

Valószínűség, feltételes valószínűség, diagnosztikus tesztek



Szűcs Mónika, Griechisch Erika, Rárosi Ferenc
SZTE ÁOK-TTIK Orvosi Fizikai és Orvosi Informatikai Intézet

Utoljára frissítve: 2018. augusztus 31.



1. A leckében előforduló fogalmak

- **Véletlen kísérlet:** olyan kísérlet, vagy megfigyelés, aminek kimenetele (vagy lefolyása) nincs egyértelműen meghatározva az általunk ismert körülmények által. Egy esemény véletlen volta nagy mértékben függ attól, hogy mennyi információ áll rendelkezésünkre a valóságról. A véletlen kísérlet tetszőleges számban megismételhető. Például feldobunk egy pénzérmét, feldobunk egy dobókockát, megmérjük a Tisza vízállását egy rögzített jövőbeni időpontban, megmérjük az ajtónkon belépő első ember vérnyomását.
- **Elemi esemény:** a kísérlet egy lehetséges kimenetele. Például az, hogy 1-est dobunk a dobókockával.
- **Esemény:** elemi események egy halmaza.
- **Összetett esemény:** elemi eseményekre bontható esemény. Például az, hogy párosat dobunk a kockával.
- **Biztos esemény:** az az esemény, ami mindig (minden kísérletnél) bekövetkezik. Például az, hogy 7-nél kisebb számot dobunk dobókockával.
- **Lehetetlen esemény:** az az esemény, ami soha nem következik be. Például az, hogy 7-nél nagyobb számot dobunk dobókockával.
- **Kiegészítő esemény:** egy A esemény kiegészítő eseménye az az esemény, amely akkor következik be, amikor A nem következik be. Például annak az eseménynek, hogy páros számot dobunk a dobókockával a kiegészítő eseménye az, hogy páratlan számot dobunk.
- **Összeg/ Unió** az A és B események összege (uniója) az az $A+B$ (vagy $A \cup B$) esemény, amely akkor következik be, ha A , vagy B közül legalább az egyik bekövetkezik. Mi ún. „megengedő vagy” kapcsolattal dolgozunk, tehát ha mindkettő esemény bekövetkezik, azt is bele vesszük az $A+B$ eseménybe.
- **Szorzat/ Metszet** az A és B események szorzata (metszete) az az $A \cdot B$ (vagy $A \cap B$) esemény, amely akkor következik be, ha A és B is egyszerre bekövetkezik.
- Ha $A \cdot B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B **egymást kizáró** események. Ez azt jelenti, hogy egyszerre nem fordulhatnak elő. Például az, hogy fejet és írást dobok, ez egyszerre nem lehetséges, ezek egymást kizáró események.

2. Valószínűség és feltételes valószínűség

- **A valószínűség heurisztikus elve:** ismételjünk meg egy kísérletet n -szer ugyanazon feltételek mellett, egymástól függetlenül, és figyeljük meg hányszor következik be az A esemény. Legyen ez a szám k ($0 \leq k \leq n$). Ha n nagy, a $\frac{k}{n}$ egy adott számot fog közelíteni. Ezt a számot az A esemény **valószínűségének** nevezzük és $P(A)$ -val jelöljük.
- **A valószínűség néhány alapvető tulajdonsága:**
 - Bármely esemény valószínűsége mindig egy 0 és 1 közötti szám ($0 \leq P(A) \leq 1$).
 - Az összes lehetséges elemi esemény együttes valószínűsége 1. Másképpen mondva a biztos esemény valószínűsége 1.
 - Az A esemény komplementer eseményének valószínűsége: $1 - P(A)$.
- **Megjegyzés.** A biztos esemény valószínűsége 1, fordítva azonban nem igaz az állítás. Ha egy esemény valószínűsége 1, akkor az még nem szükségképpen a biztos esemény. Az 1 valószínűségű eseményeket ún. „majdnem biztos” eseményeknek nevezzük. A fentiekből következik továbbá, hogy a lehetetlen esemény valószínűsége 0. Fordítva azonban nem igaz az állítás. Ha van egy esemény, aminek a valószínűsége 0, akkor az még nem szükségképpen a lehetetlen esemény. A gyakorlatban azonban a nagy valószínűségű eseményekre számítani kell, míg egy adott, kicsi valószínűségű esemény ritkán fordul elő.
- **Az A esemény valószínűségének számítása, ha minden elemi esemény egyformán valószínű:**

$$P(A) = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes lehetséges kimenetel száma}}$$

- **Fontos:** Az előző képlet csak akkor használható, ha minden elemi esemény egyformán valószínű. Például annak a valószínűsége, hogy holnap beugrik a szobánkba egy rózsaszín elefánt NEM $\frac{1}{2}$. Azt mondhatjuk, hogy itt kettő kimenetel van: vagy beugrik, vagy nem ugrik be, de ezek korántsem egyforma valószínű kimenetek, ezért nem használható az fenti képlet.



