

Kalkulus feladatok megoldása

5. Olvasólecke

Sorozatok határértéke

Az olvasólecke szerzője



Kozma József

PhD, főiskolai docens

SZTE TTK

Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 40 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.
Projekt azonosító:
EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFÉKTETÉS A JÖVŐBE

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

- ☐ Számsorozatok monotonitása, korlátossága (az előző leckéből);
- ☐ hatványfüggvény (gyökfüggvény), exponenciális függvény, logaritmusfüggvény értelmezési tartománya és értékkészlete, monotonitása;
- ☐ nevezetes algebrai azonosságok, a hatványozás és a logaritmus azonosságai,
- ☐ a racionális és az irracionális számok tizedes tört alakja.

Jó tanácsok az Olvasónak

Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt a szerző tanácsait.

A gyakorlati OL fókusz

- Polinomok, polinom típusú határérték;
- 1^∞ típusú határérték;
- valós számok tizedes tört alakja, és jelentése.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ meg tudja állapítani alaptípushoz tartozó sorozatok határértékét;
- ✓ értse a kapcsolatot a valós számok és a tizedes törtek között.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 40 perc.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szempontjából a következő sorozatot!

$$a_n = \frac{n-2}{2n^2-6n-9}$$

Megoldás a 3. oldalon

2.2. Mintafeladat.

Határozza meg a következő határértéket: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n}{2n^2 - 5}$!

Megoldás a 4. oldalon

2.3. Mintafeladat.

Határozza meg a következő határértéket: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 6}{\sqrt{n^3 - 7n + 1}}$!

Megoldás a 4. oldalon

2.4. Mintafeladat.

Állítsa elő a következő számokat tizedes tört alakban: (a) $\frac{13}{5}$, (b) $\frac{64}{7}$, (c) 12.

Megoldás az 5. oldalon

2.5. Mintafeladat.

Állapítsa meg a következő határértéket: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$!

Megoldás a 7. oldalon

2.1. Mintamegoldások

2.1. Mintafeladat megoldása (2. o.)

Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szempontjából a következő sorozatot!

$$a_n = \frac{n-2}{2n^2-6n-9}$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Sorozat korlátosságának fogalma.
2. Sorozat monotonitásának, szigorú monotonitásának fogalma.
3. Másodfokú és lineáris egyenlőtlenségek megoldása.

Néhány megállapítás a sorozat tagjairól.

$$(1) a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{27}, a_4 = \frac{2}{47}, a_5 = \frac{3}{71}$$

$$(2) a_1 > a_2 < a_3 > a_4 > a_5$$

$$(3) n > 2 \text{ esetén: } a_n > 0.$$

(4) A monotonitás vizsgálata $n > 2$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad (n \geq 3) \text{ azt jelenti, hogy } n=3\text{-tól}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad (n \geq 3) \text{ pedig azt, hogy a 3. taggal kezdve szig. mon. csökken.}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)-2}{2(n+1)^2+6(n+1)-9} \cdot \frac{2n^2+6n-9}{n-2} = \frac{2n^3+4n^2-15n+9}{2n^3+6n^2-21n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ eset vizsgálata: [a pozitív nevezővel szorozva az oldalakat]}$$

$$2n^3+4n^2-15n+9 < 2n^3+6n^2-21n+2$$

$$\Rightarrow 0 < 2n^2-6n-7 = n(2n-6)-7$$

$$* n=3 \Rightarrow a_n=0. \text{ Ha } n \geq 4 \Rightarrow 2n-6 \geq 2 \Rightarrow \underline{\underline{\geq 1 > 0.}}$$

A másik esetet már meg sem kell vizsgálni. $\Rightarrow$ a 3. tagtól a sorozat szigorúan monoton csökkenő

⇒ A sorozat KORLÁTOS.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

Az előző feladatnál felsorolt ismeretek mellett kiemeljük, hogy

1. egy konvergens sorozat részsorozatai is konvergensek, és ugyanoda konvergálnak, mint a sorozat;
2. ha egy sorozat a végtelenbe tart, akkor tagjainak reciprokaiból álló sorozat a 0-hoz tart;
3. ha egy pozitív tagú sorozat a 0-hoz tart, akkor a reciprokaiból álló sorozat a végtelenbe tart; ha a tagok negatívak, akkor a mínusz végtelenbe.

