chi_c(G) < 5$, a 4-szín tétel nélkül!

8. probléma. Igaz-e, hogy minden G gráfnak van olyan v csúcsa, hogy $\chi_c(G \setminus v) \geq \chi_c(G) - 1$?

23. Poliéder-gráfok

23.1. definíció. Poliédernek fogjuk nevezni a háromdimenziós tér olyan háromdimenziós részeit, amelyek véges sok zárt féltér metszeteként előállnak. A poliéder élei és csúcsai pedig épp a szomszédos féltérek metszetei illetőleg a szomszédos élek metszetei.

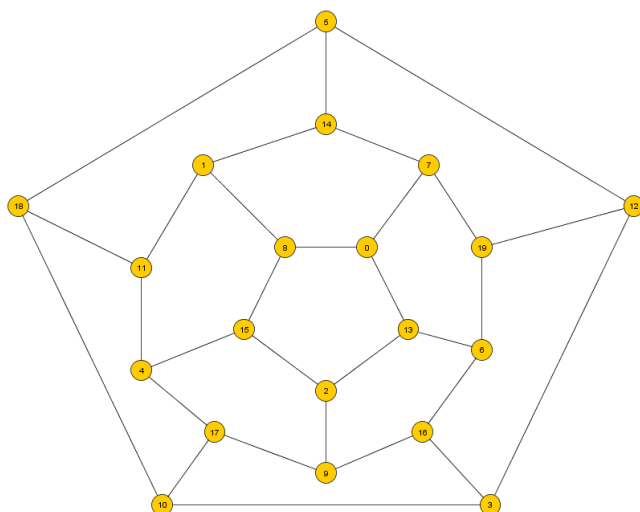
23.1. tétel. Az öt darab konvex szabályos poliédernek (T a tetraéder; Q a kocka; O az oktaéder; D a dodekaéder; és I az ikozaéder) a cirkuláris kromatikus száma is meghatározható [101]:

$$\chi_c(T) = 4; \quad \chi_c(Q) = 2; \quad \chi_c(O) = 3; \quad \chi_c(D) = \frac{20}{7}; \quad \chi_c(I) = 4$$

23.2. definíció. Egy poliédert arkhimédészi (vagy féliszabályos) testnek nevezzük, ha a lapjai mind szabályosak, de nem feltétlenül egybevágók és a csúcshalakzatuk (azon szabályos sokszögek, amelyek a csúcshoz tartoznak) egybevágó.

A konvex féliszabályos testek tehát az öt szabályos test, 13 arkhimédészi test és 2 végtelen osztály (prizmák és antiprizmák osztálya). A 13 arkhimédészi test listája a csúcshalakzatukkal megadva:

csúcshalakzat	név	jelölés
(3, 6, 6)	csonkított tetraéder	TT
(3, 8, 8)	csonkított kocka	TC
(4, 6, 6)	csonkított oktaéder	TO
(3, 10, 10)	csonkított dodekaéder	TD



19. ábra. A dodekaéder élhálózata.

csúcsalakzat	név	jelölés
(5, 6, 6)	csonkított ikozaéder	<i>TI</i>
(3, 4, 3, 4)	kuboktaéder	<i>CO</i>
(4, 6, 8)	csonkított kuboktaéder	<i>CT</i>
(3, 4, 4, 4)	rombikuboktaéder	<i>CR</i>
(3, 3, 3, 3, 4)	pisze kuboktaéder	<i>CS</i>
(3, 5, 3, 5)	ikozidodekaéder	<i>ID</i>
(4, 6, 10)	csonkított ikozidodekaéder	<i>IT</i>
(3, 4, 5, 4)	rombikozidodekaéder	<i>IR</i>
(3, 3, 3, 3, 5)	pisze ikozidodekaéder	<i>IS</i>

23.2. tétel. Az arkhimédészi testek gráfjának cirkuláris kromatikus száma megegyezik a kromatikus számokkal, kivéve a csonkított ikozaédert! 19

$$\begin{aligned}\chi_c(TO) = \chi_c(CT) = \chi_c(IT) = 2 \quad ; \quad \chi_c(IS) = 4 \quad ; \quad \chi_c(TI) = \frac{5}{2} \\ \chi_c(TT) = \chi_c(TC) = \chi_c(TD) = \chi_c(CO) = \chi_c(CR) = \\ = \chi_c(CS) = \chi_c(ID) = \chi_c(IR) = 3\end{aligned}$$

23.3. definíció. A szabályos konvex antiprizmák gráfja $AG_n = (V_n, E_n)$, ahol $n \geq 3$ és $V_n = \{u_0, \dots, u_{n-1}\} \cup \{w_0, \dots, w_{n-1}\}$ és az élek halmaza E_n a $(u_0, \dots, u_{n-1})$ és $(w_0, \dots, w_{n-1})$ körökből áll, valamint további $2n$ darab élből: $u_i w_i$ és $u_{i+1} w_i$, ahol $i = 0, \dots, n-1$ (és persze $u_n = u_0$).

Belátható, hogy $\chi_c(AG_{3m}) = 3$, $\chi_c(AG_{3m+1}) = 3 + \frac{1}{m}$ és $\chi_c(AG_{3m+2}) = 3 + \frac{1}{2m+1}$.

23.4. definíció. A szabályos konvex prizmák gráfja $PG_n = (V_n, E_n)$, ahol $n \geq 3$ és $V_n = \{u_0, \dots, u_{n-1}\} \cup \{w_0, \dots, w_{n-1}\}$ és az élek halmaza E_n a $(u_0, \dots, u_{n-1})$ és $(w_0, \dots, w_{n-1})$ körökből áll, valamint további n darab élből: $u_i w_i$, ahol $i = 0, \dots, n-1$.

24. Kis gráfok

Belátható, hogy $\chi_c(AG_{2m+1}) = 2 + \frac{1}{m}$ és $\chi_c(AG_{2m+2}) = 2$.

24.1. tétel. Pontosan 23 olyan legfeljebb 7 csúcsú összefüggő gráf van, amelynek cirkuláris kromatikus száma kisebb, mint a gráf kromatikus száma.

Ennek bizonyítása során használjuk a következő általános gráfra is teljesülő összefüggést (ahol $\bar{g}(G)$ a G -beli leghosszabb kör hosszát jelenti):

$$\chi_c(G) \geq \frac{\bar{g}(G)}{\bar{g}(G) - 1} \cdot (\chi(G) - 1)$$

25. Gráfszínezés és homomorfizmus

25.1. definíció. Legyenek G és H gráfok. Egy $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ függvényt **homomorfizmusnak** nevezzük, ha megőrzi az éleket vagyis, ha $(u, v) \in E(G)$, akkor $(\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$ teljesül. Általában csak így írjuk $\phi : G \longrightarrow H$.

Vegyük észre, hogy egy G gráf megfelelő k -színezése tulajdonképpen egy $G \rightarrow K_k$ homomorfizmus, ahol K_k jelöli a k pontú teljes gráfot.

25.2. definíció. Egy $\phi : G \rightarrow H$ homomorfizmust **hűnek** nevezünk, ha $\phi(G)$ a H egy feszített részgráfja.

25.3. definíció. Egy $\phi : G \rightarrow H$ homomorfizmust **szürjektívnek** nevezünk, ha bármely H -beli csúcsnak van őse G -ben.

25.4. definíció. A hű és szürjektív homomorfizmusokat **teljes homomorfizmusoknak** nevezzük.

25.5. definíció. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ -re a G gráf **teljes k -színezése** egy $\phi : G \rightarrow K_k$ teljes homomorfizmus.

Tehát a G gráf egy megfelelő k -színezése pontosan akkor teljes, ha bármely két különböző színhez (bármely színpárhoz) létezik olyan éle G -nek, amelynek végpontjai pont ilyen színűek.

Vagyis a G gráf egy teljes színezése a csúcsainak egy olyan P partíciója, ahol a halmazok függetlenek és a G/P kvóciensgráf teljes.

Ha ez a teljes gráf éppen k csúcsú, akkor beszélünk teljes k -színezésről.

25.1. Homomorfizmusok és a kromatikus szám

25.1. lemma. Legyenek G és H gráfok és tegyük fel, hogy létezik $\phi : G \rightarrow H$ homomorfizmus. Ekkor, ha H -nak van megfelelő k -színezése, akkor G -nek is!

Bizonyítás: Ha H -nak van megfelelő k -színezése, akkor létezik $\psi : H \rightarrow K_k$ homomorfizmus is. Az viszont definíció szerint triviális, hogy homomorfizmusok kompozíciója is homomorfizmus, tehát a $\psi \circ \phi$ függvény egy homomorfizmus G -ből K_k -ba és így létezik G -nek is megfelelő k -színezése. ■
A kromatikus szám fogalmát tehát a 25.6. definíció alapján is definiálhatnánk.

25.6. definíció. [160, 161] Tetszőleges G gráf **kromatikus számának** nevezzük és $\chi(G)$ -vel jelöljük azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre létezik $G \rightarrow K_n$ homomorfizmus.

Ekkor triviálisan következik, hogy ha $\chi(G) = n$, akkor minden $G \rightarrow K_n$ homomorfizmus teljes.

25.1. következmény. Ha létezik $G \rightarrow H$ homomorfizmus, akkor $\chi(G) \leq \chi(H)$.

25.7. definíció. Egy $\phi : G \longrightarrow H$ teljes homomorfizmust **eleminek** nevezzük, ha létezik egyetlen olyan (u, v) csúcspár, amik nincsenek összekötve és $\phi(u) = \phi(v)$. Ekkor a H -t **elemi kvóciensgráfnak** nevezzük.

25.2. lemma. Ha H elemi kvóciensgráfja G -nek (egy elemi homomorfizmus által), akkor $\chi(G) \leq \chi(H) \leq \chi(G) + 1$.

Bizonyítás: Természetesen elegendő a felső korlátot belátni a fenti következmény miatt.

Legyen az elemi homomorfizmus ϕ és legyen a kitüntetett csúcspár az (u, v) .

Legyen $\psi : G \longrightarrow K_n$ homomorfizmus. Definálunk egy teljes homomorfizmust $\psi' : H \longrightarrow K_{n+1}$ úgy, hogy $\psi'(z) = \psi(\phi^{-1}(z))$ minden $z \notin \{u, v\}$. Ez jóldefiniált, mert ϕ elemi volt és $\psi'(u) = \psi'(v) = n + 1$. ■

25.8. definíció. Legyenek G és H gráfok. H -t a G **retraktumának** nevezzük, ha léteznek olyan $\phi : G \longrightarrow H$ és $\psi : H \longrightarrow G$ homomorfizmusok, hogy $\phi \circ \psi = id_H$. (itt ϕ -t **retrakciónak** és ψ -t **koretrakciónak** nevezzük)

25.9. definíció. Egy G gráfot **core**-nak nevezzük, ha nincsen G -nek valódi részgráffjába menő retrakciója.

25.2. következmény. Tetszőleges gráfnak és a core-jának megegyezik a kromatikus száma.

Vannak olyan gráftulajdonságok, amelyek esetében érdemes keresni azt a legkisebb részgráfot, amelynek még megvan az adott tulajdonsága.

A G core-ja sokszor éppen ez a minimális részgráf. A következő gráfok core-ok:

- $K_n, n \geq 1$;
- $C_{2k+1}, k \geq 1$;
- $W_{2k+1}, k \geq 1$;
- Petersen-gráf;
- A χ -kritikus gráfok.

Nem core pl. $K_n \setminus e, C_{2n}$, diszjunkt körök uniója.

Minden véges gráfnak van core-ja.

G retraktumai közül egy legkisebb csúcsszámú core is.

Ha G -nek van több core-ja, akkor azok izomorfak.

Szokás ezért egy G gráf core-járól úgy beszélni, mintha csak egy ilyen lenne neki, hiszen mindegyik

izomorf.

Ha létezik homomorfizmus G -ből H -ba, akkor mondjuk röviden azt, hogy G a H -ba **leképezhető**, $(G \rightarrow H)$.

A leképezhető reláció nyilván reflexív, tranzitív de nem feltétlenül szimmetrikus reláció.

Ha G és H kölcsönösen leképezhető a másikba, akkor **homomorf ekvivalensnek** mondjuk őket, $(G \leftrightarrow H)$.

Ha tehát R a G retraktuma, akkor definíció szerint $G \leftrightarrow R$.

25.3. állítás. *Ha G és H két gráf és $G \leftrightarrow H$, akkor core-jaik izomorfak.*

A homomorf ekvivalencia egy ekvivalencia reláció a gráfokon. A G gráfot tartalmazó ekvivalenciaosztályt jelöljük $H(G)$ -vel.

25.10. definíció. *Legyenek G és F gráfok. Ha $G \rightarrow F$, akkor vezessük be a $H(G) \leq H(F)$ parciális rendezést az ekvivalenciaosztály között.*

A bevezetett parciálisan rendezett halmaz **háló**.

25.1. tétel (Welzl tétele). *Legyenek G és F gráfok, melyekre $G \rightarrow F$ és $F \rightarrow G$. Ekkor létezik egy közbülső K gráf, melyre $G \rightarrow K \rightarrow F$ és $F \rightarrow K \rightarrow G$.*

26. Cayley gráfok

26.1. definíció. *Legyen Γ egy csoport és S a Γ részhalmaza, amely zárt az inverzképzésre, de nincs benne az egységelem. Egy ilyen S -et **Cayley részhalmaznak** nevezünk. Képezzünk egy gráfot, amelynek csúcshalmaza Γ , valamint az u és v csúcsokat pontosan akkor tekintjük szomszédosnak, ha $u^{-1}v \in S$. Ezt hívjuk **Cayley gráfnak** és $\text{Cay}(\Gamma, S)$ a jele.*

26.1. tétel (Sabidussi, 1964). *[43] A Cayley gráfok reprezentálják az összes csúcstranzitív gráfokat. Bármely csúcstranzitív gráf retraktuma valamely Cayley gráfnak.*

A csúcstranzitív gráfok egy szép tulajdonsága a következő állítás.

26.2. definíció. A G gráf függetlenségi arányának nevezzük az $i(G) = \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}$ számot.

26.1. lemma (Nincs-homomorfizmus, Albertson és Collins, 1985). Legyenek G és H gráfok, H csúcstranzitív és $G \rightarrow H$. Ekkor $i(G) \geq i(H)$.

Bizonyítás: Legyen $S(H)$ a H maximális, $\alpha(H)$ méretű stabil részhalmazainak családja. H szimmetriája miatt mindegyik csúcs ugyanannyiszor (mondjuk m -szer) fordul elő az $S(H)$ család elemeiben. Az

$$\alpha(H) \times |S(H)| = m \times |H|$$

egyenlőség igaz, mivel kétféleképpen számoltuk meg egy csúcs előfordulásait egy elemében a családnak. Legyen $\phi : G \rightarrow H$ egy homomorfizmus. Ekkor minden $I \in S(H)$ esetén tudjuk, hogy $|\phi^{-1}(I)| \leq \alpha(G)$.

Összegezve az egyenlőtlenségeket az összes $I \in S(H)$ -re, kapjuk a következő egyenlőtlenséget

$$\sum_{I \in S(H)} |\phi^{-1}(I)| \leq \alpha(G) \times |S(H)|.$$

Máskülönben meg mindegyik $u \in V(G)$ csúcs m -mel járul hozzá a baloldalhoz, mivel a $\phi(u)$ az $S(H)$ családnak pontosan m tagjához tartozik.

Így tehát

$$\sum_{I \in S(H)} |\phi^{-1}(I)| = m \times |G|.$$

A fenti három összefüggésből kijön az állítás!

$$i(G) = \frac{\alpha(G)}{|V(G)|} \geq \frac{m}{|S(H)|} = \frac{\alpha(H)}{|H|} = i(H).$$

■

A bebizonyított tételt úgy is fogalmazhatjuk:

Ha H csúcstranzitív és $i(G) < i(H)$, akkor $G \not\rightarrow H$.

26.1. Akromatikus szám

26.3. definíció. Egy G gráf **akromatikus számának** nevezzük és $\text{achr}(G)$ -vel jelöljük a legnagyobb olyan s pozitív egészet, amire létezik $G \rightarrow K_s$ teljes homomorfizmus. [114]

A fentiekhez hasonlóan kaphatók a következő eredmények:

26.2. lemma. Ha $\phi : G \longrightarrow H$ teljes homomorfizmus, akkor $\text{achr}(G) \geq \text{achr}(H)$.

26.3. állítás. Ha $\phi : G \longrightarrow H$ elemi homomorfizmus, akkor $\text{achr}(G) - 2 \leq \text{achr}(H) \leq \text{achr}(G)$.

26.4. állítás. Legyen G egy gráf. Minden olyan s -re, amire $\chi(G) \leq s \leq \text{achr}(G)$ létezik $G \longrightarrow K_s$ teljes homomorfizmus.

27. Hipergráfok, színezések

27.1. definíció. [101, 102] [109] **Hipergráfnak** nevezzük egy $H = (X, E)$ párt, ahol X a csúcsok halmaza, és $E \subseteq \mathcal{P}(X)$ pedig az élek halmaza, ahol az élek az X csúcshalmaz részhalmazai közül kerülnek ki.

27.2. definíció. Egy hipergráf **megfelelő színezése** a csúcsainak egy olyan színezése, amelyre teljesül, hogy nincsen olyan él, amelynek minden csúcsa egyszínű. (ez általánosítja a megfelelő színezés gráfokra vonatkozó fogalmát)

27.3. definíció. [121] Egy hipergráf **kromatikus száma** az a legkisebb k pozitív egész, amelyre létezik a hipergráfnak k színű megfelelő színezése.

Sokféle gráfszínezési fogalommal találkoztunk. A hipergráfok esetében olyan változatok is lehetségesek, amelyek nem túl érdekesek a speciális hipergráfokra: a gráfokra.

27.4. definíció. **H erős k-színezése** az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden élből legfeljebb egy csúcs lehet minden osztályból.

Jelölje $\gamma(H)$ azt a legkisebb k -t, melyre létezik H -nak egy erős k -színezése.

$\gamma(H)$ a H erős kromatikus száma.

Nyilván $\chi(H) \leq \gamma(H)$, hiszen egy erős k -színezés normál k -színezés is. Ha a hipergráf speciálisan egy gráf, akkor a két fogalom egybeesik.[79]

27.5. definíció. **H kiegyensúlyozott k-színezése** az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden $D_j \in E$ élnek és S_i színosztálynak a metszetére

$$\left\lfloor \frac{|D_j|}{k} \right\rfloor \leq |D_j \cap S_i| \leq \left\lceil \frac{|D_j|}{k} \right\rceil$$

teljesül.

27.6. definíció. H jó k -színezése az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden $D_j \in E$ élben van $\min\{|D_j|, k\}$ különböző szín.

Ha $k \leq \min_{j \in J} |D_j|$, akkor minden S_i a H transzverzálisa. Ha $k \geq \max_{j \in J} |D_j|$, akkor egy jó k -színezés egy erős k -színezés. A H kiegyensúlyozott k -színezése egy jó k -színezés is.

27.7. definíció. [162] A normál, az erős és a kiegyensúlyozott színezések közös általánosítása, ha minden D_j élhez előre megadunk két nemnegatív számot, $0 \leq a_j \leq b_j \leq |D_j|$.

H szabályos k -színezése az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden $D_j \in E$ élre

$$a_j \leq |D_j \cap S_i| \leq b_j.$$

A gráfok színezésekor bevezetett fogalmak a hipergráfok esetében is fontosak, definíciójuk olyan, hogy a speciális gráf esetben visszkapjuk a már megismert eredeti fogalmat.

27.8. definíció. A H hipergráf egy x csúcsának **monofoka**, $m(x, H)$ azon élek maximális száma, amelyek mind tartalmazzák x -et, de páronkénti metszetük csak az x -et tartalmazza. Legyen

$$M(H) = \max_{Y \subseteq X} \min_{x \in Y} m(x, H/Y).$$

(ahol H/Y az Y által feszített részhipergráffát jelenti H -nak, melynek alaphalmaza Y és H azon élei alkotják az éleit, amelyek részalmazai Y -nak)

Gráfokra az $M(H) + 1$ volt az Erdős és Hajnal által bevezetett **színezési szám**.

