

Kalkulus feladatok megoldása

12. Olvasólecke

Többváltozós függvények szélsőértékei

Az olvasólecke szerzője



Vigh Viktor

PhD, egyetemi docens

SZTE TTIK

Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 60 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.
Projekt azonosító:
EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

- ☐ Többváltozós függvények parciális deriváltjai,
- ☐ többváltozós függvények szélsőértékei,
- ☐ érintősík egyenlete,
- ☐ egyváltozós függvények analízise,
- ☐ egyenletrendszerek megoldása.

Jó tanácsok az Olvasónak

Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt Kozma József társszerzőm tanácsait.

A gyakorlati OL fókusza

- Többváltozós függvények szabad szélsőértékeinek meghatározása;
- többváltozós függvények tartományai szélsőértékeinek meghatározása.

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ tudja megkeresni többváltozós függvények stacionárius pontjait;
- ✓ tudja osztályozni a stacionárius pontokat,
- ✓ tudja meghatározni egy kétváltozós függvény abszolút szélsőértékeit egy téglalapon.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 60 perc.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

Hol húzható „vízszintes” (xy -síkkal párhuzamos) érintősík az $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ függvényhez?

Megoldás a 3. oldalon

2.2. Mintafeladat.

Keressük meg az $f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$ függvény lokális (szabad) szélsőértékeit.

Megoldás a 4. oldalon

2.3. Mintafeladat.

Keressük meg az $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy$ függvény globális (abszolút) szélsőértékeit a $H = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ tartományon.

Megoldás a 6. oldalon

2.1. Mintamegoldások

2.1. Mintafeladat megoldása (2. o.)

Hol húzható „vízszintes” (xy -síkkal párhuzamos) érintősík az $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ függvényhez?

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Érintősík definíciója.
2. Érintősík és gradiens kapcsolata: az érintősík tanult egyenletéből leolvasható, hogy (totálisan differenciálható esetben) az érintősík pontosan akkor vízszintes, ha gradiens az adott pontban $(0, 0)$, azaz elfajul.
3. Parciális deriválás, egyenletrendszer megoldása.

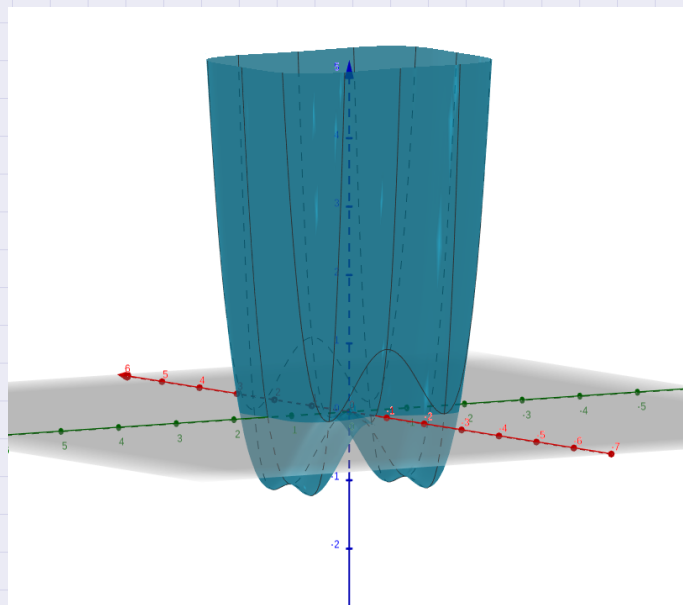
Az előzetes megjegyzések szerint elegendő azokat az (x, y) helyeket megkeresnünk, ahol a $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Ehhez ki kell számítsuk a parciális deriváltakat: $f'_x(x, y) = 8x^3 - 2x$ és $f'_y(x, y) = 4y^3 - 4y$. Ebből felírhatjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 8x^3 - 2x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$

Az első egyenlet baloldalából $2x$ -t kiemelve $2x(4x^2 - 1) = 0$. Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényező nulla, így három megoldást kapunk: $x_1 = 0$ és $x_{2,3} = \pm 1/2$.