(1) A nevezőben lévő gyök alatt nem lehet negatív érték.

$$n^2 - 7n + 1 = n(n^2 - 7) + 1$$

$$< 0, \text{ ha } n^2 < 7, \text{ vagyis } n < 3.$$

$$\begin{aligned} n=1: n^2 - 7n + 1 &= -5 \\ n=2: n^2 - 7n + 1 &= -5 \end{aligned} \Rightarrow n \neq 1, 2$$

$$n \geq 3 \text{ esetén } n^2 - 7 > 0 \Rightarrow a_n \text{ létezik.}$$

(2) TRÜKK: a legmagasabb hatványú tag kiemelése:

$$\frac{n^2 + 2n - 6}{\sqrt{n^3 - 7n + 1}} = \frac{n^2}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}}{\sqrt{1 - \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^3}}}$$

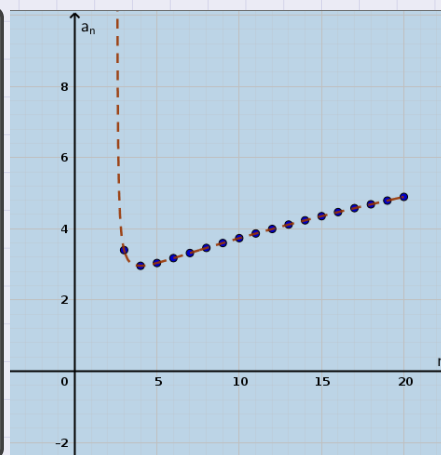
$$= \sqrt{n} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{6}{n^2}}{\sqrt{1 - \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^3}}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

(3) A nevező vizsgálata
 Ha egy sorozat 1-hez tart, akkor a tagok gyökeiből álló sorozat $\sqrt{1}$ -hez tart.

Most is ábrázoltuk a sorozat első néhány tagját ($a_3, a_4, \dots, a_{20}$).

Az ábrán a pontok második koordinátája jelöli a megfelelő indexű tagok értékét.

Szagattott vonal ábrázolja az $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 6}{\sqrt{x^3 - 7x + 1}}$ függvényt. E függvény értelmezési tartományát az $x^3 - 7x = 1 > 0$ feltétel határozza meg. Számolás mutatja, hogy $x > 2,68$ esetén már pozitív a gyök alatti mennyiség, és ezért értelmezett a függvény.



2.4. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Állítsa elő a következő számokat tizedes tört alakban: (a) $\frac{13}{5}$, (b) $\frac{64}{7}$, (c) 12.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Mértani sorozat összege $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$, ha a hányados $q < 1$ (a mértani sorozat összegképletéről itt tud tájékozódni);
2. helyiértékes osztás 10-es számrendszerben;
3. racionális számok tizedes tört alakja (A racionális számok végtelen szakaszos tizedes tört alakjának meghatározásáról itt olvashat.);

(a) Végezzünk tízes számrendszerbeli „helyértékes osztást” a tanult módon!

$$\begin{array}{r} 12 : 5 = 2,4 \\ 20 \end{array}$$

Ez is írható **végtesen szakaszos tizedes tört** alakba:

$$\frac{12}{5} = 2,50 \text{ , hiszen } 2,5 = 2,5000 \dots$$

(b) Végezzünk ismét osztást!

$$\begin{array}{r} 64 : 7 = 9,1428571 \dots \\ \star 10 \\ 30 \\ 20 \\ 60 \\ 40 \\ 50 \\ \star 10 \end{array}$$

A $\star$ -gal jelölt maradékok egyenlők, így ismétlődni fog ez

142857 szakasz.
Így $\frac{64}{7}$ tizedes tört alakja végtelen szakaszos:
 $\frac{64}{7} = 9,142857 \dots$

A mértani sor összegképletét használjuk ebben a feladatban. Végtelen összegnek éppen a határérték fogalmának segítségével tulajdoníthatunk jelentést. Az összegformula a következő határértéket fejezi ki $0 < q < 1$ esetén:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q} = S.$$

Azt, hogy létezik, és hogy ez a határérték, akár a definíció alapján is ellenőrizhetjük. Most pozitív a_1 -et tekintünk, és ekkor a mértani sorozat minden tagja pozitív, következésképpen S_n szigorúan monoton nő.