27.9. definíció. **Kevert hipergráfnak** nevezzük egy $H = (X, C, D)$ hármast, ahol X a csúcshalmaz, és C és D is az X részalmazainak családja: a C -élek és a D -élek.[203][229, 230, 231]

27.10. definíció. Egy kevert hipergráf **megfelelő k -színezése** egy $X \mapsto \{1, 2, \dots, k\}$ függvény, amire minden C -élben van két egyforma színű csúcs (nincs teljesen tarka C -él) és minden D -élben van két különböző színű csúcs (nincs teljesen egyszínű D -él).

27.1. megjegyzés. Nem minden kevert hipergráfnak van megfelelő színezése! Például a következőnek nincsen: $H = (\{1, 2\}; \{\{1, 2\}\}; \{\{1, 2\}\})$.

27.11. definíció. Egy kevert hipergráf k színnel **színezhető**, ha létezik legfeljebb k színt használó megfelelő színezése.

Feszített k -színezésnek nevezzük egy megfelelő k -színezést, ami az összes színt használja (tehát a függvény szürjektív)

27.12. definíció. Egy H kevert hipergráf esetén a feszített színezéseiben használható maximális színszámot **felső kromatikus számnak** nevezzük és $\bar{\chi}(H)$ -val jelöljük.

Hasonlóan a minimális színszámot **alsó kromatikus számnak** nevezzük és $\chi(H)$ -val jelöljük.

27.2. megjegyzés. Jelölje H_D a $(X, \emptyset, D)$ hármast és nevezzük ezt D -hipergráfnak.

Vegyük észre, hogy a D -hipergráfok vizsgálata a minimális színszám vizsgálatát jelenti a hipergráfok körében.

Hasonlóan jelölje H_C a $(X, C, \emptyset)$ hármast és nevezzük ezt C -hipergráfnak.

Vegyük észre, hogy a C -hipergráfok vizsgálata pedig a maximális színszám vizsgálatát jelenti a hipergráfok körében.

Ebből látható, hogy az általánosabb kevert hipergráfok vizsgálata során minden olyan probléma felmerül, ami külön-külön a minimális- és maximális színszám vizsgálatánál felmerül.

28. Alkalmazások, érdekességek

28.1. Kromatikus spektrum

28.1. definíció. [72] [156] *Megengedett halmaznak* nevezzük azon k pozitív egészek halmazát, amelyekre a H hipergráfnak van feszített k -színezése.

28.2. definíció. Minden egyes k -ra legyen r_k az X csúcshalmaz olyan partícióinak száma, amely k nem-üres osztályból áll (ezek a színosztályok) és a C -élekre, valamint a D -élekre vonatkozó színezési feltételek is teljesülnek.

Ezeket a partíciókat *megengedett partícióknak* nevezzük.

r_k megegyezik a feszített k -színezések számával (ha a színek permutációjával kapott színezéseket nem tekintjük különbözőknek).

28.3. definíció. Az $R(H) = (r_1, \dots, r_n)$ vektort nevezzük a H hipergráf *kromatikus spektrumának*.

Tekintsünk egy színezhető H kevert hipergráfot.

Ekkor természetesen adódik a kérdés, hogy az alsó- és felső kromatikus száma közötti tetszőleges k -ra létezik-e feszített k -színezése?

A válasz nemleges, vagyis a kromatikus spektrumban lehetnek lyukak.

28.4. definíció. A kromatikus spektrumnak k -ban *lyuka* van, ha a megengedett halmaz tartalmaz k -nál kisebb és nagyobb elemet is, de a k -t nem.

28.1. megjegyzés. Tetszőleges $2 \leq s \leq t-2$ -re létezik olyan $H_{s,t}$ kevert hipergráf, amelynek megengedett halmaza $\{s, t\}$.

Szintén érdekes kérdés, hogy a pozitív egészeknek melyek azok a részhalmazai, amik kevert hipergráfnak lehetnek megengedett halmazai?

28.2. megjegyzés. Az bizonyított, hogy a pozitív egészeknek egy véges részhalmaza akkor és csak akkor megengedett halmaza valamely kevert hipergráfnak, ha vagy az $\{1, 2, \dots, t\}$ kezdő-intervallum vagy ha nem tartalmazza az 1 elemet.

Legyen $X = \{x_1, x_2, a_1, \dots, a_{t-2}, b_1, \dots, b_{t-2}\}$. Jelölje T az $x_r a_i b_i$ szerkezetű hármasok halmazát, ahol $r \in \{1, 2\}$ és $i \in \{1, 2, \dots, t-2\}$, valamint jelölje U az $a_i b_i a_j b_j$ alakú négyesek halmazát, ahol $i, j \in \{1, 2, \dots, t-2\}$.

Legyen W minden $i, j \in \{1, 2, \dots, t-2\}$ -re az $\{a_i, b_i, a_j, b_j\}$ négyelemű halmazból készíthető hármasok (minden négyelemű halmazból 4 ilyen származik) uniója.

Ekkor a C -élek legyenek $T \cup W$ és a D -élek legyenek $T \cup U \cup \{x_1 x_2\}$.

Megmutatható, hogy ennek a kevert hipergráfnak a megengedett halmaza $\{2, t\}$. Tehát, ha $t \geq 4$, akkor ez a példa mutatja, hogy a megengedett halmaznak lehet lyuka.

28.2. Síkhipergráfok

Tekintsünk egy $H = (X, E)$ hipergráfot.

Ennek a $B(H)$ **páros gráf reprezentációja** egy olyan páros gráf, aminek két osztálya X és E és egy X -beli csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze egy E -beli éllel, ha a csúcs eleme ennek az élnek.

28.5. definíció. Egy H hipergráfot **síkhipergráfnak** nevezzük pontosan akkor, ha $B(H)$ síkgráf.

Vegyük észre, hogy a síkhipergráfoknak létezik a síkba olyan beágyazása, hogy a csúcsokhoz a sík egy-egy pontját rendeljük és minden élnek megfelel egy zárt síkrész (ami homeomorf a körlappal) és nem tartalmaz más csúcsokhoz rendelt pontokat, viszont tartalmazza a saját csúcsaihoz tartozó pontokat a határán.

Továbbá két ilyen síkrész csak az élek közös csúcsainak megfelelő pontokban metszhetik egymást.

Legyen most $H = (X, C, D)$ egy kevert hipergráf. Jelölje $E = C \cup D$. Ha van olyan C -él, ami egybeesik egy D -éllel (vagyis **bi-él**), akkor az az E -ben csak egyszer szerepel.

Nevezzük a $H' = (X, E)$ hipergráfot a H kevert hipergráfhoz rendelt hipergráfnak. (ha a C -élek mind egybeesnek a D -élekkel, akkor **bihipergráfról** beszélhetünk)

28.6. definíció. A $H = (X, C, D)$ kevert hipergráf **sík-hipergráf**, akkor és csak akkor, ha a hozzárendelt hipergráf sík-hipergráf.

28.3. megjegyzés. Az nyilvánvaló, hogy minden D -hipergráf, ami sík-hipergráf is az színezhető megfelelően.

Hasonlóan minden C -hipergráf is, ami sík-hipergráf.

Azonban általános kevert sík-hipergráfok esetén már nem feltétlenül létezik megfelelő színezés.

28.1. példa. A legkisebb (nemtriviális) nem színezhető kevert

$H = (X, C, D)$ sík-hipergráf a következő:

$X = \{1, 2, 3\}$, $C = \{(1, 2, 3)\}$ és $D = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

28.4. megjegyzés. Nem nehéz ebből a példából kiindulva gyártani nem színezhető kevert sík-hipergráfok végtelen családját sem.

Viszont a nem színezhető kevert sík-hipergráfok szerkezete még nem ismert.

28.3. Speciális hipergráfok színezhetősége

28.7. definíció. Egy hipergráfot r -uniformnak nevezünk, ha nincsenek többszörös élei és minden élnek a mérete r .

Teljes r -uniformnak nevezzük azt az r -uniform hipergráfot, amiben az élek éppen az X csúcshalmaz összes r elemű részhalmazai (az összes r elemű részhalmazt jelöljük $\binom{X}{r}$ -rel).

Ennek jele: K_n^r , ahol $|X| = n$.

Ezt a fogalmat általánosíthatjuk kevert hipergráfokra is:

28.8. definíció. [242] Egy kevert hipergráfot (l, m) -uniformnak nevezünk, ha nincsenek többszörös élei, minden C -él mérete l és minden D -él mérete m .

Teljes (l, m) -uniformnak nevezzük azt az (l, m) -uniform kevert hipergráfot, amiben a C -élek az X csúcshalmaz összes l elemű részhalmazai és a D -élek az összes m elemű részhalmazok, vagyis: $K(n, l, m) = (X, C, D) = \left(X, \binom{X}{l}, \binom{X}{m}\right)$, ahol $|X| = n$.

28.1. tétel. $K(n, l, m)$ akkor és csak akkor nem színezhető megfelelően, ha $n \geq (l - 1)(m - 1) + 1$.

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy ha $n \leq (l - 1)(m - 1)$, akkor van megfelelő színezés.

Színezzük az első $(m - 1)$ csúcsot az első színnel, a következő $(m - 1)$ -et a másodikkal, stb.

Mivel $n \leq (l - 1)(m - 1)$, ezért így legfeljebb $(l - 1)$ színt használunk fel és az így kapott színezés a $K(n, l, m)$ egy megfelelő színezése.

Ha $n \geq (l - 1)(m - 1) + 1$, akkor mivel minden l méretű részhalmaz egy C -él, ezért nem használhatunk csak legfeljebb $(l - 1)$ színt;

valamint, mivel minden m méretű részhalmaz egy D -él, ezért egy színosztályban legfeljebb $(m - 1)$ csúcs szerepelhet.

Ebből triviálisan következik, hogy marad olyan csúcs, amit már nem tudunk megfelelően színezni. ■

28.1. következmény. Egy $H = K(n, l, m)$ kevert hipergráf megfelelően színezhető akkor és csak akkor, ha a kromatikus inverze (amit a C és D -élek felcserélésével kapunk) $\bar{H} = K(n, m, l)$ is színezhető.

28.2. következmény. Rögzített (l, m) párra tehát majdnem minden $K(n, l, m)$ nem színezhető megfelelően.

A fentiek triviálisan következtek a tételből, és a következő állítást sem túl nehéz belátni.

28.3. következmény. Ha az (l, m) párt nem rögzítjük, akkor viszont majdnem minden $K(n, l, m)$ színezhető.

29. Kromatikus kritikus konstrukciók

29.1. Csúcsok hasítása

G és H gráfok, $x \in V(G)$, valamint legyen $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V(H)$ ($n \geq 2$) a H gráf egy független csúcshalmaza. Ha teljesül a $G \setminus \{x\} = H \setminus X$ egyenlőség, valamint azonos az x G -beli szomszédsága és az összes x_i , ($i = 1, \dots, n$) együttes H -beli szomszédsága akkor azt mondhatjuk, hogy a G a H -ból származik az X elemeinek x -be olvasztásával. Megfordítva, ha még az is teljesül, hogy az X bármely két elemének diszjunkt a szomszédsága, akkor azt is mondhatjuk, hogy a H a G -ből keletkezett az x csúcs $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ -re történő felhasításával

29.1. állítás. [191] Ha egy k -kromatikus kritikus gráf egyik csúcsát hasítjuk, akkor a kapott gráf vagy kiszínezhető $(k-1)$ színnel vagy továbbra is k -kromatikus kritikus gráf marad. A második eset négyenél kevesebb csúcs esetén nem fordulhat elő.

29.2. Dirac konstrukciója

$G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$ diszjunkt gráfok. Legyen $G_1 \nabla G_2 = G(V, E)$ a két gráfból kapott gráf, amelyben összekötjük még bármely két különböző gráfbeli csúcsot egy éllel, vagyis, $V = V_1 \cup V_2$, valamint $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ahol $E_3 = \{\{x, y\} | x \in V_1, y \in V_2\}$.

29.2. állítás. Ha G_1 k_1 -kromatikus és G_2 k_2 -kromatikus diszjunkt gráfok, akkor $G_1 \nabla G_2$ $(k_1 + k_2)$ -kromatikus, valamint pontosan akkor kromatikus kritikus, ha G_1 és G_2 is az.

[59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63] A ∇ operáció többszöri alkalmazásával változatos kromatikus kritikus gráfokat kaphatunk. Ez az operáció sok élt használ fel. Egy páratlan hosszú kör 3-kromatikus kritikus,

amelynek annyi éle van, mint csúcsa. Ha két ilyen diszjunkt körre alkalmazzuk a ∇ operációt, akkor $2n$ csúcson $(n^2 + 2n)$ élű 6-kromatikus kritikus gráfot kapunk.

Dirac, Erdős, Simonovits és Toft munkái nyomán választ kereshetünk a k -kromatikus gráfok élsűrűségére is.

29.3. állítás. [117, 118] [191] *Dirac konstrukciójából következik minden 6-nál nagyobb k -ra is olyan k -kromatikus kritikus gráfsorozat létezése amely legalább $a_k n^2$ élt tartalmaz (az n a csúcsok száma).*

Erdős Pál visszaemlékezéséből tudjuk, hogy ő először azt sejtette, csak $o(n^2)$ élt tartalmazhat egy k -kromatikus kritikus gráf. Kiderült, hogy már $k = 4$ -re is lehet sok élű kritikus gráf, Toft konstruált $\frac{n^2}{16}$ nagyságrendű élt tartalmazó 4-kromatikus kritikus gráfsorozatot.[128, ?, 130, 131, ?]

29.1. példa. [173] *Induljunk ki két $n \geq 3$ hosszú páratlan körből és egy különálló $K_{n,n}$ kétrészes gráfból. Kössük össze az egyik kör csúcsait a páros gráf egyik osztályával mint egy párosítás és tegyük ugyanezt a másik kör és a másik színosztály elemeivel. Az így kapott $4n$ csúcsú és $n^2 + 4n$ élű gráf 4-kromatikus kritikus.*

Erdős és Simonovits igazolta, hogy $\frac{n^2}{4}$ élszámnál több már nem érhető el. A pontos konstans talán még ma sem ismert.

Sőt a sok él eléggé egyenletesen is elhelyezkedhet.

29.4. állítás. *Minden $k \geq 6$ -hoz létezik olyan pozitív b_k konstans és végtelen sok k -kromatikus kritikus G gráf, melyre $\delta(G) \geq b_k n$ (az n a csúcsok száma) vagyis minden fokszám elég nagy.*

$k = 4$ esetén Simonovits és Toft konstruáltak 4-élkritikus gráfsorozatot, melyben minden pont foka nagyobb, mint $cn^{\frac{1}{3}}$.

29.3. A Dirac–Hajós konstrukció

[73]

29.1. definíció (C_q konstrukció). [47] [59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63]

Legyen q egy pozitív egész szám, G_1 és G_2 diszjunkt gráfok. Mindkét gráfban $i = 1, 2$ legyen $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^q, y_i$ $(q+1)$ kitiüntetett csúcs, amelyekre fennállnak a következők:

(a) $Q_i := \{x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^q, y_i\}$ teljes gráf G_i -ben.

(b) $e_i := \{x_i^1\} \in E(G_i)$

(c) $q \in \{1, 2\}$ vagy $q \geq 3$ és $j = 2, 3, \dots, q$ vagy $\{x_1^j, y_1\} \in E(G_1)$ vagy $\{x_2^j, y_2\} \in E(G_2)$ vagy mindkettő teljesül.

Jelölje G a $G_1 \cup G_2$ -ből a következő operációkkal megkapható gráfot:

(1) töröljük az e_1, e_2 éleket

(2) rendre a $j = 1, 2, \dots, q$ értékekre azonosítjuk az x_1^j és x_2^j csúcsokat más-más x^j -be

(3) kössük össze az y_1 és y_2 csúcsokat egy új e^* éllel.

A fenti definíciót Hajós György vezette be $q = 1$ esetén még 1959 előtt. [47]

Egy G gráfot k -konstruálhatónak hívunk, ha a G maga a k csúcsú teljes gráf, vagy megkapható két diszjunkt k -konstruálható gráfból az eredeti Hajós-konstrukcióval, vagy G megkapható egy k -konstruálható gráf két nem szomszédos csúcsának azonosításával. Tehát a k -konstruálható gráfok a k csúcsú teljes gráfból kiindulva két olyan operáció ismételt alkalmazásával állnak elő, amelyek k -kromatikus gráfokból k -kromatikus gráfot adnak.

Hajós tétele szerint ennél több is igaz, minden olyan gráf amely nem $(k-1)$ -színezhető, részgráfként tartalmaz k -konstruálható gráfot.

29.1. tétel. Bármely G gráfra $\chi(G) \geq k \Leftrightarrow G$ -nek van k -konstruálható részgráfja.

29.1. következmény. G k -kromatikus kritikus gráf $\Leftrightarrow G$ k -konstruálható gráf.

1955-ben Dirac észrevette, hogy a Dirac-Hajós általános konstrukció egy speciálisabb formában kritikus gráfokból kritikus gráfokat állít elő.

29.2. tétel (A Dirac-Hajós konstrukció). [59, 58, 60, 64, 62, 65, 61, 63] Legyen $k \geq 4$ és $1 \leq q \leq k-2$ és legyen G egy olyan gráf, amelyet a G_1, G_2 diszjunkt gráfokból a C_q konstrukcióval nyertünk. Ekkor a következő két állítás teljesül.

(I) Ha a G_1 és G_2 k -kromatikus kritikus gráf, akkor a G is az.

(II) Ha $q=1$, akkor a G pontosan akkor k -kromatikus kritikus, ha a G_1 és G_2 is az.

A bizonyításokról Gallai Tibor német nyelvű cikkeiben írt. [84, 85, 86]

29.4. Toft konstrukciója

A konstrukció bemutatása könnyebb, ha a hipergráf egyébként is alapvető fogalmát itt is leírjuk. A $G(V, E)$ hipergráf csúcshalmaza a V véges halmaz, míg az E a V egy halmazrendszere, vagyis az E a V bizonyos különböző, legalább két elemet tartalmazó részhalmazából áll. Az E elemeit éleknek hívjuk, a legalább három eleműeket hiperéleknek. Ha $e = \{x, y\}$ egy rendes éle G -nek, akkor mondhatjuk, hogy az e összeköti az x -et az y -nal a G -ben. Egy $x \in G$ csúcs szomszédja egy $y \in G$ csúcs, ha létezik olyan

hiperél, amely mindkettőjüket tartalmazza. Az $x \in G$ csúcs fokszáma a G hipergráfban definíció szerint megegyezik az őt tartalmazó hiperélek számával. Jelölje $\Delta(G)$ és $\delta(G)$ a hipergráf maximális és minimális fokszámát.

Szokás még megkülönböztetni az $x \in G$ csúcs lényegi fokszámát is. Vegyük a G minden olyan élét, amely az x -et tartalmazza, legyen ez E' . Vegyünk ebből egy olyan $E'' \subseteq E'$ részrendszert, amelyben bármely két hiperél metszete az $\{x\}$ és egy legnagyobb ilyen. Az $|E'|$ az x lényegi fokszáma. Gráfokra a kétféle fokszám fogalom azonos. A gráfokat olyan hipergráfoknak tekinthetjük amelyeknek minden éle két elemű. Általában, ha egy hipergráf minden éle azonos elemszámú, pl. t , akkor t -uniform. Ha H és G hipergráfok és $V(H) \subseteq V(G)$ és $E(H) \subseteq E(G)$, akkor a H részhipergráfja G -nek és röviden a $H \subseteq G$ jelölést alkalmazhatjuk. Ha G hipergráf és $X \subseteq V(G)$, akkor jelölje $G[X]$ az X által feszített részhipergráfot, tehát $V(G[X]) = X$, valamint az $E(G[X])$ a G azon éleiből áll, amelyek az X részhalmazai is. Továbbá $X \subseteq V(G)$ és $F \subseteq E(G)$ esetén $G \setminus X = G[V(G) \setminus X]$ és $G \setminus F = (V(G), E(G) \setminus F)$. Két hipergráf uniója egyszerűen $H \cup G = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$. Egy H hipergráf összefüggő, ha $V(H)$ nem bontható fel diszjunkt V_1 és V_2 részekre úgy, hogy a H minden éle része vagy a V_1 vagy a V_2 halmaznak.

