

Kalkulus feladatok megoldása

2. Olvasólecke

Azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek, teljes indukció

Az olvasólecke szerzője



Kozma József

PhD, főiskolai docens

SZTE TTIK

Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 45 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.
Projekt azonosító:
EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFÉKTETÉS A JÖVŐBE

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

A középiskolában megszerzett és az előadáson áttekintett legalapvetőbb fogalmak és összefüggések a szögfüggvényekkel, síkbeli transzformációkkal, másodfokú egyenletekkel és egyenlőtlenségekkel, nevezetes azonosságokkal kapcsolatosan.

- ☐ Szögfüggvények értelmezése, kapcsolata.
- ☐ Trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek.
- ☐ Forgatás és tükrözés a síkban.
- ☐ Nevezetes algebrai azonosságok.

Jó tanácsok az Olvasónak

Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt a szerző tanácsait.

A gyakorlati OL fókusz

- Trigonometrikus alapok, nevezetes szögfüggvények;
- origó körüli forgatás;
- pont tükrözése egyenesre;
- betűs kifejezések szorzattá bontása, egyszerűsítése;
- másodfokú egyenlőtlenségek megoldása;
- törtes egyenlőtlenségek megoldása.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ az egyes trigonometrikus függvények értékéből nevezetes esetekben megállapítsa az argumentumát;
- ✓ ki tudja számítani egy pont origó körüli adott szögű elforgatottját;
- ✓ ki tudja számítani egy pont tükörképét tetszőleges egyenesre forgatás közbeiktatásával;
- ✓ nevezetes azonosságok alkalmazásával szorzattá tudjon alakítani algebrai kifejezéseket,
- ✓ nevezetes azonosságok alkalmazásával egyszerűsíteni tudjon törtes algebrai kifejezéseket,
- ✓ meg tudja oldani másodfokú egyenlőtlenségeket;
- ✓ meghatározza törtes egyenlőtlenségek megoldáshalmazát.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 45 perc.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket!

$$(a) \sin x = \frac{1}{2}; \quad (b) \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

Megoldás a 4. oldalon

2.2. Mintafeladat.

Adja meg $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ pontos értékét, ha $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$!

Megoldás az 5. oldalon

2.3. Mintafeladat.

A $P(5;3)$ pontot forgassuk el $+60^\circ$ -kal az origó körül!

Megoldás az 5. oldalon

2.4. Mintafeladat.

Tükrözzük a $P(-3;2)$ pontot az $x - 2y = 4$ egyenletű egyenesre!

Megoldás a 6. oldalon

2.5. Mintafeladat.

Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

$$(a) 2x^2 - 13x + 7; \quad (b) 36a^6 + 25b^4 - 60a^3b^2.$$

Megoldás a 7. oldalon

2.6. Mintafeladat.

Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\frac{(a+1)(a^8+a^4+1)}{(a^4-a^2+1)(a^4+a^2+1)}.$$

Megoldás a 8. oldalon

2.7. Mintafeladat.

Oldja meg az alábbi negyedfokú egyenlőtlenséget!

$$x^4 + x^2 - 6 > 0.$$

Megoldás a 9. oldalon

2.8. Mintafeladat.

Oldja meg az alábbi törtes egyenlőtlenséget!

$$\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}.$$

Megoldás a 10. oldalon

2.1. Mintamegoldások

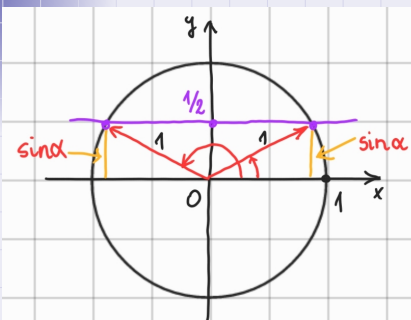
2.1. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket!

