



<p>Feltételes szórás: GARCH; Feltételes variancia- kovariancia mátrix: DCC- GARCH</p>	<p>Olvasási idő: 45 perc</p> 	<p>Készítette: Dr. habil. Kiss Gábor Dávid</p> 
--	--	---

Feltételes szórás: GARCH

a) Modell

Az autoregresszióból és heteroszkedaszticitásból fakadó problémák kezelésének meghatározó eszközét a GARCH modellek jelentik (Chan 2002).

i. ARCH modell

Ehhez először szükség van az autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitás (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* - **ARCH**) modelljének bemutatására. Eszerint a hibatag varianciája adott t időpontban az előző időszakok négyzetes hibatagjainak függvénye. A „feltételesség” a „ t ” időtényező bevonását jelenti – azaz a heteroszkedaszticitás nagyrészt betudható endogén folyamatoknak. Az ARCH (p) folyamat (42) az alábbi módon épül fel:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t; \quad \sigma_t^2 \equiv E(r_t^2 \mid \Omega_{t-1}) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i}^2, \quad (42)$$

ahol r_t jelöli az idősor logaritmikus hozamát, míg $\Omega_{t-1} = \sigma(r_{t-1}, r_{t-2}, \dots)$ a $t-1$ időszakban a volatilitás terében felgyülemlett múltbeli információkat tartalmazza, feltéve, hogy $\alpha_i \geq 0$ $i=0, \dots, p$ -re és $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$ biztosítja az aszimptotikus stacionaritást (Petrimán-Tulassay 2005, Chan 2002). Az r_t feltételes varianciája tehát az r_t^2 korábbi értékei alapján változik egy AR(p) modell módjára. Az ARCH (q) gyakorlati alkalmazását nehezíti a tőkepiaci hozamoknál tapasztalható volatilitás fennmaradása (*volatility persistence*), miközben az r_t^2 egymást követő elemei között a korreláció nem túl magas – mindez magas q -t, azaz túl sok paraméter bevonását igényli pozitív α_i kikötése mellett.

ii. GARCH modell

Az általánosított ARCH (GARCH) modell (45) esetében a fenti problémák elkerülhetőek a késleltetési (*lag*) operátor alkalmazásával. A **GARCH(p, q)** modellben p jelöli a késleltetés hosszát, σ^2 és q az ARCH folyamatot ε^2 , α_i a jelenbeli hírek feltételes varianciára gyakorolt hatását, míg β_i a volatilitás fennmaradását – azaz az új hírek régi információkra gyakorolt sokkját (Davidson-MacKinnon 2003):

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2. \quad (45)$$

A GARCH (1,1) modell esetében az α_1 és β_1 paraméterek esetében kulcsfontosságú a megfelelő definiáltság, miután e paraméterek a modell alábbi tulajdonságait testesítik meg:

1. A paraméterek esetében a gyakorlatban többnyire érvényesül az $\alpha_1 + \beta_1 \cong 1$ egyenlet. Amennyiben az összeg pontosan egyes értéket vesz fel, az $\{r_t\}$ folyamat megszűnik gyengén stacionernek lenni és integrált GARCH(1,1) [IGARCH(1,1)] modellt kapunk, ahol a volatilitás fennmaradása (*perzisztancia*) rendkívül erős (mindazonáltal továbbra is létezik stacionárius eloszlása (Nelson 1990)).

2. A GARCH(p,q) folyamat alapmodellje azt sugallja, hogy a jelenbeli volatilitás csak a múltbeli volatilitás és a hozamok függvényében változik – és nincs különbség a rossz és a jó hírekre adott reakciók között. Ezt az irreálisnak tűnő szimmetrikus viszonyt kezelik az aszimmetrikus TGARCH, EGARCH és NGARCH modellek.
3. Az ε_t hibatag normál eloszlásának feltételezése nem kulcsfontosságú, léteznek vastagfarkú megoldások is, amelyek például t-eloszláson alapulnak.

iii. Nemlineáris és exponenciális GARCH modellek

Mindennek fényében megkülönböztethetünk szimmetrikus és aszimmetrikus modelleket, valamint beépíthetünk nemlineáris reakciókat²¹. A nemlineáris reakciók iskolapéldája Kasch-Haroutounian és Price (2001) szerint az **nemlineáris GARCH (NGARCH)** modell (46), amely $\alpha_2 < 2$ esetben az innovációkra adott korlátozott választ építi be az alábbi módon:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 |\varepsilon_{t-1}|^{\alpha_2} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (46)$$

A negatív hozamokat gyakrabban követi magasabb volatilitás, mint ahogyan azt a pozitív hozamok esetében találhatnánk (Black (1976) óta ezt a jelenséget **tőkeáttételi hatásnak** hívjuk) – az aszimmetrikus modellek tehát alkalmasak az aszimmetrikus valószínűségi eloszlással bíró piaci idősorok tanulmányozására.