Egy H hipergráf reprezentálható egy G kétrészes gráffal. Legyen $V(G) = V(H) \cup E(H)$, vagyis az egyik rész álljon a H csúcsaiból, míg a másik részben a H minden élének feleltessünk meg egy-egy új csúcsot. Egyik részben sincs él, azonban a két rész között rendes él köti össze az $x \in V(H)$ és $e \in E(H)$ csúcsokat, ha $x \in e$ teljesül. Az így kapott G gráfot a H hipergráf r -gráfjának hívjuk. Ha jobban tetszik a konstrukciót úgy is elképzelhetjük, hogy mindegyik hiperélt kicseréljük egy csillagra ($K_{1,t}$), a hiperélt alkotó csúcsokat összekötjük egy új csúccsal és a hiperél megszűnik.

Egy H hipergráf összefüggő, ha a csúcsainak bármely két valódi részre történő partíciójához létezik olyan $e \in E(H)$ él (hiperél), amely metszi mindkettőt. A H hipergráf pontosan összefüggő, amikor az r -gráfja. Általánosítva ezt az operációt leírunk egy r -típusú konstrukciót! Legyen H egy hipergráf és legyen $E' = \{A_1, \dots, A_n\}$ a H éleinek olyan halmaza, hogy minden igazi (legalább 3 elemű) hiperéle közöttük van. Legyenek $\{G_1, \dots, G_n\}$, H -tól és egymástól diszjunkt csúcshalmazú olyan gráfok, hogy minden G_i -nek van $|A_i|$ méretű $V_i \subseteq V(G_i)$ független csúcscrészhalma ($1 \leq i \leq n$). Konstruáljuk meg a $\{H, G_1, \dots, G_n\}$ -ből a G gráfot! Hagyjuk el a H hipergráfból az E' -beli éleit, de az A_i csúcsait azonosítsuk a V_i halmazzal ($1 \leq i \leq n$).

Berge, Lovász és Toft elképzelése szerint bizonyos tulajdonságú gráfokat lehet konstruálni hipergráfok alkalmazásával. Tegyük fel, hogy bizonyos P tulajdonságú gráfokat szeretnénk konstruálni. Keressük meg a P általánosításának megfelelő hipergráfokra vonatkozó $\mathcal{P}$ hipergráf tulajdonságot. Ekkor megtehetjük azt, hogy a H hipergráfból kiindulva képezzük valamilyen r -típusú konstrukcióval a G gráfot. Lehetséges, hogy teljesül a következő: a G akkor és csak akkor rendelkezik a P tulajdonsággal ha a H -nak megvan a $\mathcal{P}$ tulajdonsága. Ha ez így van, akkor a $\mathcal{P}$ tulajdonságú H hipergráf valahogyan redukálható egy P tulajdonságú gráfra. Megfordítva, ha ismernénk az összes P tulajdonságú gráfot, akkor egyfajta inverz r -típusú konstrukcióval megkapnánk az összes $\mathcal{P}$ tulajdonságú hipergráfot.

A G hipergráf k -színezése egy $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ($k \geq 1$) leképezés, amelyre minden $e \in E(G)$ teljesül a $|c(e)| \geq 2$ egyenlőtlenség, vagyis nem lehet egyszínű él. k -színezhető egy hipergráf, ha létezik (jó) k -színezése. A $\chi(G)$ kromatikus szám fogalma hipergráfra hasonlóan értelmezett, a legkisebb j szám, amelyre G j -színezhető. Ha $\chi(G) = k$ akkor azt is mondjuk, hogy G k -kromatikus hipergráf. Az összefüggő G hipergráfot kromatikus kritikusnak nevezzük, ha $\chi(H) < \chi(G)$ minden valódi H részhipergráfjára. G k -élkritikus, ha minden $e \in E(G)$ esetén $\chi(G \setminus \{e\}) < \chi(G) = k$. [70] [177]
A G gráfban X független csúcshalmaz (klikk), ha $G[X]$ nem tartalmaz élt (teljes gráf).

1974-ben B. Toft a fenti hipergráfos elképzeléssel definiált kromatikus kritikus gráfosztályt. A P gráf-tulajdonság a k -kromatikus kritikusság lesz.

29.3. tétel. Ha H_1 és H_2 diszjunkt hipergráfok, akkor a gráfokra megismert operációval kapott $H = H_1 \nabla H_2$ hipergráfra $\chi(H) = \chi(H_1) + \chi(H_2)$, valamint H akkor és csak akkor kromatikus kritikus, ha H_1 és H_2 is az.

29.4. tétel. Legyen $k \geq 3$ egész szám. Legyenek H_1 és H_2 diszjunkt hipergráfok, és legyenek $X_i \subseteq V(H_i)$ ($i=1,2$) egyforma részhalmazok, $|X_1| = |X_2| \geq 2$, valamint $X_1 \neq V(H_1)$ és $(X_2) \in E(H_2)$, vagyis az X_2 csúcshalmaz éppen egy hiperél H_2 -ben. Jelölje H azt a hipergráfot, amely a H_1 -ből és a $H_2 \setminus (X_2)$ -ből kapható az X_1 és X_2 csúcsainak pontokkénti azonosításával.

Tegyük fel, hogy H_1 kielégíti a következő öt feltételt:

(I) H_1 összefüggő;

(II) $\chi(H_1) \leq k - 1$;

(III) a H_1 tetszőleges $(k-1)$ -színezése esetén az X_1 nem lesz egyszínű;

(IV) másrészt, ha tetszőlegesen $(k-1)$ -színezzük a $H_1[X_1]$ feszített részgráfot úgy, hogy az X_1 nem lesz egyszínű, akkor ez a színezés mindig kiterjeszhető a H_1 -re;

(V) mindegyik $e \in E(H_1)$ esetén létezik olyan $(k-1)$ -színezése $H_1 \setminus e$ -nek, hogy az X_1 egyszínű lesz.

Ekkor H k -kromatikus kritikus $\iff H_2$ k -kromatikus kritikus.

Vajon milyenek a tételben felsorolt öt tulajdonsággal rendelkező H_1 hipergráfok? Jelölje $\mathcal{G}_k$ az öt feltételnek megfelelő olyan H_1 gráfokat, amelyeknek van legalább 2 elemű valódi X_1 csúcs részhalmaza.,

29.5. állítás. Egy H_1 gráf egy k -kromatikus kritikus gráfból ($3 \leq k$) származik egy x_1 csúcsának X_1 -re történő felhasításával $\iff H_1$ kielégíti az előző tétel (I), (III) és (V) tulajdonságát és X_1 egy valódi csúcs részhalmaza. Tehát ha $H_1 \in \mathcal{G}_k$ ($3 \leq k$) ekkor a H_1 egy k -kromatikus kritikus gráf x_1 csúcsából az X_1 -re történő felhasításával származik.

29.2. definíció. A G k -kromatikus kritikus gráf ($3 \leq k$) egy x_1 csúcsát a G univerziális csúcsának nevezzük, ha bármely olyan H_1 gráf, amely a G x_1 csúcsának X_1 -be hasításával keletkezett eleme $\mathcal{G}_k$ -nak.

29.6. lemma. A G k -kromatikus kritikus gráf ($3 \leq k$) egy x_1 csúcsa a G univerziális csúcsa $\iff H_1$ egy olyan k -kromatikus kritikus gráf, amely a G x_1 csúcsából az X_1 -re ($|X_1| = d_G(x_1)$) történő felhasításával származik, kielégíti az előző 29.4 tétel (IV) feltételét.

29.5. tétel. a) Legyen G k -kromatikus kritikus gráf ($3 \leq k$) és legyen x egy csúcsa. Ha $d_G(x) \leq 2k - 3$, akkor x univerziális G -ben, kivéve esetleg a $k = 4$, $d_G(x) = 5$ esetet.

b) Legyen G^* egy $(k+1)$ -kromatikus kritikus gráf, amely egy G k -kromatikus kritikus gráfból ($3 \leq k$) jött létre úgy, hogy egy új y csúcsot a G minden csúcsával összeköttöttünk. Ha az x csúcs univerziális a G -ben, akkor univerziális a G^* -ban is.

c) Legyenek G_1, G_2 diszjunkt k -kromatikus kritikus gráfok ($3 \leq k$) és legyen G az a gráf, amelyet a G_1, G_2 -ből Hajós eredeti konstrukciójával kaptunk úgy, hogy a két gráf x_1, x_2 csúcsából lett azonosítva, amely a

G x csúcsa.

Ha az x_1 univerzális a G_1 -ben, az x_2 univerzális a G_2 -ben, akkor az x univerzális a G -ben.

29.2. következmény. Legyen $3 \leq k-1 \leq d$ egészek. Létezik olyan k -kromatikus kritikus G gráf, amelynek van d -fokú univerzális csúcsa.

29.7. állítás. [78] A G egy 4-kromatikus kritikus gráf, amely egy C_{2l+1} páratlan körből keletkezett egy v új csúcs felvételével, amelyet összeköttöttünk a kör összes csúcsával. Ekkor a v univerzális G -ben.

29.8. állítás. Legyen G' egy $(k+1)$ -kromatikus kritikus gráf, amely egy G k -kromatikus kritikus gráfból keletkezett egy y új csúcs felvételével, amelyet összeköttöttünk a G összes csúcsával. Ha a H gráfot a G' -ből úgy kaptuk, hogy az y -t felhasítottuk egy Y új pontthalmazra és ha az Y csúcsait pontosan két színnel kiszínezzük úgy, hogy használjuk is mindkét színt, akkor az Y ezen színezését kiterjeszthetjük a H egy k -színezésére

29.5. Kritikus hipergráfok

Legyen H egy k -kromatikus kritikus hipergráf ($k \geq 4$) és legyenek $e_1, \dots, e_n \in E(H)$ a H összes hiperélei ($n \geq 1$). Vegyünk mindegyik e_i hiperélhez egy-egy olyan G_i , k -kromatikus kritikus gráfot, amelyeknek van olyan x_i univerzális csúcsa, amelynek foka G_i -ben legyen legalább annyi, mint az e_i mérete, valamint G_i -k egymással és H -val diszjunkt csúcshalmazúak legyenek. Ilyenek léteznek. 29.2 A $H \setminus e_1 \setminus \dots \setminus e_n$, valamint a $G_1, \dots, G_n$ gráfokból felépíthetjük a G gráfot n -hasítással, vagyis minden $1 \leq i \leq n$, esetén a G_i -nek az x_i csúcsát törjük szét és hasítjuk az e_i hiperél csúcsaihoz. Mivel az x_i univerzális G_i -ben minden i -re, így 29.4 alapján a kapott G gráf k -kromatikus kritikus. Ezzel a módszerrel egy H k -kromatikus kritikus hipergráfból kapunk egy G k -kromatikus kritikus gráfot. Az ehhez felhasznált G_i k -kromatikus kritikus gráfok tetszőlegesek, így akár végtelen sok módon is kaphatunk nem izomorf gráfot H -ból. Ezt az r -típusú konstrukciót szigoríthatjuk oly módon, hogy egy H -ból csak véges sok különböző gráfot kapjunk.

Jelöljön minden $p \geq k-1$ egészhez G^p egy konkrét k -kromatikus kritikus gráfot, amelynek van egy x_p univerzális csúcsa, amelynek a foka G^p -ben p . Ilyen G^p létezik 29.2. Ha az e_i hiperélre $|e_i| \geq k-1$, akkor a G_i legyen egy a $G^{|e_i|}$ -vel izomorf gráf. Ha $3 \geq |e_i| \geq k-2$, akkor válasszuk a G_i -t a G^{k-1} -gyel izomorf gráfnak. Mindkét esetben az x_i szerepét az adott G_p -beli univerzális csúcs játssza. Továbbá kívánjuk meg még azt is, hogy az x_i felhasítása a $3 \geq |e_i| \geq k-2$ esetben olyan legyen, hogy az e_i csúcsai közül egyet kivéve, a többi a $V(G_i \setminus x_i)$ egy konkrét csúcsával legyen összekötve. Ezzel a szigorított r -típusú konstrukcióval kapjuk a következő állítást.

29.6. tétel. [6] [140][184] Legyen H egy k -kromatikus kritikus hipergráf ($k \geq 4$). Ha $k \geq 5$, akkor válasszunk ki egy-egy tetszőleges $a_i \in e_i$ csúcsot a H olyan hiperéleiből, amelyekre $3 \geq |e_i| \geq k-2$ teljesül. Ekkor létezik egy olyan k -kromatikus kritikus G gráf, amelyre

- (1) $V(H) \subseteq V(G)$;
 (2) $A \subseteq G(V(H))$ a H részgráfja, melynek csúcshalmaza $V(H)$ az élei pedig a H rendes (nem hiper) élei;
 (3) A $V(H)$ mindegyik a_i -től különböző x csúcsára igaz, hogy az x foka G -ben azonos a H -beli fokával.

Megfordítva a 29.4 tételből következik, hogy ha G k -kromatikus kritikus ($k \geq 4$), akkor az a H hipergráf amiből származtattuk a fenti r -típusú konstrukcióval az is k -kromatikus kritikus.

29.2. példa. Legyen k és p legalább 2 egészek. Defináljuk most a $H(V, E)$ hipergráfot! Legyen $|V| = (k-1)(p-1) + 1$, valamint az E álljon a V összes p elemű részhalmazából.

A definiált H hipergráf k -kromatikus kritikus.

A H minden csúcsának $\binom{(k-1)(p-1)}{p-1}$ a foka, míg a lényegi foka $k-1$. Ezeket a hipergráfokat teljeseznek hívhatjuk. Ha $p=2$, akkor éppen a k csúcsú teljes gráfokat kapjuk.

29.5.1. Kritikus gráfok és az összefüggőség

Már Dirac Gábor megállapította a k -kromatikus kritikus gráfok kétszeresen pont-összefüggőségét. Jelöljön H_1 egy G k -kromatikus kritikus ($k \geq 3$) gráf egy x csúcsának két részre - x_1, x_2 - történő hasításával kapott gráfot. Nyilván $\chi(H_1) = k-1$. Vegyünk egy H_2 , csúcshalmazában H_1 -gyel diszjunkt k -kromatikus kritikus gráfot. Hagyjuk el H_2 -ből az a_1, a_2 csúcsát és azonosítsuk rendre az a_1, a_2 -t a H_1 -ből kapott x_1, x_2 csúcsokkal. Az így H_1 és H_2 -ből keletkezett H k -kromatikus kritikus gráf k -kromatikus kritikus gráf 29.4, 29.5. H -nak van két olyan csúcsa, amelyeket elhagyva H szétesik. Megfordítva Dirac belátta, hogy ha egy k -kromatikus kritikus gráfnak van elvágó két csúcsa, akkor az a gráf származtatható a fenti konstrukcióval alkalmas G és H_2 segítségével. A konstrukció a Hajós konstrukció általánosítása. Dirac bizonyította azt is, hogy egy k -kromatikus kritikus gráf ($k \geq 3$) $(k-2)$ él-összefüggő. Ennél több nem igaz.

29.3. példa. Jelöljön H_1 egy G k -kromatikus kritikus gráf egy $(k-1)$ fokú x csúcsának legalább két részre történő hasításával kapott gráfot. Jelölje X az x utódainak halmazát, $|X| \geq 2$. Legyen H_2 egy k -kromatikus kritikus hipergráf, amelynek legfeljebb egy e hiperéle van, amelyre $|e| = |X|$. A diszjunkt H_1 és H_2 felhasználásával az X elemeket azonosítva rendre az e elemeivel, megkapjuk a H k -kromatikus kritikus gráfot 29.4, 29.5. A H gráf mindig tartalmaz $(k-1)$ nem is egy csúcsból kiinduló élt, amelyeket elhagyva a H nem marad összefüggő.

A pont-összefüggéshez hasonlóan itt is igaz az állítás bizonyos megfordítása.

29.7. tétel (Gallai Tibor és B. Toft). [84, 85, 86] [206] Legyen $H(V, E)$ egy olyan k -kromatikus kritikus gráf ($k \geq 3$), amelynek van egy $E' \subseteq E$ $(k-1)$ elemű elvágó élhalmaza, amely élek nem illeszkednek mindannyian egy $(k-1)$ fokú csúcshoz. Ekkor a H előállítható az előző példa konstrukciójával.

Bizonyítás: Dirac eredménye szerint az E' egy minimális szeparáló élhalmaz, tehát $H-E'$ éppen két komponensre esik szét, ezek a gráfok legyenek G_1 és G_2 . Továbbá E' mindegyik éle összeköt egy-egy

G_1 és G_2 -beli csúcsot. Jelölje V'_1 és V'_2 rendre a G_1 és G_2 csúcsainak azon részhalmazát, amelyek illeszkednek egy vagy több E' -beli élre. Mivel H -nak nincs elvágó csúcsa, valamint az E' összes eleme nem illeszkedik egyetlen csúcsra, így mind V'_1 , mind V'_2 legalább két elemű. Mivel a H k -kromatikus kritikus gráf, így a G_1 is és a G_2 is kiszínezhető $(k-1)$ színnel. Jelölje rendre c_1 és c_2 a G_1 és G_2 $(k-1)$ -színezését. Legyenek a $\mathbb{C}_1$ és $\mathbb{C}_2$ rendre a színosztályok.

Definiálunk egy $G^*(V^*, E^*)$ segédgráfot! Legyen $V^* = \mathbb{C}_1 \cup \mathbb{C}_2$. Az E^* -ban egyrészt a $\mathbb{C}_1$ minden színosztály párja és a $\mathbb{C}_2$ minden színosztály párja közötti élek legyenek benne, másrészt $C_i \in \mathbb{C}_1$ és $C_j \in \mathbb{C}_2$ között pontosan akkor menjen él, ha van olyan E' -beli él, amely a C_i egyik G_1 -beli és a C_j egyik G_2 -beli csúcsát köti össze. Az így definiált G^* gráfokra igaz, hogy $\chi(G^*) = \max\{k | K_k \subseteq G^*\}$.

Ha G^* $(k-1)$ -színezhető, akkor a H is $(k-1)$ -színezhető. Mivel a H k -kromatikus kritikus gráf, k -színezhető, így a G^* tartalmaz teljes k -ast. Mivel $|E'| = k - 1$ ez csak úgy lehet, hogy a V_1 éppen $(k-1)$ különböző színre van színezve a c_1 színezésben, ebből következően V_1 $(k-1)$ elemű, míg a V_2 minden eleme ugyanazt a színt kapta a c_2 színezésben.

Mivel a c_1 , c_2 rendre tetszőleges $(k-1)$ -színezései voltak G_1 és G_2 -nek, valamint a H k -kromatikus kritikus gráf, így látható, hogy ha a G_2 -höz hozzávesszük a V_2 -t, mint hiperélt, akkor egyrészt egy k -kromatikus kritikus hipergráfot kapunk, másrészt ha G_1 -hez felvesszünk egy új x csúcsot és összekötjük a V_1 mind a $(k-1)$ csúcsával, akkor egy k -kromatikus kritikus gráfot kapunk. Ezekre alkalmazva a konstrukciót vissza-kapjuk H -t. ■

29.5.2. Kritikus gráfok sok éllel

S. Hedetniemi konstruált olyan k -kromatikus kritikus gráfosztályt amelyben a gráfok elég sok élt tartalmaznak. Jelöljön G_1^* olyan k -kromatikus kritikus gráfot ($k \geq 3$), amely a G_1 $(k-1)$ -kromatikus kritikus gráfból úgy jött létre, hogy egy új y csúcsot összekötöttünk a G_1 minden csúcsával. Jelöljön továbbá H egy 2-kromatikus kritikus hipergráfot. Az ilyenek úgy néznek ki, hogy egyetlen hiperélük az összes csúcsból áll, más élük nincs. Teljesüljön még rá a $2 \leq |V(H)| \leq |V(G_1)|$ egyenlőtlenség is. Legyen G_2 egy $(k-2)$ -kromatikus kritikus gráf. A diszjunkt G_1^* , H és G_2 segítségével építsük fel a G gráfot! Kössük össze a H és G_2 összes csúcsát egy normál éllel egymással! Jelölje H_2 az így kapott hipergráfot! Töröljük H_2 -ből a H csúcsaiból álló egyetlen hiperélt, valamint hasítsuk a G_1^* y csúcsát a H csúcsaiba! Az így kapott gráf lesz G !