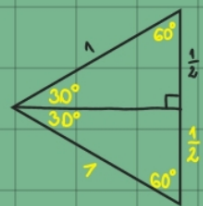
$$(a) \quad \sin x = \frac{1}{2}; \quad (b) \quad \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

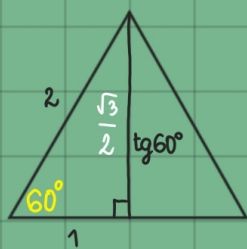
1. Egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szög szinusza az α forgásszögű egységvektor második koordinátája.
2. Egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szög koszinusza az α forgásszögű egységvektor első koordinátája.
3. Egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szög tangense a szinuszának és koszinuszának hányadosa, amennyiben $\cos \alpha \neq 0$. Egy α szög koszinusza pontosan akkor 0, ha $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
4. Egy $\alpha \in \mathbb{R}$ szög kotangense a koszinuszának és szinuszának hányadosa, amennyiben $\sin \alpha \neq 0$. Egy α szög szinusza pontosan akkor 0, ha $\alpha = k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
5. A szinusz- és a koszinuszfüggvény periodikus, periódusa 2π . A tangens- és a kotangensfüggvény periodikus, periódusa π .
6. Egy α irányszög tangense annak a szakasznak az előjeles hosszúsága, amelyet az α irányszögű egyenes és az x -tengely metsz ki az Origó középpontú egységkörhöz az $(1;0)$ pontjában húzott érintőjéből.



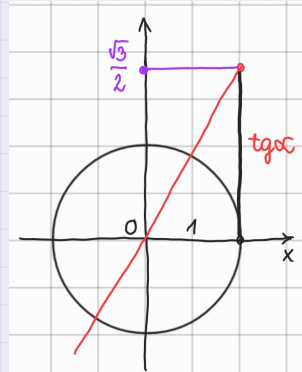
(a) E derékszögű Δ egyik befogójának hossza $\frac{1}{2}$, átfogója hossza 1, ez egy "fél" szabályos Δ .
Így $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),
a másik lehetőség:
 $x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).



(b)



Ennek a derékszögű Δ -nek egyik befogója 1, átfogója 2 hosszúságú.
Ez egy "fél" szabályos Δ .
 Δ keresett szög:
 $x = 60^\circ + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
További megoldás nincs,
a tangensfüggvény periódusa: π .

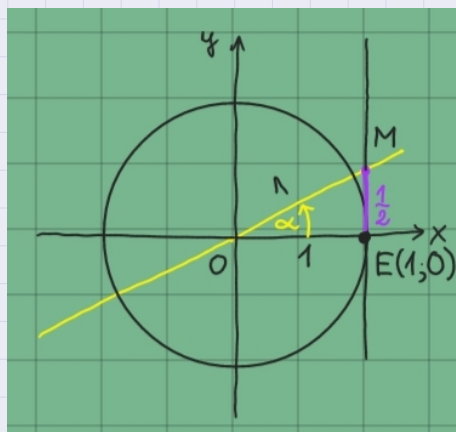


2.2. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Adja meg $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ pontos értékét, ha $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza a szöggel szemközti befogó és az átfogó hosszának hányadosa, koszinusza a szög melletti befogó és az átfogó hosszának hányadosa.



Az OEM Δ derékszögű,
ezért: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Ebben a Δ -ben α szinusza és koszinusza a megfelelő befogó és az átfogó hosszának hányadosa adja.

$$\sin \alpha = \frac{1/2}{\sqrt{5}/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}/2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

A befogók hossza:
 $\frac{1}{2}$ és 1, az átfogóé:
 $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

A keresett
hányadosok:

Vegyük észre, hogy a szög tangensének ismeretében a szög szinuszának és koszinuszának pontos értékét tudtuk meghatározni. Nem volt szükség a szög közelítő értékének számológéppel való meghatározására!

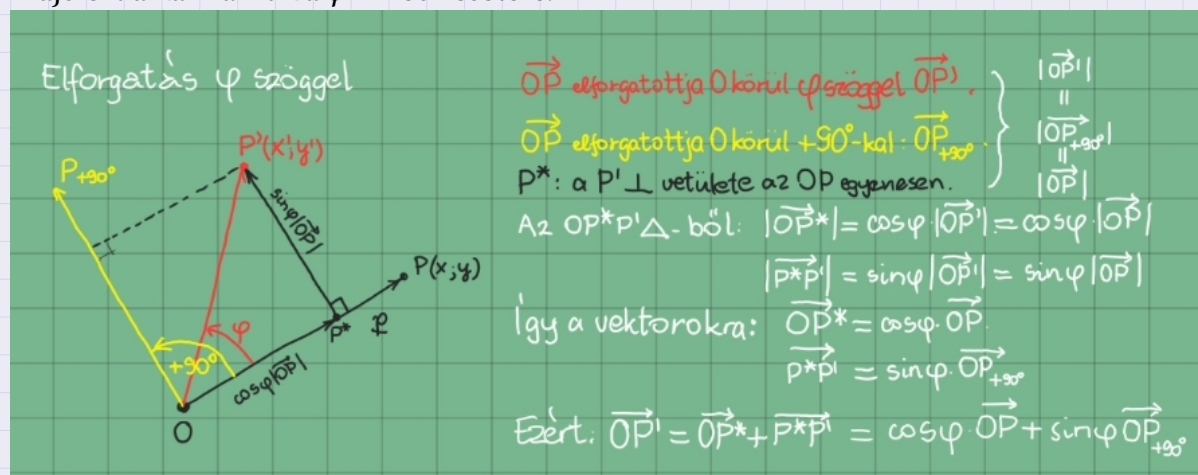
2.3. Mintafeladat megoldása (3. o.)

A $P(5;3)$ pontot forgassuk el $+60^\circ$ -kal az origó körül!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Egy nem zéró vektort a hosszúságával elosztva egy egységnyi hosszúságú, ún. *egységvektort* kapunk, melynek az iránya megegyezik az eredeti vektoréval.
2. Egy vektor koordinátáit megkapjuk, ha a végpontjának koordinátáiból kivonjuk a kezdőpontjának megfelelő koordinátáit.
3. Síkban egy vektor $+90^\circ$ -kal elforgatottjának első koordinátája az eredeti vektor második koordinátájának ellentettje, az elforgatott vektor második koordinátája az eredeti vektor első koordinátája.

A feladatot úgy oldjuk meg, hogy először egy általános φ szögű elforgatást hajtunk végre, majd ezt alkalmazzuk a $\varphi = +60^\circ$ esetére.



Ha $\varphi = 60^\circ$, és $P(5;3)$:

$\varphi = 60^\circ$

$\vec{OP}' = \vec{OP}^* + \vec{P}^*P' = \cos \varphi \cdot \vec{OP} + \sin \varphi \cdot \vec{OP}_{+90^\circ}$

$(x'; y') = \cos 60^\circ (x; y) + \sin 60^\circ (-y; x)$

$(x'; y') = \frac{1}{2} (x; y) + \frac{\sqrt{3}}{2} (-y; x)$

$(x'; y') = \frac{1}{2} (5; 3) + \frac{\sqrt{3}}{2} (-3; 5) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) \approx (-0,1; 5,9)$

vektor $+90^\circ$ -os elforgatottjának koordinátái

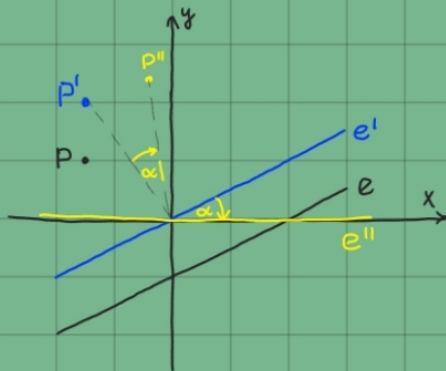
2.4. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Tükrözzük a $P(-3;2)$ pontot az $x - 2y = 4$ egyenletű egyenesre!

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Pontnak a koordináta-tengelyekre vonatkozó tükörképeinek koordinátái.
2. Pont Origó körüli adott szögű elforgatottjának koordinátái.
3. Egy pontnak egy egyenesre tükrözését úgy is végrehajthatjuk, hogy a pontot és az egyenest is elmozgatjuk a síkban, a képeken végrehajtsuk a tükrözést, majd visszamozgatjuk az imént kapott pontot.

Mivel Origó körül tudunk forgatni, és az x -tengelyre könnyen elvégezhetjük a tükrözést, úgy mozgatjuk el a pontot és az egyenest egy alkalmas eltolással és az Origó körüli megfelelő szögű forgatással, hogy az egyenesünk képe az x -tengely legyen.



TRÜKK Tükrözni az x -tengelyre egyszerű.

- (a) Eltoljuk a pontot és az egyenest úgy, hogy az átmegyjen O -n.
- (b) Elforgatjuk a kapottakat úgy, hogy az egyenes képe az x -tengely.
- (c) Erre könnyen tükrözzünk.
- (d) Visszaforogatunk, és visszahozunk.

Feladat: P tükrözése $e: y = \frac{1}{2}x - 2$ egyenesre.

(1) A $\underline{v}(0; 2)$ vektorú eltolás P -t a $P'(-3; 4)$ pontba, az e -t az $e': y = \frac{1}{2}x$ egyenesbe viszi.

(2) Egy α szögű O körüli forgatás e' -t az x -tengelybe, P' -t a P'' -be viszi.
 $\alpha = ?$ Korábbi feladatból tudjuk, NEM α , hanem $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ ismerete kell.
 Most: $\tan(-\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ [ld. előzők].
 $P''(x'', y'') = \frac{2}{\sqrt{5}}(-3; 4) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-4; -3) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{11}{\sqrt{5}}\right)$

(3) P'' -t tükrözzük $e'' = x$ -re, képe: $P'''(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{11}{\sqrt{5}})$

(4) P''' -t visszaforgatjuk $(-\alpha)$ -val.
 Most: $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
 $P^{IV}(x^{IV}; y^{IV}) = \frac{2}{\sqrt{5}}(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{11}{\sqrt{5}}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{11}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}) = \left(\frac{7}{5}; -\frac{24}{5}\right)$

(5) P^{IV} -et visszahozzuk $\underline{v}(0; -2)$ -vel.
 $P^V(x^V; y^V) = \left(\frac{7}{5}; -\frac{34}{5}\right)$.

2.5. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

(a) $2x^2 - 13x + 7$; (b) $36a^6 + 25b^4 - 60a^3b^2$.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Nevezetes azonosságok közül: két tag összegének, illetve különbségének négyzete, négyzetek különbsége, elsőfokú kifejezések szorzata.
2. Teljes négyzetté kiegészítés.
3. Másodfokú egyenlet gyöktényező alakja, gyökök és együtthatók közötti összefüggés.
4. Másodfokú egyenlet diszkriminánsa.

$$(a) \quad 2x^2 - 13x + 7$$

$$2x^2 - 13x + 7 = 0$$

1. megoldás (megoldóképlet)

A fenti másodfokú egyenlet gyöktényezős alakját keressük:

$$2(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Ha a diszkrimináns $D \geq 0$, akkor $\exists 2$ gyök.

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7}}{2 \cdot 2} = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$2\left(x - \frac{13 + \sqrt{49}}{4}\right)\left(x - \frac{13 - \sqrt{49}}{4}\right)$$

Azért lehetett szorzattá bontani, mert $D \geq 0$.

A bal oldalon egy másodfokú kifejezés áll.

Ezt elsőfokúak szorzatára akarjuk bontani, HA LEHETŐSÉGES.

2. megoldás (teljes négyzetre kiegészítés)

$$\begin{aligned} 2x^2 - 13x + 7 &= 2\left(x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{7}{2}\right) \\ &= 2\left[\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{169}{16} + \frac{7}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{113}{16}\right] \\ &= 2\left[\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{113}}{4}\right)^2\right] \quad \text{nevezetes azonosság} \\ &= 2\left[\left(x - \frac{13}{4} - \frac{\sqrt{113}}{4}\right)\left(x - \frac{13}{4} + \frac{\sqrt{113}}{4}\right)\right] \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ &= 2\left(x - \frac{13 + \sqrt{113}}{4}\right)\left(x - \frac{13 - \sqrt{113}}{4}\right) \end{aligned}$$

$$(b) \quad 36a^6 + 25b^4 - 60a^3b^2$$

$$= 36(a^3)^2 + 25(b^2)^2 - 60a^3b^2$$

$$= 36A^2 + 25B^2 - 60AB$$

$$= (6A)^2 - 2(6A)(5B) + (5B)^2$$

$$= ((6A) - (5B))^2$$

$$= (6a^3 - 5b^2)^2$$

* a és b legalacsonyabb előforduló hatványa:

a^3 és b^2 . $\rightarrow$ Ezekből indulhatunk ki, a kifejezést ezekből „ÉPÍTJÜK FEL” újra,

* $A = a^3$, $B = b^2$ bevezetéssel áttekinthetőbb.

* Átrendezés után további CSOPORTOSÍTÁSRIGIT:

* Nevezetes azonosság: két tag különbségének négyzete

2.6. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\frac{(a+1)(a^8 + a^4 + 1)}{(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1)}$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Nevezetes azonosságok közül: két tag összegének, illetve különbségének négyzete, négyzetek különbsége, elsőfokú kifejezések szorzata; két tag köbe különbségének, illetve összegének szorzattá bontása.

- Általában nem vizsgáljuk külön, hogy a törtes kifejezés az a milyen értékére van értelmezve. A feladatot úgy értjük, hogy az egyszerűsítést a kifejezések értelmezési tartományán kell elvégezni.
- A magasabb hatványok láttán egyrészt gondolhatunk arra, hogy nevezetes azonosság alapján szorzattá bontható a kifejezés. Ha ez nem megy, akkor az is szóba jöhet, hogy kifejezésünk egy még magasabb hatványokat tartalmazó nevezetes azonosságnak egy komponense.

(1) Hasonló szerkezetű tényezőink vannak:

$$\begin{array}{l} a^4 + a^2 + 1 \\ a^4 - a^2 + 1 \\ a^8 + a^4 + 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{^2} + \boxed{^1} + \boxed{^0} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a^2 \quad a^2 \quad a^2 \\ a^4 \quad a^4 \quad a^4 \end{array} ; \text{ ill } \begin{array}{c} \boxed{^2} - \boxed{^1} + \boxed{^0} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a^2 \quad a^2 \quad a^2 \end{array}$$

(2) A köbök különbségére, ill összegére: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$$\begin{array}{l} (a^4 + a^2 + 1)(a^2 - 1) = (a^2)^3 - 1 = a^6 - 1 \\ (a^4 - a^2 + 1)(a^2 + 1) = (a^2)^3 + 1 = a^6 + 1 \\ (a^8 + a^4 + 1)(a^4 - 1) = (a^4)^3 - 1 = a^{12} - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} y=1 \text{ esetén: } x^3 + 1 = x^2 - x + 1 \\ x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ y=1 \text{ esetén: } x^3 - 1 = x^2 + x + 1 \end{array}$$

(3) BEHELYETTESÍTÉS

$$\begin{array}{l} a^8 + a^4 + 1 = \frac{a^{12} - 1}{a^4 - 1} \\ a^4 + a^2 + 1 = \frac{a^6 - 1}{a^2 - 1} \\ a^4 - a^2 + 1 = \frac{a^6 + 1}{a^2 + 1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{(a+1)(a^8 + a^4 + 1)}{(a^4 - a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1)} = \\ = (a+1) \frac{a^{12} - 1}{a^4 - 1} \cdot \frac{a^2 - 1}{a^6 - 1} \cdot \frac{a^2 + 1}{a^6 + 1} \\ = (a+1) \frac{a^{12} - 1}{(a^6 - 1)(a^6 + 1)} \cdot \frac{(a^2 - 1)(a^2 + 1)}{a^4 - 1} \\ = (a+1) \frac{a^{12} - 1}{a^{12} - 1} \cdot \frac{a^4 - 1}{a^4 - 1} = (a+1) \end{array}$$

$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a nevezőben lévő mindkét tényező csak pozitív értéket vesz fel (teljes négyzetté kiegészítéssel: $a^4 \pm a^2 + 1 = (a^2 \pm \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$), ezért a kifejezés minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $(a+1)$ -re egyszerűsödik.

2.7. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Oldja meg az alábbi negyedfokú egyenlőtlenséget!

$$x^4 + x^2 - 6 > 0.$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Másodfokú egyenlet gyökeinek és együtthatóinak összefüggése (Viéte-formulák).
2. Egy nem nulla szorzat előjelét az dönti el, hogy a tényezői között a negatív előjelűek száma páros vagy páratlan: az első esetben a szorzat pozitív, a másodikban negatív.
3. Valós intervallumok ábrázolása számegyenesen.

- Általában magasabb fokú polinomiális egyenlőtlenség megoldása a polinom gyökeinek meghatározásával adható meg.
- Két nullahelye között a polinom előjele nem változik. Ezért a nullahelyek között egy helyen a polinom értékét kiszámolva, megtudjuk, hogy az adott intervallumon

teljesül-e az egyenlőtlenség. A legkisebb nullahelytől balra, illetve a legnagyobbtól jobbra ugyanez a helyzet ezekre a végtelen intervallumokra vonatkozóan.

Általában a magasabb fokú polinomiális egyenlőtlenség megoldása a meghatározásával adható meg.

(1) A negyedfokú kifejezést olyan tényezőkre szorozzuk, amelyek előjelét meg tudjuk határozni.

$$x^4 + x^2 - 6 \text{ Ez } (x^2) \text{-ben másodfokú.} \\ = (x^2 - x_1)(x^2 - x_2) \text{ alakban} \\ x_1 = ?; x_2 = ?$$

(2) Viète-formulák: $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

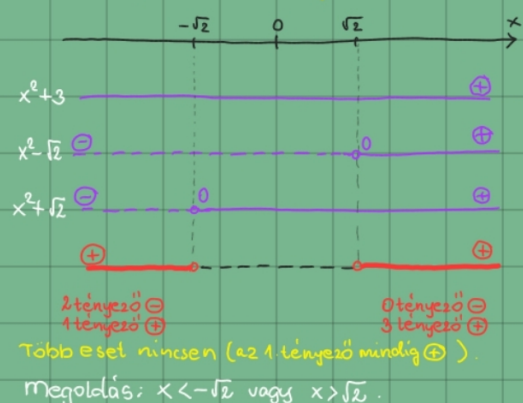
$$\text{Most: } x_1 + x_2 = -\frac{1}{1} = -1; x_1 x_2 = \frac{-6}{1} = -6.$$

Ezt megoldva (vagy némi gyakorlattal "kitalálva"): $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Vagyis: $x^4 + x^2 - 6 = (x^2 + 3)(x^2 - 2)$

(3) A második tényezőt továbbá alakítva:
 $x^4 + x^2 - 6 = (x^2 + 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

(4) 3-tényezős szorzat előjele (grafikus mego.).



2.8. Mintafeladat megoldása (4. o.)

Oldja meg az alábbi törtes egyenlőtlenséget!

$$\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}.$$

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Törtek összeadása (kivonása) közös nevezőre hozással.
2. Egy nem nulla szorzat előjelét az dönti el, hogy a tényezői között a negatív előjelűek száma páros vagy páratlan: az első esetben a szorzat pozitív, a másodikban negatív.
3. Valós intervallumok ábrázolása számegyenesen.

2.2. Megoldási terv

1. Meghatározzuk, hogy hol van értelmezve a teljes kifejezés.
2. Törtet 0-val tudunk könnyen összehasonlítani, ezért egy oldalra rendezünk.
3. A tört számlálóját és nevezőjét is tényezők szorzatává alakítjuk.
4. Számegyenesen ábrázoljuk az egyes tényezők pozitivitása, illetve negativitási intervallumait.
5. A negatív tényezők számának paritása alapján határozzuk meg a tört pozitivitási intervallumait.

(1) Értelmezési tartomány:
 $x+2 \neq 0$; $4x-1 \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{4}\}$.

(2) Rendezzünk a bal oldalra!

$$\frac{x-2}{x+2} - \frac{2x-3}{4x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(4x-1) - (2x-3)(x+2)}{(x+2)(4x-1)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2 - 10x + 8}{(x+2)(4x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{(x+2)(x - \frac{1}{4})} \geq 0$$
Mindenkét oldalt 2-vel osztjuk ($2 > 0$), és 4-gyel (> 0) szorozzuk. [számlálót 2-vel, nevezőt 4-gyel osztjuk.]

