

Kalkulus feladatok megoldása

11. Olvasólecke

Többváltozós függvények deriválása

Az olvasólecke szerzője



Vigh Viktor

PhD, egyetemi docens

SZTE TTIK

Bolyai Intézet, Geometria tanszék

A lecke feldolgozásának időigénye 45 perc.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.
Projekt azonosító:
EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

1. A lecke tartalma

Szükséges ismeretek

- ☐ Többváltozós függvények parciális deriváltjai;
- ☐ többváltozós függvények iránymenti deriváltja;
- ☐ érintősík egyenlete,
- ☐ egyváltozós függvények deriválása,
- ☐ koordinátageometria.

Jó tanácsok az Olvasónak

Itt olvashatja el a lecke feldolgozása előtt Kozma József társszerzőm tanácsait.

A gyakorlati OL fókusza

- Többváltozós függvények parciális deriváltja;
- többváltozós függvények érintősíkja;

Az OL áttanulmányozásával az olvasó elérheti, hogy

- ✓ tudjon deriválni képlettel adott többváltozós függvényeket;
- ✓ fel tudja írni többváltozós függvény adott pontbeli érintősíkjának egyenletét.

Az OL áttanulmányozásának időigénye

- A feladatok és számítások áttanulmányozásának és az ellenőrző kérdések megválaszolásának ideje: kb. 45 perc.
- Természetesen szükséges lehet megszakítani az előre haladást, és az előadás Olvasó-, valamint Videóleckéjébe, hasonlóképpen a Gyakorlatéba is beletekinteni magyarázatért, fogalmak pontos meghatározásáért, iránymutatásért, és ez további egyéni időszükségletet jelent.
- A tudás elmélyítését szolgáló kitűzött gyakorlatok elvégzése szintén további időszükséglettel jár.

2. Kidolgozott mintafeladatok

2.1. Mintafeladat.

Írjuk fel az $f(x, y) = x^2 \sin(xy)$ kétváltozós függvény szekciófüggvényeit az $(1, \pi)$ pontban, majd ezek segítségével számítsuk ki a parciális deriváltakat is az adott pontban. Írjuk fel a függvény gradiensét is.

Megoldás a 3. oldalon

2.2. Mintafeladat.

Formális deriválással számítsuk ki az $f(x, y) = x^4 - y^2 + 3xy$ függvény első- és másodrendű parciális deriváltjait. Írjuk fel a gradienst és a Hesse-mátrixot is.

Megoldás a 4. oldalon

2.3. Mintafeladat.

Tekintsük az $f(x, y) = x^2y - \ln x$ függvényt, és az $(x_0, y_0) = (1, 2)$ pontot. Írjuk fel f grafikonjához húzott érintősík egyenletét az (x_0, y_0) pontban.

Megoldás az 5. oldalon

2.4. Mintafeladat.

Tekintsük az $f(x, y) = x^2y - \ln x$ függvényt, és az $(x_0, y_0) = (1, 2)$ pontot. Számítsuk ki az f függvény $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ vektor szerinti iránymenti deriváltját (x_0, y_0) pontban.

Megoldás a 6. oldalon

2.5. Mintafeladat.

Számítsuk ki az alábbi függvények gradiensét és Hesse-mátrixát a megadott pontokban.

a) $f(x, y) = x^3 \cos 2y$ az $(x_0, y_0) = (1, \pi)$ pontban

b) $g(x, y) = (\ln x)^y$ az $(x_0, y_0) = (e, 1)$ pontban

Megoldás a 6. oldalon

2.1. Mintamegoldások

2.1. Mintafeladat megoldása (2. o.)

Írjuk fel az $f(x, y) = x^2 \sin(xy)$ kétváltozós függvény szekciófüggvényeit az $(1, \pi)$ pontban, majd ezek segítségével számítsuk ki a parciális deriváltakat is az adott pontban. Írjuk fel a függvény gradiensét is.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Szekciófüggvények definíciója.
2. Parciális derivált számítása szekciófüggvényekből: az x -szerinti parciális derivált az (x_0, y_0) pontban nem más, mint az $f_1(x) = f(x, y_0)$ szekciófüggvény deriváltja az x_0 -ban.
3. Gradiens definíciója.
4. Egyváltozós függvények differenciálása, összetett függvény.

Először is meghatározzuk a szekciófüggvényeket az $(x_0, y_0) = (1, \pi)$ helyen:

$$f_1(x) = f(x, \pi) = x^2 \sin(\pi x) \quad \text{és} \quad f_2(y) = f(1, y) = \sin y.$$

Ezeket az egyváltozós függvényeknél tanult módon differenciálhatjuk. Az f_1 függvény egy szorzat, ezért a szorzatra vonatkozó szabályt alkalmazzuk, majd nem feledkezünk meg róla, hogy $\sin(\pi x)$ összetett függvény, amelynek belső függvénye πx . Ezek alapján:

$$f_1'(x) = (x^2 \sin(\pi x))' = (x^2)' \cdot \sin(\pi x) + x^2 \cdot (\sin(\pi x))' = 2x \sin(\pi x) + x^2 \cdot \cos(\pi x) \cdot \pi.$$

Az f_2 függvény változója y . Ez zavaró lehet, hisz az egyváltozós függvényeknél többnyire x változót használtunk. Valójában a változó jelölése önkényes (természetesen különböző változókat nem jelölhetünk ugyanazzal a betűvel), de célszerű a jelöléseket olyanra választani, hogy azok segítség a tájékozódást, a megértést. Jelen helyzetben az y használata ráerősít arra, hogy az f_2 függvény az f első változójának rögzítésével származik f -ből. Természetesen azonban a $\sin$ függvény deriváltja továbbra is $\cos$, azaz

$$f_2'(y) = (\sin y)' = \cos y,$$

ahol most y -szerint deriváltunk.

Végül a parciális deriváltakat egyszerű behelyettesítéssel kapjuk:

$$\partial_1 f(1, \pi) = f'_x(1, \pi) = f'_1(1) = 2 \sin \pi + \cos(\pi) \cdot \pi = -\pi;$$

és

$$\partial_2 f(1, \pi) = f'_y(1, \pi) = f'_2(\pi) = \cos(\pi) = -1.$$

A gradiens a parciális deriváltakból alkotott vektor:

$$\nabla f(1, \pi) = \text{grad } f(1, \pi) = (f'_x(1, \pi), f'_y(1, \pi)) = (-\pi, -1).$$

Megjegyzés. Az $f'_x(1, \pi)$ jelölés nem a legszerencsésebb, ugyanis x -szerinti deriválást alkalmazunk, de a képletből nem derül ki, melyik a függvény x változója. Helyesebb lenne a

$$f'_x(x, y)|_{(1, \pi)}$$

jelölést használni, de általában a megoldásban használt egyszerűbb alak sem félreérthető.

2.2. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Formális deriválással számítsuk ki az $f(x, y) = x^4 - y^2 + 3xy$ függvény első- és másodrendű parciális deriváltjait. Írjuk fel a gradienst és a Hesse-mátrixot is.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Parciális derivált függvények: minden pontban kiszámítva az x - és y -szerinti parciális deriváltak értékét (ha léteznek), egy-egy újabb függvényt kapunk.
2. Másodrendű parciális derivált: az elsőrendű parciális deriváltak továbbderiválásából kapjuk. Kétváltozós esetben elsőrendű parciális deriváltból kettő, másodrendűből már négy van.
3. Formális parciális deriválás: az x szerinti parciális deriválásnál az y változót konstansnak kell tekintsük. Ez pontosan ugyanaz az eljárás, amit az első mintafeladatnál láttunk, csak ott y konkrét értéket kapott. Most nem írunk helyére számot, de úgy kezeljük, mintha az lenne, és a függvényt az egyváltozós esetben tanult szabályokat alkalmazva deriváljuk.

Először az $f'_x(x, y)$ parciális deriváltat számoljuk ki. Tagonként deriválhatunk, az x^4 tag deriváltja az egyváltozós függvényeknél tanultak szerint $4x^3$. A $-y^2$ tag az x -szerinti deriválásnál konstansként viselkedik, ezért deriváltja nulla. Végül a $3xy$ tagban a $3y$ faktor konstansnak tekintendő, ezért kiemelhető. A megmaradó x tényező deriváltja az egyváltozós függvények-

nél tanultak szerint 1. Ebből

$$f'_x(x, y) = (x^4 - y^2 + 3xy)'_x = (x^4)'_x - (y^2)'_x + (3xy)'_x = 4x^3 + 3y.$$