A H_2 k -kromatikus gráf, mert összeadódnak a kromatikus számok, ha két gráf csúcsait páronként összekötjük. Létezik $(k-1)$ -színezése ha bármelyik normál élt elhagyjuk, sőt az ilyen $(k-1)$ -színezésben a H csúcsai éppen 2 különböző színt kapnak, így a 29.4 tétel bizonyításából következik a k -kromatikus kritikuság.

29.8. tétel. [8] [195] [205][214] Legyen H egy k -kromatikus kritikus hipergráf ($k \geq 4$) és $e \in E(H)$ egy éle H -nak. Legyen G egy H -től diszjunkt k -kromatikus kritikus gráf, amelynek van egy $x \in V(G)$ csúcsa, amelynek a foka legalább $|e|$. A G -ből származtassunk egy G' gráfot az x csúcs e -be történő felhasználásával, tehát x helyébe az $x_1, x_2, \dots, x_{|e|}$ csúcshalmaz kerül úgy, hogy bármely két x_i és x_j H -beli szomszédsága diszjunkt. Definiáljuk most a H' hipergráfot! $V(H') = V(H) \cup V(G')$ és $E(H') = (E(H) - \{e\}) \cup E(G')$. Ekkor

(a) $\chi(H') \geq k$

(b) Ha H és G k -kromatikus kritikus, akkor H' k -kromatikus kritikus, ha a következő feltételek közül

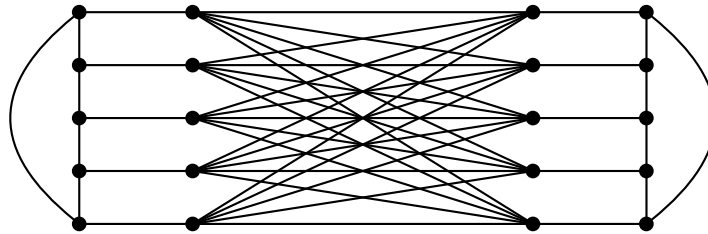
valamelyik teljesül:

(i) az x G -beli foka legfeljebb $2k-4$;

(ii) $|e| = 2$ és G' $(k-1)$ - színezhető;

(iii) a $G(V, E) = G_1 \nabla G_2$ melyben G_1 egy páratlan kör és $G_2 = K_{k-1}$, egy attól diszjunkt teljes gráf, valamint $x \in K_{k-1}$.

29.4. példa (M. Stiebitz, 1987). [205] [215] Legyenek X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 diszjunkt, $n \geq 3$ pontból álló halmazok. Kössük össze az X_i és X_{i+1} halmazokat $i = 1, 2, 3, 4$ -re és az X_5 és X_1 halmazokat minden lehetséges módon, páronként n^2 rendes éllel. Valamint legyenek $X_1 \cup X_3$, $X_3 \cup X_5$, $X_5 \cup X_2$, $X_2 \cup X_4$ és $X_4 \cup X_1$ hiperélek. Az így kapott hipergráfot H -val jelöljük. A H 4-kromatikus kritikus hipergráf. A H szerkezete emlékeztet a Petersen-gráfra, csak H -ban az 5 csúcs helyett $n - n$ pont áll, valamint az egyik körben a halmazok teljesen össze vannak kötve, míg a hiperélek valahogyan a másik kör szerint helyezkednek el.



30. A négyszínsejtés története

Vajon kinek jutott eszébe legelőször a kérdés? Talán már másoknak is feltűnt, de nem beszélt róla senkinek. Talán nem ismerte fel, hogy kérdése érdekes!? Azt hihette nagyon egyszerű a válasz.

Kicsit furcsa, hogy az iskolások nem kérdeznék meg ilyeneket a tanáraiktól? Az is lehet, hogy kérdeznék a fiatalok szép dolgokat, de "a tananyaggal haladni kell" és még az is megfélekedezik saját ötletéről aki felvetette.



20. ábra. Francis Guthrie, 1831–1899

De Morgan tanítványaként, Francis Guthrie Londonban egyetemen tanult matematikát, majd jogot és botanikát is. Öccsének, Fredericknek említette min töri a fejét, aki akkor már szintén De Morgantól tanult matematikát. Megkérte, kérdezze meg a nagy matematikust a térképek színezésének problémájáról. [83]

- Francis Guthrie 1852-ben kérdezte meg, vajon ki lehet-e színezni bármely térképet 4 színnel úgy, hogy határszakasszal szomszédos országok a térképen különböző színeket kapjanak?
- Francis Guthrie később Dél-Afrikában lett matematikus és botanikus. A Cape Town egyetemről ment nyugdíjba 1898-ban.
- A South African Philosophical Society tagja volt.
- Frederick Guthrie megkérdezte Augustus De Morgant fivére problémájáról.



21. ábra. A Jóreménység foka



22. ábra. Frederick Guthrie, 1833–1886

- De Morgan nem oldotta meg a feladatot, viszont megírta azt Dublinba Hamiltonnak. Megírta, hogy 4 szín szükséges, de nem tudott elképzelni olyan térképet, amelyet ne tudott volna kiszínezni 4 színnel. A diákja sejtése igaznak tűnt.
- 3 nap múlva megérkezett Hamilton válasza - nem volt gyorsposta, csak gyors volt a posta akkoriban!
Hamilton nem ígérte meg, hogy gyorsan foglalkozna a 4 szín sejtéssel!



23. ábra. Augustus De Morgan, 1806–1871

- De Morgan Indiában született, kora gyermekkorától egyik szemére vak volt.
- Egyetemi tanulmányai után kiváló oktatóvá vált, 22 évesen professzor lett. A London Mathematical Society megalakításában is fontos szerepet játszott.
- A logika mellett a trigonometria, az algebra megalapozásában kiemelkedő szerepe volt.
- A Hold egy kráterét róla nevezték el.
- De Morgan tovább népszerűsítette Guthrie problémáját.
- Az amerikai Charles Sanders Peirce is megpróbálta bizonyítani a sejtést 1860-ban, de később is foglalkoztatta a feladat.
- 1878-ban De Morgan a London Mathematical Society tagjainak figyelmébe ajánlotta az érdekes sejtést.
- Egy évvel később Arthur Cayley a Royal Geographical Society részére írt cikket, On the colouring of maps címmel, melyben elmagyarázza miért is nehéz megválaszolni a 4-színezhetőséget.
- Sir William Rowan Hamilton ír fizikus, matematikus, csillagász.



24. ábra. Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865

- A newtoni mechanikát Hamilton mechanikának is hívják az egzakt matematikai megalapozottsága következtében. Az elektromágnesesség, a kvantummechanika és az optika területén elméleti munkássága nagy jelentőségű.
- A kvaternió fogalmát ő vezette be, általánosítva a komplex számfogalmat.
- Az analízis mellett diszkrét matematikával is foglalkozott, szabályos testek élhálózátát is vizsgálta, a gráfelméletben a Hamilton-kör és -út viseli a nevét.
- Bár Cayley Richmondban született, szüleivel együtt az első 7 évét Szentpétervárott töltötte.
- Cayley gyakorló jogász volt Londonban 1849-től 1863-ig. Szabadidejében több mint 300 matematikai cikket publikált.
- 1852-ben a Royal Society tagjává választották, majd 1863-tól matematika professzor lett Cambridgeben.
- Cayley alapvetően járult hozzá Cambridge hírnevéhez!
- A csoportelmélet, a görbék és felületek algebrai elmélete, a lineáris algebra, mátrixelmélet az elliptikus függvények területén munkássága alapvető.
- A geometria számos területén alkotott: analitikus geometria, projektív geometria, nemeuklideszi geometria.
- A kombinatorika és a gráfelmélet is érdekelte.



25. ábra. Arthur Cayley, 1821–1895



26. ábra. Alfred Bray Kempe, 1849–1922

- Mechanikáról, csillagásatról is írt, összesen mintegy 1000 cikke jelent meg.
- Alfred Bray Kempe 1879-ben a Nature-ben kihirdette, hogy megoldotta a négyszínsejtést. [126]

- Cayley tanítványa volt, aki bátorította, hogy közölje tételét az American Journal of Mathematics szaklapban.
- Kempe törvénytörvényes ügyvéd lett, pedig mind a matematika, mind a zene elvárásolta. Mégis később a London Mathematical Society elnöke volt az 1872–1874-es időszakban.
- Bár bizonyítása nem volt tökéletes, mégis ideái egy évszázada élnek. Az "elkerülhetetlenség", "redukálhatóság" és a Kempe-lánc megkerülhetetlen fogalmak. [115]
- Tekintsünk egy térképet, amelyben az O ország kivételével a többi jól ki van színezve négy színnel. Ha az O határszakasszal nem szomszédos mind a négy színű országgal, akkor O-t is ki lehet jól színezni.
- Tegyük fel, hogy O szomszédos a P, F, Z, S országokkal (ebben a körjárási sorrendben), amelyek rendre piros, fehér, zöld és sárga színűek.
- Ha nincs egy alternáló piros-zöld lánc csatlakozó országokból a P-től a Z-ig, akkor minden P-ből induló alternáló piros-zöld láncban cseréljük a piros színt zöldre és a zöldet pirosra. Mivel nem lehet egy ilyen láncsal elérni a Z országot, így elérjük, hogy O-nak nem lesz piros szomszédja, vagyis az O pirossal kiszínezhető.
- Ha létezik alternáló piros-zöld lánc csatlakozó országokból a P-től a Z-ig, akkor nem lehet az F-től az S-ig fehér-sárga alternáló lánc, mivel nem metszhetik egymást a piros-zöld láncsal. De ekkor a fehér-sárga szín betölti a piros-zöld előbbi szerepét.
- Kempe "megoldását" az American Journal of Mathematics szerkesztője, William Edward Story is javította, kiegészítette. A főszerkesztő Sylvester volt ebben az időben.
- Charles Sanders Peirce amerikai logikus, matematikus is közzétette észrevételeit, hogyan lehetne Kempe bizonyítását precízebbé tenni.
- James Joseph Sylvester Londonban született, ő is De Morgan tanítványa volt.
- A Johns Hopkins University, majd Oxford professzora. Az American Journal of Mathematics megalkotója.
- A Sylvester-Gallai tétel állítja, hogy a síkon N pont vagy egy egyenesre esik, vagy létezik olyan két pont, amelyek egyenesén más megadott pont nincs.
- K egymást követő, K-nál nagyobb egész szorzata osztható egy K-nál nagyobb prímmel - ez a tétel is Sylvester nevéhez fűződik.
- 1880-ban a skót fizikus P. G. Tait írt [209, 210] két cikket a négyszíntétel bizonyításáról, amelyekben hibákat javított és világosabban érvelt [115].
- Hamilton tanácsai alapján a kvaterniókkal is foglalkozott, tankönyvet írt az új fogalomról.



27. ábra. Charles Sanders Peirce, 1839–1914

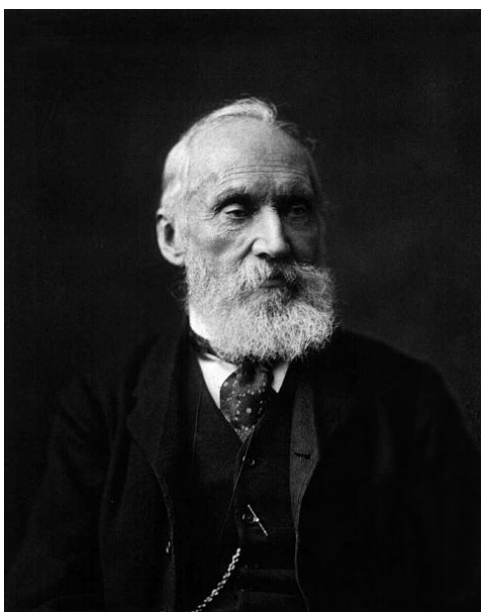


28. ábra. James Joseph Sylvester, 1814–1897

- Természetfilozófus, a termodinamika, kinetikus gázelmélet tudósa is.
- Lord Kelvinnel nemcsak fizikai, topológia munkásság is összefűzi. A csomók elméletét ők kezdték el kidolgozni.



29. ábra. Peter Guthrie Tait, 1831–1901



30. ábra. William Thompson (Lord Kelvin), 1824–1907

- Julius Petersen az 1898-ban megjelent híres dolgozatában [175] bemutatott egy ellenpéldát a Tait

által használt állításra, miszerint a 3-reguláris gráfok 1-faktorizálhatók.

- A Petersen gráf a legkisebb 3-reguláris, híd nélküli gráf amely nem 1-faktorizálható.
- Bár mindenki úgy hiszi a gráfot először Petersen mutatta be, Kempe 1886-os munkájában 12 évvel korábban már megjelent.
- Nem síkgráf! Mindkét minimális nem síkgráfot minorként tartalmazza! Nincs Hamilton köre!



31. ábra. Julius Petersen, 1839–1910

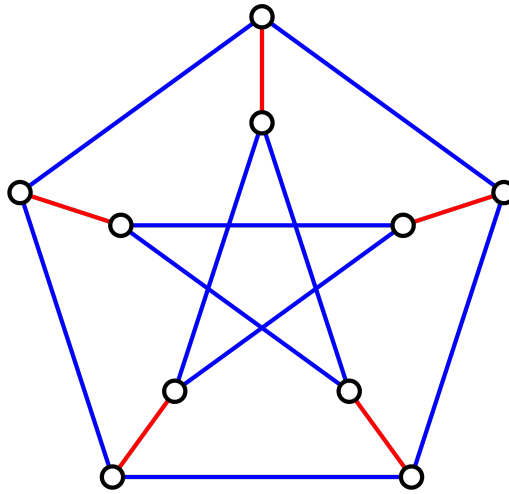
30.1. sejtés (Tait, 1884). *Minden 3-összefüggő, síkbeli, 3-reguláris gráf tartalmaz Hamilton-kört.*

Tutte megcáfolta a 30.1. sejtést, ellenpéldát mutatott.

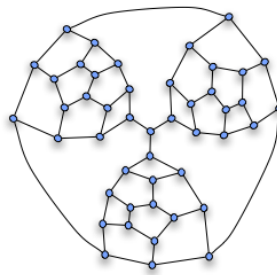
30.2. sejtés. *Minden 3-összefüggő, 3-reguláris páros gráf tartalmaz Hamilton-kört.*

Joseph D. Horton és Mark N. Ellington ellenpéldákkal cáfolta a 30.2. sejtést.

- Tutte 1935-ben kezdte meg természettudományos, főleg kémiai tanulmányait, a Trinity College, Cambridge egyetemen.

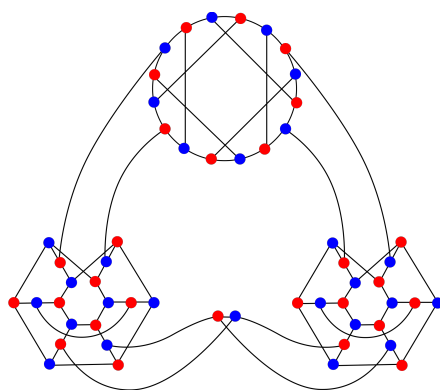


32. ábra. Petersen-gráf nem bontható 3 teljes párosítás diszjunkt uniójára

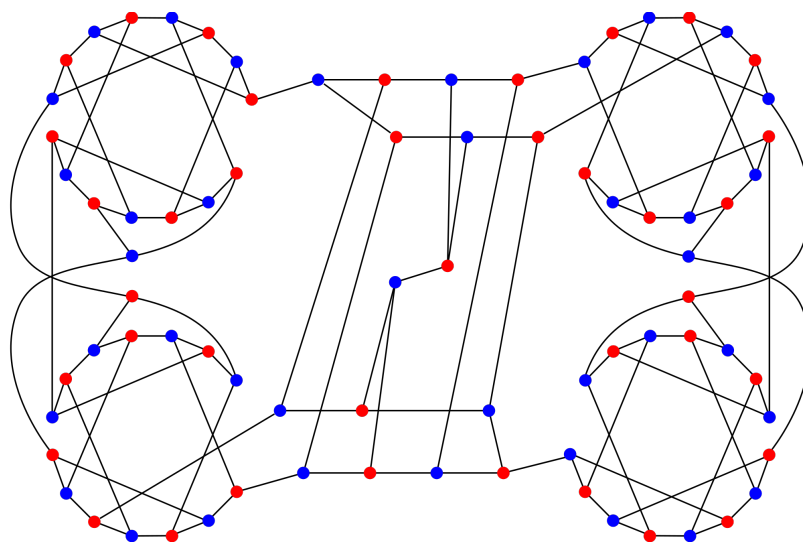


33. ábra. Bill Tutte példája 1946-ból, 46 csúcs, 69 él, 25 ország

- A matematika miatt csatlakozott a Trinity Mathematical Society-hoz. 1939-ben két tanulmányt is közölt kémiáról, majd inkább a matematika mellett maradt.
- A második világháború alatt titkos rejtjelezések megfejtésében is segített Tutte. Ebben a fontos és nagy munkában matematikai zsenialitására volt szükség.
- A Whitney által bevezetett **matroid** fogalmat a gráfelméletben számos problémában alkalmazta.
- Donald Coxeter meghívta a torontói egyetemre. 1962-ben a University Waterloo tanára lett. Az 5 éves egyetemen kombinatorika és optimalizálás fakultást alapított és vezetett.
- Gráfokról és hipergráfokról írt monográfiája alapmű.



34. ábra. 54 csúcsú, 2-kromatikus

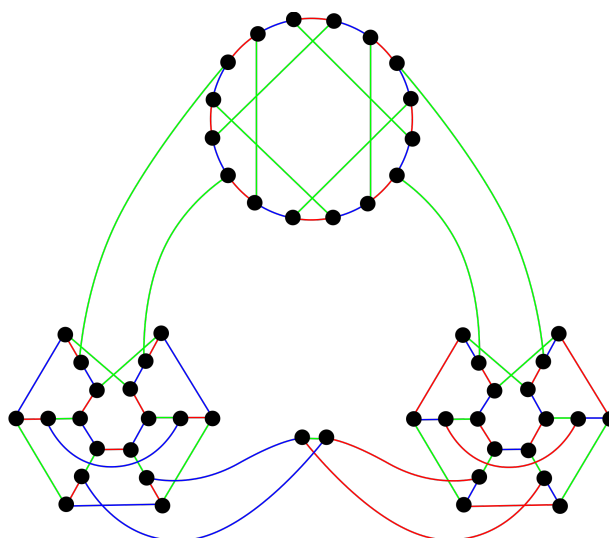


35. ábra. 78 csúcsú, 2-kromatikus

- A gráfok színezésével kapcsolatban a teljes párosítások létezésének karakterizációja szerepel az egyik, míg a kromatikus polinom fogalma egy másikban.
- Tutte egyik híres tétele:
Minden 4-összefüggő síkgráf tartalmaz Hamilton-kört.

Bill Tutte történetének misztikus fejezete, hogy 1935-ben, amikor társaival a Trinity College hallgatója volt Cambridge-ben, R. Leonard Brooks [41], Arthur Harold Stone és Cedric Smith társaságában kitalálták a Blanche Descartes álnevet.

Később mintegy 30 írást publikáltak ezen a néven, matematikai cikkek mellett verseket, humoros írásokat.