Hasonlóan, a második egyenlet bal oldala szorzattá bontható: $4y(y^2 - 1) = 0$, amiből szintén három megoldás adódik: $y_1 = 0$ és $y_{2,3} = \pm 1$.

Nagyon fontos meggondolni, hogy az egyenletrendszert egy (x, y) számpár akkor elégíti ki, ha mindkét egyenletbe behelyettesítve igaz állítást kapunk. A kapott x megoldások bármelyike garantálja, hogy az első egyenlet teljesüljön; hasonlóan bármelyik kapott y megoldás garantálja, hogy a második egyenlet teljesüljön, így mind a kilenc lehetséges pár megoldást ad: $P_1(0, 0)$, $P_2(0, -1)$, $P_3(0, 1)$, $P_4(1/2, 0)$, $P_5(1/2, -1)$, $P_6(1/2, 1)$, $P_7(-1/2, 0)$, $P_8(-1/2, -1)$ és $P_9(-1/2, 1)$.



Megjegyzés. A kapott pontokat a függvény *stacionárius* pontjainak (helyeinek) nevezzük.

2.2. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Keressük meg az $f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$ függvény lokális (szabad) szélsőértékeit.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Lokális szélsőérték fogalma.
2. Parciális deriválás, egyenletrendszer megoldása.
3. Hesse-mátrix, determináns.
4. Recept lokális szélsőértékek keresésére (kétszer folytonosan differenciálható függvényekre):
 1. Lokális szélsőérték csak stacionárius pontban lehet, ezért első lépésként meghatározzuk a stacionárius pontokat a $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ egyenletrendszer megoldásával. (Lásd első mintafeladat.) **FONTOS!** A stacionárius helyeken nem feltétlen van szélsőérték.
 2. Minden talált stacionárius pontra alkalmazzuk a következő tesztet. Ha (x_0, y_0) stacionárius pontja f -nek, és
 - i) $\det H_f(x_0, y_0) < 0$, akkor f -nek az (x_0, y_0) pontban nincs lokális szélsőértéke (azaz nyeregpontra van).
 - ii) $\det H_f(x_0, y_0) > 0$, akkor f -nek az (x_0, y_0) pontban lokális szélsőértéke van; mégpedig
 - ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor szigorú lokális minimuma;
 - ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor szigorú lokális maximuma.
 - Egyéb esetekben (amikor $\det H_f = 0$) a teszt eredménytelen.
 3. Ha a 2. pontban nem jutottunk eredményre, elemi utat keresünk a stacionárius pont vizsgálatára.

Alkalmazzuk a fenti eljárást.

1. Stacionárius pontok meghatározása

A parciális deriváltak meghatározásával kezdünk: $f'_x(x, y) = 3x^2 + 2xy$ és $f'_y(x, y) = x^2 - 2y - 4$. Ezekből felírjuk a megoldandó egyenletrendszer.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy = 0 \\ x^2 - 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

A második egyenletből kifejezhetjük y -t: $y = (x^2 - 4)/2$. Ezt visszaírva az első egyenletbe $3x^2 + 2x(x^2 - 4)/2 = 0$ adódik, egyszerűsítések után kapjuk, hogy

$$x^3 + 3x^2 - 4x = 0.$$

Ennek bal oldala szorzattá alakul, így a megoldásai $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ és $x_3 = -4$. Az $y = (x^2 - 4)/2$ összefüggésbe visszahelyettesítve kapjuk a megfelelő y értékeket: $y_1 = -2$, $y_2 = -3/2$ és $y_3 = 6$. Így a vizsgálandó kritikus pontok $P_1(0, -2)$; $P_2(1, -3/2)$ és $P_3(-4, 6)$.

2. Először kiszámítjuk a Hesse-mátrixot és annak determinánsát. A második deriváltakat az f'_x és f'_y elsőrendű parciális deriváltak továbbderiválásával kapjuk. Ebből a Hesse-mátrix:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}.$$

Ennek a determinánsára is szükségünk lesz:

$$\det H_f = \det \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix} = -4x^2 - 12x - 4y.$$

Ezután sorra vesszük a stacionárius pontokat.

