

Vektor autoregresszió (VAR)	Olvasási idő: 20 perc 	Készítette: Csiki Máté 
--------------------------------------	--	--

Fogalma

A vektor autoregressziós (VAR) modell az n darab y változó p -vel késleltetett értékeinek időbeli visszacsatolására épül.

- VAR egyenlet: $y_t = \text{const.} + A_{t-p}y_{t-p} + \varepsilon_t$
 - Feltételezzük, hogy i változónk vannak T időhosszúsággal egy Y matrixban:
$$Y = \begin{bmatrix} y_{1,t} & y_{i,t} & y_{l,t} \\ y_{1,t-p} & y_{i,t-p} & y_{l,t-p} \\ y_{1,t-T} & y_{i,t-N} & y_{l,t-N} \end{bmatrix}$$
 - p késleltetés mellett (lag)
- A vector autoregresszív (VAR) folyamatok egy kisebb mennyiségű idősoros változó adatgeneráló folyamatát jellemzik, ahol mindegy változó esetén egy előzetes (priori) engogenitást feltételezünk, és figyelembe vesszük azok dinamikáját. Ez az eljárás rögzíti az N számú idősoros változók halmazának dinamikus interakcióit: $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{Kt})'$. Az alap VAR modell az alábbiak szerint épül fel Lütkepohl – Kratzig (2004) alapján:
 - $y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t$
- Ahol az y_t a modellváltozókat tartalmazó $(N \times 1)$ -es vektor, az A_i egy $(N \times N)$ -es autoregressziós koefficienseket tartalmazó mátrix és az $u_t = (u_{1t}, \dots, u_{Kt})'$ a nem megfigyelt hibatag, amely $(K \times 1)$ -es gauss-eloszlású, diszkrét reprezentációjú fehérzaj-folyamatot tartalmazó vektor, valamint $u_t \sim (0, E(u_t, u_t'))$ egy pozitív definit kovariancia mátrix.

Tulajdonságok

- mindegyik endogén változó a **saját** és a **többi változó késleltetett értékeinek** lineáris függvénye: $y_t = F y_{t-1} + u_t$
- a VAR:
 - összegzi a változók együttmozgását
 - előrejelzi a változók értékeit
- A változók egyidejű kapcsolatai az alábbiak szerint épülnek fel: $Ay_t = By_{t-1} + e_t$
- mire használható a VAR²⁴?
 - változókban történő gazdaságpolitika által generált elmozdulások megfigyelésére
 - ehhez szükséges az ok-okozati (kauzalitás) viszonyok megállapítása (identifikáció)

²⁴ Hasznos blogbejegyzés a témához kapcsolódóan: <http://blog.mindymallory.com/2018/02/basic-time-series-analysis-the-var-model-explained/>

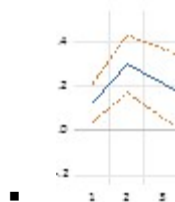
- amely jellemzően közgazdasági elméleten alapszik
- Granger-féle oksági vizsgálat:
 - Amit elvárunk: X változó Granger értelmében oka Y változónak, de Y ne legyen Granger értelmében oka X -nek
 - Másképpen: Azt mondjuk, hogy amennyiben az X változó figyelembevétele a modellben nem javít szignifikánsan Y előrejelzésén, akkor Y változó nem Granger-okka Y változónak
 - A $p < 0.1$ eseteket keressük

d) Impulzusválasz-függvények (Impulse Response Function (IRF))