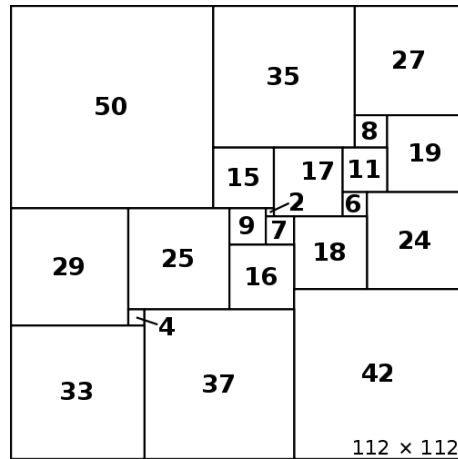
36. ábra. 54 csúcsú, 3-kromatikus



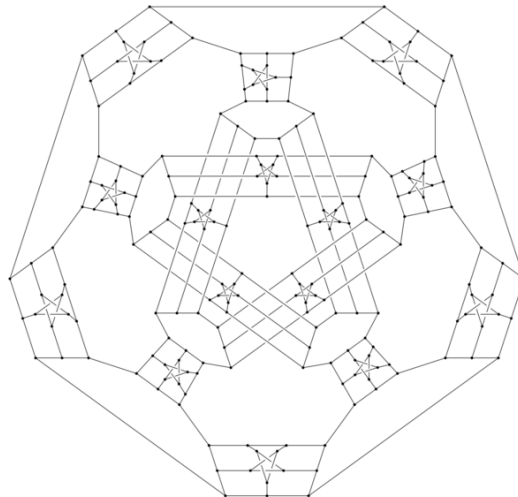
37. ábra. William Thomas Tutte, 1917–2002

Együtt oldották meg a híres rejtvényt: egy négyzetet fel tudtak bontani több kicsi, különböző méretű négyzetre. Íme egy még bonyolultabb példa[88]! Tutte ezen az álnéven írt színezési eredményeiről is, sőt a 210 csúcsú *snark* [90] létezését is így publikálta.

30.1. tétel (Grinberg tétele). *Legyen G egy véges síkgráf, amelyben C egy Hamilton-kör. Ha f_k és g_k*



38. ábra. Mindegyik kis négyzet különböző méretű!



39. ábra. William (Blanche Descartes) Tutte, 1948

jelöli rendre a C -n belüli és kívüli k oldalú országok számát. Ekkor fennáll a

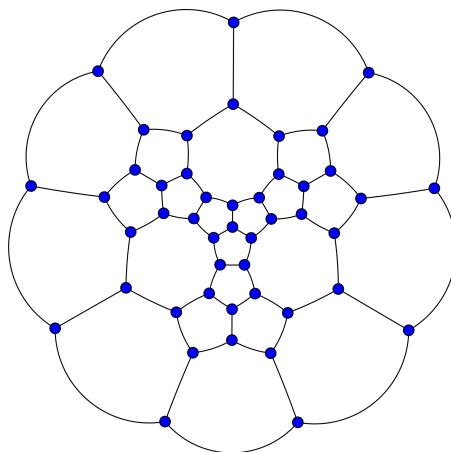
$$\sum_{k \geq 3} (k-2)(f_k - g_k) = 0$$

formula.

30.1. definíció. Egy gráf ciklikusan k -élösszefüggő, ha legalább k élt kell ahhoz törölni a gráfból, hogy két olyan komponensre essen szét, amelyek mindegyikében van kör.



40. ábra. Emanuel Grinberg, 1911-1982, lett matematikus



41. ábra. Emanuel Grinberg tételével megállapítható, hogy nincs Hamilton-köre

A fenti fogalmat a négyszínsejtés hívta elő. A Tutte-gráf ciklikusan 3-élösszefüggő. Grinberg a tételét felhasználva talált Hamilton-kört nem tartalmazó 3-reguláris, poliéder élhálózata típusú (3-csúcsösszefüggő, sík) gráfot, amelynek a ciklikus élösszefüggősége 4.

Az előző ábra pedig egy ciklikusan 5-összefüggő gráf. Vegyük észre, hogy minden korlátos országának 5 vagy 8 oldala van, míg a külső, nem korlátos óceánnak 9 él a határa. Ha lenne Hamilton-köre, akkor bármely ország kívül vagy belül 5 vagy 8 oldalú, így a formulában minden tag osztható 3-mal, kivéve a külső országot. Így az egyenlőség nem teljesülhet.

30.3. sejtés (Barnette sejtése). Minden 3-reguláris, páros poliéder gráf (konvex poliéder élhálózata) tartalmaz Hamilton-kört.

30.2. tétel (Steinitz tétel). Egy 3 dimenziós konvex poliéder csúcsai és élei által meghatározott gráfok pontosan a 3-csúcsösszefüggő síkgráfok. Tehát minden konvex poliéder csúcs és él gráfja 3-csúcsösszefüggő síkgráf, valamint minden 3-csúcsösszefüggő síkgráf reprezentálható, mint egy konvex poliéder élhálózata.

- Barnette sejtése megoldatlan.
- A sejtés Tait hamis sejtése és Tutte ide vonatkozó hamis sejtésének egy kombinációja.
- Másképp fogalmazva Barnette sejtése azt mondja, ha egy gráf cáfolja Tait sejtését, akkor az nem lehet páros gráf.
- 2000-ben egy kapcsolódó sejtés állítja:
Minden 3-reguláris, poliéder gráf, amelynek minden országa 6 vagy kevesebb oldalú tartalmaz Hamilton-kört.
- Nincs 178-nál kevesebb csúcsú ellenpélda az előző sejtésre.

30.4. sejtés (Michael Plummer kérdése). Mi a legnagyobb ciklikus élösszefüggőségi száma egy 5-összefüggő síkgráfnak? (A válasz 10, 11, 12 vagy 13.)

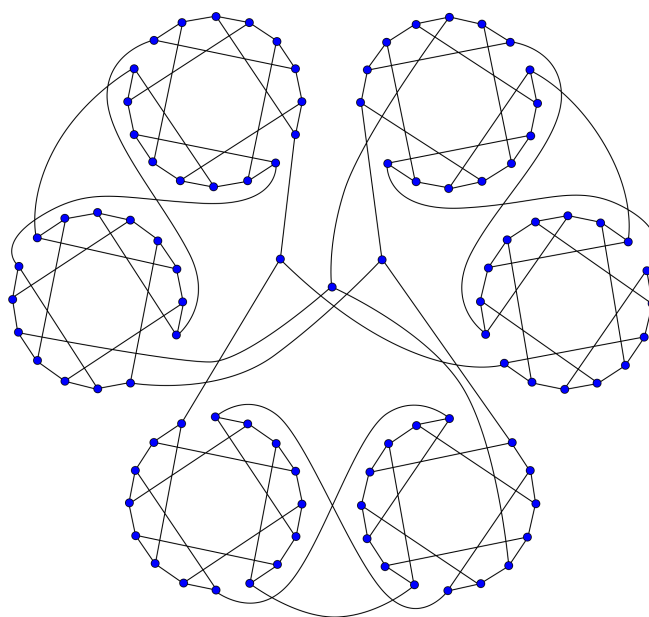
Heawood egész életében - 93 évet élt - a négyszíntétellel foglalkozott. 1890-ben a 11 éve létező Kempe-féle bizonyításról kiderítette, hogy nem lehet helyes. [81] Heawood a síkon kívül más felületeken is hasonló térképszínezéseket vizsgált. Ha S egy felület, jelölje $e(S)$ az Euler-karakterisztikát. 1890-ben Heawood bebizonyította (a gömbfelület esetét kivéve), hogy

$$H(S) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24e(S)}}{2} \right\rfloor$$

felső korlátja a szükséges színek számának.

$H(S)$ a Heawood-szám, $e(S)=2$ esetén $H(S)=4$.

- 3-reguláris
- a legrövidebb kör 6 hosszú
- a legkevesebb csúcsú ilyen: "cage"
- Petersen gráf - (3,5)-cage
- Heawood gráf - (3,6)-cage
- Tutte-Coxeter gráf - (3,8)-cage
- Balaban, Harries, Wong gráfok - (3,10)-cage

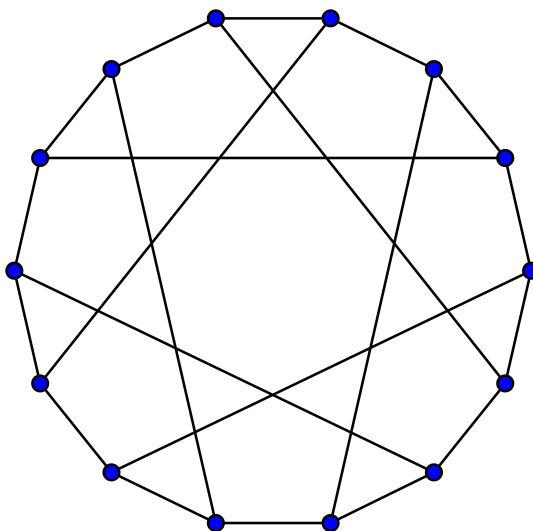


42. ábra. Horton legelső cáfolata Tutte sejtésére

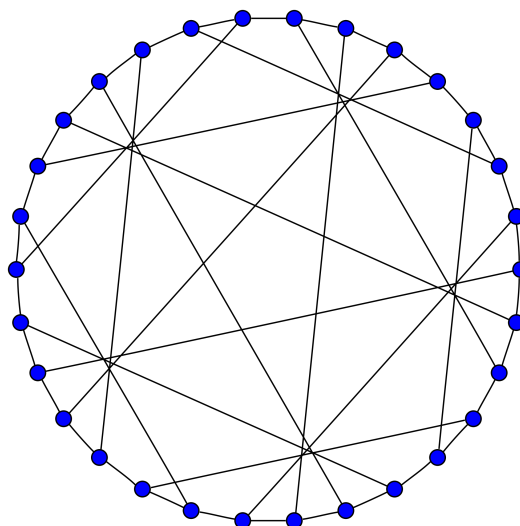


43. ábra. Percy John Heawood, 1861–1955

- Balaban - $(3,11)$ -cage
- Hoffman - Singleton gráf - $(7,5)$ -cage

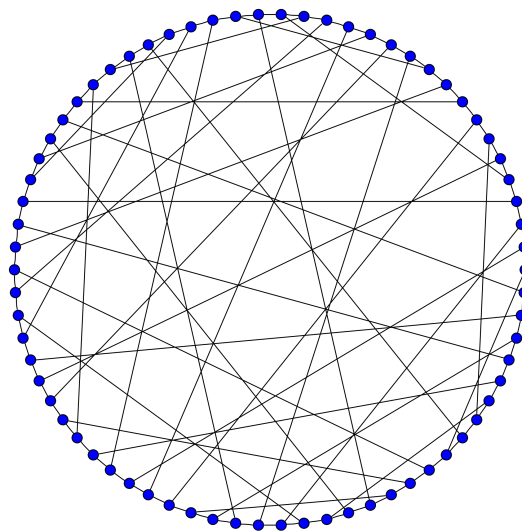


44. ábra. A Heawood-gráf, 14 csúcs, 21 él, derékbősség 6

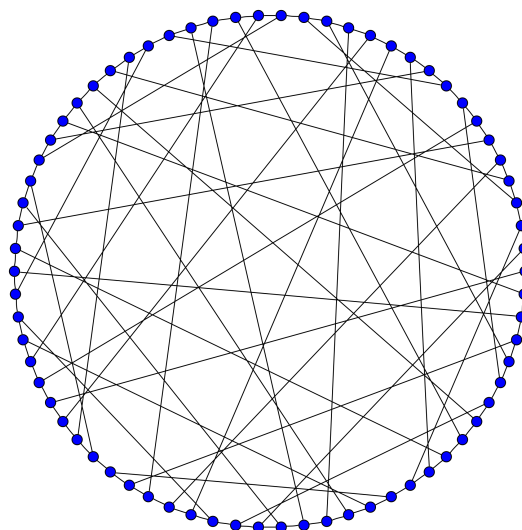


45. ábra. Tutte-Coxeter gráf, 30 csúcs, 45 él, derékbősség 8

- A Heawood gráfot le lehet rajzolni a síkra úgy, hogy minden él egy egész hosszúságú szakasz legyen.
- A Heawood gráf beágyazható a tórusz felületébe úgy, hogy az élek nem metszik egymást.
- Éppen egy ilyen beágyazást jelenít meg a Szilassi poliéder. Nem konvex, topológiailag tórusz, 7 hatszögű arca van. Mindegyik arc éppen egy oldalával szomszédos a további 6 arccal.



46. ábra. Balaban gráf, 70 csúcs, 105 él, derékbősség 10

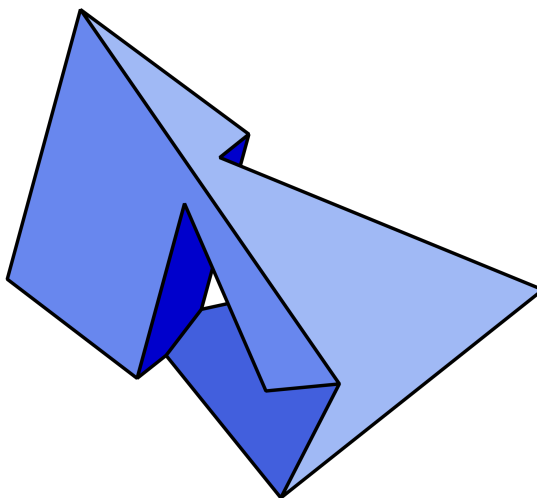


47. ábra. Harries-Wong gráf, 70 csúcs, 105 él, derékbősség 10

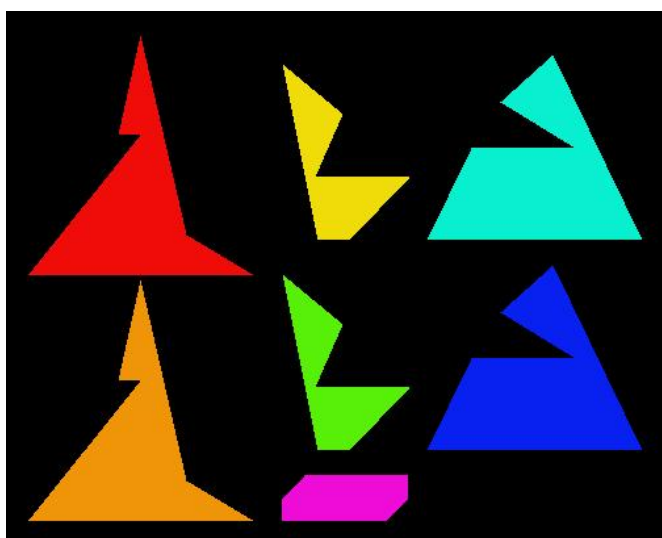
- A tóruszon 1 "lyuk" van. Ha egy h lyukú test felületére a fenti tulajdonságú beágyazás sikerül f arccal, akkor fennáll a

$$h = \frac{(f-4)(f-3)}{12}$$

összefüggés.



48. ábra. Szilassi Lajos poliédere



49. ábra. A Szilassi poliéder színes lapjai

Ha egy poliéder 0 lyukú, vagyis topológiailag a gömbbel ekvivalens, akkor a fenti formulában a h zérus. Tehát $f = 4$, vagyis 4 lapja lehet egy megfelelő testnek. Ez a tetraéder. A Szilassi poliéder a $h = 1$ esetet mutatja, $f = 7$. A $h = 2$ esetben az f nem egész szám! A következő - elvileg lehetséges - poliéderre $h = 6$, és $f = 12$. Még nem konstruálták meg.



50. ábra. Jacob Steiner, 1796-1863

Az 1949-ben Császár Ákos által felfedezett toroidális poliéder a Szilassi poliéder duálisa. Tehát 7 csúcsa van, minden csúcson 6 szomszédja van, vagyis a hálóját a 7 pontú teljes gráf: K_7 . Tehát a K_7 beágyazható a tórusz felületére.

A Császár poliéder élhálózata alkalmas bizonyos Steiner-féle háromszögrendszer megtalálására.

Egy alaphalmaz bizonyos hármasait kell úgy kiválasztani, hogy bármely kettes pontosan egy hármasban forduljon elő. Ez egy speciális Steiner-rendszer.

Kirkman 1847-ben az iskolás lányok hármas sorokban történő sétáltatásának problémájával foglalkozott bizonyos feltételek mellett. Heinrich Heesch német matematikus a világháborús évek alatt otthon dolgozott matematikai kérdéseken. Úttörő szerepe volt abban, hogy a négyszínezhetőséget számítógéppel kezdték vizsgálni.

Ő volt aki a redukálhatóság fogalmával szisztematikusan élt. Algoritmust dolgozott ki és önmaga implementálta azt. Ő beszélt először az konfigurációk elkerülhetetlen halmazáról. Karl Dürre középiskolás tanár segítségét is igénybe vette

Akkor, 1964-ben Dürre az Algol 60 nyelven írt óriási terjedelmű programot. A gráfok szomszédsági mátrixát lyukkártyákon vitték be a gépbe.

- Dürre programja megmutatta, hogy a "Birkhoff-diamond" valóban redukálható. 1965-ben egy 9 méretű gyűrűről a program mutatta meg, hogy redukálható, korábban ez még nem volt ismert.



51. ábra. Heinrich Heesch, 1906-1995

- Dürre disszertációjában elemezte a programjának szerepét, lehetőségeit, a kapott eredményeit.
- Mivel az Egyesült Államokban a komputerek egy kicsit fejlettebbek voltak, Heesch - Wolfgang Haken segítségével - eljutott New York-ba, Brookhavenbe. Shimamoto 1967-ben meghívta, őt is érdekelte a híres probléma.
- A CDC 6600 gépen kapott lehetőséget, ezen már a Fortran programozási nyelven írt program futott.
- Heawood, majd Oswald Veblen a térképszínezést matematikai eszközökkel próbálták vizsgálni. Elemi számelmélettel, lineáris egyenletekkel.
- Veblen fiatal kollégája volt George David Birkhoff, aki Kempe nyomán kívánt haladni, szép ideákkal jutni előbbre.
- Birkhoff nagy matematikus volt, számos területen bizonyított híres tételeket. A Poincaré-Birkhoff fixpont tételt, ergodelméleti tételt,
- Birkhoff munkássága nyomán Franklin 1922-ben belátta, hogy a 4-szín-tétel igaz, ha a tartományok száma nem több 25-nél.
- Heesch hozzájárulása a végső bizonyításhoz a "reducibility" és a "discharging" fogalmak voltak. Az utóbbi fogalom kellett ahhoz, hogy a bizonyítási kísérletek sikerrel végződjenek.



52. ábra. George David Birkhoff, 1884-1944

- Appel és Haken 1976-ban, amikor kihirdették a 4-szín-tételt megerősítették Heesch érdemeit.[15, 16]
- A komputeres ellenőrzés elkerülhetetlen volt 1976-ban, mivel pl. 1476 gráfot kellett megvizsgálni!
- Appel és Haken mellett dolgozott E. R. Swart. 1957-ben a Pretoriai egyetemen végzett, majd a Ph.D. fokozatot a Witwatersrand egyetemen kapta meg D. S. Henderson irányítása alatt 1977-ben.
- A bizonyítás komoly matematikai, filozófiai vitát generált. Vajon mennyire tekinthető egy bizonyítás korrektnek, ha vannak benne olyan részek, amelyeket számítógépek ellenőriztek? Szokásos volt azt gondolni, hogy minden igazi matematikai bizonyításnak szépnek, rövidnek, frappánsnak kell lennie. Azonban ezek a jelzők sem egzakt fogalmak. Több kutató megpróbált "igazi" bizonyítást adni.
- Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour és Robin Thomas az elmúlt években megkísérelte reprodukálni az 1976-os bizonyítást átgondolással. Nem sikerülhetett, így saját bizonyítást terveztek meg, amely a korábbi alapgondolatokat mind felhasználja.[212]
- Minimális ellenpéldát próbáltak keresni már régóta. Megvizsgáltak 633 konfigurációt, amelyekről kiderült, hogy redukálhatók. Ilyenek a minimális ellenpéldában tehát nem lehetnek.