A határérték akkor létezik, és S , ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van egy olyan N szám, hogy $n > N$ esetén $|S - S_n| < \varepsilon$.

$$|S - S_n| = \left| \frac{a_1}{1 - q} - a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \right| = \frac{a_1}{1 - q} |(1 - (1 - q^n))| = \frac{a_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Itt a tényezők pozitívak. Az $\frac{a_1}{1 - q} \cdot q^n < \varepsilon$ feltétel teljesül, ha $q^n < \frac{\varepsilon}{\frac{a_1}{1 - q}}$. A $\lg$ függvény (10-es alap) szigorúan monoton növekvő, ezért logaritmusaikra ugyanilyen irányú nagyobb reláció teljesül: $n \lg q < \lg \left(\frac{\varepsilon}{\frac{a_1}{1 - q}} \right)$. Ám nem csak a bal oldalon szereplő q , hanem $\frac{\varepsilon}{\frac{a_1}{1 - q}}$ is kisebb 1-nél, ha ε elég kicsi, ezért a logaritmusok negatív számok. Mindkét oldalt a negatív $\lg q$ -val osztva az egyenlőtlenség iránya megfordul:

$$n > \frac{\lg \left(\frac{\varepsilon}{\frac{a_1}{1 - q}} \right)}{\lg q}.$$

Ha egy egész szám a jobb oldalnál nagyobb, akkor megvan a keresett küszöbszám.

(c) Most nincsen kijelölt osztás!

Mégis: $12 = \frac{12}{1} = 12,000 \dots = 12,0$
egy végtelen szakaszos tizedes tört alak.

A **0 szakasz** csak az **EGYIK** lehetőség.

Az $A = a, bc \dots d0$ alak mellett jó

az $A = a, bc \dots (d-1)9$ alak is.

$$\text{pl. } 25,3 = 25,30 = 25,29$$

vagyis: $d = (d-1) + 0,9$.

Ez akkor áll fenn, ha:

$$-1 + 0,9 = 0,$$

vagyis $0,9 = 1$.

$0,9$ valójában egy mértani

sorozat (összes) tagjainak

összege: $0,9 = 0,9 + 0,09 + \dots$

$$q = 0,1; a_1 = 0,9.$$

Tehát:

$$0,9 = \frac{0,9}{1 - 0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1.$$

→ (a) feladat:

$$\frac{12}{5} = 2,5 = 2,4 + 0,1$$

$$= 2,4 + \frac{1}{10} \cdot 1 =$$

$$= 2,4 + 0,1 \cdot 0,9 = 2,49$$

2.5. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Állapítsa meg a következő határértéket: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Az e szám mint az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ határértéke;
2. véges határértékkel rendelkező sorozatok szorzata olyan sorozat, melynek határértéke az egyes sorozatok határértékének szorzata.

Az $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ kifejezés „csak” annyiban más, mint az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, hogy a számlálóban nem 1, hanem 3 áll.

$$1 + \frac{3}{n} = \frac{n+3}{n} = \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Így

$$\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n}_e \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}_e \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_e \rightarrow e^3$$

A $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n$ ($k \in \mathbb{N}$) meghatározása

$$\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+k}}{\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^k}$$

De $n \rightarrow \infty$ pontosan akkor, ha $n+k \rightarrow \infty$.
Vagy másképpen: $\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+k}$ tagjai az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tagjai, annak $(k+1)$ -edik tagjától.

(sz) a számláló: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+k} = e$.

(sz) a nevező: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^k \rightarrow 1$,
mert ha egy sorozat határértéke 1, akkor a tagok hatványainak sorozata is 1-hez tart; és most ez áll fenn

Kaptuk: $\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n \rightarrow e$.