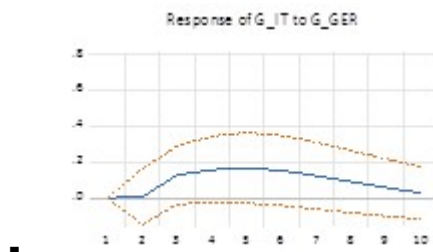
- Mi történik az egyik változóval, ha a másik változó megváltozik?
- A VAR paraméterek önmagukban nem sok információt tartalmaznak, illetve az R^2 értékének sem tulajdonít a szakirodalom nagy jelentőséget.
- Emiatt VAR modellek esetén az impulzusválasz-függvényeknek kiemelt jelentősége van
- impulzusválasz-függvények: egy adott modellváltozót ért egységnyi sokk hatását mutatják az összes modellváltozóra (a többi változó állandóságát feltételezve)
- i változó sokkja j változóra egyszerűen az elemek sorrendje az i sorban és j oszlopban a $C_k = \frac{dy_t}{du_{t-k}}$ mátrixban
 - Az impulzusválasz-függvényeket k függvényében ábrázoljuk:

$$J_{i,j,k} = \frac{dy_{i,t}}{du_{j,t-k}}$$

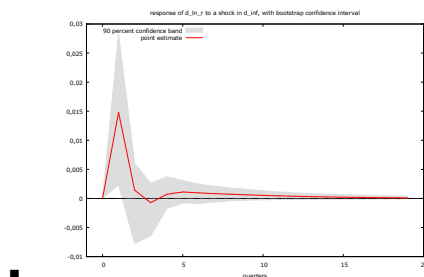
- Az IRF jellemzően használ bizonyos strukturális korlátozásokat a hibatag mátrixával kapcsolatban, amelyek később kerülnek bemutatásra.
- Fontos: IRF-et a hiányzó és kiugró értékek jelentősen befolyásolhatják!
- **Értelmezése:** Az ábrán látható „kék” (középső) átlagos érték szignifikáns, amíg ± 2 standard hiba (SH) vonal (vagyis a konfidencia intervallum) az X (idő) tengely másik oldalára nem kerül.
 - Ebben az esetben az IRF szignifikáns:



- Ebben az esetben az IRF **nem** szignifikáns:



- Ebben az esetben az IRF **csak** az első negyedévben szignifikáns



e) Variancia dekompozíció

- Lehetővé teszi annak a meghatározását, hogy mely sokkok meghatározóak bizonyos változók rövid- és hosszú távú alakulásában.
 - Az elemzett változó varianciájának hány százaléka (%) származik a modell többi változójának varianciájából?
- i változó bizonytalanságának mekkora hányada tulajdonítható a j -edik sokknak h periódus után: $VD_{i,j,h} = \frac{\sum_{k=0}^h (kc_{i,j})^2}{\sum_{k=0}^h \sum_{l=1}^n (kc_{i,l})^2}$
- A VD sokkal robusztusabb hiányzó és kiugró adatok esetén.

f) Strukturális VAR (SVAR)

- Mik a dinamikus tulajdonságai a változóknak? → nézzük a késleltetett koefficienseket!

$$\begin{aligned}\Delta y_t &= const_{.01} + \beta_{11,1}\Delta y_{t-1} + \beta_{12,1}\pi_{t-1} + \beta_{13,1}i_{t-1} + u_{1t} \\ \pi_t &= const_{.02} + \beta_{21,1}\Delta y_{t-1} + \beta_{22,1}\pi_{t-1} + \beta_{23,1}i_{t-1} + u_{2t} \\ i_t &= const_{.03} + \beta_{31,1}\Delta y_{t-1} + \beta_{32,1}\pi_{t-1} + \beta_{33,1}i_{t-1} + u_{3t}\end{aligned}$$

