



TÁMOP-4.1.1.F-14/1/KONV-2015-0006

TÁRSADALMI ÉS GAZDASÁGI HÁLÓZATOK MODELLEZÉSE

3. ELŐADÁS: VÉLETLEN GRÁFOK, GRÁFMODELLEK

London András

SZÉCHENYI 2020 



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Gráfmodellek

- Milyen általános **közös tulajdonságai** vannak „tipikus” gráfoknak?
- Tudjuk-e valamilyen **modellel közelíteni** a valóságban megjelenő hálózatokat?
- A különböző területeken (társadalom, gazdaság, biológia, technológia) megjelenő hálózatok modelljei között mik a **legfontosabb különbségek/hasonlóságok**?

Gráfmodellek

- **Mely gráfok az érdekesek?** Mi alapján különböztetjük meg az érdekeset a nem érdekestől? → referencia pontok
- Hálózatelemzésnél egy fontos referencia pont a **véletlen gráf**
- Két alapvető gráfmodell család
 - **Konstruktív modellek:** bizonyos szabályok mentén bizonyos típusú hálózatot hoz létre; pl. „preferential attachment”
 - **Generatív modellek:** szabad paraméterek felhasználásával generál hálózatot; pl. az élvalószínűség adott

Erdős- Rényi modell ¹

- $G(n, p)$ – minden élt $p \in [0, 1]$ valószínűséggel húzunk be, egymástól függetlenül
- élek száma várhatóan: $\binom{n}{2}p$
- átlagos fokszám: $\bar{k} = (n - 1)p$
- fokszámeloszlás:

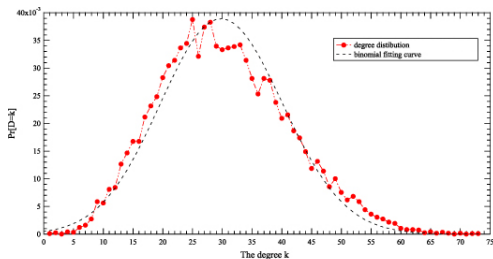
$$\mathbb{P}(k_i = k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k},$$

azaz binomiális.

Fontos és rendkívül sokat vizsgált matematikai modell

¹Erdős & Rényi, 1959

Erdős-Rényi modell



ábra 1: Generált ER gráf fokszámeloszlása és az illesztett binomiális eloszlásgörbe

Kisvilág gráfok

- Stanley Milgram (1933-84) kísérlete: véletlenül kiválasztott emberek küldjenek egy levelet egy közeli ismerősnek, hogy az szintén továbbküldje így, azzal a céllal, hogy egy általuk valószínűleg ismeretlen bostoni orvoshoz eljusson végül a levél
- A 64 levél az USA 64 különböző pontjáról átlagosan 5.5 levélváltás után célba ért

⇒ **Kicsi átmérő**: A legtávolabbi pontok sincsenek túl messzire egymástól...

Kisvilág gráfok

További fontos jellemző: **háromszögek száma nagy**

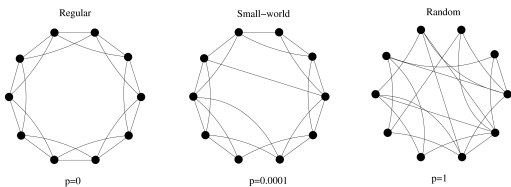
Klaszterezettség/transzitivitás (Clustering coefficient)

$$C = \frac{3 \times \text{háromszögek száma}}{\text{összefüggő ponthármasok száma}}$$

- Kisvilág gráfokban (pl. társadalmi hálózatokban) ez a szám nagy („A barátom barátját nagy valószínűséggel én is ismerem”), szemben a véletlen gráfban, ahol 0-hoz tart.
(*Szorgalmi: számoljuk ki*)

Watts-Strogatz modell ²

- Kiindul egy 4-reguláris gráfból (minden pont foka 4)
- Minden élt p valószínűséggel átdrótoz (azaz (i, j) él esetén választunk véletlenül egy k pontot, és p valószínűséggel töröljük (i, j) -t és behúzzuk (i, k) -t)



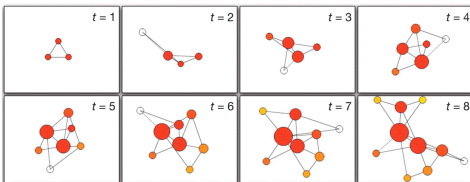
$\implies \sim \log n$ az átmérő; ha (i, j) és (i, k) is él, akkor nagy valószínűséggel (j, k) is az (azaz háromszövek száma nagy)

²Watts & Strogatz, *Nature*, 1998

Barabási-Albert modell ³

- Konstruktív modell – **hogyan fejlődhet ki egy hálózat?**
- A **preferential attachment modell**:
 - 1 kezdetben egy összefüggő G_0 gráf n_0 ponton
 - 2 t időpontban hozzáadunk G_t -hez egy új v pontot úgy, hogy

$$\mathbb{P}(v\text{-t összekötjük egy meglévő } i\text{-vel}) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$



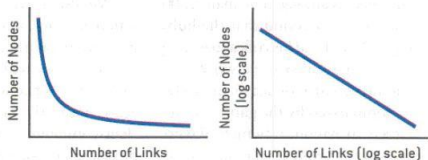
a későbbiekben részletesen tárgyaljuk a modellt

³Barabási & Albert, *Science*, 1999

Skálafüggetlen fokszámeloszlás

A fokszámeloszlás az ún. hatványtörvényt követi:

$$\mathbb{P}(k_i = k) = ck^{-\alpha},$$



A valóságban megjelenő hálózat jelentős része ilyen tulajdonságú (a későbbiekben részletesen tárgyaljuk)

A konfiguráció modell

- $G(n, \mathbf{k})$ – ahol $\mathbf{k} = (k_1, k_1, \dots, k_n)$ fokszámsorozat adott ($\sum_i k_i$ páros!)
- Pl. ha minden k_i egyenlő, akkor egy reguláris gráfot kapunk; ha k_i -k Poisson-eloszlású véletlen változók c/n várható értékkel, akkor egy $G(n, p)$ típusú gráfhoz „kerülünk közel”
- Hogyan generálnánk le a gráfot, ha adott n és \mathbf{k} ?

$$\mathbb{P}(i \text{ és } j \text{ összekötött}) = \frac{k_i k_j}{2m}$$

A megfigyelt mintázatok a hálózatokban mennyire magyarázhatók pusztán a fokszámok ismeretében?