3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

- ? Ha egy sorozat tart ∞ -be és egy másik sorozat határértéke az A szám, akkor hová tart a két sorozat tagjainak összegéből képezett sorozat?
- ? Konvergens-e valamilyen a_1 esetén a mértani sorozat első n tagjának összegéből álló sorozat, ha $q > 1$?
- ? Döntse el, hogy igazak vagy hamisak a következő állítások!
 - ☐ Ha egy sorozat tart ∞ -be és egy másik sorozat határértéke $-\infty$, akkor a két sorozat tagjainak összegéből képezett sorozat a 0-hoz tart.
 - ☐ Ha két sorozat egyaránt a végtelenbe tart, akkor a tagjaik hányadosából álló sorozat monoton.
 - ☐ Két egész szám hányadosának végtelen szakaszos tizedes tört alakjában a szakasz hosszúsága kisebb, mint a számláló abszolút értéke.
 - ☐ Csak azok az egész számok hányadosaként felírt törtek véges tizedes törtek, amelyekben a nevező osztója a 10-nek.
- ? Igaz-e, hogy ha egy sorozat monoton csökkenő, és korlátos, akkor konvergens?

? Igaz-e, hogy van olyan konvergens sorozat, amelyik nem korlátos?

? Keressen olyan számtani sorozatot, amelyik korlátos! Konvergens ez a sorozat?

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. Vizsgálja meg a következő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából (mindegyik esetben $n \in \mathbb{N}$)!

$$(a) \ a_n = \frac{1}{n-3}, \quad (b) \ a_n = \frac{1}{3-2n}, \quad (c) \ a_n = \frac{n^2 - 3n - 1}{39 - 2n}.$$

2. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

$$(a) \ \frac{100000n}{n^2 + 1};$$

$$(b) \ \frac{n^2 - 3n}{2n^2 - 5};$$

$$(c) \ \frac{n - 3n^3 + 6n^2}{1 + n^3};$$

$$(d) \ \frac{n - 3n^2}{5n^3 + 2n^2 + \sqrt{7}}.$$

3. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

$$(a) \ \frac{\sqrt{n}}{n};$$

$$(b) \ \frac{n^2 - 2n + 6}{\sqrt{n^3 - 5n + 4}}.$$

4. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

$$(a) \ \frac{3 \cdot 7^n + 2^{3n-1}}{3^{n+1} - 6^n};$$

$$(b) \ \frac{2^{2n} 3n^4}{\sqrt{n^3 - 5n + 4}}.$$

5. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

$$(a) \ \sqrt{2n-1} - \sqrt{3n+5};$$

$$(b) \ \sqrt{n^2 - 3n} - \sqrt{n^2 + 4n - 5};$$

$$(c) \ \sqrt{n^2 - 2n - 3} - n.$$

6. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét!

$$(a) \ \frac{\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{2}}{2 - 2\sqrt[n]{2}};$$

$$(b) \ \frac{\sqrt[n]{9} - \sqrt[n]{27}}{\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{27}}.$$

$$(c) \ \sqrt{n^2 - 2n - 3} - n.$$

7. Vizsgálja meg a következő sorozatokat monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából!

$$(a) \ a_n = 2 + (-1)^n, \quad (b) \ b_n = \frac{1}{n+3}, \quad (c) \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

8. Határozza meg az $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{n+3}$ határértékét!

9. Határozza meg az $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n$ határértéket!
10. Határozza meg az $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{n!}$ határértéket!
11. Állítsa elő a következő számokat tizedes tört alakban!
- (a) 12, (b) $\frac{5}{6}$, (c) $\frac{13}{5}$, (d) $\frac{64}{7}$.
12. Konstruáljon olyan számsorozatot, amelynek határértéke $\sqrt{2}$!

5. Ajánlott irodalom

1. Reimann István: Matematika, Typotex
2. Obádovics J. Gyula: Matematika, Scolar
3. Szabó Tamás: Kalkulus I. példatár informatikusoknak, POLYGON