- A $P_1(0, -2)$ pontban a Hesse-determináns

$$\det H_f|_{(0, -2)} = -4 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 - 4 \cdot -2 = 8 > 0.$$

Mivel a determináns pozitív, így a teszt eredményes, f -nek a P_1 helyen lokális szélsőértéke van. Mivel $f''_{xx}(0, -2) = 6 \cdot 0 + 2 \cdot -2 = -4 < 0$ negatív, ezért a szélsőérték maximum.

- A $P_2(1, -3/2)$ pontban a Hesse-determináns

$$\det H_f|_{(1, -3/2)} = -4 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - 4 \cdot -3/2 = -10 < 0.$$

Mivel a determináns negatív, így a teszt eredményes, f -nek a P_2 helyen nincs lokális szélsőértéke.

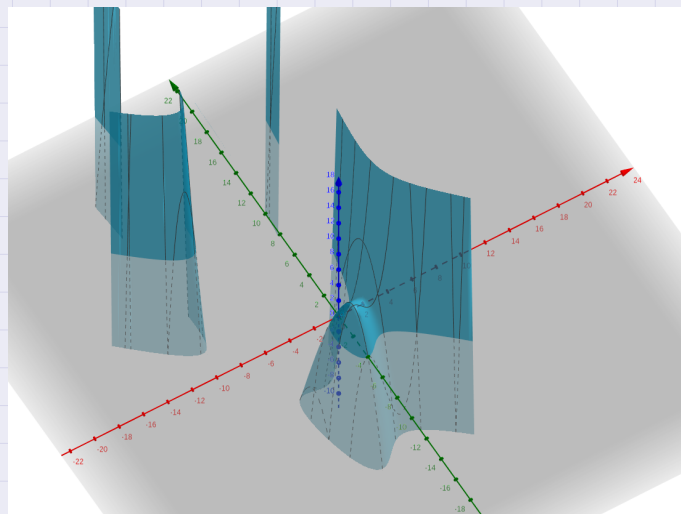
- A $P_3(-4, 6)$ pontban a Hesse-determináns

$$\det H_f|_{(-4, 6)} = -4 \cdot (-4)^2 - 12 \cdot -4 - 4 \cdot 6 = -40 < 0.$$

Mivel a determináns negatív, így a teszt eredményes, f -nek a P_3 helyen nincs lokális szélsőértéke.

Kaptuk, hogy az f függvénynek a $P_1(0, -2)$ helyen lokális maximuma van, a maximum értéke $f(0, -2) = 4$. Más szélsőérték nincs.

A megtalált P_1 -beli maximum jól látszik az ábrán, de egyébként a nagy függvényértékek miatt a jó ábrázolás nehézkes:



2.3. Mintafeladat megoldása (3. o.)

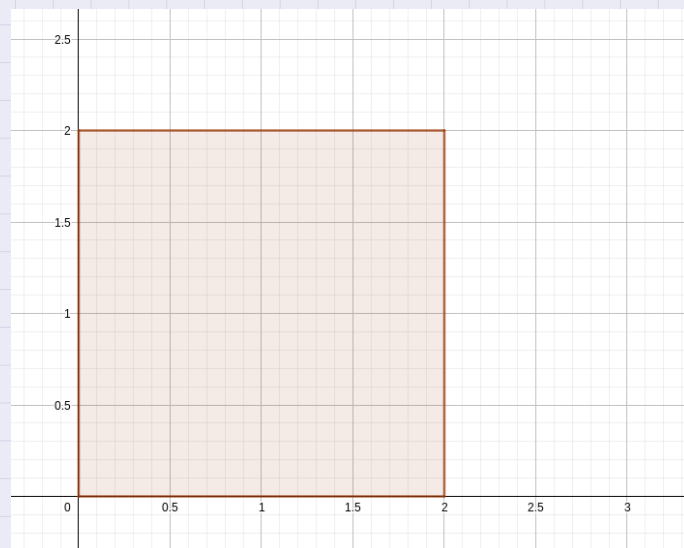
Keressük meg az $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy$ függvény globális (abszolút) szélsőértékeit a $H = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ tartományon.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Weierstrass-tétele szerint folytonos függvény kompakt (azaz korlátos és zárt) tartományon felveszi a szélsőértékeit. Így a kérdés jó, meg kell határoznunk, mennyi a függvény legnagyobb és legkisebb értéke, és azt is, hogy ezeket hol veszi fel.
2. Parciális deriválás, egyenletrendszer megoldása.
3. Hesse-mátrix, determináns.
4. Recept szélsőértékek keresésére kompakt tartományon (kétszer folytonosan differenciálható függvényekre): A lehetséges szélsőértékhelyek keresését két részben végezzük:
 - A tartomány belsejében: megkeressük az ide eső stacionárius pontokat.
 - A határon: egyváltozós függvényekre vezetjük vissza a vizsgálatot.