- A változók hogyan lépnek kölcsönhatásba egymással? → változók közötti koefficiensek
- Mekkora lehet az infláció holnap? → előrejelzés (forecasting)
- Mi a hatása a monetáris politikai sokknak (kamatláb változás) a GDP-re és az inflációra nézve? → ???
 - A kamatláb megváltozásának forrása különböző lehet
 - a jegybank szisztematikus válaszreakciója (irányadó kamatrátá) ← Taylor-szabály
 - $i_t = r^* + a_1 infl_t + a_2 opg_t$ a szisztematikus változások a reálgazdaságból származnak, de: $+e_t$ ami a nem várt monetáris politika változás (sokk) (gazdaságpolitikai preferenciák megváltozása)
 - az exogén (modellen kívüli) impulzus: az egyenletben a $+e_t$ rész
 - Mire van szükségünk a kérdések megválaszolására?
 - A változókra**, amelyre a monetáris politika hatni tud
 - Válasszuk szét** ezen változó azon részét amelyet a monetáris politika befolyásol
 - Határozzuk meg** ezt az impulzust (sokkot), amelyet később monetáris politikai sokknak nevezünk
 - redukált formájú VAR erre nem feltétlen képes: lineáris kapcsolatokkal foglalkozik az $u_{i,t}$ -k (sokkok) között, amely nem elég, illetve a jelenbeli kapcsolatok helyett a múltbéli kapcsolatokra fókuszál.
 - dinamikus okozati hatása $e_{i,t}$ -nek π_t -ra and Δy_t -re
 - ezt nevezzük π_t impulzusválaszának az $e_{i,t}$ sokkra
 - becsülni kell: $\Delta\pi_{t+h}/\Delta e_t$

- A redukált formájú hibatagokat nem lehet strukturális sokk-ként értelmezni

○ Redukált forma: $y_t = Fy_{t-1} + u_t$

○ Strukturális forma: $Ay_t = By_{t-1} + e_t$

○ azaz: $u_t = A^{-1}e_t$ amely felírható az alábbi módon:

$$\begin{bmatrix} u_t^{\Delta y} \\ u_t^{\pi} \\ u_t^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{bmatrix}$$

○ Az identifikációs probléma A^{-1} -et egyszerűsíti

○ Ezek után felírhatjuk a variancia-kovariancia mátrixot ($\sum u$):

$$\sum u = A^{-1}A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{u1}^2 & \sigma_{u1,u2} & \sigma_{u1,u3} \\ - & \sigma_{u2}^2 & \sigma_{u2,u3} \\ - & - & \sigma_{u3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{-1}$$

○ De 9 ismeretlen változónk van ($A^{-1}A^{-1}$), de csak 6 egyenletünk

○ Bizonyos feltételezésekkel kell éljünk az A^{-1} paramétereinek esetében

○ paraméterek restrikciója (feltételezések)

- Zéró rövid távú restrikció (másnéven rekurzív, vagy **Cholesky**, vagy ortogonális)

- Feltételezzük, hogy bizonyos koeficiensnek értéke nulla (rövid táv, első periódus):

$$\begin{bmatrix} u_t^{\Delta y} \\ u_t^{\pi} \\ u_t^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{bmatrix}$$

- e_{1t} hatással van a többi változóra egyidejűleg azonnal

- e_{2t} csak π -re hat egyidejűleg, míg Δy_t -re nem

- e_{3t} csak az i_t -re hat egyidejűleg

- Az első egy **keresleti sokk**, a második egy **kínálati sokk**, harmadik egy **monetáris politikai sokk** (MP)

- A keresleti sokk a növekedésre, inflációra és kamatlábra hat $\rightarrow$ pozitív v. negatív értékek

- A kínálati sokk hat az inflációra és a kamatlábra, de csak bizonyos késéssel a növekedésre

- A monetáris sokk hat a kamatlábra, de csak késéssel (lag) hat a növekedésre és inflációra (Isd. M. Friedman-t a MP késleltetett hatásairól)

- Ezt az azonosítási sémát a variancia-kovariancia mátrix Cholesky dekompozíciójával (rekurzív módon) hajtjuk végre

- Zéró hosszú távú restrikció (másnéven **Blanchard-Quah**)

- a sokkot csak abban a sorban keresi meg, ahol a változó megjelenik

- A hosszú távú reakciókat korlátozzuk

- A sokk kumulált hosszú távú hatása nulla

- A sokk hatása t időpontban: az y_t -re (hosszú távon):

- ebből egyenletből: $y_t = Fy_{t-1} + A^{-1}e_t$

- $y_{t,t+\infty} = A^{-1}e_t + FA^{-1}e_t + F^2A^{-1}e_t + \dots + F^\infty A^{-1}e_t$