Az **exponenciális GARCH (EGARCH)** (47) esetében a logaritmusok használata egy nemnegativitási kikötést jelent, az a α_2 jeleníti meg a tőkeáttételi hatást a tegnapi sokkok modellbe illesztésével (Nelson 1991):

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \alpha \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \gamma \left[\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right] + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2). \quad (47)$$

iv. Aszimmetrikus GARCH modellek: TARCH, GJR-GARCH, APARCH

Az aszimmetria jelentősége a negatív hírekre adott erősebb reakció megragadásában rejlik, a negatív újdonságok ezen preferenciáját az α_i és γ_i együttes alkalmazása jelenti, szemben a pozitív hírekkel, ahol egyedül az α_i vehető figyelembe. A Glosten, Jarannathan és Runkle (1993) által létrehozott **GJR GARCH** és **threshold ARCH (TARCH)** egy aszimmetrikus megközelítést jelenti a GARCH-ok világának, miután módot adnak az egyszerűbb szimmetrikus (ARCH, GARCH) megközelítések és az aszimmetrikus megközelítésen belül az innovációknál négyzetekkel (GJR) és abszolút értékekkel (TARCH) (50) operáló megoldások összehasonlítására. Az aszimmetrikus reakciókat egy S indikatív dummy (bináris) változó (49) segítségével ragadja meg:

$$\begin{cases} S_{t-i}^- = 1, \text{ amennyiben } \varepsilon_{t-i} < 0 \\ S_{t-i}^- = 0, \text{ amennyiben } \varepsilon_{t-i} \geq 0 \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \text{TARCH: } \sigma_t &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{i=1}^o \gamma_i S_{t-i}^- |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i} \therefore \\ \text{GJR-GARCH: } \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^o \gamma_i S_{t-i}^- \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2 \end{aligned} \quad (50)$$

ahol $\alpha_i > 0$ ($i=1, \dots, p$), $\gamma_i + \alpha_i > 0$ ($i=1, \dots, o$), $\beta_i \geq 0$ ($i=1, \dots, q$), $\alpha_i + 0,5 \gamma_j + \beta_k < 1$ ($i=1, \dots, p$, $j=1, \dots, o$, $k=1, \dots, q$).

Négyzetes innovációk és $o=0$ esetén redukálhatjuk a modellt szimmetrikus GARCH-ra (majd azt $q=0$ -val ARCH-ra). Amennyiben $o > 0$, a négyzetes innovációk alkalmazásával GJR, míg abszolút értéket felvevő innovációk alkalmazásával TARCH modellt nyerünk.

²¹ Az aszimmetrikus GARCH modellekhez kapcsolódó képletek leírását a könnyebb áttekinthetőség kedvéért az egyes késleltetésű, azaz (1,1) illetve (1,1,1) esetekre értelmezve végzem el.

Az aszimmetrikus GARCH-ok családját a Ding, Granger és Engle (1993) közös cikkében leírt **APARCH(p,o,q)** – *Asymmetric Power ARCH* – modell (48) írja le a legátfogóbban:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^\delta, \quad (48)$$

ahol $\alpha_0 > 0, \delta > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$, és $-1 < \gamma_i < 1, i = 1, \dots, p, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$. Továbbá a $\delta \geq 2$ esetén teljesül a hibatag kovariancia stacionaritása, míg e_t standardizált reziduumot az alábbi módon nyerhetjük ki az aszimmetrikus abszolút hibatagokból: $e_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$, ahol $e_t \sim N(0,1)$. Az APARCH modellből az alábbi módon és megkötésekkel fejezhetünk ki egyéb GARCH modelleket az előbb idézett cikk „A” melléklete alapján:

1. Engle (1982) ARCH(q) modelljéhez a $\delta=2$ és $\gamma_i=0$ feltételek szükségesek, $i=1, \dots, p, \beta_j=0, j=1, \dots, q$ kikötése mellett
2. Bollerslev (1986) GARCH(p,q) modelljéhez a $\delta=2$ és $\gamma_i=0$ feltételeknek kell megfelelni, $i=1, \dots, p$ kikötése mellett
3. Taylor (1986) és Schwert (1990) GARCH modelljéhez $\delta=1$ és $\gamma_i=0$ feltételek szükségesek, $i=1, \dots, p$ kikötése mellett: $\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}$.
4. A később bővebben kifejtésre kerülő GJR GARCH modell megkapásához $\delta=2$ és $0 \leq \gamma_i < 1$ paraméterek szükségesek (az $-1 < \gamma_i < 0$ esetben az S_i^+ 1-es értéket vesz fel, ha $\varepsilon_{t-i} > 0$, tehát itt a szerzők megfordították az eredeti GJR GARCH logikáját, felerősítve a pozitív sokkok volatilitásra gyakorolt hatását).
5. Zakoian (1991) TARCH modelljéhez a $\delta=1$ és $\beta_j=0, j=1, \dots, q$ paraméterek szükségesek, ekkor: $\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i^+ \varepsilon_{t-i}^+ - \sum_{i=1}^p \alpha_i^- \varepsilon_{t-i}^-$, illetve $\beta_j \neq 0, j=1, \dots, q$ esetben egy sokkal általánosabb modellt kaphatunk, amely: $\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}$.
6. Higgins és Bera (1990) NARCH modelljéhez az $\gamma_i=0, i=1, \dots, p$ és $\beta_j=0, j=1, \dots, q$ teljesülésével juthatunk el: $\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i |\varepsilon_{t-i}|^\delta$,
7. Geweke és Pantula log-ARCH modelljéhez az $\delta \rightarrow 0$ konvergencia kikötése szükséges, így:

$$\log \sigma_t = \{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{i=1}^q \beta_i\} \log \omega - \sum_{i=1}^p \alpha_i \log \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \log (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \log \sigma_{t-j}.$$

b) Modell szelekció

Ebben a jegyzetben kizárólag az **APARCH-GJRGARCH-TARCH-GARCH modellek egymásra épülését** használjuk fel annak érdekében, hogy többféle paraméterezéssel illesszük azokat a vizsgált idősorokra, majd a legjobb illeszkedést mutató, a hibatagokból az autokorrelációt és heteroszkedaszticitást kiszűrésére alkalmas modellt válasszuk ki. Ehhez azonban először be kell mutatnom a GARCH modellek illeszkedésének becslésére használatos módszereket. Kasch-Haroutounian és Price (2001) a paraméterek becslése során a MLE (*Maximum Likelihood Estimation*) mentén a feltételes normál log-likelihood (továbbiakban LL) alkalmazását javasolja minden időegységre, ami megfelel a Kevin Sheppard MFE csomagjában található megoldással (*normloglik*). Először az egyedi LL-okat számolja ki (51), majd azok összeadását követően (52) kapjuk meg a várt LL-t:

$$l_t = -0,5 \log 2\pi + \log \sigma_t^2 - r_t^2 \sigma_t^{-2}, \quad (51)$$

$$LL = \sum l_t, \quad (52)$$

ahol r_t^2 normál eloszlású random változót, míg σ_t^2 a feltételes varianciát jelöli. A paraméterek és a robusztusság becslésére Sheppard ezt követően még a Matlab optimalizáló csomag *fminunc* függvényét használja.

A hibatagokat normál loglikelihoodok segítségével történő becslését kétféle módon lehet indokolni: – egyfelől, mert később ebből korrelációt kell számolnom és a véges szórást csak normál eloszlású hibatagokkal biztosíthatom (Cappiello et al. 2006), másfelől Sheppard (2009) az MFE toolbox dokumentációjában nyomatékosan felhívja a figyelmet az eljárás erős konzisztenciájára (345. oldal). Ez az erős konzisztencia biztosítja a paraméterbecslések valós paraméterek irányába történő konvergenciáját, még akkor is, ha hibás feltételes eloszlást becsültünk.

Az egymással versengő modellek esetében fennálló becslések jóságát (*goodnes of fit*) az Schwarz-féle információs kritérium (*Bayesian Information Criterion – BIC*) alkalmazásával értékelem. A BIC egy modell eltérését vizsgálja egy adott eloszláshoz képest – minél kisebb az BIC értéke, annál kisebb a különbség a becslés és a „valós modell” között.

- Akaike Információs Kritérium (Akaike Information Criterion, AIC): hagyományosan felülbecsüli a paraméterek számát.
 - $AR(p): AIC = \ln \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \widehat{u}_t(p)^2 \right] - \frac{2}{T} p$
 - $ARMA(p,q): AIC = \ln \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \widehat{u}_t^2 \right] - 2 * (p + q + 1)$
 - **Matlab: $AIC = ll - 2 * (1+p+q)$;**
- Schwarz vagy Bayezianus Információs Kritérium (BIC vagy SIC): hagyományosan alulbecsüli a paraméterek számát.
 - $AR(p): BIC = \ln \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \widehat{u}_t(p)^2 \right] - \frac{\log(T)}{T} p$
 - $ARMA(p,q): BIC = \ln \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \widehat{u}_t^2 \right] - \log(T) * (p + q + 1)$
 - **Matlab: $BIC = ll - \log(T) * (1+p+q)$**

A megfelelő GARCH modell kiválasztását a fent leírtak figyelembe vételével az alábbi módon végeztem:

1. TARCH/GJR GARCH és APARCH modellek megfelelő paraméterezésével többféle késleltetés mellett az alábbi modelleket versenyeztettem:
GARCH(p,q) (1,1)(2,1)(1,2)(2,2),
GJR GARCH(p,o,q) (1,1,1)(2,1,1)(1,1,2)(2,1,2),
TARCH(p,o,q) (1,1,1)(2,1,1)(1,1,2)(2,1,2),
APARCH(p,o,q) (1,1,1);
2. Kiszámoltam a modellekhez kapcsolódó standardizált hibatagokat: $\varepsilon_{it}^* = \frac{\varepsilon_{it}}{\sigma_{it}^2}$;
3. A standardizált hibatagokon egyes késleltetés mellett a homoszkedaszticitás vizsgálatára ARCH-LM tesztet futtattam;
4. A versengő modellek közül kiválasztottam azt, amelynek a standardizált hibatagja homoszkedasztikus – ellenkező esetben „hibaüzenet 1”.
5. A 4. lépésnél tovább szűkített mintából kiválasztom a legalacsonyabb BIC értékkel rendelkező modellt.

c) Illesztés Matlabban

A fenti lépések megoldására van szükség egy Matlab-algoritmus esetében is (Kevin Sheppard UCSD toolbox).

- <https://github.com/bashtage/mfe-toolbox>
- <https://www.kevinshppard.com/code/matlab/ucsd-garch/>

A számolás során standardizált logaritmikus differenciáltakat tartalmazó oszlopvektorokra van szükségünk (epsilon), emellett definiálni kell a hibatagok (p) és a feltételes volatilitás (q) visszatekintésének fokát. A szimmetrikus GARCH(p,q) és az aszimmetrikus GJR-GARCH/TARCH(p,o,q) modellek között az „o” paraméter 0 és 1 állásával választhatunk. Megválaszthatjuk a hibatagot is – ez alap esetben normális eloszlású ([] vagy 'NORMAL'), de választhatunk Student-T ('STUDENTST'), GED ('GED'), aszimmetrikus T ('SKEWT') eloszlások közül is. Korrelációk számításához normális eloszlást kell használnunk, míg idősorok szimulációja során érdemes megpróbálkozni valamelyik vastagfarkú eloszlással. A GJR-GARCH és TARCH modellek között a „tarch_type” 2 (alap) és 1 állásával választhatunk. Az outputok között megtaláljuk a paramétereket (konstans, alfa, gamma, béta), a loglikelihoodot, a feltételes varianciát (ht), a variancia-kovariancia-mátrix robosztussági paramétereit, valamint egy szöveges riportot és az információk kritériumokat (AIC, BIC). Az átlaggal már standardizált logaritmikus hozamot tovább standardizáljuk a homoszkedasztikus feltételes varianciával, amivel homoszkedasztikus logaritmikus hozamot kapunk.

```
rets=diff(log(data));  
epsilon= rets-mean(rets);  
[parameters,LL,ht,vcvrobust]=tarch(epsilon,p,o,q,error_type,tarch_type);  
[text,AIC,BIC]=tarch_display(parameters,LL,vcvrobust,epsilon,p,o,q, error_type,tarch_type);  
ehat =epsilon./sqrt(ht);
```

Előfordulhat, hogy egy eljárás tesztelése során bizonytalanra válunk azzal kapcsolatban, hogy az eredményeink valamilyen általános összefüggés vagy a történelem véletlen összjátéka nyomán jöttek-e létre. Ebben az esetben kifejezetten célszerű az idősorhoz legjobban illeszkedő (vastagfarkú) GARCH-modell megtalálása, majd a kinyert paraméterekkel egy komolyabb minta szimulálása és az eljárás ismételt tesztelése. Ehhez meg kell adni a szimulált idősor hosszát (t), a GARCH-paramétereket, a hibatag eloszlását és választani kell a TARCH és GJR-GARCH modellek között. Kimenetként megkapjuk a szimulált hozamokat (simulatedata) és a hozzájuk tartozó szimulált feltételes varianciákat (ht).

```
[simulatedata, ht] = tarch_simulate(t,parameters,p,o,q,error_type,tarch_type);
```

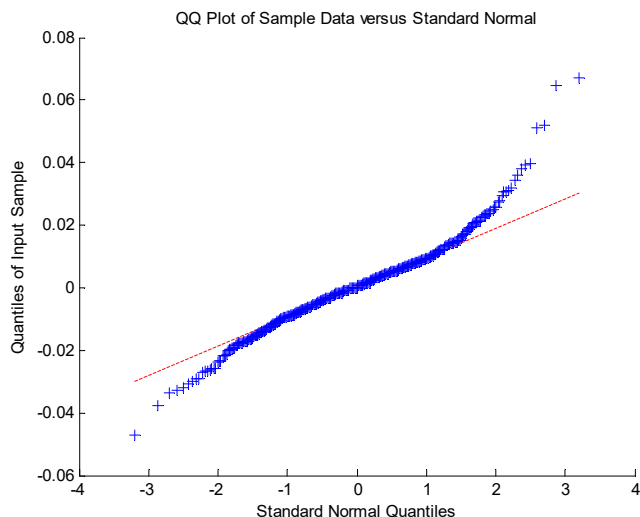
Lépések:

- 1: Logaritmikus differenciáltak kiszámítása (hiányzó adatok és komplex gyökök nélkül).
 - `rets= (diff(log(data)));`
- 2: Hozamok középre rendezése (opcionális).
 - `epsilon(:,j) = rets(:,j)-mean(rets(:,j));`
- 3: GARCH modellek illesztése különböző paraméterek mellett.
- 4: A feltételezhetően homoszkedasztikus hibatagok kiszámítása.
 - `ehat(:,m) = (epsilon(:,j))./sqrt(garchht(:,m));`
- 5: Homoszkedaszticitás tesztelése, a heteroszkedasztikus kimenetek megjelölése.
 - `results2{m}=lmttest2(ehat(:,m).^2,2);`
 - `H_htero_GARCH(:,m)=sum(results2{1,m}.pval>0.05)>0;`
 - `good_BIC=H_htero_GARCH.*(garchBIC);`
- 6: Legalacsonyabb BIC érték megkeresésével a legjobban illeszkedő modell kiválasztása.
 - `(garchBIC(:,m))==(min(good_BIC))`

d) Szimuláció

APARCH(1,1,1) modell illesztése a CZKHUF heti záró árfolyamból számolt logaritmikus hozamra, aszimmetrikus T eloszlású hibatagokat feltételezve. Ezt az idősor vastagfarkúsága indokolja: QQ-ploton a kék keresztekkel jelölt mérések S-alakban lógnak le az eloszlás szélein a piros szaggatott vonallal jelölt elméleti normális eloszlásról.

Pénzügyi idősorok elemzése – olvasólecke 4.



Az illesztés eredményeképpen látjuk, hogy a magas béta paraméter az múlt heti CZKHUF volatilitás 95 százalékos fennmaradását (perzisztenciáját) mutatja, valamint az forint gyengülése jellemzően a volatilitás növekedésével társult a magas gamma-paraméter alapján:

APARCH(1,1,1)

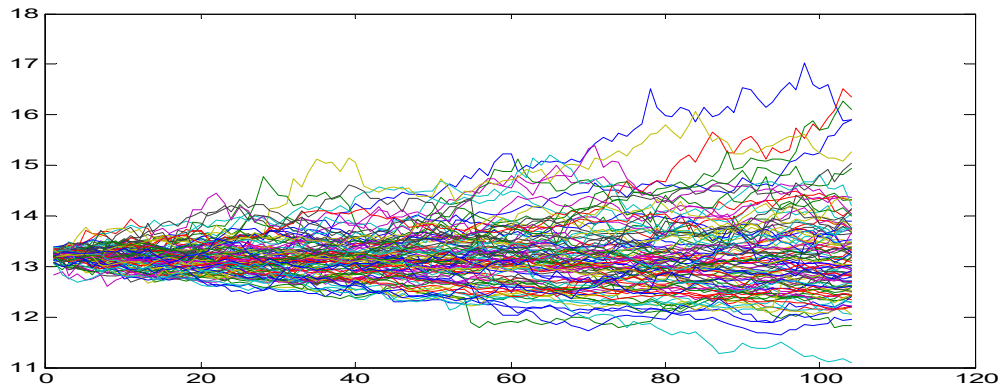
Loglikelihood: 2316.68

AIC: -3.1414

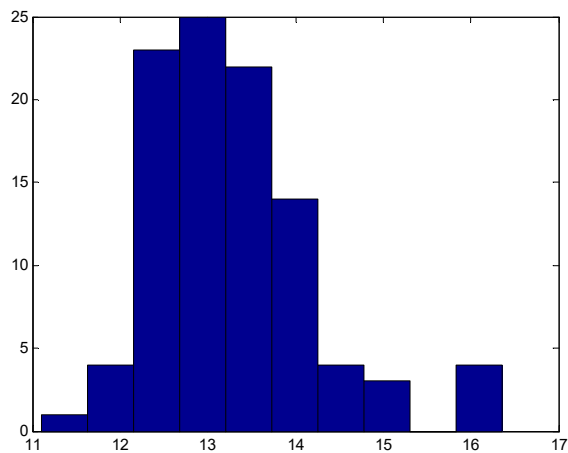
BIC: -3.0975

	Paramet.	Std. Err.	T-stat	P-val
omega	0.0000	0.0000	0.461	0.6447
alpha(1)	0.0422	0.0250	1.688	0.0913
gamma(1)	0.7067	0.5280	1.338	0.1808
beta(1)	0.9519	0.0173	55.1752	0.0000
delta	1.4482	0.5122	2.827	0.0047
nu	6.9208	1.6359	4.230	0.0000
lambda	0.0603	0.0537	1.123	0.2613

A CZKHUF szimulációja 100 ismétléssel, 2*52 (két év) előre tekintéssel. Ekkora a legyező ábrán egyfelől láthatóvá válik az egyes alternatív szimulációk időbeli fejlődése, másfelől az utolsó időállapotra illesztett hisztogram segítségével megfogalmazhatunk feltételezéseket a devizaárfolyam várható értékével, valamint az 5 százalékos valószínűségi tartományba eső optimista és pesszimista forgatókönyvekkel kapcsolatban.



- A szimulációk többsége a kiinduló (mint várható) érték körül ingadozott (13.0959 CZKHUF)



- A szimulációk alapján a forint gyengülését várhatjuk, miután a felső 5 százalékos kvantilis (optimista scenárió) 12.1311 CZKHUF, a pesszimista 95 százalékos kvantilis 15.1575 CZKHUF árfolyamot vetített előre.

- Matlab script:

```
ret=real(diff(log(data)));
cd 'C:\Users\kiss.gabor\Documents\MATLAB\MATLAB\UCSD_toolbox\UCSD_toolbox'
[parameters, LL, ht, VCVrobust, VCV, scores, diagnostics] = aparch(ret, 1, 1, 1, 'SKEWT');
[text,AIC,BIC]=aparch_display(parameters,LL,VCV,ret,1,1,1,'SKEWT')
for j=1:100
[simulatedata(:,j), ht] = aparch_simulate(250,parameters,1,1,1,'SKEWT');
end
for j=1:100
arf_sim(1,j)=data(end,1)+10*simulatedata(1,j);
for i=2:2*52
arf_sim(i,j)=arf_sim(i-1,j)+10*simulatedata(i,j);
end
end
end
Y(1,1) = prctile(arf_sim(end,:),5)
Y(2,1) = prctile(arf_sim(end,:),50)
Y(3,1) = prctile(arf_sim(end,:),95)
mean(arf_sim(end,:))
plot(arf_sim)
hist(arf_sim(end,:))
```

Feltételes variancia-kovariancia mátrix: DCC-GARCH

a) Modell²²

- **Egyváltozós eset:** egy adatvektor

$$\text{GARCH}(p,q): \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

- **Többváltozós eset:** adatmátrix
- A dinamikus feltételes korreláció (Dynamic Conditional Correlation, DCC) becslése során a $\sigma_{i,t}^2$ feltételes varianciát a $\sigma_{i,j,t}^2$ feltételes kovarianciát a ϕ_{t-1} hozzáférhető információk mellett elérhető $r_t | \phi_{t-1} \sim N(0, H_t)$ hozamok mellett illesztjük egy $t-q$ időpontban:

DCC-GARCH(p,q):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{i,t}^2 & \cdots & \sigma_{i,j,t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{j,i,t} & \cdots & \sigma_{j,t}^2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p \alpha_{i,j} \begin{bmatrix} e_{i,t-p}^2 & \cdots & e_{i,j,t-p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{j,i,t-p} & \cdots & e_{j,t-p}^2 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^q \beta_{i,j} \begin{bmatrix} \sigma_{i,t-q}^2 & \cdots & \sigma_{i,j,t-q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{j,i,t-q} & \cdots & \sigma_{j,t-q}^2 \end{bmatrix}$$

Matlab-kód (MFE toolbox):

```
[parameters, ll, Ht]=dcc(ret,[],1,1,1,1,1,1);
```

b) Érvék a DCC használata mellett

- A heteroszkedaszticitás figyelmen kívül hagyása a korreláció torzítottságát eredményezi: a korreláció növekedése egyaránt jelezheti a két változó közötti együttlmozgás vagy a volatilitás heteroszkedaszticitás miatti megnövekedését is Forbes és Rigobon (2002) bizonyítása alapján:
 - Jelölje δ az alacsony (l) és a magas (h) volatilitású időszakot: $1 + \delta \equiv \frac{\sigma_{xx}^h}{\sigma_{xx}^l}$
 - Az alábbi egyenletekkel írjuk fel a korrelációt: $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \beta \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$.
 - $\sigma_{yy}^h = \beta^2 \sigma_{xx}^h + \sigma_{ee} = \sigma_{yy}^l \left(1 + \delta \beta^2 \frac{\sigma_{xx}^l}{\sigma_{yy}^l} \right) = \sigma_{yy}^l (1 + \delta [\rho^l]^2)$
 - $\rho^h = \frac{\sigma_{xy}^h}{\sigma_x^h \sigma_y^h} = \frac{(1+\delta) \sigma_{xy}^l}{(1+\delta)^{0.5} \sigma_x^l (1+\delta [\rho^l]^2)^{0.5} \sigma_y^l} = \rho^l \sqrt{\frac{1+\delta}{1+\delta [\rho^l]^2}}$
 - Ami azt jelenti, hogy a korreláció a magas és alacsony volatilitású időszakok függvényében alakul.

c) Gyakorlati felhasználások

i. DCC illesztése

```
DCC_covariance_ab=squeeze(DCC_Ht(1,2,:));
```

```
DCC_variance_a=squeeze(DCC_Ht(1,1,:));
```

```
DCC_variance_b=squeeze(DCC_Ht(2,2,:));
```

```
DCC_correlation_ab=DCC_covariance_ab./(sqrt(DCC_variance_a).*sqrt(DCC_variance_b));
```

ii. Dinamikus béta stratégia

- $\beta = \frac{\sigma_{aM}}{\sigma_M^2}$

```
%Ht: variance-covariance matrix
```

```
T=size(ret);
```

²² További érdekességek a DCC-ről: <https://www.mdpi.com/2225-1146/1/1/115/htm>


```
for i=1:T(1,1)
    matrix(i,:)=Ht(end,:,i);
end
%beta
for j=1: T(1,2)
    beta(:,j)=matrix(:,j)./matrix(:,end);
end
```

iii. Minimális varianciájú portfólió dinamikus súlyozása

```
w(i,:) = sum(inv(Cov(i,:))) / sum(sum(inv(Cov(i,:))))
```

Forrás:

<http://medvegyev.uni-corvinus.hu/matlab/portfolio.m>

iv. Value-at-Risk szintek (5%, 1%)

```
cd 'C:\Users\tanar\Documents\MATLAB\MFEToolbox'
[parameters, ll ,Ht]=dcc(ret,[],1,1,1,1,1,1);
%2. VaR (5%) (1%) fit
threshold=1.65; %VaR(1%): 2.326 VaR(5%): 1.65
for j=1:11 %columns
    for i=1:length(ret)
        if ret(i,j)<mean(ret(:,j))- threshold *sqrt(Ht(j,j,i))
            VaR(i,j)=-1;
        elseif ret(i,j)>mean(ret(:,j))+ threshold *sqrt(Ht(j,j,i))
            VaR(i,j)=1;
        else
            VaR(i,j)=0;
        end
    end
end
end
```