Hasonlóan, az y -szerinti parciális deriválásnál az x tekintendő konstansnak, ezért az x^4 konstans tag deriváltja 0. A $-y^2$ tag deriválását (y -szerint) az egyváltozós függvényeknél tanultak szerint végezhetjük, így $-2y$ -t kapunk. Végül a $3xy$ tagban a $3x$ faktor konstans, az y tényező deriváltja pedig 1.

$$f'_y(x, y) = (x^4 - y^2 + 3xy)'_y = (x^4)'_y - (y^2)'_y + (3xy)'_y = -2y + 3x.$$

Az f'_x és az f'_y parciális deriváltfüggvényeket továbbderiválva kapjuk a másodrendű parciális deriváltakat.

$$f''_{xx}(x, y) = (f'_x(x, y))'_x = (4x^3 + 3y)'_x = 12x^2;$$

$$f''_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y = (4x^3 + 3y)'_y = 3;$$

$$f''_{yx}(x, y) = (f'_y(x, y))'_x = (-2y + 3x)'_x = 3;$$

$$f''_{yy}(x, y) = (f'_y(x, y))'_y = (-2y + 3x)'_y = -2.$$

Ezekből a gradienst az elsőrendű deriváltakból, a Hesse-mátrixot a másodrendű deriváltakból kapjuk:

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 + 3y, -2y + 3x) \quad \text{és} \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

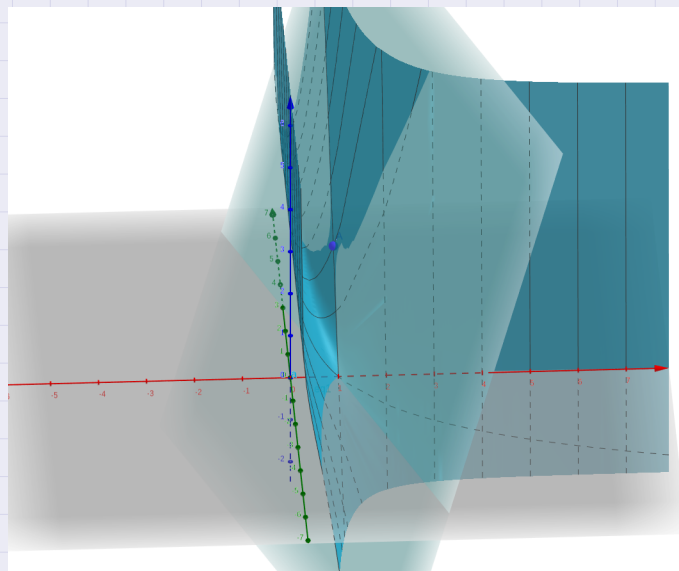
2.3. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Tekintsük az $f(x, y) = x^2y - \ln x$ függvényt, és az $(x_0, y_0) = (1, 2)$ pontot. Írjuk fel f grafikonjához húzott érintősík egyenletét az (x_0, y_0) pontban.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Totális deriválhatóság fogalma.
2. Érintősík fogalma, képlete: legyen az f függvény totálisan deriválható az (x_0, y_0) pontban. Ekkor a grafikonjához a $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjában húzott érintő egyenlete $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.
3. Függvények parciális deriváltja.

A tanult módon számíthatóak a parciális derivált függvények, amikből a gradiens $\nabla f(x, y) = (2xy - 1/x, x^2)$, így a vizsgált pontban $\nabla f(1, 2) = (3, 1)$. Továbbá $f(x_0, y_0) = f(1, 2) = 1^2 \cdot 2 - \ln 1 = 2$. Innen az érintősík egyenletét a fenti képletbe behelyettesítve kapjuk: $z - 2 = 3(x - 1) + 1(y - 2)$, rendezve $3x + y - z - 3 = 0$.



2.4. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Tekintsük az $f(x, y) = x^2y - \ln x$ függvényt, és az $(x_0, y_0) = (1, 2)$ pontot. Számítsuk ki az f függvény $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ vektor szerinti iránymenti deriváltját (x_0, y_0) pontban.

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Az iránymenti derivált fogalma.
2. Az iránymenti derivált kiszámítása: totálisan differenciálható függvény esetén $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{u}$, azaz az iránymenti derivált a gradiensvektor és $\mathbf{u}$ skaláris szorzata.
3. Skaláris szorzat kiszámítása, parciális deriválás.