Elegendő néhány (véges sok) pontot felsorolnunk, amikben lehetnek a szélsőértékek. Az itt vett helyettesítési értékeket összehasonlítva kapjuk meg végül a maximumot ill. minimumot.

Először is értsük meg a vizsgált tartományt: ez egy 2 oldalú négyzet az első síknegyed „sarkában”.



- 1) A belső pontok vizsgálata. Megkeressük a függvény stacionárius pontjait, majd megvizsgáljuk, melyek esnek a H négyzet belsejébe.

Parciális deriválás után kapjuk, hogy $\nabla f(x, y) = (2x - 2y, 3y^2 - 2x)$. Így a megoldandó egyenletrendszer:

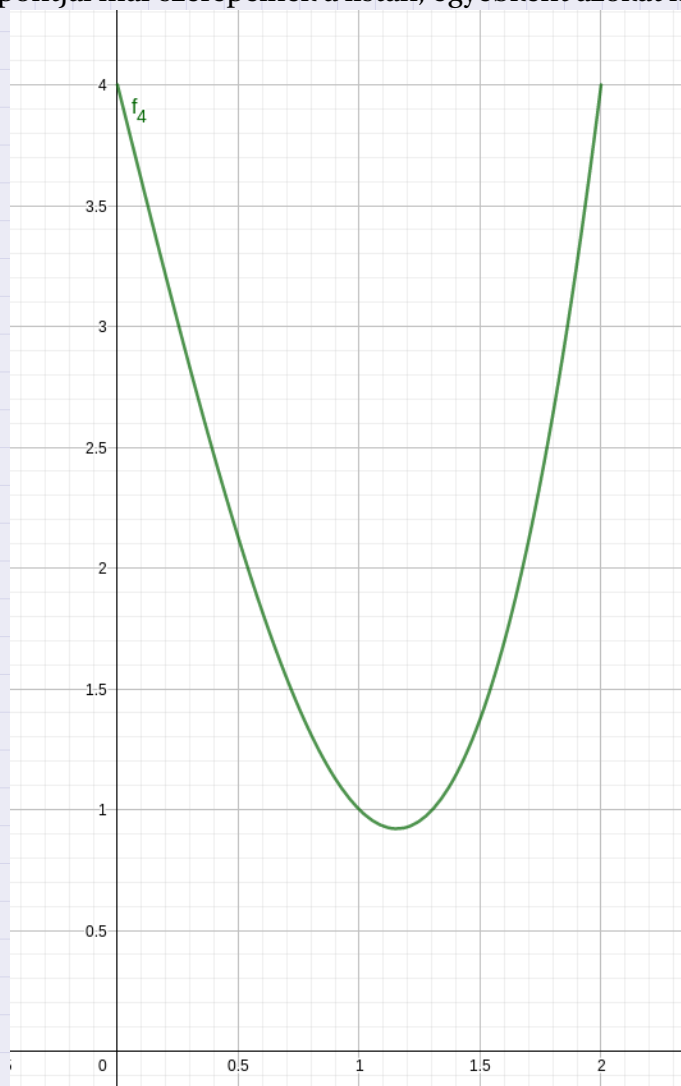
$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 3y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Az első egyenlet alapján $x = y$, ezt helyettesítjük be a másodikba, így $3x^2 - 2x = 0$ egyenletre jutunk. Ennek megoldásai az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 2/3$, megfelelő y értékek nyilván $y_1 = 0$ és az $y_2 = 2/3$. A függvénynek így a $(0, 0)$ és a $(2/3, 2/3)$ helyeken fajul el a gradiense. Az origó nincs a négyzet belsejében (a határán van), így itt egyetlen gyanús helyet kapunk, ezt felvesszük a listánkra: $P_0(2/3, 2/3)$. Ezzel H belsejének vizsgálatát befejeztük.