53. ábra. Wolfgang Haken, 1928 -



54. ábra. Kenneth Appel, 1932 -



55. ábra. Robin Thomas



56. ábra. Daniel P. Sanders



57. ábra. Niel G. Robertson

- Egy algoritmust használtak, amely ha egy redukálható konfiguráció egy magas összefüggőségű G síkgráfban megjelenik, akkor könnyen megad egy kisebb G' síkgráfot, melynek bármely 4-színezéséből könnyen kapható a G egy 4-színezése. [188]
- Birkhoff 1913-ban megmutatta, hogy minden minimális ellenpélda a 4-színezhetőségre egy belülről 6-összefüggő, háromszögezett gráf.
(Az "internally 6-connected" jelentése: nincs olyan C köre, amelyben több, mint 5 él megy.)
- Bebizonyították, hogy minden "belülről 6-összefüggő" háromszögezett síkgráfban felbukkan valamelyik konfiguráció a 633-ból.
- Ezt hívják az elkerülhetlenségi bizonyításnak.
- Sikerült a "discharging módszer" ügyesebben alkalmazni, Appel és Haken 487 szabályt alkalmazott, míg a négy kutató 32-re csökkentette ezek számát.
- Míg az eredeti bizonyítás negyedrendű algoritmust alkalmazott, a javított négyzetes. Bár számítógépet ők is használtak, de átlátható lett a bizonyítás szerkezete.
- Formális tételbizonyító programmal később ellenőrizték [235]



58. ábra. Paul Seymour

31. Szivárvány színezés és egyéb változatok

31.1. tétel (van der Waerden tétele, 1927). Minden pozitív k és r egészekhez létezik olyan legkisebb $w(k, r)$ pozitív egész, melyre igaz, hogy akárhogyan színezzük is ki r színnel az $[1, w(k, r)]$ intervallum egészeit, találunk azonos színű, k hosszú számtani sorozatot.

$$\begin{aligned} w(2, r) &= r + 1 \\ w(3, 2) &= 9; w(3, 3) = 27; w(3, 4) = 76 \\ w(4, 2) &= 35 \\ w(5, 2) &= 178 \end{aligned}$$

Miért nem ismert a többi érték?

$$w(3, 5) = ? \quad w(3, 5) \leq 100?$$

Ha számítógéppel ellenőrizni akarjuk vajon az $[1, 100]$ számok mindegyik 5-színezése tartalmaz-e egy-színű 3 tagú számtani sorozatot, akkor $5^{100} \approx 8 \times 10^{69}$ színezést kell megvizsgálnunk.

Esetleg egy jó elképzelés segíthet!

Általánosított van der Waerden számok:

$w(k_1, k_2, \dots, k_r; r)$ hasonlóan definiálhatók.

Néhány ismert értéket megmutat a táblázat:

r	k_1	k_2	k_3	k_4	w
3	3	3	3	-	27
3	4	3	2	-	21
3	4	3	3	-	51
3	4	4	2	-	40
3	4	4	3	-	84
3	5	3	2	-	32
3	5	3	3	-	77
3	5	4	2	-	71
3	6	3	2	-	40
4	3	3	2	2	17
4	3	3	3	2	40
4	3	3	3	3	76
4	4	3	2	2	25
4	4	3	3	2	60
4	4	4	2	2	53
4	5	3	2	2	43

31.1. Schur tétele

31.2. tétel (Issai Schur, 1916). Bármely $r \geq 1$ -re létezik olyan $s = s(r)$ legkisebb pozitív egész, melyre az $[1, s]$ tetszőleges r -színezése esetén létezik egyszínű megoldása, az $x + y = z$ egyenletnek.

Néhány érték:

$$s(1) = 2; s(2) = 5; s(3) = 14; s(4) = 45; s(5) = ?$$

”Rengeteg megoldatlan probléma van és további érdekes, új kérdéseket sokkal könnyebb felvetni, mint a meglévőket megoldani.” F. Harary

31.2. Richard Rado, további általánosítások

31.1. definíció. Az $r \geq 1$ egészre egy ϵ lineáris egyenletet r -regulárisnak nevezünk, ha létezik $n = n(\epsilon; r)$, melyre az $[1, n]$ minden r -színezése esetén létezik ϵ -nak monokromatikus megoldása. Regulárisnak, ha minden $r \geq 1$ esetén r -reguláris.

Schur tétele: Az $x + y = z$ egyenlet reguláris.

31.3. tétel. (Rado egy egyenletre vonatkozó tétele.) Legyen az ϵ lineáris egyenlet alakja $\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0$,

ahol $c_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ minden $0 \leq i \leq n$ esetén. Ekkor ϵ pontosan akkor reguláris, ha a c_i együtthatók valamely nemüres részhalmazában az elemek összege 0.

Korlátok, összefüggések:

$$w(3, r) \leq \left(\frac{r}{4}\right)^{3r}$$

$$s(r) \leq R_r(3) - 1$$

32. Szivárvány színű számtani sorozatok

32.1. tétel (Alekseev, Savchev, 1987). [164] Ha az $[1, 3n]$ számokat úgy színezzük ki három színnel, hogy mindegyik színosztály ugyanakkora, akkor az $x + y = z$ egyenletnek létezik olyan megoldása, hogy az x , y és z páronként eltérő színű.

Az ilyen megoldást hívják szivárvány megoldásnak. Erdős és Szekeres kérdezte, vajon mennyire gyengíthető a színosztályok méretére vonatkozó feltétel.

32.2. tétel (Schönheim, 1990). Az $[1, n]$ bármely 3-színezésére, ha mindegyik színosztály nagyobb mint $\frac{n}{4}$, akkor az $x + y = z$ egyenlet rendelkezik szivárvány megoldással. Az $\frac{n}{4}$ érték nem javítható.

32.1. sejtés (Radoičić). Az $[1, 3n]$ számok minden egyenletes 3-színezésére létezik szivárvány $AP(3)$, vagyis az $x + y = 2z$ egyenletnek olyan megoldása, amelyben az x , y és z különböző színű.

32.2. sejtés (Jungić, Licht, Mahdian, Nešetřil, Radoičić, 2003). [120] Minden $n \geq 3$ egészre az $[1, n]$ minden 3-színezése esetén, ha mindegyik színosztály nagyobb mint $r(n)$, ahol

$$r(n) := \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor & \text{if } n \not\equiv 2 \pmod{6} \\ \frac{n+4}{6} & \text{if } n \equiv 2 \pmod{6} \end{cases}$$

található szivárvány $AP(3)$ részsorozat.

32.3. tétel. Az $\mathbb{N}$ természetes számok bármely 3-színezésére, ha a színosztályok felső sűrűsége nagyobb, mint $\frac{1}{6}$ található tarka $AP(3)$.

32.4. tétel. Van az $\mathbb{N}$ halmaznak olyan szírvány $AP(3)$ -mentes 3-színezése, hogy minden n -ig a legkisebb színosztály mérete $\left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor$.

Bizonyítás: Tekintsük az $\mathbb{N}$ következő színezését:

$$c(i) := \begin{cases} \text{piros} & \text{if } i \equiv 1 \pmod{6} \\ \text{fehér} & \text{if } i \equiv 4 \pmod{6} \\ \text{zöld} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A fehér színosztály $\left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor$ elemű. ■

A sorozat így kezdődik: PZZFZZPZZFZZPZZFZZ...

A színezés módszere nem függ a vizsgált prefix hosszától.

Periódikus színezés.

32.5. tétel. [143] Minden $n \geq 3$ -ra létezik szírvány-mentes 3-színezése $[1, n]$ -nek, amelyben a legkisebb színosztály elemszáma éppen $r(n)$.

Bizonyítás: Legyen a színezés:

$$c(i) := \begin{cases} \text{piros} & \text{if } i \equiv 1 \pmod{6} \\ \text{fehér} & \text{if } i \equiv 4 \pmod{6} \\ \text{zöld} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Amely így kezdődik: PZZFZZ|PZZFZZ|PZZFZZ

A színezés periódikus.

Ha $n \not\equiv 2 \pmod{6}$, akkor az előző általános színezés jó. Az $n = 6k + 2$ esetben legyen c a következő:

$$c(i) := \begin{cases} \text{piros} & \text{ha } i \leq 2k + 1 \text{ és } i \text{ páratlan,} \\ \text{fehér} & \text{ha } i \geq 4k + 2 \text{ és } i \text{ páros,} \\ \text{zöld} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A legkisebb színosztály mérete $k + 1 = \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor$. ■

PZPZPZZZZFZFZF

PZPZPZPZZZZZZFZFZFZF

A P és az F egy tarka $AP(3)$ -ban csak a két szélén lehetne a hosszú középső Z blokk miatt.

Másrészt bármely P és F páratlan távolságra van, tehát nincs közöttük félúton egy Z!

Mit mondhatunk akkor, ha az $[1, n]$ számokat $k \geq 5$ színnel, szivárvány $AP(k)$ nélkül szeretnénk kiszínezni?

Az $n = 2mk$ alakú hosszakra létezik egyenlő méretű színosztályokkal is szivárvány $AP(k)$ nélküli színezés.

Jelölje $S_1, \dots, S_k$ az n felosztását k egymást követő, egyenlő hosszú részre. Legyen $t = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

$$c(i) := \begin{cases} j & \text{ha } i \in S_j \text{ és } j \neq t, j \neq t+2 \\ t & \text{ha } i \in S_t \cup S_{t+2} \text{ és } i \text{ páros,} \\ t+2 & \text{ha } i \in S_t \cup S_{t+2} \text{ és } i \text{ páratlan.} \end{cases}$$

11|42|33|42|55

$k = 5, m = 1$

11111111|42424242|33333333|42424242|55555555

$k = 5, m = 4$

11111111|22222222|53535353|44444444|53535353|66666666

$k = 6, m = 4$

A t és $t + 2$ színű elemek páronként páratlan távolságra vannak, emiatt közöttük nem lehet páratlan sok szám a számtani sorozatban. Így t és $t + 2$ nem lehet másik blokkban. Ha egy blokkban vannak, akkor a legtávolabbi szín nem érhető el. $n = 10m + 1$, három színből $2m$ -et használunk, egyikből $(4m+1)$ -et.

AB|AC|CCC|DC|DB

ABAB|ACAC|CCCCC|DCDC|DBDB

ABABAB|ACACAC|CCCCCCC|DCDCDC|DBDBDB

Elkerülhető-e a szivárvány $AP(4)$, ha az $[1, 4n]$ -et 4 színnel, mindegyikből n -et felhasználva színezzük ki?

Axenovich, Fon-Der-Flaass (2003)[150]

33. Színezési feladatok

Legyenek G és H gráfok. Néhány műveletet definiálunk gráfokra.

33.1. definíció. A $G+H$ diszjunkt unió az a gráf, amely a G és a H egy-egy példányának diszjunkt uniója. [99, 100]

33.2. definíció. A G és H egyszerű gráfokra a $G \vee H$ a $G + H$ -ből származtatható, ha összekötünk minden $u \in G$ és $v \in H$ csúcsot egyetlen éllel.

33.3. definíció. A $G \times H$ Descartes-szorzat csúcshalmaza $V(G) \times V(H)$ és $u \in V(G)$, $v \in V(H)$ esetén $((u,v), (u',v'))$ pontosan akkor él, ha vagy $u = u'$ és $(v, v') \in E(H)$; vagy $(u, u') \in E(G)$ és $v = v'$.

33.1. feladat. $\chi(G + H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$

33.2. feladat. $\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$

33.3. feladat. $\chi(G \times H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$

33.4. feladat. Legyen C_n egy n hosszú kör, r egynél nagyobb, s pozitív egész. Mutassuk meg, hogy $\chi(C_{2r+1} \vee K_s) = s + 3$, míg $\omega(C_{2r+1} \vee K_s) = s + 2$!

33.5. feladat. Igazoljuk, hogy G pontosan akkor m -színezhető, ha $\alpha(G \times K_m) \geq |V(G)|$!

33.6. feladat. Legyen G egy olyan gráf, amelyben bármely két páratlan körnek van közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$!

33.7. feladat. Adott n egyenes a síkon. Az általuk meghatározott síkrészeket színezzük ki úgy, hogy bármely szakasz két oldalán eltérő színű (korlátos vagy korlátlan) ország legyen. Vajon legalább hány szín szükséges egy ilyen kiszínezéshez?

33.8. feladat. Az előző feladatban keletkezett ábrán most a (korlátos vagy korlátlan) szakaszokhoz rendeljük színeket. Egy szakasz alatt két, egyenesen szomszédos metszéspont közötti részt, vagy olyan félegyenest értünk, amely egy metszéspontból indul. Hány szín szükséges a szakaszok kiszínezéséhez, ha egy metszéspont-hoz illeszkedő szakaszok más-más színt kell, hogy kapjanak?

33.9. feladat. Színezzük a metszéspontokat az ábrán, de egy szakasz két végpontja nem lehet egyszínű. Hány színt kell használnunk? [99, 100]

33.10. feladat. Legyenek az egyenesek a síkon általános helyzetűek, vagyis bármely kettő metszi egymást és nincs olyan metszéspont, amelyen kettőnél több egyenes menne keresztül. Hány színnel lehet kiszínezni a csúcsokat és az éleket, ha két illeszkedő elem nem lehet azonos színű? (Tehát szomszédos csúcsok, szomszédos élek és egy él és a végpontja nem lehet egyszínű.)

33.11. feladat. Mi a válasz, ha a csúcsokat és a tartományokat színezzük, és két szomszédos ország, két szomszédos csúcs és egy ország és a csúcsa nem lehet azonos színű?

33.12. feladat. Színezzük az országokat és a szakaszokat. Egy szakasz nem lehet azonos színű azon országokkal, amelyekkel nem csak csúcsban érintkezik. Hány szín kell minimum?

33.13. feladat. Mi a totális kromatikus száma az utóbbi feladatokban vizsgált gráfoknak?

33.14. feladat. A sakktábla mezőit szeretnénk kiszínezni oly módon, hogy az egymástól huszárlépésnyire lévő mezők színe más legyen. Hány színt kell feltétlenül használnunk? Mi a válasz, ha a ló táltos és menetmódja nem (1,2), hanem (2,3)?

33.15. feladat. Ha a G gráfnak a D egy irányítása, és a leghosszabb irányított út hossza $l(D)$, akkor van G -nek olyan jó színezése, amely $l(D) + 1$ színt használ. Létezik olyan D' irányítás, amelyre $l(D') = \chi(G) - 1$. A G egy másik y csúcsára legyen $g(y)$ a $g(W)$ maximuma, ahol a maximumot az $x-y$ közötti W sétákra vesszük.

a) Igazoljuk, hogy $g(y)$ véges és jól definiált, valamint a $g(y)$ használható a G egy jó $r(D) + 1$ színezésére.

Tehát a G $r(D) + 1$ színezhető.

b) Bizonyítsuk be azt is, hogy

$$\chi(G) = \min_D (r(D) + 1),$$

ahol a D végigfut az összes irányított körmentes irányításon.

33.15. megoldása [Gallai Tibor, 1968, Roy, 1967, Vitaver, 1962] Valóban ha a G gráfot kiszínezzük az $\{1, \dots, \chi(G)\}$ színnel, akkor irányíthatjuk úgy, hogy minden él a kisebb sorszámú színű végétől a nagyobb felé legyen irányítva. Ekkor a leghosszabb út hossza legfeljebb $\chi(G) - 1$.

Másképp tekintjük a maximális, irányított körmentes D' részgráfját a D -nek. Ez a D minden csúcsát tartalmazza, hiszen ha csak egyetlen él köti be a v csúcsot, akkor kört biztosan nem hoz létre. Tehát $V(D') = V(D) = V$. A D' -ben minden $v \in V$ csúcsra nézzük meg milyen hosszú a leghosszabb v -ben végződő út! Rendeljük ezt a hosszt - mint szint - a v csúcsához! Nem nehéz látni, hogy bármely irányított úton haladva a színek szigorúan nőnek.

Vegyünk a D -ben egy tetszőleges $(u, v) \in A(D)$ irányított élt! A D' -ben biztosan megy az u és a v között út, hiszen vagy maga az (u, v) él be van húzva a D' -ben, vagy ha behúznánk, akkor a D' -ben lenne irányított kör. De ekkor léteznie kell egy irányított útnak v -ből u -ba! Ezen az úton haladva szigorúan nőnek a színek, vagyis u és v biztosan nem egyszínűek. De ekkor léteznie kell egy irányított útnak v -ből u -ba! Ezen az úton haladva szigorúan nőnek a színek, vagyis u és v biztosan nem egyszínűek.

33.16. feladat. Legyen G hurokél nélküli összefüggő gráf és legyen D egy körmentes irányítása. Legyen C egy kör G -ben, a a C előremenő, b a C hátramenő éleinek számát jelölje. Legyen $r(D) = \max_C \lceil \frac{a}{b} \rceil$. Vegyünk egy x csúcsot $V(G)$ -ből és legyen W egy x -ből kiinduló séta. Legyen $g(W) = a - b \times r(D)$, ahol a jelöli a sétában előremenő élek számát, míg b a hátramenő élek számát (természetesen ez az a és b más, mint a C esetében).

33.17. feladat. [42][184] A sík bizonyos pontjait kiszíneztük pirossal, a többi kékkel. Legyen d egy pozitív szám. Igazoljuk, hogy van a kiszínezett síkon két azonos színű pont, amely d távolságra van.

33.17. megoldása Vegyünk egy szabályos, d oldalú háromszöget. Valamelyik oldal két végpontja egyszínű.

33.18. feladat. A sík pontjait kiszíneztük pirossal vagy kékkel. Legyen d egy pozitív szám. Igazoljuk, hogy legalább az egyik állítás fennáll:

- a) A P ponthoz van vele azonos színű pont d távolságra
 b) A P pont egy $2d$ hosszú, egyszínű végpontú szakasz felezőpontja.

33.19. feladat. A sík pontjait kiszíneztük pirossal vagy késsel. Legyen d egy pozitív szám. Igaz-e, hogy legalább az egyik állítás fennáll:

- a) A P ponthoz van végtelen sok, vele azonos színű pont d távolságra
 b) A P pont végtelen sok $2d$ hosszú, egyszínű végpontú szakasz felezőpontja.

33.19. megoldása Vegyük a P pont körüli d sugarú kört. Ha a körvonalon van végtelen sok olyan pont, amely a P -vel azonos színű, akkor rendben van, a) teljesül. Ha nem így van, akkor csak véges sok pont azonos színű a P -vel, így létezik végtelen sok átellenes pontpár a körön, amelyek P -vel ellentétes színűek, tehát egymással azonosak.

33.20. feladat. [170] Ki tudjuk-e színezní a sík pontjait két színt felhasználva úgy, hogy ne legyen két különböző színű pont 1 távolságra?

33.21. feladat. [207] Ki tudjuk-e színezní a sík pontjait három színt felhasználva úgy, hogy ne legyen két különböző színű pont 1 távolságra? [67]

33.22. feladat. A sík pontjait kiszíneztük 3 színnel. Legyen 1 egy pozitív szám. Igazoljuk, hogy van a kiszínezett síkon két azonos színű pont, amely d távolságra van.

33.22. megoldása Készítsünk két szabályos, 1 oldalú háromszögből egy rombuszt azzal, hogy a két háromszög egy-egy oldalát egyesítjük. Vegyünk két ilyen rombuszt, $ABDC$ -t és $AEGF$ -et! Egy-egy 60° -os csúcsukat egyesítettük, és még a DG szakasz is 1 hosszú legyen. Ha pl. az A kék, akkor ha el akarjuk kerülni az egyszínű 1 hosszú szakaszt, akkor a B és a C nem kék és más-más színű. De ekkor a D csak kék lehet, mert összesen 3 szín van. De ugyanígy következik, hogy a G is kék. De így mégis lett egy azonos végpontú 1 -szakasz! Az elkészített ábra megtalálható az egyik dián, bizonyítva, hogy sík kromatikus száma nagyobb, mint 3 . Vajon létezik-e hasonló konstrukció, amely kikényszeríti 5 szín használatát, ha az 1 -távolságú pontok nem lehetnek azonos színűek?

33.23. feladat. Ki lehet-e színezní a számegyenes pontjait 2 színnel úgy, hogy ne legyen egyszínű végpontú 1 -szakasz?