Az előző feladatban már kiszámoltuk a függvény gradiensét az $(1, 2)$ pontban: $\nabla f(1, 2) = (3, 1)$. Nincs más feladatunk, mint ezt összeszorozni $\mathbf{u}$ vektorral:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \mathbf{u} = (3, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Megjegyzés. Totálisan differenciálható függvény esetén a képletből látható, hogy az iránymenti derivált meghatározható a gradiensből és az irányt kijelölő $\mathbf{u}$ vektorból, azaz az iránymenti derivált nem árul el új információt a függvényről a parciális deriváltakhoz képest. Szemléletes jelentése, hogy az adott felületi ponton állva, és $\mathbf{u}$ irányba nézve, a grafikon mennyire meredek előttünk, ez az információ nyilván kiolvasható az érintősík egyenletéből is.

2.5. Mintafeladat megoldása (3. o.)

Számítsuk ki az alábbi függvények gradiensét és Hesse-mátrixát a megadott pontokban.

- a) $f(x, y) = x^3 \cos 2y$ az $(x_0, y_0) = (1, \pi)$ pontban
- b) $g(x, y) = (\ln x)^y$ az $(x_0, y_0) = (e, 1)$ pontban

Mit kell tudni a feladat megoldásához?

1. Lásd az első és második mintafeladatnál feladatnál adott tanácsokat.
2. Itt jegyezzük meg, hogy ilyen típusú feladatoknál a teljes megoldás része lenne az értelmezési kérdések (értelmezési tartomány, differenciálhatóság) vizsgálata. Ettől megegyezés szerint eltekintünk, itt pusztán a formális deriválás gyakorlása a cél. De ne feledjük el, hogy ha a deriváltat **használni** szeretnénk valamire, akkor nagyon is fontos megvizsgálni a feltételek teljesülését.

- a) Az $f(x, y) = x^3 \cos 2y$ függvény szorzat, de az egyes tényezők csak x -től ill. y -től függenek, ezért minden esetben valamelyik konstansként kiemelhető; így az x szerint deriválva $f'_x(x, y) = 3x^2 \cdot \cos 2y$ adódik, y szerint pedig $f'_y(x, y) = x^3 \cdot -\sin(2y) \cdot 2$, ahol az utolsó 2 tényező a $2y$ belső függvény deriválásból adódik. Ezekbe az adott pontot helyettesítve kapjuk a gradienst:

$$\nabla f \Big|_{(1,\pi)} = (3x^2 \cos 2y, -2x^3 \sin 2y) \Big|_{(1,\pi)} = (3, 0).$$

Hasonlóan számíthatjuk a Hesse-mátrixot.

$$H_f \Big|_{(1,\pi)} = \begin{pmatrix} 6x \cos 2y & -6x^2 \sin 2y \\ -6x^2 \sin 2y & -4x^3 \cos 2y \end{pmatrix} \Big|_{(1,\pi)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

- b) A $g(x, y) = (\ln x)^y$ függvény x szerinti deriváláskor az y kitevő konstans, így a külső függvényünk egy y kitevőjű *hatványfüggvény*, aminek a belsejébe írtunk $\ln x$ -t. Az x^α hatványfüggvény x szerinti deriváltja $\alpha x^{\alpha-1}$, ami alapján $g'_x(x, y) = y \cdot (\ln x)^{y-1} \cdot (\ln x)'_x = y \cdot (\ln x)^{y-1} \cdot 1/x$.

Hasonlóan, y szerint deriválva az $\ln x$ alap konstans, így g egy *exponenciális függvényként* viselkedik, aminek alapja $\ln x$, kitevője pedig (a változó) y . Így $g'_y(x, y) = (\ln x)^y \cdot \ln(\ln x)$. Ezekbe beírva az adott pontot kapjuk a gradienst:

$$\nabla g \Big|_{(e,1)} = (y \cdot (\ln x)^{y-1} \cdot 1/x, (\ln x)^y \cdot \ln(\ln x)) \Big|_{(e,1)} = (1/e, 0).$$

Hasonlóan számíthatjuk a Hesse-mátrixot:

$$H_g = \begin{pmatrix} \frac{y(y-1)(\ln x)^{y-2} - y(\ln x)^{y-1}}{x^2} & \frac{(\ln x)^{y-1} + y(\ln x)^{y-1} \ln(\ln x)}{x} \\ \frac{y(\ln x)^{y-1} \ln(\ln x) + (\ln x)^{y-1}}{x} & (\ln x)^y \cdot \ln^2(\ln x) \end{pmatrix}.$$

$$H_g \Big|_{(e,1)} = \begin{pmatrix} -1/e^2 & 1/e \\ 1/e & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Ellenőrző kérdések az olvasóleckéhez