- 2) A határ vizsgálata során a négyzet mind a négy oldalát külön vizsgálunk kell.

- Az x -tengelyre illeszkedő oldal esetén $y = 0$ és $0 \leq x \leq 2$. Itt a függvény $f_1(x) = f(x, 0) = x^2$ szekciófüggvény megszorítva az $x \in [0, 2]$ intervallumra. Ennek grafikonja egy monoton növekvő parabolaív, ezért a legkisebb ill. legnagyobb értékét az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 2$ helyeken veszi fel. Ezért felvesszük a listánkra a $P_1(0, 0)$ és a $P_2(2, 0)$ pontokat.
- Az y -tengelyre illeszkedő oldal esetén $x = 0$ és $0 \leq y \leq 2$. Itt a függvény $f_2(y) = f(0, y) = y^3$ szekciófüggvény megszorítva az $y \in [0, 2]$ intervallumra. Ennek grafikonja egy monoton növekvő íve a köbös hatványfüggvény grafikonjának, ezért a legkisebb ill. legnagyobb értékét az $y_1 = 0$ és az $y_2 = 2$ helyeken veszi fel. A listánkon a $(0, 0)$ pont már szerepel, újként felvesszük a $P_3(0, 2)$ pontot.
- A négyzet felső, vízszintes oldalán $y = 2$ és $0 \leq x \leq 2$. Itt a függvény $f_3(x) = f(x, 2) = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$ szekciófüggvény megszorítva az $x \in [0, 2]$ intervallumra. Ennek grafikonja szintén egy monoton parabolaív, ezért a legnagyobb ill. legkisebb értékét az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 2$ helyeken veszi fel. Új pontként a $P_4(2, 2)$ -t kapjuk, az $x_1 = 0$ -hoz tartozó P_3 már szerepel a listán.
- A négyzet jobb oldali, függőleges oldalán $x = 2$ és $0 \leq y \leq 2$. Itt a függvény $f_4(y) = f(2, y) = y^3 - 4y + 4$ szekciófüggvény megszorítva az $y \in [0, 2]$ intervallumra. Ennek vizsgálatához egyváltozós analízist alkalmazunk: $f'_4(y) = 3y^2 - 4$, ez nulla, ha $y = \pm 2/\sqrt{3}$. Ezek közül csak az $y = 2/\sqrt{3}$ érték esik a vizsgált intervallumba, ezért felvesszük a listára a $P_5(2, 2/\sqrt{3})$ pontot. Az intervallum $y_1 = 0$ és $y_2 = 2$ értékekhez

tartozó végpontjai már szerepelnek a listán, egyébként azokat is felvennénk.