- ez az egyenlet lesz: $y_{t,t+\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} F^j A^{-1}e_t = (I - F)^{-1}A^{-1}e_t = De_t$

- A D a kumulatív hatása az e_t sokknak t időponttól a végtelenig

- korlátozva a hosszú távú hatást

- A sokk kumulált hosszú távú hatása nulla

-

$$\begin{bmatrix} \Delta y_{t+\infty} \\ \pi_{t+\infty} \\ i_{t+\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{bmatrix}$$

- d_{13} a MP sokk kumulatív (hosszú távú) hatását tartalmazza a GDP-re
- Ebben az esetben hogyan korlátozzunk? A válasz a pénz semlegessége (a mennyiségi pénzülméletből) $d_{13} = 0$
 - A mennyiségi pénzülmélet kimondja a pénz semlegességét, azaz a pénzkínálat változása (közvetve a kamatláb változása) csupán a nominális változókra (itt árszínvonal) hat és nincsen hatása a reálváltozókra (legalább hosszú távon)
- Megengedhetjük, hogy egy változó reagáljon egy sokkra, de korlátozhatjuk az sokk hatásait:
 - Ehhez a közgazdasági elméleteket (vagy néha a józan ész) használjuk
 - A pozitív keresleti sokk: növeli a GDP-t és az inflációt
 - A pozitív kínálati sokk: növeli a GDP-t, de csökkenti inflációt
 - A pozitív (szigorító) MP sokk: növeli a kamatlábat, de csökkenti a GDP-t és az inflációt

$$\begin{bmatrix} \Delta y_{t+\infty} \\ \pi_{t+\infty} \\ i_{t+\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & - \\ + & - & - \\ d_{31} & d_{32} & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \\ e_{3t} \end{bmatrix}$$

- A különböző identifikációkból válogatni kell
- Probléma: előfordulhat, hogy sok "egyéb" sokk teljesíti ezeket a feltételeket
- A megfelelő identifikáció: lehetővé teszi a következő kérdés megválaszolását: Milyen hatással van a monetáris politikai sokk a GDP-re és az inflációra?
- Hogyan értelmezhetjük a SVAR modellek eredményeit?
 - **Impulzusválasz-függvények**
 - Mi a reakciója a változók jelenbeli és jövőbeli értékeinek
 - a strukturális sokkok egységnyi növekedésére,
 - feltételezve, hogy ez a sokk (hibatag) a következő időszakokban a nullához tér vissza
 - és az összes többi sokk (hibatag) értéke zérus?
 - Feltétel: a sokkok (hibatagok) nem korrelálnak
 - **Előrejelzési variancia dekompozíció**
 - Az előrejelzési hiba varianciájának hány százaléka (%) származik a modell a strukturális sokkjaiból?
 - Ezzel az információval választ tudunk adni arra, hogy: a milyen fontosságúak (erősségűek) a különböző sokkok a változók befolyásolásában
 - **Historikus dekompozíció**
 - A Δy_t szórását (a feltétel nélküli átlagtól) mekkora mértékben határozzák meg strukturális sokkok?
 - A strukturális sokkok hogyan távolítják el a változókat azok egyensúlyi értékeitől

Források

- Zéró rövid távú restriktció

- Stock & Watson (2001). "Vector Autoregressions" Journal of Economic Perspectives
- Zéró hosszú távú restrikció
 - Blanchard & Quah (1989). "The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances", American Economic Review
- Restrikciók
 - Uhlig (2005). "What are the effects of monetary policy on output? Results from an agnostic identification procedure" Journal of Monetary Economics

Önellenőrző kérdések

1. Hogyan kezeli az endogenitást a VAR modell?
2. Mit reprezentál az impulzus-válasz függvény?
3. Az impulzus válasz függvény várható értéke minden esetben pozitív, a konfidencia-intervallum alsó tartományát jelentő vonal pedig negatív értékekkel bír. Szignifikáns-e az eredményünk?
4. Mit reprezentál a variancia-dekompozíció?

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