v. CCC-GARCH szimuláció

- Nem lehetséges a DCC-GARCH folyamat szimulációja, ellenben konstans variancia-kovariancia mátrix feltételezése mellett szimulálhatunk CCC-GARCH modell segítségével.

```
cd 'C:\Users\tanar\Documents\MATLAB\MFEToolbox'
%model-estimations
[parameters] = ccc_mvlgarch(ret(:,8:14),[],1,0,1);
%simulation
for z=1:100
    [simulatedata]=ccc_mvlgarch_simulate(6,7,parameters,1,0,1);
    for j=1:7
        sim_ccc{j}(1,z)=data(end,j+7)+simulatedata(1,j)*100;
        for i=2:6
            sim_ccc{j}(i,z)=sim_ccc{j}(i-1,z)+simulatedata(i,j)*100;
        end
    end
end
end
```

```
for j=1:7
    for i=1:6
        Output_ccc(i,j)=mean(sim_ccc{j}(i,:));
        Output_10_ccc(i,j) = quantile(sim_ccc{j}(i,:),0.1);
        Output_90_ccc(i,j) = quantile(sim_ccc{j}(i,:),0.9);
    end
end
plot(Output_ccc(:,4))
plot(Output_10_ccc(:,4))
plot(Output_90_ccc(:,4))
```

Források

GARCH-modellek:

- Black, F. (1976): Studies in stock volatility changes. In Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economics Statistics Section. American Statistical Association, 177–181. o.
- Bollerslev, T. (1986): Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. Journal of Econometrics, 31, 307–327. o.
- Cappiello, L. – Engle, R. F. – Sheppard, K. (2006): Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns. Journal of Financial Econometrics. 4, 537–572. o.
- Chan, N. H. (2002): Time Series Applications to Finance. John Wiley & Sons, Inc.
- Davidson, R. – MacKinnon, J. G. (2003): Econometric Theory and Methods. Oxford University Press, New York.
- Ding, Z. – Granger, C. W. J. – Engle, R. F. (1993): A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. Journal of Empirical Finance, 1, 83–106. o.
- Engle, R. F. (1982): Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. Econometrica, 50, 987–1008. o.
- Glosten, L. – Jarannathan, R. – Runkle, D. (1993): Relationship between the expected value and volatility of the nominal excess returns on stocks. Journal of Finance, 48, 1779–802. o.
- Higgins, M. – Bera, A. (1990): A class of nonlinear ARCH models, Working Paper, Department of Economics, University of Wisconsin at Milwaukee.
- Kasch-Haroutounian, M. – Price, S. (2001): Volatility in the transition markets of Central Europe. Applied Financial Economics, 11, 93–105. o.
- Nelson, D. B. (1990): Stationarity and Persistence in the GARCH (1,1) Model. Econometric Theory, 6, 318–334. o.
- Petrimán Z. – Tulassay Zs. (2005): Bepillantás az ARCH modellek világába. Hitelintézeti Szemle, 4, 2. o.
- Sheppard, K. (2009): MFE MATLAB function reference financial econometrics. Unpublished paper, Oxford University, Oxford.
- Taylor, S. (1986): Modelling financial time series. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Zakoian, J. (1991): Treshold heteroscedasticity model, unpublished manuscript. INSEE.

DCC-modell:

- Engle, R. F. (2002): Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate GARCH Models. Journal of Business and Economic Statistics, 20, 3, pp. 377-389.

- Forbes, J. K. – Rigobon, R. (2002): No contagion, only interdependence: measuring stock market comovements. Journal of Finance, 57, 6, pp. 2223-2261.
- Marchioni U., Antropova S., McNaught C. (2015): Smart Beta Strategies as Outcome-Oriented Solutions in the Equity Space. The Journal of Index Investing, 6 (1), 65-78. o.

Önellenőrző kérdések

1. Mi a különbség a szimmetrikus és az aszimmetrikus GARCH-modellek között?
2. Ha két modell közül az egyiknek alacsonyabb a BIC értéke, akkor melyik választjuk?
3. Mit reprezentál egy részvénypiaci index feltételes szórása?
4. Milyen felhasználásai lehetnek a feltételes kovariancia-variância mátrixnak?
5. Miért lehet veszélyes az, ha a devizák korrelációja időben változó?

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