- **Feltételes valószínűség** az A eseménynek a B eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége megadja az A esemény bekövetkezésének a valószínűségét, ha tudjuk hogy a B esemény már bekövetkezett vagy bekövetkezik. Jelölése: $P(A|B)$

Mi csak azzal az esettel foglalkozunk, ha B esemény valószínűsége nem 0 : $P(B) \neq 0$.

Formula: $P(A|B)$ az $A \cap B$ esemény bekövetkezéseinek száma osztva a B esemény bekövetkezéseinek számával:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}, \text{ vagyis}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- A és B **független**, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3. Diagnosztikus tesztek

- A **diagnosztikus tesztek**et egy betegség jelenlétének vagy hiányának detektálására használjuk.
- A **gold standard** teszt a jelenleg legjobbnak tartott teszt. Gyakran invazív, vagy drága, ezért keresünk kevésbé drága, non-invazív tesztek, szűrővizsgálatokat ezeket hívjuk **új teszt**nek.
- 2×2 táblázattal hasonlítjuk össze az új teszt és a gold standard teszt eredményeit. (A negatív gold standard teszt eredmény nem feltétlenül jelenti, hogy a páciens teljesen egészséges, csupán azt, hogy a vizsgált betegségre negatív.)

		GOLD STANDARD		TOTAL
		BETEG (pozitív)	EGÉSZSÉGES (negatív)	
ÚJ TESZT	POZITÍV	valós pozitívak (a)	ál pozitívak (b)	a+b
	NEGATÍVAK	ál negatívak (c)	valós negatívak (d)	c+d
	TOTAL	a+c	b+d	a+b+c+d

A diagnosztikai eljárásokkal kapcsolatosan sok mérőszám definiálható. Mi csak a leggyakrabban használtakat mutatjuk be:

- **Validitás:** a helyesen diagnosztizált egyedek aránya

validitás = $P(\text{helyes diagnózis}) =$

$$\frac{\text{valódi pozitívak száma} + \text{valódi negatívak száma}}{\text{összes vizsgált egyed száma}} = \frac{a + d}{a + b + c + d}$$

- **Szenzitivitás/érzékenység:** a valódi pozitív betegek számának aránya a teljes betegszámhoz viszonyítva, vagyis annak a valószínűsége, hogy a vizsgált egyed teszteredménye pozitív, feltéve, hogy beteg.

szenzitivitás = $P(\text{az új teszt eredménye pozitív} \mid \text{beteg}) =$

$$\frac{\text{valódi pozitívak száma}}{\text{összes beteg egyed száma}} = \frac{a}{a + c}$$

- **Specifitás:** a valódi negatívak számának aránya a kontrollcsoport teljes létszámához viszonyítva, vagyis annak a valószínűsége, hogy a vizsgált egyed teszteredménye negatív, feltéve, hogy egészséges.

specifitás = $P(\text{az új teszt eredménye negatív} \mid \text{egészséges}) =$

$$\frac{\text{a valódi negatívak száma}}{\text{összes egészséges egyed száma}} = \frac{d}{b + d}$$

- **Pozitív jósló érték (PPÉ, PPV):** a valódi pozitív betegek számának aránya a pozitív teszteredményűek számához viszonyítva, vagyis annak a valószínűsége, hogy a vizsgált egyed beteg, feltéve, hogy a teszt eredménye pozitív.

PPÉ = $P(\text{beteg} \mid \text{az új teszt eredménye pozitív}) =$

$$\frac{\text{valódi pozitívak száma}}{\text{az összes pozitív teszteredmény száma}} = \frac{a}{a + b}$$

- **Negatív jósló érték (NPÉ, NPV):** a valódi negatívak számának aránya a negatív teszteredményűek számához viszonyítva, vagyis annak a valószínűsége, hogy a vizsgált egyed egészséges, feltéve, hogy a teszt eredménye negatív.

NPÉ = $P(\text{egészséges} \mid \text{az új teszt eredménye negatív}) =$

$$\frac{\text{valódi negatívak száma}}{\text{összes negatív teszteredmény száma}} = \frac{d}{c + d}$$

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Felhasznált irodalom

- Reiczigel Jenő, Harnos Andrea, Solymosi Norbert: Biostatisztika nem statisztikusoknak, Pars Kft. (2014)
- Prékopa András: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó (1980)
- Reiczigel Jenő: Válogatott fejezetek a biostatistikából, SZIE ÁOTK, (2005), <https://docplayer.hu/279567-Reiczigel-jeno-valogatott-fejezetek-a-biostatistikabol.html> (hozzáférés: 2018.08.31.)

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült
az Európai Unió támogatásával.
Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE