

Kalkulus feladatok megoldása

9. Olvasólecke

Függvények teljes menetvizsgálata

Az olvasólecke szerzője



Kozma József

PhD, főiskolai docens

SZTE TTIK

Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 45 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.
Projekt azonosító:
EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

- ☐ A derivált és a monotonitás kapcsolata
- ☐ Szélsőértékvizsgálat, abszolút szélsőérték zárt intervallumon
- ☐ A derivált és a konvexitás kapcsolata, inflexiós pontok
- ☐ Teljes menetvizsgálat

Jó tanácsok az Olvasónak

Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt a szerző tanácsait. Ennek a leckének a feldolgozásához különösen fontos tudni a deriváltra vonatkozó ismereteket (8. lecke), illetve a függvények értelmezési tartományára, határértékére vonatkozóan tanultakat (7. lecke).

A gyakorlati OL fókusza

- Függvények növekedésének és csökkenésének kapcsolata a deriválttal
- Függvények szélsőértéke: abszolút és helyi szélsőérték
- Függvények konvex és konkáv jellege, inflexiós pontok
- Függvények menetvizsgálata

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ gyakorlati problémák megoldására használja a függvények viselkedéséről tanultakat;
- ✓ meg tudja állapítani, hogy egy függvénynek vannak-e abszolút szélsőértékei, illetve helyi minimuma vagy maximuma;
- ✓ értse a függvény viselkedését extrémális pontjainak, illetve inflexiós pontjainak környezetében;
- ✓ a valós függvényeket alkalmazva teljes menetvizsgálatot tudjon elvégezni egy függvénnyel kapcsolatban.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 45 perc.
- A szükséges időbe nem számítottuk bele az előismeretként nélkülözhetetlen megelőző olvasóleckék tartamának rövid átlismétlését.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

Az első feladatunk egy gazdasági problémát fogalmaz meg. Természetesen nem ragadhatja meg annak komplex jellegét. Csupán egy, a termelési folyamatra felállított modellben megfogalmazott kérdésre keresi a matematikai választ, majd a gyakorlati esetre vonatkozó megállapítást. A feladatban egy képzeletbeli gyártó cég szerepel.

A "Nagy Szívás" nevű, szivattyúkat gyártó és forgalmazó cég marketingosztálya felmérést készített az akváriumszivattyúk értékesítéséről szegedi üzleteinek forgalmi adatai alapján. Megállapították, hogy a heti kereslet és az akváriumszivattyúk bolti ára között az

$$a = 4000 - 10x, \quad 0 < x < 100$$

összefüggés áll fenn, ahol x az egy hét alatt eladott szivattyúk darabszáma, a pedig a bolti ár, amelyen eladták. Ha az akváriumszivattyúk előállítási költsége darabonként 3000 Ft, milyen eladási árat képezzenek a bolthálózatban, hogy maximalizálják a heti profitot?

Megoldás a 4. oldalon

2.2. Mintafeladat.

Határozza meg, hogy a következő függvény mely intervallumokon monoton, hol vannak helyi, illetve abszolút szélsőértékei, és mennyi az értékük?

$$f : x \mapsto \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Megoldás az 5. oldalon

2.3. Mintafeladat.

Vizsgálja meg a következő függvényt konvexitás szempontjából! Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény konvex, illetve konkáv!

$$f : x \mapsto \frac{1}{\ln x}$$

Megoldás a 7. oldalon

2.4. Mintafeladat.

Végezzen teljes függvényvizsgálatot a következő függvényen:

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

Ennek során állapítsa meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet; a függvény zérushelyeit; a szakadási helyeket, a szakadás jellegét, illetve a folytonossági intervallumokat; a szélsőértékek helyeit; a monotonitás intervallumait; a helyi és az abszolút maximumok és minimumok értékét; a szakadási helyeken a féloldali határértékeket, illetve a végtelenben vett határértékeket; mely intervallumokon konvex, illetve konkáv a függvény, van-e inflexió

pont; valamint ábrázolja a függvényt koordináta-rendszerben!

Megoldás a 9. oldalon

2.1. Mintamegoldások

2.1. Mintafeladat megoldása (3. o.)

A "Nagy Szívás" nevű, szivattyúkat gyártó és forgalmazó cég marketingosztálya felmérést készített az akváriumszivattyúk értékesítéséről szegedi üzleteinek forgalmi adatai alapján. Megállapították, hogy a heti kereslet és az akváriumszivattyúk bolti ára között az

$$a = 4000 - 10x, \quad 0 < x < 100$$

összefüggés áll fenn, ahol x az egy hét alatt eladott szivattyúk darabszáma, a pedig a bolti ár, amelyen eladták. Ha az akváriumszivattyúk előállítási költsége darabonként 3000 Ft, milyen eladási árat képezzenek a bolthálózatban, hogy maximalizálják a heti profitot?

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Függvény diszkrét értelmezési tartománnyal.
2. Függvény helyi és abszolút szélsőértéke.

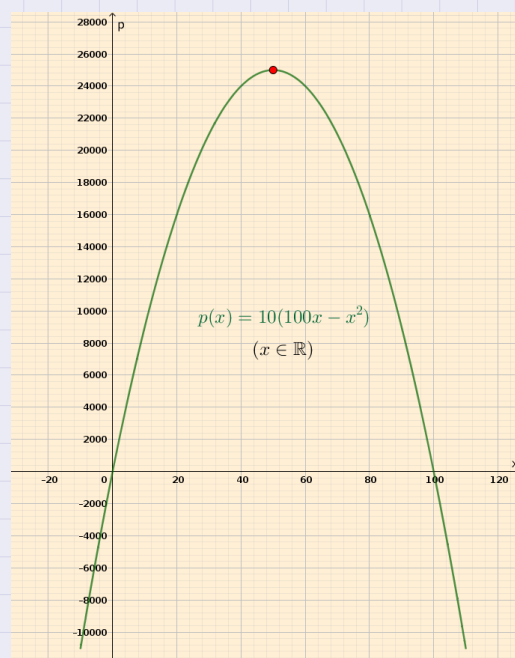
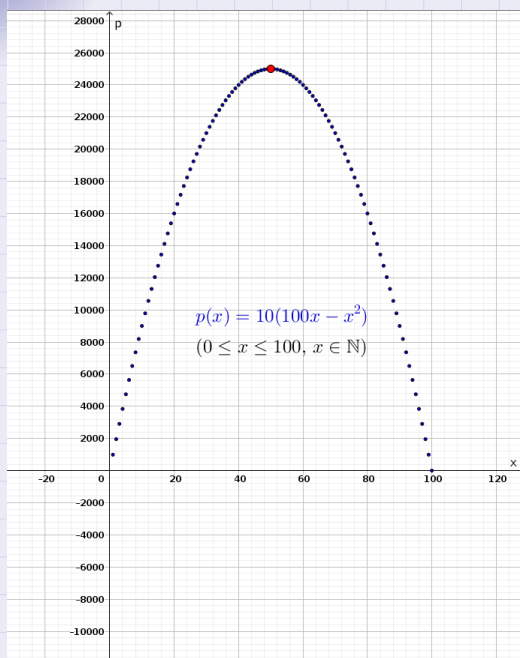
- (★) Ha hetente x darabot adnak el a áron, akkor a keletkező bevétel $a \cdot x = x(4000 - 10x)$ lesz.
- (★) Kiadásként jelentkezik a szivattyúk $3000x$ előállítási költsége.
- (★) A profit a kettő különbsége: $p(x) = x(4000 - 10x) - 3000x = 10(100x - x^2)$ lesz.
- (★) Ennek keressük a maximumát $0 < x < 100$ feltétel mellett.
- (★) Ez egy diszkrét függvény: értelmezési tartománya a $D_p = \{0, 1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ halmaz.
- (★) A bal oldali grafikonon ábrázoltuk a függvényt, melynek grafikonja diszkrét pontokból áll.
- (★) Jól látható, hogy van maximum, éppen $x = 50$ esetén.
- (★) Ekkor a profit nagysága: $p(50) = 25000$ forint.
- (★) A kalkulus eszközeivel a $p(x) = 10(100x - x^2)$ függvényt tudjuk megvizsgálni, melynek értelmezési tartománya most a $D_p = \mathbb{R}$ halmaz. Ezt a függvényt a jobb oldali ábra mutatja.
- (★) Szélsőértéke ott lehet, ahol deriváltja eltűnik:

$$p'(x) = 10(100 - 2x) = 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $x = 50$.

- (★) Mivel a $p'(x)$ deriváltra $p'(x) > 0$, ha $x < 50$, és $p'(x) < 0$, ha $x > 50$, a függvény az $x = 50$ hely előtt nő, utána csökken, így maximuma van az $x = 50$ helyen. Ez ennek a függvénynek abszolút maximuma.

(★) Az keresett optimális ár $a = 4000 - 10 \cdot 50 = 3500$ forint.



Képezni kell az $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ($x \neq x_0$), vagyis esetünkben az

$$\frac{\frac{4x^2 - x}{4} - \frac{4 \cdot 2^2 - 2}{4}}{x - 2} \quad x \neq 2,$$

úgynevezett differenciahányados határértéket:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \frac{x}{4} - \frac{14}{4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \left(x + \frac{7}{4} \right)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(x + \frac{7}{4} \right) = 2 + \frac{7}{4} = \frac{11}{4}.$$

Az $\frac{x^2 - \frac{x}{4} - \frac{14}{4}}{x - 2}$ tört átalakítása.

★ osztani kell $(x - 2)$ -vel.
★ Végezzünk POLINOM-osztást!

$$\begin{array}{r} (x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{14}{4}) : (x - 2) = x + \frac{7}{4} \\ x^2 - 2x \\ \hline \frac{7}{4}x - \frac{14}{4} \\ \frac{7}{4}x - \frac{14}{4} \\ \hline 0 \end{array}$$

2.2. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Határozza meg, hogy a következő függvény mely intervallumokon monoton, hol vannak helyi, illetve abszolút szélsőértékei, és mennyi az értékük?

$$f: x \mapsto \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Függvény deriváltjának fogalma.
2. Összetett függvény értelmezési tartományának meghatározása, deriváltja.
3. Hatvány-, polinom- és törtkitevős függvény, gyökfüggvény deriváltja.
4. Ha egy intervallumon a deriváltfüggvény értéke pozitív, illetve negatív, ott a függvény szigorúan monoton növekszik, illetve csökken.

(1) Határozzuk meg az f ÉT-t!

* f egy összetett függvény.

$$x \xrightarrow{p} x^4 - x^2 + 1 \xrightarrow{g} \sqrt{z},$$

$$\text{vagyis: } f = g \circ p$$

* ismerni kell: $(\mathbb{R}_p \cap D_g) - t$

* g : ÉT : $D_g = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($z \geq 0$).

* p : ÉT : $D_p = \mathbb{R}$ (mint minden polinomfüggvényé)

ÉK $\triangleright$ feljes leírás a vizsgálat végén tudunk adni:
abszolút minimum MAXIMUM } ismeretében

$\triangleright$ elég kevesebbet is tudnunk:

$$p(x) = x^4 - x^2 + 1 = (x^2)^2 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 + x^2 \geq 0$$

$$\triangleright \mathbb{R}_p \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\star \mathbb{R}_p \cap D_g \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \cap \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{\geq 0} = D_g$$

$$\downarrow$$

$$D_f = D_p = \mathbb{R}$$

(2) Keressük meg a szélsőértékek helyeit, ha vannak! Ezek ott lehetnek, ahol a deriváltfüggvénynek zérushelyei vannak. Ezek olyan intervallumokra bontják fel az értelmezési tartományt, amelyeken a derivált előjele nem változik.

(2) f deriváltjának meghatározása

* $f = g \circ p$ deriválása;
LÁNCSZABÁLY:

$$f'(x) = g'(p(x)) \cdot p'(x)$$

$$\triangleright p'(x) = (x^4 - x^2 + 1)' = 4x^3 - 2x$$

$$\triangleright g'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}; z = p(x)$$

$$\triangleright f'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$$

* A 3 zérushely a számmegyenest 4 intervallumra bontja:

* $f'(x)$ 0-helyei:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = 0$$

$$2x^3 - x = 0$$

$$x(2x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

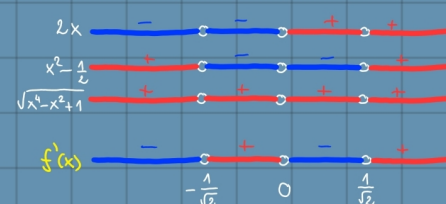
$$x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$f'(x)$ előjele intervallumonként: $f'(x) = \frac{2x(x^2 - \frac{1}{2})}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$

* 3 tényező előjelétől függ:

⊕, ha 3⊕ vagy 1⊕2⊖

⊖, ha 3⊖ vagy 1⊖2⊕



(3) A növekedés intervallumai: ahol a derivált pozitív.

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right) \text{ és } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right).$$

A csökkenés intervallumai: ahol a derivált negatív.

$$\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ és } \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(4) A szélsőértékek megállapítása



Az $x = 0$ helyen vett 1 értékű helyi maximum akkor abszolút, ha

$$f(x) \leq f(0) = 1 \quad \forall x \in D_f = \mathbb{R}.$$

De már pl. $x = 2$ esetén is:

$$f(2) = \sqrt{2^4 - 2^2 + 1} = \sqrt{13} > \sqrt{1} > 1.$$

Vagyis nincsen abszolút maximum.

2.3. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Vizsgálja meg a következő függvényt konvexitás szempontjából! Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény konvex, illetve konkáv!

$$f: x \mapsto \frac{1}{\ln x}$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Függvény konvexitásának feltétele a második deriválttal megfogalmazva.
2. Inflexiós pont fogalma.
3. Az $x \mapsto \ln x$ függvény deriváltja.

- (★) Egy függvény azokon az intervallumokon konvex, amelyeken a második derivált negatív,
- (★) és azokon konkáv, amelyeken a második derivált negatív.
- (★) A konvexitás és a konkávitás intervallumait az inflexió helyei választják el egymástól.

Az f függvény értelmezési tartományát nem kéri a feladat megállapítani, de az egyes deriváltak létezéséhez mégis szükség van rá.

- Függvényünk összetett függvény, belső függvénye a természetes alapú logaritmusfüggvény.
- Ennek értelmezési tartománya: $D_{\ln} = \mathbb{R}_{>0}$.
- Külső függvénye a reciprokfüggvény, melynek értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Az $\ln$ függvény az $x = 1$ helyen veszi fel a 0 értéket.
- Ezért $D_f = \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$.

Határozzuk meg eszerint a második deriváltat!

Ehhez először szükség van 1. deriváltra, majd utána kiszámíthatjuk a második deriváltat.

A függvény: $f: x \mapsto \frac{1}{\ln x}$

Az 1. derivált: $f': x \mapsto (-1) \frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{x \ln^2 x}$

A 2. derivált: $f'': x \mapsto \left(\underbrace{-x^{-1}}_{u(x)} \cdot \underbrace{(\ln x)^{-2}}_{v(x)} \right)'$

az 1. tényező: $u(x)$ deriváltja: $u'(x) = (-x^{-1})' = -(-1)x^{-2} = x^{-2}$

a 2. tényező: $v(x)$ deriváltja: $v'(x) = ((\ln x)^{-2})' = (-2)(\ln x)^{-3} \cdot \frac{1}{x}$

a szorzatuk deriváltja: $u'(x)v(x) + u(x)v'(x) =$

$$= x^{-2}(\ln x)^{-2} + (-x^{-1})(-2) \cdot \frac{1}{x}(\ln x)^{-3} = \frac{\ln x + 2}{x^2 \ln^3 x}$$

f összetett függvény:

$$x \xrightarrow{g} \ln x \xrightarrow{h} \frac{1}{z}$$

g : az e alapú logaritmusfüggvény

h : a reciprokfüggvény

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$h'(z) = (-1) \frac{1}{z^2}$$

Az f függvény mellett az f' és az f'' függvény értelmezési tartományára is az $x > 0$ és $x \neq 1$ feltételek állnak fenn, minthogy a nevezőben szerepel az $\ln x$ kifejezés.

Most határozzuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken a második derivált előjelét vizsgálnunk kell.

- Azokat az x értékeket állapítjuk meg, amelyek e szempontból bontják fel intervallumokra az értelmezési tartományt.
- Az értelmezési tartomány határai: $x = 0$ és $+\infty$ ilyen "helyek".
- Az $x = 1$ hely a függvénynek szakadási helye, ezért ez az érték is lehet osztópont. (Általában előfordulhatna, hogy megszüntethető szakadás van itt, de a bal és a jobb oldali környezetében lévő értékekből látszani fog, hogy nem ez a helyzet.)
- Az f'' függvény 0-helyeit kell még számításba venni.

$$\begin{aligned} \ln x + 2 &= 0 & | -2 \\ \ln x &= -2 & | e^{(\cdot)} \\ x &= e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0,14 \end{aligned}$$

- Eszerint az f'' második deriváltjainak előjelét a következő intervallumokon vizsgáljuk:

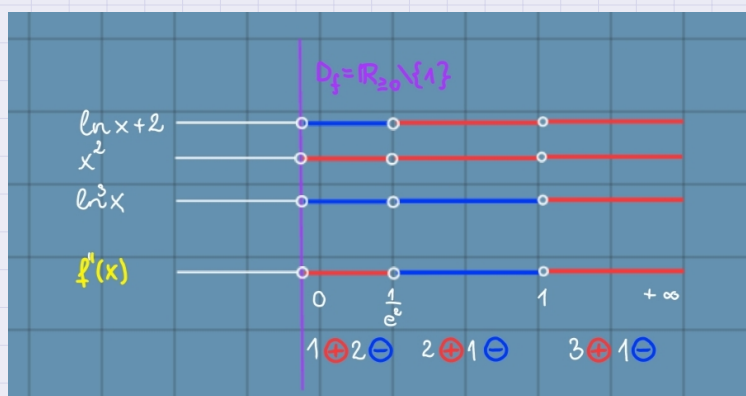
$$\left(0; \frac{1}{e^2}\right), \quad \left(\frac{1}{e^2}; 1\right), \quad (1; +\infty).$$

A szokásos módon határozzuk meg az

$$f''(x) = \frac{\ln x + 2}{x^2 \ln^3 x}$$

függvényértékek előjelét.

- (★) Intervallumonként meghatározzuk, hogy az egyes tényezőknek milyen az előjele.
- (★) Ha páratlan sok mínusz előjel van, akkor a függvényünk értékének előjele negatív.
- (★) Ha páros sok mínusz előjel van, akkor a függvényértékünk előjele pozitív. (A jobb oldali ábrán a pozitivitás intervallumait piros, a negativitását kék szín jelöli.)



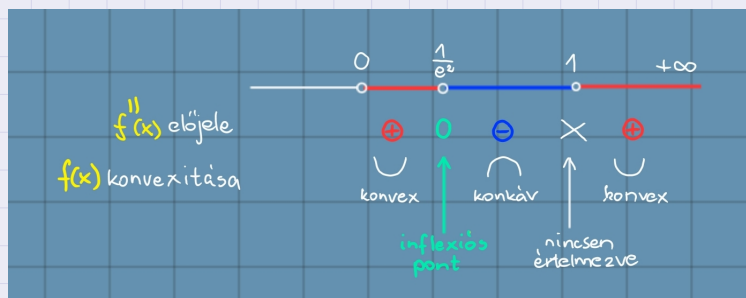
Inflexió pontok az értelmezési tartománynak azon pontjai, ahol az f függvény konvexitás megváltozik: konvexből konkávba, vagy konkávból konvexbe megy át.

Az $x = 1$ hely nem jöhet szóba, mert nem tartozik az értelmezési tartományhoz. Itt a függvénynek meg nem szüntethető szakadása van. A konvexitás változik, de nem "folytonos átmenettel", hanem ugrással.

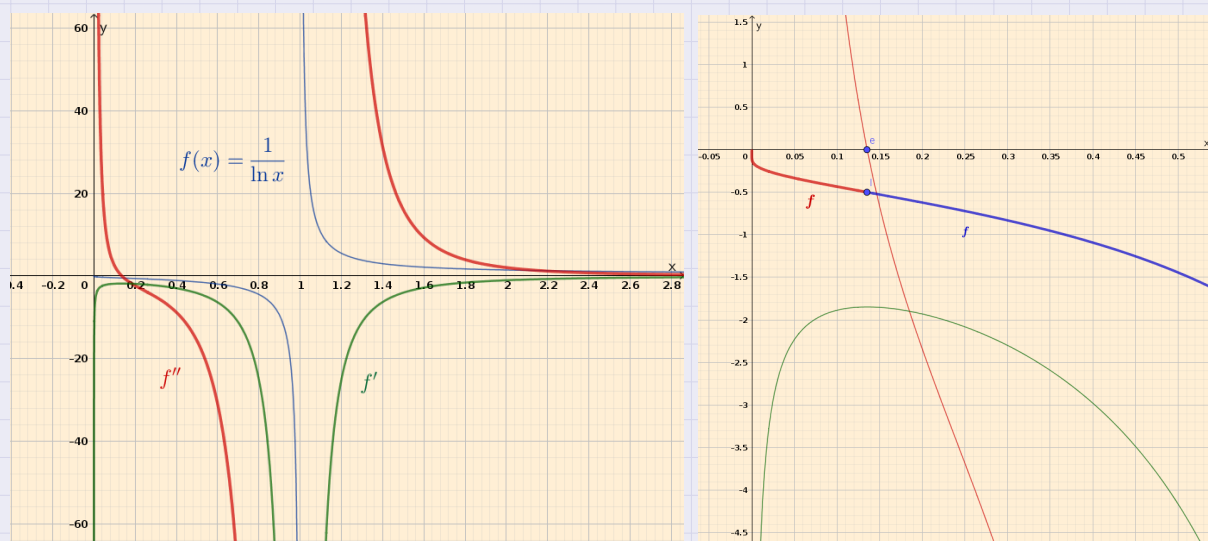
Inflexiós pont van $x = \frac{1}{e^2}$ -nél.

Ez az a hely, ahol f értelmezve van, és folytonos.

Az $x = 1$ hely bal oldali és jobb oldali környezetében is 1-hez tartva a függvény grafikonja egyre inkább "kiegyenesedik", egyre kevésbé görbül konkáv, illetve konvex formára.



A bal oldali ábrán láthatóak az f függvény, valamint első és második deriváltjai. A tengelyeken különböző egységeket választottunk azért, hogy a grafikonoknak a probléma szempontjából legérdekesebb szakaszai megjeleníthetők legyenek.



A jobb oldali koordináta-rendszerben tovább változtattuk az egységeket, hogy jól látható legyen az inflexió az $x = 1/e^2$ helyen. Piros színű a konvex és kék a konkáv ív.

2.4. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Végezzen teljes függvényvizsgálatot a következő függvényen:

$$f: x \mapsto \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

Ennek során állapítsa meg az értelmezési tartományt és az értékészletet; a függvény zérushelyeit; a szakadási helyeket, a szakadás jellegét, illetve a folytonossági intervallumokat; a szélsőértékek helyeit; a monotonitási intervallumait; a helyi és az abszolút maximumok és minimumok értékét; a szakadási helyeken a féloldali határértékeket, illetve a végtelenben vett határértékeket; mely intervallumokon konvex, illetve konkáv a függvény, van-e inflexiós pont; valamint ábrázolja a függvényt koordináta-rendszerben!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Függvény határértéke: végtelenben, féloldali határértékek.
2. Függvény deriváltja és a szélsőértékek helye.
3. Függvény második deriváltja és a konvexitás.

- Értelmezési tartomány és értékészlet megállapítása függvények szorzata, hányadosa esetén.

- Függvény folytonossága, a szakadás jellege.
- Egy függvény egy x_0 helyen akkor és csak akkor folytonos, ha az x_0 helyen értelmezett, létezik itt a határértéke, és az megegyezik a függvényértékkel:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x), \quad x \in D_f.$$

- Polinomfüggvény ÉT-a $\mathbb{R}$, és ezen mindenütt folytonos.

Értelmezési tartomány

- A függvény két függvény hányadosa,
- a számlálóbeli és a nevezőbeli függvény is polinomfüggvény: $x \mapsto x^2$, illetve $x \mapsto x^2 - 2x + 1$.
- Mindkettő értelmezési tartomány $\mathbb{R}$.
- A hányadosuk nincsen értelmezve ott, ahol a nevező 0 értéket vesz föl: ez az $x = 1$ esetén következik be.
- Tehát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Értékkészlet

Vizsgáljuk meg, hogy milyen y értékeket vesz fel a függvény! Definíciója szerint $R_f := \{f(x) | x \in D_f\}$, vagyis a függvénynek az értelmezési tartománybeli helyeken felvett értékeinek halmaza. A meghatározását segíti, ha ezt kissé kibontjuk: $R_f := \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in D_f, y = f(x)\}$; vagyis azok a valós y értékek tartoznak az R_f -hez, melyeknek létezik őse a D_f -ben.

- Vagyis keressük meg az

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = y$$

egyenlet megoldásait x -re, ahol $x \neq 1$.

- Amely y -hoz találunk x -et, az része az R_f -nek.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x-1)^2} &= y \\ x^2 &= y(x-1)^2 \\ x^2 &= yx^2 - 2yx + y \\ 0 &= (y-1)x^2 - 2yx + y. \end{aligned}$$

(★) Ha $y = 1$, akkor ebből $x = \frac{1}{2}$ következik, tehát $1 \in R_f$.

(★) Ha $y \neq 1$, akkor

$$x_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4y(y-1)}}{2(y-1)} = \frac{y \pm \sqrt{y}}{y-1},$$

ahol $y \geq 0$.

- (★) Tehát $y = 1$ kivételével minden $y \geq 0$ érték két x -hez is tartozik. Az $y = 1$ értékhez csak egy érték, az $\frac{1}{2}$.
- (★) Így $R_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- (★) Tehát $R_f = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Az f zérushelyei

Ezek az $f(x) = 0$ feltételnek megfelelő x értékek az ÉT-ban.

Ez pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$

Tehát **egyetlen zérushely van: $x = 0$** .

Hol folytonos az f ?

- (★) A számláló és a nevező is polinomfüggvény, ezért a teljes számegyenesen folytonosak.
- (★) Hányadosuk nincsen értelmezve a nevező zérushelyeinél, ezért $x = 1$ esetén nem folytonos, de minden további helyen az.
- (★) Ez pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$
- (★) Tehát f folytonos a következő nyílt intervallumokon: **$(-\infty; 1)$ és $(1; +\infty)$** .

Hol vannak az f szakadási helyei?

- (★) Szakadási hely lehet a folytonossági intervallum (végesben lévő) határpontja.
- (★) Olyan hely **NEM** lehet szakadási hely, ahol f folytonos.
- (★) Tehát egyetlen szakadási hely van: **$x = 1$** .

Az f szakadási helyének típusa

- Ennek megállapításához meg kell határoznunk a féloldali határértékeket az $x = 1$ helyen.
- Kihasználjuk, hogy ha egy függvény folytonos egy pontban, akkor a pontbeli helyettesítési értéke megegyezik a határértékével, továbbá
- ha létezik a határérték (mint most), akkor megegyezik a bal oldali és a jobb oldali határértékekkel.

$x \mapsto x^2$ folytonos az $x = 1$ helyen
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = (1)^2 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = (1-1)^2 = 0$
 $x \mapsto (x-1)^2$ folytonos az $x = 1$ helyen
 $\frac{1}{0}$ típusú határérték
 $f(x) > 0$, ha $x > 0$,
 $\Rightarrow f(x)$ pozitív értékeken keresztül tart ∞ -be
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty$

- Pontosán ugyanilyen számolással és indokolással kapjuk, hogy az $x = 1$ helyen a jobb oldali határérték is $+\infty$.

- Tehát az $x = 1$ helyen nincsen véges határérték. A szakadás típusa: **nem megszüntethető**.

A függvény és deriváltjai

A további vizsgálatokhoz szükség van a függvényünk első és második deriváltjára.

$$f' : \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} =$$

$$f' : \left(\frac{-2x}{(x-1)^3} \right)' = \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x-1)^3 - x^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^6} = \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 2x^3 + 2x^2}{(x-1)^6} = \frac{-2x^2 + 2x}{(x-1)^6} = -2 \cdot \frac{x(x-1)}{(x-1)^6} = -2 \cdot \frac{x}{(x-1)^5}$$

$$= \frac{(-2) \cdot (x-1)^3 - (-2x) \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(x-1)^3[-(x-1) + 3x]}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4} = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

Szélsőérték helyek és szélsőértékek

- Szélsőérték ott **LEHET**, ahol az f függvény első deriváltja eltűnik, vagyis

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \frac{x^2}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- Tehát az $x = 0$ helyen lehet szélsőérték.
- A szélsőérték létezésének és jellegének meghatározása általában megkívánja az f' előjelének vizsgálatát (ahogyan a 2. mintafeladatban is tettük).
- Most azonban e nélkül is tudunk nyilatkozni. Arról is, hogy valóban van-e szélsőérték, és annak jellegéről is.
- Az $x = 0$ helyen a függvényérték: $f(0) = 0$, és mivel az értékkészlet

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \setminus \{1\},$$

az $x = 0$ helyen a függvénynek **minimuma** van, és ez a minimum **abszolút minimum**.

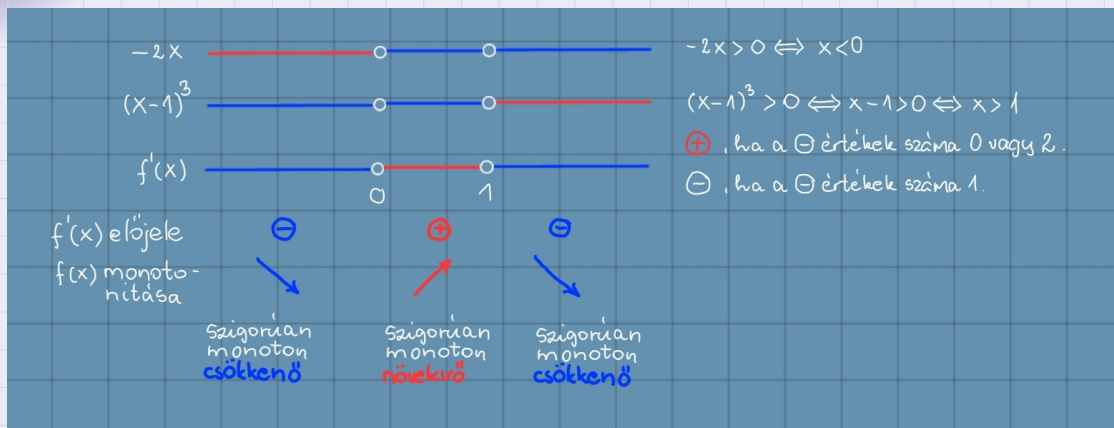
- Az f függvénynek más minimuma vagy maximuma nincsen.

Monoton növekedés, illetve csökkenés

- az f függvény szigorúan monoton növekszik azokon az intervallumokon, ahol $f'(x) > 0$.
- az f függvény szigorúan monoton csökken azokon az intervallumokon, ahol $f'(x) < 0$.
- Azonosítanunk kell a szóba jöhető intervallumokat!

- Mivel az f és az f' első derivált is folytonos a teljes értelmezési tartományon, az f' előjelet váltani csak a zérushelyénél ($x = 0$), illetve a szakadási helynél tud.

- Tehát az értelmezési tartományt az $x = 1$ szakadási hely és az $x = 0$, első derivált 0-helye bontják fel olyan intervallumokra, ahol az f' első derivált előjelét vizsgálni kell.



Eszerint f szigorúan monoton csökken az $(-\infty; 0)$ és az $(1; +\infty)$ nyílt intervallumokon, és szigorúan monoton nő a $(0; 1)$ nyílt intervallumon.

A konvexitás vizsgálata

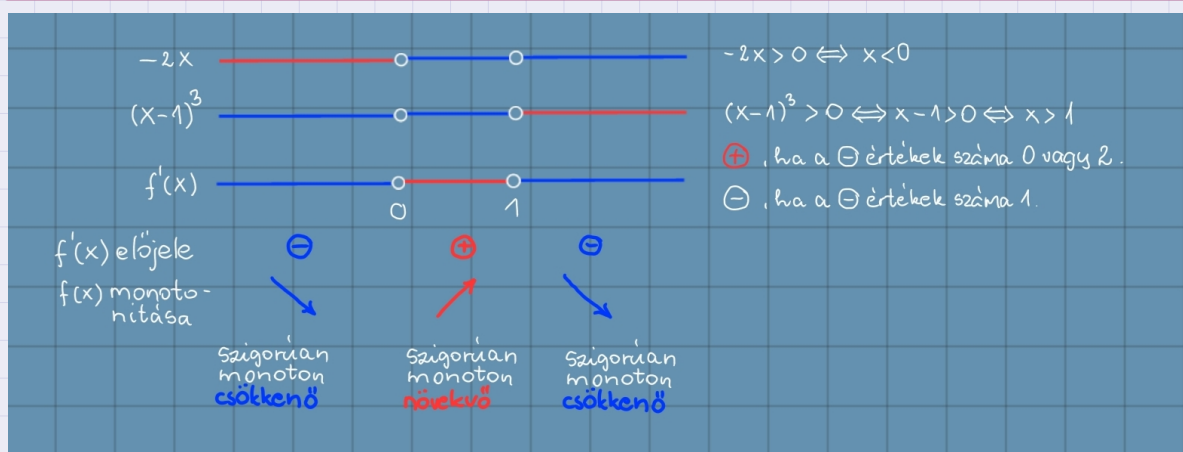
- az f függvény konvex azokon az intervallumokon, ahol $f''(x) > 0$.
- az f függvény konkáv azokon az intervallumokon, ahol $f''(x) < 0$.
- az f'' függvénynek egyetlen zérushelye van:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{3} 2(x-1)^4 = 0 \Leftrightarrow 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

- Mivel az f és az f'' második derivált is folytonos a teljes ÉT-on, az f'' előjelet váltani csak a zérushelyénél ($x = -\frac{1}{2}$), illetve a szakadási helynél tud.
- Tehát az ÉT-t az $x = 1$ szakadási hely és az $x = -\frac{1}{2}$, a második derivált 0-helye bontják fel olyan intervallumokra, ahol az f'' első derivált előjelét vizsgálni kell.

Tehát az f **konvex** a $(0; 1)$ és az $(1; +\infty)$ nyílt intervallumokon, és **konkáv** a $(-\infty; -\frac{1}{2})$ intervallumon.

Egyetlen **inflexiós pont** van, az $x = -\frac{1}{2}$ helyen.



A függvény viselkedése végtelenben

A polinomfüggvények hányadosának végtelenbeli határértékét a 7. Olvasólecke 2. Mintafeladatában tanultaknak megfelelően állapíthatjuk meg (a domináns hatvány kiemelésével).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