(3) Számlálót szorzattá bontjuk [korábban már alkalmazott módszerrel].

$$\frac{(x-4)(x-1)}{(x+2)(x - \frac{1}{4})} \geq 0$$

(4) ábrázolás

(5) A megoldás ($a_2 = 0$ csak $x=1$ vagy $x=4$ esetén)
 $x < -2$, vagy $\frac{1}{4} \leq x < 1$, vagy $x \geq 4$.

3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

? Döntse el, hogy igazak vagy hamisak a következő állítások!

- ☐ Minden trigonometrikus függvénynek periódusa a π .
- ☐ Tetszőleges pozitív szám lehet valamilyen trigonometrikus függvény periódusa.
- ☐ A kotangensfüggvény a tangensfüggvény inverze.
- ☐ Van olyan szög, amelynek koszinusza $-1,5$.

? Általában igaz-e a következő állítás: Nincsen minden másodfokú egyenletnek valós gyöke.

? Igaz-e, hogy ha egy másodfokú egyenlet minden együtthatója negatív, akkor gyökei csak negatívak lehetnek?

? Hogyan változik meg az egyenlőtlenség igazsághalmaza, ha mindkét oldalát egy negatív számmal osztjuk?

? Megváltozik-e az egyenlőtlenség iránya, ha mindkét oldalt egy valós változót tartalmazó kifejezéssel szorozzuk meg?

? Milyen annak a kifejezésnek az előjele, amelynek a számlálójában és a nevezőjében levő pozitív értékű tényezők száma p , a negatív értékű tényezők száma n ?

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket!

(a) $\sin^2(2x) = \frac{1}{2}$; (b) $\sqrt{2}|\sin 3x| = 2$; (c) $\cos x = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

$$(d) \ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0; \quad (e) \ x + \frac{1}{x} = 2\cos x; \quad \operatorname{tg}^2 x = 1.$$

2. Legyen $A(-1; 1)$, $B(4; 3)$, $C(-3; 5)$. Forgassa el az ABC háromszöget az origó körül

(a) $+90^\circ$ -kal; (b) 180° -kal; -90° -kal.

3. A $P(5; 3)$ pontot forgassa el $+45^\circ$ -kal az origó körül!

4. Tükrözze a $P(-1; 1)$ pontot az $2x - y + 4 = 0$ egyenletű egyenesre!

5. Tükrözze a $P(4; -3; 2)$ pontot az $2x - 3y + 1 = 0$ egyenletű síkra!

6. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket!

$$(a) \ 2x^2 - 13x + 20; \quad (b) \ 25y^4 - 10y^2x + x^2; \quad (c) \ 1 + 8b^3.$$

7. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

$$(a) \ \frac{4x^3y + 4xy^3}{x^4 - y^4}; \quad (b) \ \frac{a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{1 - a(1 - a)}{1 - a} \cdot \frac{a}{1 + a^3} - \frac{2a - 2a^2 - 2}{(1 - a^2)(a - 1)}.$$

8. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\frac{1}{(x - y)(x - z)} + \frac{1}{(z - x)(z - y)} + \frac{1}{(y - x)(y - z)}.$$

9. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

$$(a) \ x^2 - 9 < 0; \quad (b) \ (x - 2)^2 \leq 7 - 2x; \quad (c) \ \frac{2}{2x + 1} > x^2 - \frac{5}{2}x + 2.$$

10. Adja meg a valós m paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenlőtlenségnek ne legyen megoldása:

$$(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 < 0.$$

11. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket!

$$(a) \ \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1} < 1; \quad (b) \ \frac{(x - 1)(x + 2)}{x + 1} < 1; \quad (c) \ \frac{x - 1}{x} - \frac{x + 1}{x - 1} < 2.$$

5. Ajánlott irodalom

1. Reimann István: Matematika, Typotex
2. Obádovics J. Gyula: Matematika, Scolar
3. Szabó Tamás: Kalkulus I. példatár informatikusoknak, POLYGON
4. Fülöp Vanda: Kalkulus I. példatár, POLYGON