Ellenőrző kérdések

- ? Adjunk példát olyan függvényre, aminek az origóban a parciális deriváltjai léteznek és nullával egyenlők, de a függvény nem folytonos az origóban.
- ? Az f függvény érintősíkja a $(2, 1)$ pontban $3x - 2y - 2z = 4$. Az alábbiak közül melyikeket tudjuk kiszámítani ezekből az információkból?
1. $f(2, 1)$
 2. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(2, 1)$, ahol $\mathbf{u} = (3/5, 4/5)$
 3. $f''_{xy}(2, 1)$
 4. $f'_x(2, 1)$
 5. $\nabla f(2, 1)$
 6. $f''_{xx}(2, 1)$
 7. $f'_y(2, 1)$
 8. $H_f(2, 1)$
- ? Léteznek-e az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény parciális deriváltjai az origóban? Folytonos-e az origóban a függvény?
- ? Adjunk példát olyan függvényre, amit az origóban érint az xy -sík, de mindkét origóbeli szekciófüggvény szigorúan monoton növekvő.
- ? Döntse el, hogy igazak vagy hamisak a következő állítások!
- ☐ Ha a parciális deriváltak egyenlők, akkor az érintősík vízszintes.
 - ☐ Tetszőleges $\mathbf{u}$ egységvektor esetén $|\nabla f(0, 0)| \geq \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) \right|$.
 - ☐ Van olyan függvény, ami egy pontban totálisan differenciálható, de ott nem folytonos.

4. Önálló munkára kitűzött gyakorlatok

1. Számítsuk ki az alábbi függvények első és másodrendű parciális deriváltjait. Írjuk fel a gradienst és a Hesse-mátrixot!

$$\begin{aligned}
 & -3x^8y + 2y^2; \quad \sqrt{xy} + \frac{y}{x^3}; \quad x^5y^x; \quad \frac{\ln x - \sin y}{\tan(xy)}; \quad \frac{2xy^4}{x^2 + y^3}; \quad \frac{y^2}{\ln(x+y)}; \\
 & (3x^8y^6 + 2xy^4 + 7y)^{130}; \quad \frac{\tan(y + \sin x)}{\ln x}; \quad \sin(y\sqrt{x}); \quad x + 4y^7 + \sqrt{x^2 - y}; \\
 & \sqrt[3]{\frac{xy^2}{y - x^2}}; \quad y \cos x^3; \quad x \cos^3 y; \quad y^3 \cos^3 x^3; \quad e^{-xy}; \quad 2^{\frac{2y}{x^2+1}}; \quad \ln(y + \sin \sqrt{yx}); \\
 & x^{\sqrt{xy}}; \quad y^{\sin x}; \quad (\ln(x+y))^{xy}.
 \end{aligned}$$

2. Írjuk fel az érintősík egyenletét a megadott pontban!

- a) $f(x, y) = xy + x/y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$
- b) $f(x, y) = x^2y - \ln x$, $(x_0, y_0) = (1, -3)$
- c) $f(x, y) = x^2y - \ln x$, $(x_0, y_0) = (2, 3)$

- d) $f(x, y) = \cos y - e^x$, $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$
3. Számítsuk ki az adott függvények $\mathbf{u}$ iránymenti deriváltjait a megadott pontokban.
- a) $f(x, y) = xy + x/y^2$, $\mathbf{u} = (3/5, 4/5)$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$
- b) $f(x, y) = x^2y - \ln x$, $\mathbf{u} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, $(x_0, y_0) = (1, -3)$
- c) $f(x, y) = x^2y - \ln x$, $\mathbf{u} = (0, 1)$, $(x_0, y_0) = (2, 3)$
- d) $f(x, y) = \cos y - e^x$, $\mathbf{u} = (7/25, 24/25)$, $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$

5. Ajánlott irodalom

1. Bagota Mónika, Németh József, Németh Zoltán: Analízis II. feladatgyűjtemény, POLYGON
2. Szabó Tamás: Kalkulus II. példatár informatikusoknak, POLYGON