33.24. feladat. *Ha a számegyenest pirossal és kézzel kiszínezzük, akkor lehet találni olyan három azonos színű pontot, amelyek számtani sorozatot alkotnak! (A középső, a két szélső pont szakaszának felezőpontja.)*

33.24. megoldása Próbáljunk többet igazolni! Bizonyítsuk be, hogy a számegyenesen az 1,2,3,4,5,6,7,8,9 pontokat sem lehet két színnel úgy megszínezni, hogy ne legyen 3 tagú számtani sorozatot alkotó egyszínű hármas!

33.25. feladat. ¹ ★ *Ki lehet-e színezni a számegyenes pontjait 3 színnel úgy, hogy ne legyen olyan szakasz, amelynek a végpontjai és a közepe is azonos színű?*

33.26. feladat. *A síkot két színnel színezve mindig létezik egyenlő oldalú háromszög, amelynek három csúcsa egyszínű!*

33.27. feladat. *Egy végtelen szabályos háromszögrács csúcsait 2 színnel kiszínezzük. Van-e biztosan egyszínű csúcsokkal rendelkező egyenlő oldalú háromszög?*

33.28. feladat. *Van-e a síknak olyan 3-színezése, hogy bármely egyenesről hiányzik az egyik szín?*

33.29. feladat. *Létezik-e a végtelen négyzetrács csúcsainak olyan 3-színezése, hogy bármely két rácspontot összekötő egyenes legfeljebb két színű rácspontot tartalmazzon?*

33.30. feladat. *Létezik-e a végtelen szabályos háromszögrács csúcsainak olyan 3-színezése, hogy bármely két rácspontot összekötő egyenes legfeljebb két színű rácspontot tartalmazzon?*

33.31. feladat. *Ki lehet-e színezni a síkot 2 színnel úgy, hogy bármely téglalap négy csúcsa között legyen mindkét színű?*

33.31. megoldása Tekintsük a négyzetrácsnak egy 3, egymást követő vízszintes és 9 egymás melletti függőleges rácsegyenesét. Már ebből a keletkezett 27 rácspontból is biztosan találunk 4 egyszínűt, amelyek téglalapot határoznak meg! Van ugyanis két

¹ A ★ utal arra, hogy a feladat kicsit nehezebb

olyan függőleges hármas amely egyforma mintát mutat a vízszintesekkel vett metszetében. Így ezen a két egyenesen a három pontból kiválasztjuk a két-két egyforma színűt, amelyek éppen egy téglalap csúcsai.

33.32. feladat. ★ *Ki lehet-e színezni a síkot 2 színnel úgy, hogy bármely négyzet négy csúcsa között legyen mindkét színű?*

33.33. feladat. ★ *Ki lehet-e színezni egy végtelen négyzetrácsot 2 színnel úgy, hogy bármely négyzet négy csúcsa között legyen mindkét színű?*

33.34. feladat. ★ *Ki lehet-e színezni egy végtelen négyzetrácsot k színnel úgy, hogy bármely téglalap négy csúcsa között legyen mindkét színű?*

33.34. megoldása Nem. Mindig találunk egyszínű téglalapot! Tekintsünk egy $N \times N$ méretű részrácsot.

Hivatkozások

- [1] M. Aigner and G. Ziegler, Proofs from the book, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [2] M. Ajtai, J. Komlós, E. Szemerédi, A note on Ramsey numbers. J. Comb. Theory (Series A), 29 (1980), 354-360.
- [3] M. O. Albertson, Chromatic number, independence ratio, and crossing number, *Ars Mathematica. Contemporanea*, 1 (2008), 1–6.
- [4] N. Alon, Restricted colorings of graphs, in Surveys in Combinatorics 1993, London Math. Soc. Lecture Notes Series 187 (K. Walker, ed.), Cambridge Univ. Press, 1993, 1–33.
- [5] N. Alon, Combinatorial Nullstellensatz, Combinatorics, Probability and Computing 8 (1999) no. 1–2, 7–29.
- [6] N. Alon, Hypergraphs with High Chromatic Number, Graphs and Combinatorics Vol 1 (1985) 387–389
- [7] N. Alon, P. Frankl, L. Lovász, The chromatic number of Kneser hypergraphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 298 (1986), 359–370.

- [8] N. Alon, M. Krivelevich and P. D. Seymour, Long cycles in critical graphs, *J. Graph Theory* **35** (2000), 193–196.
- [9] N. Alon, M. Krivelevich, B. Sudakov, Coloring graphs with sparse neighborhoods, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B* **77** (1999) 73–82.
- [10] N. Alon and J. Spencer, *The probabilistic method*, (Second Edition) John Wiley and Sons, New York, 2000.
- [11] N. Alon and M. Tarsi, *Colorings and orientations of graphs*, *Combinatorica* **12** (1992), 125–134.
- [12] N. Alon and M. Tarsi, A note on graph colorings and graph polynomials, *Journal of Combinatorial Theory Ser. B.* **70** (1997), 197–201.
- [13] B. Andrásfai, P. Erdős, and V. T. Sós. On the connection between chromatic number, maximal clique and minimal degree of a graph. *Discrete Math.*, **8**:205–218, 1974.
- [14] K. Asdre, K. Ioannidou e S. Nikolopoulos, The harmonious coloring problem is NP-complete for interval and permutation graphs, *Discrete Applied Mathematics* **155** (2007), 2377–2382.
- [15] Appel, K. and W. Haken, *Every map is four colorable: Part 1, Discharging*, *Illinois J. Math.* **21** (1977), pp. 422–490.
- [16] Appel, K., W. Haken and J. Koch, *Every map is four colorable: Part 2, Reducibility*, *Illinois J. Math.* **21** (1977), pp. 491–567.
- [17] Gábor Bacsó, Sylvain Gravier, András Gyárfás, Myriam Preissmann, and András Sebő. Coloring the maximal cliques of graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, **17**(3):361–376 (electronic), 2004.
- [18] V. K. Balakrishnan, *Schaum’s Outline of Graph Theory*, McGraw-Hill, 1997.
- [19] P.N. Balister, O.M. Riordan, and R.H. Schelp. Vertex-distinguishing edge-colorings of graphs. *J. Graph Theory*, **42**:95–109, 2003.
- [20] J. Bang-Jensen and G. Gutin, *Digraphs. Theory, algorithms and applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 2001.
- [21] J. Bang-Jensen, B. Reed, M. Schacht, R. Šámal, B. Toft and U. Wagner, On six problems posed by Jarik Nešetřil, In: *Topics in Discrete Mathematics. Dedicated to Jarik Nešetřil on the occasion of his 60th birthday*. M. Klazar, J. Kratochvíl, M. Loeb, J. Matoušek, R. Thomas and P. Valtr, editors, *Algorithms and Combinatorics* **26**, Springer Verlag 2006.

- [22] I. Bárány, A short proof of Kneser's conjecture *J. Combin. Theory Ser. A*, **25** (1978), no. 3, 325–326.
- [23] T. Bartnicki, J. Grytczuk, H. A. Kierstead, X. Zhu, *The map-coloring game*, *American Mathematical Monthly* **114** (2007) 793–803.
- [24] T. Bartnicki, J. Grytczuk, *A note on the game chromatic index of graphs*, *Graphs and Combinatorics* **24** (2008+) 67–70.
- [25] L. B. Beasley, R. A. Brualdi, B. L. Shader, Combinatorial orthogonality, *Combinatorial and graph-theoretical problems in linear algebra (Minneapolis, MN, 1991)*, 207–218, IMA Vol. Math. Appl., 50, Springer, 1993.
- [26] N. L. Biggs, *Algebraic Graph Theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2nd ed. 1993).
- [27] A. Björner, „Topological methods", in *Handbook of Combinatorics*, R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász (Eds.), North-Holland/Elsevier, Amsterdam, 1995, 1819–1872.
- [28] Z. Blázsik, M. Hujter, A. Pluhár and Z. Tuza, Graphs with no induced C_4 and $2K_2$. *Discrete Math*, **115** (1993) 51–55.
- [29] H. L. Bodlaender, On the complexity of some coloring games, *Internat. J. Found. Comput. Sci.* **2** (1991), 133–147.
- [30] T. Bohman, P. Keevash, The early evolution of the H-free process, *Inventiones Mathematicae* **181** (2010), 291–336.
- [31] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer Graduate Texts in Mathematics, 1998.
- [32] B. Bollobás and O. Riordan, *A Tutte Polynomial for Coloured Graphs*, *Combinatorics, Probability and Computing* **8** (1999), 45–93.
- [33] B. Bollobás, Chromatic number, girth and maximal degree, *Discrete Math.* **24** (1978), no. 3, 311–314.
- [34] B. Bollobás and N. Sauer, Uniquely colourable graphs with large girth, *Canadian Journal of Mathematics* **28** (1976), 1340–1344.
- [35] J. A. Bondy and P. Hell, *A note on the star chromatic number*, *J. Graph Theory* **14** (1990), 479–482.
- [36] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R.: *Graph Theory*, GTM 244, Springer (2008)
- [37] Landon Rabern. The Borodin-Kostochka Conjecture For Graphs Containing a Doubly Critical Edge. *Submitted to Journal of Combinatorial Theory*, 2007.

- [38] Borodin, O. V., *Colorings of plane graphs: A survey*, Discrete Mathematics **313** (2013), pp. 517–539
- [39] Borodin, O. V., A. V. Kostochka and D. R. Woodall, *List Edge and List Total Colourings of Multigraphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **71** (2) (1997), pp. 184–204.
- [40] Andreas Brandstädt, Van Bang Le, and Jeremy P. Spinrad. *Graph classes: a survey*. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.
- [41] R. L. Brooks, On colouring the nodes of a network, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **37** (1941), 194–197.
- [42] de Bruijn, N. G.; Erdős, P. (1951), A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 54: pp. 371?–373.
- [43] J. M. Brunat, M. Espona, M. A. Fiol and O. Serra, On Cayley line digraphs, *Discrete Math.* **138** (1995) 147–159.
- [44] T. Brylawski and J. Oxley, The Tutte polynomial and its applications, In, *Matroid applications* (ed. N. White), 123–225. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [45] A.C. Burris and R.H. Schelp. Vertex-distinguishing proper edge-colorings. *J. Graph Theory*, **26**:73–83, 1997.
- [46] Caro, Y., Lev, A., Roditty, Y., Tuza, Z., Yuster, R.: On rainbow connection, *Electron J. Combin.* **15**, R57 (2008)
- [47] P. A. Catlin, Hajós’ graph-coloring conjecture: variations and counterexamples, *J. Combin. Theory Ser. B* **26** (1979), 268–274.
- [48] Chakraborty, S., Fischer, E., Matsliah, A., Yuster, R.: Hardness and algorithms for rainbow connectivity, *J. Comb. Optim.* (in press)
- [49] Chandran, L.S., Das, A., Rajendraprasad D., Varma, N.M.: Rainbow connection number and connected dominating sets, arXiv:1010.2296v1 (2010)
- [50] G. J. Chang, L. Huang, X. Zhu, *The circular chromatic numbers and the fractional chromatic numbers of distance graphs*, European Journal Combin. **19** (1998) 423–431.
- [51] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon and P. Zhang, Rainbow connection in graphs, *Math. Bohemica* **133**(2008), 85–98.

- [52] G. Chartrand and D. Geller, Uniquely colorable planar graphs, *Journal of Combinatorial Theory*, 6 (1969), 271–278.
- [53] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, *Graphs and Digraphs*, ser. A Chapman & Hall book. Taylor & Francis, 2011.
- [54] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas, The strong perfect graph theorem. *Ann. of Math.* (2) **164** (2006), 51–229.
- [55] V. Chvátal, Perfectly ordered graphs. In: *Topics on perfect graphs*, *North-Holland Math. Stud.*, 88 (1984), North-Holland, Amsterdam-New York, pp. 63–65.
- [56] Cohen, N. and F. Havet, *Planar graphs with maximum degree $\Delta \geq 9$ are $(\Delta + 1)$ -edge-choosable - A short proof*, *Discrete Mathematics* **310** (21) (2010), pp. 3049–3051.
- [57] D. G. Corneil and B. Graham, "An algorithm for determining the chromatic number of a graph," *SIAM Journal on Computing*, vol. 2, no. 4, pp. 311–318, 1973.
- [58] G. A. Dirac, A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs, *J. London Math. Soc.* **27** (1952), 85–92.
- [59] G. A. Dirac, A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger, *Proc. London Math. Soc.* (3) **7** (1957), 161–195.
- [60] G. A. Dirac, The number of edges in critical graphs. *J. Reine Angew. Math.* **268/269** (1974), 150–164.
- [61] G. Dirac, *Map-colour theorems*, *Canadian J. Math.* 4 (1952), 480–490.
- [62] G. A. Dirac, Map colour theorems related to the Heawood colour formula, *J. London Math. Soc.* **31** (1956), 460–471.
- [63] G. A. Dirac, On the structure of 5- and 6-chromatic abstract graphs, *J. Reine Angew. Math.* 214/215 (1964) 43–52.
- [64] G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, *Proc. of the London Math. Soc.*, 2 (1952), 69–81.
- [65] G. A. Dirac, Circuits in critical graphs, *Monatsh. Math.* 59 (1955) 178–187.
- [66] J. Dong and X. Li, Note on the rainbow connection numbers of graphs with diameter 2, arXiv:1106.1258v2 [math.CO] 2011.
- [67] R. B. Eggleton, P. Erdős, D. K. Skilton, *Colouring the real line*, *J. Combin. Theory Ser. B* **39** (1) (1985) 86–100.

- [68] P. Erdős, On circuits and subgraphs of chromatic graphs, *Mathematika* **9** (1962), 170–175.
- [69] P. Erdős, A.L. Rubin and H. Taylor, *Choosability in graphs*, *Congr. Numer.* **26** (1979), 125–157.
- [70] Paul Erdős and László Lovász. *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions*.
- [71] P. Erdős, L. Lovász, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. II, pp. 609–627. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, Vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [72] P. Erdős, *On the combinatorial problems which I would most like to see solved*, *Combinatorica* **1** (1981), 25–42.
- [73] P. Erdős and S. Fajtlowicz, On the conjecture of Hajós, *Combinatorica* **1** (1981), 141–143.
- [74] P. Erdős, Z. Füredi, A. Hajnal, P. Komjáth, V. Rödl, Á. Seress, Coloring graphs with locally few colors, *Discrete Math.*, **59** (1986), 21–34.
- [75] P. Erdős, A. Gyárfás, L. Pyber, Vertex coverings by monochromatic cycles and trees, *Journal of Combinatorial Theory B* **51** (1991) 90–95.
- [76] U. Faigle, U. Kern, H. A. Kierstead, W. T. Trotter, *On the game chromatic number of some classes of graphs*, *Ars Combin.* **35** (1993) 143–150.
- [77] G. Fan, Circular chromatic number and Mycielski graphs, *Combinatorica*, **24** (2004), 127–135.
- [78] B. Farzad, M. Molloy, On the edge-density of 4-critical graphs, *Combinatorica* **29** (2009), 665–689.
- [79] F.J. Faudree, R.H. Shelp, A. Gyárfás, and Zs. Tuza, *The strong chromatic index of graphs*, *Ars Combin.* **29B** (1990), 205–211.
- [80] L. M. Favrholdt, M. Stiebitz, and B. Toft. Graph edge colouring: Vizing’s theorem and Goldberg’s conjecture. Technical Report 20, IMADA, The University of Southern Denmark, 2006.
- [81] M.A. Fiol, A Boolean algebra approach to the construction of snarks, in *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, vol. 1 (eds. Y. Alavi, G. Chartrand, O.R. Oellermann, and A.J. Schwenk) John Wiley & Sons (1991) 493–524.

- [82] A. Frieze, D. Mubayi, On the chromatic number of simple triangle-free triple systems, *Electron. J. Combin.*, 15(1) Research Paper 121, no. 27 (2008).
- [83] R. Fritsch and G. Fritsch, *The Four Color Theorem: History, Topological Foundations, and Idea of Proof*, ser. Springer finance. Springer Verlag Gmbh, 1998.
- [84] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, *Acta Math. Sci. Hungar.*, **18** (1967) 25–66. English translation by F. Maffray and M. Preissmann, in: J. L. Ramírez Alfonsín and B. A. Reed (editors), *Perfect Graphs*, John Wiley and Sons, 2001, 25–66.
- [85] T. Gallai, Kritische Graphen. I. (German) *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **8** (1963), 165–192.
- [86] T. Gallai, Kritische Graphen. II. (German) *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **8** (1963), 373–395.
- [87] F. Galvin, The list chromatic index of a bipartite multigraph, *Journal of Combinatorial Theory Ser. B.* 63 (1995), 153–158.
- [88] "More Mathematical Puzzles and Diversions", 1961, collection by Martin Gardner. Ch 17.'Squaring the Square' by William T. Tutte, from 'Mathematical Games' column Nov 1958, *Scientific American*.
- [89] M. Gardner, Mathematical games. *Scientific American* 244 (1981) 18–26.
- [90] M. Gardner, Mathematical Games: Snarks, Boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem, *Sci. Amer* **234** (1976) 126–130.
- [91] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and intractability*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.
- [92] W. Goddard, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. M. Harris, D. F. Rall, *Broadcast chromatic numbers of graphs*, *Ars Combin.* **86** (2008) 33–49.
- [93] Martin Charles Golumbic. *Algorithmic graph theory and perfect graphs*, volume 57 of *Annals of Discrete Mathematics*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, second edition, 2004. With a foreword by Claude Berge.
- [94] Sylvain Gravier, Chinh T. Hoàng, and Frédéric Maffray. Coloring the hypergraph of maximal cliques of a graph with no long path. *Discrete Math.*, 272(2-3):285–290, 2003.
- [95] J. Grytczuk. Thue type problems for graphs, points, and numbers. *Discrete Mathematics* **308** (2008), 4419–4429.

- [96] S. Gutner and M. Tarsi, *Some results on $(a : b)$ -choosability*. Discrete Math. **309**(8) (2009), 2260–2270.
- [97] András Gyárfás. *On the chromatic number of multiple interval graphs and overlap graphs*. Discrete Math., 55(2):161–166, 1985.
- [98] Hadwiger, Hugo, *Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe*, Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich, **88** (1943), 133–143.
- [99] Hajnal Péter: *Elemi kombinatorikai feladatok* (2. kiadás, 2005)
- [100] Hajnal Péter: *Összeszámlálási problémák* (1997)
- [101] Hajnal Péter: *Gráfelmélet* (2. kiadás, 2003)
- [102] Hajnal Péter: *Halmazrendszerek* (2002)
- [103] S.L. Hakimi and O. Kariv, *A generalization of edge-coloring in graphs*, Journal of Graph Theory 10 139-154 (1986).
- [104] W. K. Hale, *Frequency assignment: theory and applications*, IEEE Proc. 68(1980) 1497–1514
- [105] Ararat Harutyunyan and Bojan Mohar, *Gallai’s Theorem for List Coloring of Digraphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **25**(1), (2011).
- [106] D. Hefetz, *Anti-magic graphs via the Combinatorial Nullstellensatz*, Journal of Graph Theory 50(4) (2005), 263–272.
- [107] Heinold, B.: *A survey of sum list coloring*. Graph Theory Notes N. Y. 52, 38–44 (2007)
- [108] Heinold, B.: *Sum choice numbers of some graphs*. Discret. Math. 309 no. 8, 2166-2173 (2009)
- [109] N. Hindman: *On a conjecture of Erdős, Faber and Lovász about n -colorings*. Canadian J. Math. **33**, 563-570 (1981).
- [110] J. Hladký, D. Král and U. Schauz, *Algebraic proof of Brooks’ Theorem*, manuscript.
- [111] D. Holton and J. Sheehan, *The Petersen Graph*, ser. Australian Mathematical Society Lecture Series. Cambridge University Press, 1993, no. 7.
- [112] I. Holyer, *The NP-completeness of edge-colouring*, SIAM J. Comput. **10** (1981) 718–720.
- [113] F. Hughes and G. MacGillivray, *The achromatic number of graphs: a survey and some new results*, Bull. Inst. Combin. Appl. 19 (1997), 27–56.