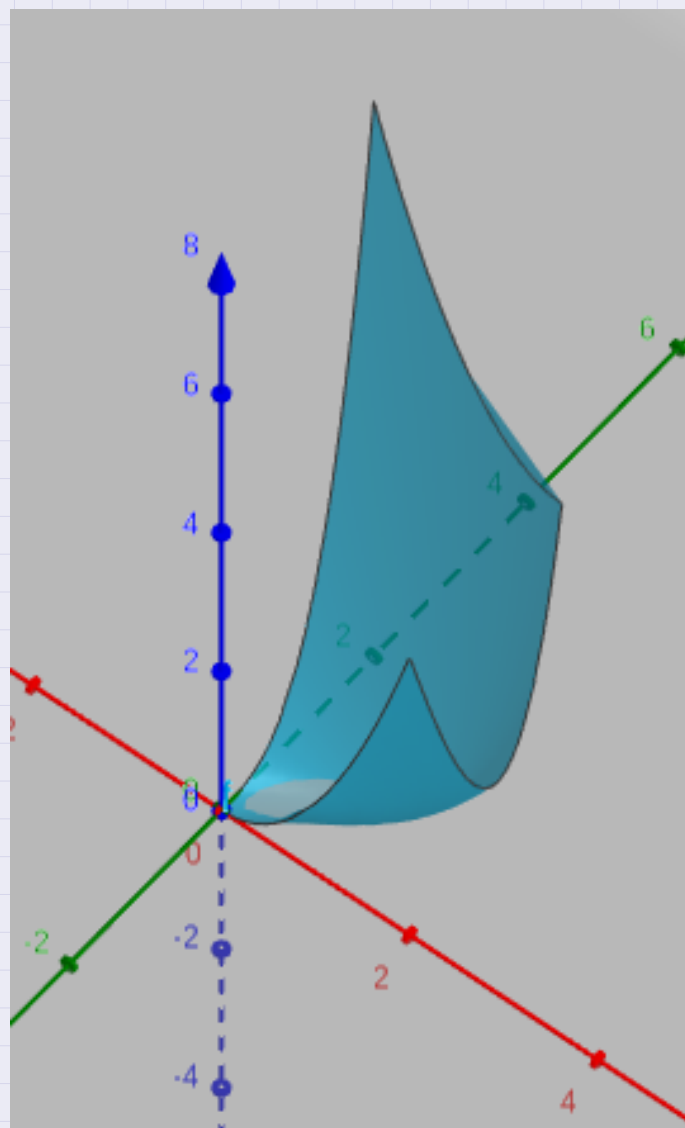
A határ vizsgálatát ezzel befejeztük.

3) Végül a kapott 6 pontot összehasonlítjuk.

$$f(2/3, 2/3) \approx -0,15, \quad f(0, 0) = 0 \quad f(2, 0) = 4$$

$$f(0, 2) = 8 \quad f(2, 2) = 4 \quad f(2, 2/\sqrt{3}) \approx 0,92$$

Tehát az f függvény a H tartományon a minimumát a $P_1(2/3, 2/3)$ pontban veszi fel, a minimum értéke $f(2/3, 2/3) = -4/27$. A maximumát pedig a $P_4(0, 2)$ pontban éri el, a maximum értéke $f(0, 2) = 8$.



3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

- ? Igaz-e, hogy ahol a deriválható függvény gradiense nullvektor, ott a függvénynek lokális szélsőértéke van? Adjunk példát!
- ? Lehetséges-e, hogy egy f függvény a T téglalapon a minimumát és a maximumát is a T belsejében veszi fel?
- ? Adjunk példát olyan függvényre, aminek nincs lokális szélsőértéke!
- ? Adjunk példát olyan függvényre, aminek egy körvonal minden pontjában lokális szélsőértéke van!
- ? Döntse el, hogy igazak vagy hamisak a következő állítások!
 - ☐ A lokális maximum- és lokális minimumhelyek száma egyenlő.

- ☐ Van olyan $f(x, y)$ függvény és T téglalap, hogy f a minimumát és a maximumát is T egy csúcsában veszi fel.
- ☐ Ha a Hesse-determináns pozitív (a, b) pontban, akkor $f''_{xx}(a, b) \neq 0$.

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. A tanult módszert alkalmazva vizsgáljuk meg, az alábbi függvényeknek hol van lokális (szabad) szélsőértéke!
 - a) $f(x, y) = 2xy + 2x^2 + 4y^2 + 6$
 - b) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$
 - c) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
 - d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$
 - e) $f(x, y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$
 - f) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$
 - g) $f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$
 - h) $f(x, y) = xy(6 - x - y)$
 - i) $f(x, y) = 2y^3 + x^2y + 5y^2 + x^2 + 1$
 - j) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$
2. Határozzuk meg az alábbi függvények minimumát ill. maximumát a megadott téglalapokon.
 - a) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$ a $T = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ téglalapon
 - b) $f(x, y) = (4x - x^2) \cos y$ az $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3; -\pi/4 \leq y \leq \pi/4\}$ téglalapon

5. Ajánlott irodalom

1. Bagota Mónika, Németh József, Németh Zoltán: Analízis II. feladatgyűjtemény, POLYGON
2. Szabó Tamás: Kalkulus II. példatár informatikusoknak, POLYGON