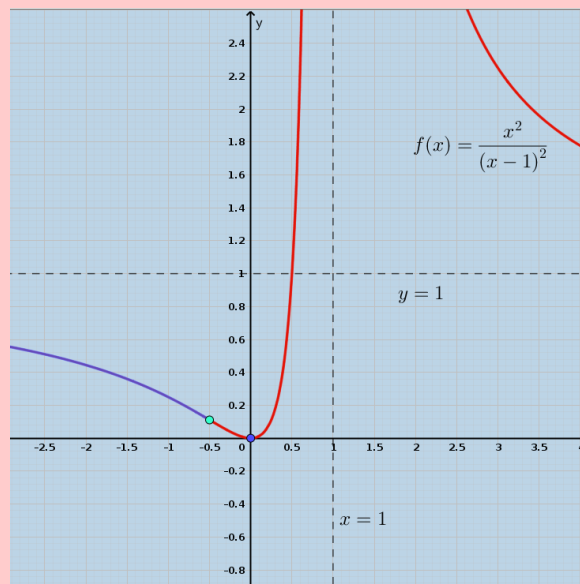
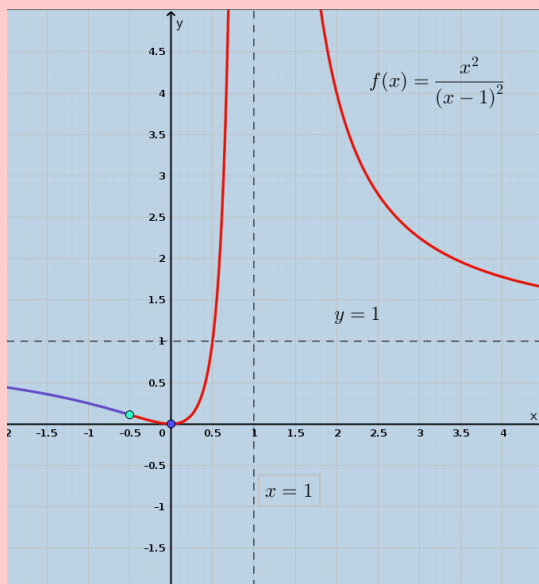
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$ pontosan ugyanígy, mint $-\infty$ esetén.

(A képlet jobb oldalán a $1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ kifejezés tagjai viselkedését jelöljük: az 1 tag $\rightarrow 1$, a $-\frac{2}{x}$ tag $\rightarrow 0$, a $\frac{1}{x^2}$ tag $\rightarrow 0$.)

Véges határértéket kaptunk, mindkét esetben 1-et.

A függvény grafikonja

Minden lényeges információt megkaptunk ahhoz, hogy az f függvény grafikonján követni tudjuk a függvény viselkedését, menetét.



- (★) A bal oldali grafikonon követhetők a határértékek az $x = 1$ helyen, illetve a $+\infty$ és $-\infty$ végtelenben.
- (★) Az $x = 1$ és az $y = 1$ olyan egyenesek, amelyekhez a függvény a végtelenben "hozzásimul". Ezeket *aszimptotáknak* (végérintőknek) nevezzük.
- (★) A szakadás helye az $x = 1$. Itt jobbról és balról is a $+\infty$ -be tartanak a függvényértékek.
- (★) Az *abszolút minimumot* kék pont mutatja a függvény grafikonján.

- (★) A jobb oldali grafikonon megváltoztattuk az egységeket a tengelyeken, hogy jobban látható legyen az inflexiós pont környezete.
- (★) A függvény grafikonjának inflexiós pontját zöld színű ponttal jelöltük.
- (★) Jól látható, ahogyan pozitív irányban haladva a grafikon konkávból konvexbe megy át az inflexiós pontnál.

3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

- ? Mit lehet mondani egy olyan függvényről, amelyeknek a deriváltja az értelmezési tartományának minden pontjában rendre pozitív, negatív, 0, illetve ugyanakkora?
- ? Lehetséges-e, hogy egy függvénynek van helyi, de nincsen abszolút minimuma?
- ? Adjon példát olyan függvényre, amelynek a szakadási helyén van határértéke, és adjon példát olyan függvényre is, amelynek nem létezik a határértéke a szakadási helyén.
- ? Van-e olyan függvény, amelynek végtelen sok szakadási helye van?
- ? Egy függvény első deriváltjának 0-helye az $x = 1$ pont, a függvénynek mégsem szélsőértékhelye az $x = 1$ pont. Hogyan lehetséges ez?
- ? Igaz-e, hogy ha egy függvény az értelmezési tartomány bármely szakaszán konvex, akkor van minimuma?

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. Végezzünk teljes menetvizsgálatot a következő függvényeken (legbővebb értelmezési tartomány; folytonosság; helyi szélsőértékek, monotonitás; konvexitás, inflexiós pontok; határértékek a végtelenben; értékkészlet)!
 (a) $f: x \mapsto x^3 - 5x^2 + 6x + 6$, (b) $g: x \mapsto \frac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2 + 3$.
2. A "Kemény Dió" nevű mezőgazdasági szövetkezet diót termeszt. Az elmúlt évek elszámolásából azt olvasták ki, hogy ha 50 fát ültetnek egy hektárra, akkor minden fa átlagosan 30 kg diót terem évente. Minden egyes újabb fának egy hektárra beültetésével (15 fáig) az átlagos termés 1 kg-mal csökken. Mennyi fát kell hektáronként ültetni ahhoz, hogy maximalizálják a hektáronkénti hozamot? Mekkora ez a maximális hozam?

5. Ajánlott irodalom

1. Reimann István: Matematika, Typotex
2. Obádovics J. Gyula: Matematika, Scolar
3. Szabó Tamás: Kalkulus I. példatár informatikusoknak, POLYGON
4. Fülöp Vanda: Kalkulus I. példatár, POLYGON