- [114] Hujter Mihály: Perfekt gráfok és alkalmazásaik, Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem, Operációkutatás Tanszék, Aula Kiadó (2003)
- [115] R. Isaacs, Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable, *Am. Math. Monthly* **82** (1975) no. 3, 221–239.
- [116] T.T. Lee, Y. Wan, H. Guan, Randomized Δ -edge-Coloring via quaternion of complex colors (Extended Abstract), *arXiv:1104.1852v1 [cs.DS]* (2011).
- [117] T. R. Jensen and B. Toft, Graph Coloring Problems, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [118] T. R. Jensen and B. Toft, 25 pretty graph colouring problems, *Discrete Math.* **229** (2001), 167-169.
- [119] O. Ore, The Four Color Problem, Academic Press, New York, 1967.
- [120] V. Jungic, J. Licht, M. Mahdian, J. Nešetřil, R. Radoicic, Rainbow arithmetic progressions and anti-Ramsey results, *Combin. Probab. Comput.* **12** (2003) 599–620.
- [121] J. Kahn: On some hypergraph problems of Paul Erdős and the asymptotics of matching, covers and colorings. pp. 345-371 in: *The Mathematics of Paul Erdős I* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1997.
- [122] K. Kawarabayashi and B. Mohar, *A relaxed Hadwiger's conjecture for list colorings*, *J. Combin. Theory Ser. B* **97(4)** (2007) 647–651.
- [123] J. B. Kelly and L. M. Kelly, Paths and circuits in critical graphs, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 786-792.
- [124] A. Kemnitz, H. Kolberg, *Coloring of integer distance graphs*, *Discrete Math.* **191** (1998) 113-123.
- [125] A. Kemnitz, I. Schiermeyer, Graphs with rainbow connection number two, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* **31**(2011), 313–320.
- [126] A. Kempe. On the geographical problem of the four colours. *American journal of mathematics*, 2(3):193–200, 1879.
- [127] W. Klotz, „Graph coloring algorithms,” *Mathematics Report*, pp. 1-9, 2002.
- [128] A. V. Kostochka and M. Stiebitz, Colour-critical graphs with few edges, *Discrete Math.* **191** (1998), 125–137.
- [129] A. V. Kostochka and M. Stiebitz, Excess in colour-critical graphs, *Graph theory and combinatorial biology* (Balatonlelle, 1996), 87–99, Bolyai Soc. Math. Stud., 7, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1999.

- [130] Alexandr V. Kostochka, Michael Stiebitz: A list version of Dirac's theorem on the number of edges in colour-critical graphs. *Journal of Graph Theory* 39(3): 165-177 (2002)
- [131] Alexandr V. Kostochka, Michael Stiebitz: On the Number of Edges in Colour-Critical Graphs and Hypergraphs. *Combinatorica* 20(4): 521-530 (2000)
- [132] A. V. Kostochka and M. Stiebitz, A new lower bound on the number of edges in colour-critical graphs and hypergraphs. *J. Combin. Theory Ser. B* **87** (2003), 374–402.
- [133] A. Kostochka, On a theorem of Erdos, Rubin, and Taylor on choosability of complete bipartite graphs, *Electr. J. of Combinatorics* **9** (2002), # N9.
- [134] A. Kostochka and V. Rödl, On graphs with small Ramsey numbers, *J. Graph Theory* **37** (2001), 198–204.
- [135] A. Kostochka and V. Rödl, On graphs with small Ramsey numbers II, *Combinatorica* **24** (2004), 389–401.
- [136] A. V. Kostochka and D. R. Woodall: Choosability conjectures and multicircuits, *Discrete Math.*, **240** (2001), 123–143.
- [137] D. N. Kozlov, *Convex Hulls of f - and β -vectors*, *Discrete Comput. Geom.* **18**, (1997), 421–431.
- [138] J. Kratochvíl, Zs. Tuza, M. Voigt. On the b-chromatic number of graphs. *Lecture Notes in Computer Science* 2573 (2002) 310–320.
- [139] J. Kratochvíl, Zs. Tuza and M. Voigt, Brooks-type theorems for choosability with separation, *J. Graph Theory* **27** (1998), 43–49.
- [140] M. Krivelevich, On the minimal number of edges in color-critical graphs, *Combinatorica* **17** (1997), 401–426.
- [141] M. Krivelevich, R. Yuster, The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree, *J. Graph Theory* **63(3)**(2010), 185–191.
- [142] R. Leese, S. Hurley (Eds.), *Methods and Algorithms for Radio Channel Assignment*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2002
- [143] V.B. Le and Z. Tuza, Finding optimal rainbow connection is hard, Preprint 2009.
- [144] F. T. Leighton. A Graph Coloring Algorithm for Large Scheduling Problems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 84(6):489–506, 1979.

- [145] H. Li, X. Li and S. Liu, Rainbow connection of graphs with diameter 2, arXiv:1101.2765v2 [math.CO] 2011.
- [146] S. Li and X. Li, Note on the complexity of deciding the rainbow connectedness for bipartite graphs, arXiv:1109.5534v2 [math.CO] 2011.
- [147] X. Li, S. Liu, Sharp upper bound for the rainbow connection numbers of 2-connected graphs, arXiv:1105.4210v2 [math.CO] 2011.
- [148] X. Li and Y. Shi, Rainbow connection in 3-connected graphs, arXiv:1010.6131v1 [math.CO] 2010.
- [149] X. Li and Y. Shi, On the rainbow vertex-connection, arXiv:1012.3504v1 [math.CO] 2010.
- [150] X. Li and Y. Sun, Rainbow connections of graphs—A survey, arXiv:1101.5747v2 [math.CO] 2011.
- [151] W. Lin, P. Lam, Z. Song, *Circular chromatic numbers of some distance graphs*, Discrete Math. **292** (2005) 119-130.
- [152] L. Lovász, Subgraphs with prescribed valencies, *J. Combin. Theory*, **8** (1972), 391-416.
- [153] L. Lovász, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math.*, **2** (1972), 253–267.
- [154] L. Lovász. Coverings and coloring of hypergraphs. In *Proceedings of the Fourth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1973)*, pages 3–12, Winnipeg, Man., 1973. Utilitas Math.
- [155] L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, Akad. Kiadó, Budapest, 1979.
- [156] L. Lovász, *On the Shannon capacity of a graph*, IEEE Trans. Inf. Th. **25** (1979), 1–7.
- [157] L. Lovász, *Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere*, Acta Sci. Math. **45** (1983), 317–323.
- [158] L. Lovász, Kneser’s conjecture, chromatic number, and homotopy, *J. Combin. Theory Ser. A*, **25** (1978), no. 3, 319–324.
- [159] L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching theory*, North-Holland Mathematics Studies, 121. Annals of Discrete Mathematics, 29, North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Akadémiai Kiadó (Publishing House of the Hungarian Academy of Science), Budapest, 1986.

- [160] L. Lovász, Bounding the independence number of a graph, in: (A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte, eds.), Bonn Workshop on Combinatorial Optimization, Annals of Discrete Mathematics 16 (1982), North Holland, Amsterdam.
- [161] L. Lovász, Stable sets and Polynomials, *Discrete Mathematics*, 124:137–153, 1994.
- [162] R. Luo and G. Yu, A note on strong edge-colorings of 2-degenerate graphs, arXiv:1212.6092 (12/2012).
- [163] F. Maffray, M. Mechebbek. On b-perfect chordal graphs. *Graphs and Combinatorics* 25 (2009) 365–375.
- [164] D. Marx and M. Schaefer. The complexity of nonrepetitive coloring. *Discrete Applied Mathematics* **157** (2009), 13–18.
- [165] J. Matoušek, A combinatorial proof of Kneser’s conjecture, *Combinatorica*, **24** (2004), 163–170.
- [166] R.M. McConnell, J.P. Spinrad. Linear-time modular decomposition and efficient transitive orientation of comparability graphs. *Proc. 5th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (1994) 536–545.
- [167] C. J. H. McDiarmid, Random channel assignment in the plane, *Random Structures Algorithms* 22(2003) 187–212
- [168] M. Middendorf, F. Pfeiffer. On the complexity of recognizing perfectly orderable graphs. *Discrete Math.* 80 (1990) 327–333.
- [169] Bojan Mohar and Riste Škrekovski. The Grötzsch theorem for the hypergraph of maximal cliques. *Electron. J. Combin.*, 6:Research Paper 26, 13 pp. (electronic), 1999.
- [170] M. Molly, M. R. Salavatipour, A bound on the chromatic number of the square of a planar graph. *J. Comb. Theory, Ser. B* 94(2005) 189–213
- [171] S. Nakano, T. Nishizeki and N. Saito, On the f-coloring of multigraphs, *IEEE Trans. Circuit and Syst.* 35(3) 345–353 (1988).
- [172] V. Neumann-Lara, The dichromatic number of a digraph, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **33** (3), (1982), 265 - 270.
- [173] A. Nilli, Short odd cycles in 4-chromatic graphs, *Journal of Graph Theory* 31 (1999), 145–147.
- [174] Z. Pan, X. Zhu: The circular chromatic number of series-parallel graphs of large odd girth, *Discrete Math.* **245** (2002), 235–246.

- [175] J. Petersen, Die Theorie der regulären Graphs, *Acta Math.* 15 (1891), 193–220.
- [176] J. Petersen, „Sur le théorème de tait,” *L’Intermédiaire des Mathématiciens*, vol. 5, pp. 225–227, 1898.
- [177] A. PLUHÁR, *Greedy colorings of uniform hypergraphs*, *Random Structures Algorithms*, 35 (2009), pp. 216–221.
- [178] Landon Rabern. A note on Reed’s conjecture, 2006.
- [179] Landon Rabern. Coloring Graphs Containing a Doubly Critical Edge. *Submitted to Journal of Graph Theory*, 2007.
- [180] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring, *Random Structures and Algorithms* 16 (2000), no. 1, 4–32.
- [181] A.M. Raigorodskii, *On the chromatic number of a space*, *Uspekhi Mat. Nauk*, **55** (2000), 147–148.
- [182] Bert Randerath and Ingo Schiermeyer. On Reed’s conjecture about ω, Δ and χ . *Graph Theory in Paris (Series: Trends in Mathematics), Proceedings of a Conference in Memory of Claude Berge*, pages 339–346, 2006.
- [183] Bruce Reed. ω, Δ , and χ . *J. Graph Theory.*, 27:177-212, 1997.
- [184] R. C. Read, Maximal circuits in critical graphs, *J. London Math. Soc.* 32 (1957), 456-462.
- [185] B. A. Reed, P. D. Seymour, Fractional colouring and Hadwiger’s conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B*, **74** (1998), 147–152.
- [186] R. C. Read and W. T. Tutte, „Chromatic Polynomials”, in *Selected Topics in Graph Theory*, 3, (Academic Press, New York, 1988), p. 15.
- [187] N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas, „Tutte’s edge-colouring conjecture,” *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 70, no. 1, pp. 166 – 183, 1997.
- [188] N. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour and R. Thomas, The four-color theorem, *J. Combin. Theory Ser. B* **70** (1997), 2–44.
- [189] I. Z. Ruzsa, Z. Tuza, M. Voigt, *Distance graphs with finite chromatic number*, *J. Combin. Theory Ser. B* **85** (1) (2002) 181-187.
- [190] H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, The Carus mathematical monographs series, published by The Mathematical Association of America, 1963.
- [191] Horst Sachs, Michael Stiebitz: On constructive methods in the theory of colour-critical graphs. *Discrete Mathematics* 74(1-2): 201-226 (1989)

- [192] E.Sampathkumar and M.A.Sriraj, Vertex Labeled/Colored graphs, Matrices and Signed graphs, *J. of Combinatorics and Information System Sciences*, **37**(2-4), (2012), 221-230.
- [193] C. E. Shannon. A theorem on coloring the lines of a network. *J. Math. Phys.*, 28:148–151, 1949.
- [194] Sanders, D. and Y. Zhao, *Planar graphs of maximum degree seven are class I*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **83** (2) (2001), pp. 201–221.
- [195] A. Schrijver, Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs, *Nieuw Arch. Wisk.* (3), **26** (1978), no. 3, 454–461.
- [196] P.D. Seymour, Nowhere-zero flows, in: Handbook of Combinatorics (R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász eds.), Elsevier, Amsterdam, 1995.
- [197] P.D. Seymour: Packing nearly-disjoint sets. *Combinatorica* **2**, 91–97 (1982).
- [198] Schiermeyer, I.: Rainbow connection in graphs with minimum degree three, IWOCA 2009, LNCS **5874**, 432–437 (2009)
- [199] I. Schiermeyer, On minimally rainbow k -connected graphs, *Discrete Appl. Math.*(2011), doi:10.1016/j.dam.2011.05.001.
- [200] A. Schrijver. Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs. *Nieuw Arch. Wisk.* (3), 26(3):454–461, 1978.
- [201] A. Sharp, Distance Coloring, *LNCS* 4698 (2007) 510–521
- [202] Shen, Y., G. Zheng, W. He and Y. Zhao, *Structural properties and edge choosability of planar graphs without 4-cycles*, Discrete Mathematics **308** (2008), pp. 5789–5794.
- [203] Alexander Soifer, *The mathematical coloring book*, Springer, New York, 2009, Mathematics of coloring and the colorful life of its creators, With forewords by Branko Grünbaum, Peter D. Johnson, Jr. and Cecil Rousseau.
- [204] Eric Sopena, Oriented graph coloring, *Discrete Mathematics*, **229**,(2001), 359-369.
- [205] M. Steibitz: Subgraphs of color critical graphs, *Combinatorica*, 7 (1987) 303-312.
- [206] Michael Stiebitz: Proof of a conjecture of T. Gallai concerning connectivity properties of colour-critical graphs. *Combinatorica* 2(3): 315-323 (1982)
- [207] L.A. Székely, *Erdős on unit distances and the Szemerédi-Trotter theorems*, p. 649–666 in *Paul Erdős and his mathematics* (G. Halász, L. Lovász, M. Simonovits, V.T. Sós ed.), Springer, 2002.

- [208] Szendrei Ágnes: Diszkrét matematika, logika, algebra, kombinatorika (6. kiadás, 2004)
- [209] P. G. Tait, „Note on a theorem in geometry of position,” *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, vol. 29, pp. 657–660, 1880.
- [210] P.G. Tait, On the colouring of maps, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 10:501–503, 1878–1880.
- [211] M. Tarsi, The graph polynomial and the number of proper vertex colorings, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **49**, 3 (1999), 1089–1093.
- [212] R. Thomas, „An update on the four-color theorem,” *Notices Amer. math. Soc.*, vol. 45, pp. 848–859, 1998.
- [213] C. Thomassen, A short list color proof of Grötzsch’s theorem, *J. Combin. Theory Ser. B* **88** (2003), 189–192.
- [214] B. Toft, On the maximal number of edges of critical k -chromatic Graphs, *Studia Sci. Math. Hung.* 5 (1970), 461–470.
- [215] B. Toft, 75 graph-colouring problems. Graph colourings (Milton Keynes, 1988), 9–35, Pitman Res. Notes Math. Ser., 218, Longman Sci. Tech., Harlow, 1990.
- [216] B. Toft, *A survey of Hadwiger’s conjecture*, Surveys in graph theory (San Francisco, CA, 1995), *Congr. Numer.* **115** (1996), 249–283.
- [217] B. Toft, On separating sets of edges in contraction-critical graphs, *Math. Ann.* 196 (1972) 129–147
- [218] P. Turán, *Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie*, *Mat. Fiz. Lapok* **48** (1941) 436?–452 (in Hungarian; German summary).
- [219] W. Tutte, „On the algebraic theory of graph colorings,” *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 1, no. 1, pp. 15 – 50, 1966.
- [220] W.T. Tutte, A contribution to the theory of chromatic polynomials, *Canad J. Math.*, 6:80–91, 1954.
- [221] Zs. Tuza, Graph coloring, in: Handbook of graph theory. J. L. Gross and J. Yellen Eds., CRC Press, Boca Raton, FL, 2004. xiv+1167 pp.
- [222] S. Xu, The size of uniquely colorable graphs, *J. Combinatorial Theory Ser B* 50 (1990), 319–320.
- [223] Robert J. Vanderbei: *Linear programming: Foundations and extensions*, Kluwer Academic Publishers Boston/London/Dordrecht

- [224] V. G. Vizing, Coloring the vertices of a graph with prescribed colors, *Diskret. Analiz* **29** (1976), 3–10 (in Russian).
- [225] Vizing, V. G., *On an estimate of the chromatic class of a p-graph (in russian)*, *Diskret. Analiz* **3** (1964), pp. 25–30.
- [226] V.G. Vizing, The chromatic class of a multigraph, *Kibernetika* **3** (1965) 29–39 (in Russian).
- [227] Vizing, V. G., *Critical graphs with given chromatic index (in russian)*, *Diskret. Analiz* **5** (1965), pp. 9–17.
- [228] Vizing, V. G., *Colouring the vertices of a graph with prescribed colours (in russian)*, *Diskret. Analiz* **29** (1976), pp. 3–10.
- [229] V.I. Voloshin. Coloring Mixed Hypergraphs: theory, algorithms and applications. AMS, Providence, 2002.
- [230] V.Voloshin. Graph Coloring: History, results and open problems. Alabama Journal of Mathematics, Spring/Fall 2009.
- [231] V. Voloshin. Introduction to Graph and Hypergraph Theory. Textbook. Nova Science Publishers, 2009.
- [232] G. Wegner, *Graphs with given diameter and a coloring problem*, Technical Report, University of Dortmund, 1977.
- [233] D.J.A. Welsh, Matroids: fundamental concepts, in: Handbook of Combinatorics (R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász eds.), Elsevier, Amsterdam, 1995.
- [234] D.B. West, *Introduction to Graph Theory*, Second edition, Prentice Hall, 2001.
- [235] R. Wilson, *Four Colors Suffice: How The Map Problem Was Solved*, ser. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, 2002.
- [236] D.R. Wood, *Contractibility and the Hadwiger Conjecture*, *European J. Combin.* **31(8)** (2010), 2102–2109.
- [237] D. C. Wood. A Technique for Coloring a Graph Applicable to Large-Scale Timetabling Problems. *Computer Journal*, 12:317–322, 1969.
- [238] X. Zhu: Circular chromatic number: a survey, *Discrete Math.* **229** (2001), 371–410.
- [239] X. Zhu: Recent developments in circular colorings of graphs, in M. Klazar, J. Kratochvíl, J. Matoušek, R. Thomas, P. Valtr (eds.): Topics in Discrete Mathematics, Springer, 2006, 497–550.

- [240] X. Zhu, *The circular chromatic number of a class of distance graphs*, Discrete Math. **265** (1-3) (2003) 337-350.
- [241] X. Zhu, *On-line list colouring of graphs*, Electron. J. Comb. 16(1) (2009), RP 127.
- [242] Nicolas Zufferey, P. Amstutz, and P. Giaccari. *Graph Colouring Approaches for a Satellite Range Scheduling Problem*. *Journal of Scheduling*, 11(4):263 – 277, 2008.
- [243] A. A. Zykov, *On some properties of linear complexes*, Mat. Sbornik (N. S.) **24** (66) (1949) 163?-188 (in Russian). (English translation: Amer. Math. Soc. Transl. no. 79, 1952)
- [244] Y. Ye: *The Simplex Method is Strongly Polynomial for the Markov Decision Problem with a Fixed Discount Rate*.

- Gráfok színezése
- Síkgráfok
- Duális gráf
- A négyszíntétel
- Az ötszíntétel
- Formális bizonyítás
- Mohó színezés
- Martin Gardner és a Snark
- Snark tétel
- Szekeres György
- A Happy Ending Problem
- Bizonyítás számítógéppel
- A négyszínsejtés tényleg igaz
- Elképzelés és megoldás
- Erdős Pál és Dirac Gábor
- Kromatikus kritikus gráfok

- Független csúcshalmazok kritikus gráfokban
- Sajátértékek és a kromatikus szám
- A kromatikus polinom
- A Tutte-polinom
- Egy diplomamunka a polinomokról