Fodor Ferenc és Vígh Viktor

Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

6. Olvasólecke

Egyváltozós függvények differenciálása

Készítette:

Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Az olvasólecke tartalma:

- Pillanatnyi sebesség, érintő egyenes
- A derivált definíciója, derivált függvény
- Elemi függvények deriváltja
- Differenciálási szabályok
- Önellenőrző kérdések

Olvasási idő: kb. 1 óra

Pillanatnyi sebesség, érintő

A derivált szemléletes bevezetésével kezdjük. A fogalom Newtontól és Leibniztől származik. Például korábban tanultuk fizikából az átlagsebesség definícióját, Először tekintsük azt az esetet, amikor egy tömegpont egy egyenes mentén egy irányban mozog, és távolságát a t időpillanatban az egyenes egy rögzített kezdőpontjától az $s(t)$ függvény írja le. Legyen $t_0 < t_1$ két tetszőleges időpont. Ekkor a $\Delta t = t_1 - t_0$ idő alatt a tömegpont $\Delta s = s(t_1) - s(t_0)$ utat tesz meg. A $[t_0, t_1]$ időintervallumban *átlagsebessége* $\overline{v} = \Delta s / \Delta t$. Hogyan értelmeznénk azonban a *pillanatnyi sebességét*? Fizikai (illetve matematikai) intuíciónk szerint, minél rövidebb a Δt időintervallum, az átlagsebesség annál közelebb van a "pillanatnyi sebességhez", azaz, ha $\Delta t \to 0$ akkor $\overline{v} \to v$. Azaz a pillanatnyi sebesség a t_0 időpillanatban

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Vegyük észre, hogy itt a $t_0 < t_1$ relációnak nincs jelentősége.

Most tekintsük egy másik szokásos motivációs példát. Tegyük fel, adva van egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és egy x_0 szám. Meg szeretnénk határozni f grafikonjához a $P_0(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő egyenletét (ha van ilyen). Ehhez először tisztáznunk kell, hogy mit is értünk itt érintőn. Legyen $x \neq x_0$, és tekintsük f grafikonján a $P(x, f(x))$ pontot. Legyen l a P_0 és P pontokra illeszkedő egyenes, lásd ábra. Egy ilyen egyenest a grafikon *szelőjének* nevezünk. Az l meredeksége

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Most tartassuk x-et x_0.hoz. Amennyiben az így kapott l egyenesek m meredeksége tart egy véges m_0 számhoz, akkor azt mondjuk, hogy a P_0 ponton átmenő szelők *határhelyzethez tartanak, ha* $x \to x_0$, és azt a P_0-on átmenő l_0 egyenest amelynek meredeksége m_0, az f x_0-beli *érintőjének* nevezzük. Tehát az x_0-beli érintő meredeksége

$$m_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

amennyiben a határérték létezik és véges. Ekkor az l_0 érintő egyenlete

$$y - f(x_0) = m_0(x - x_0).$$

Ha az f függvénynek az x_0 helyen létezik érintője a fenti értelemben, akkor azt mondjuk, hogy *f az x_0 helyen differenciálható.* Későbbi példákból látni fogjuk, hogy ez nem mindig teljesül. Az is kiderül majd egyszerű példákból, hogy az így definiált érintő nem teljesen felel meg a geometriában megismert érintő fogalmának, bár ahhoz nagyon hasonló.

6.1. Példa. Keressük meg az $f(x) = x^2 + 1$ függvény (grafikonjának) érintőjét az $x_0 = 1$ helyen.

Megoldás. Az érintő meghatározásához a következő határértéket kell kiszámolnunk:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2,$$

így a határérték létezik és véges. Az érintő egyenlete (lásd 6.1. ábra)

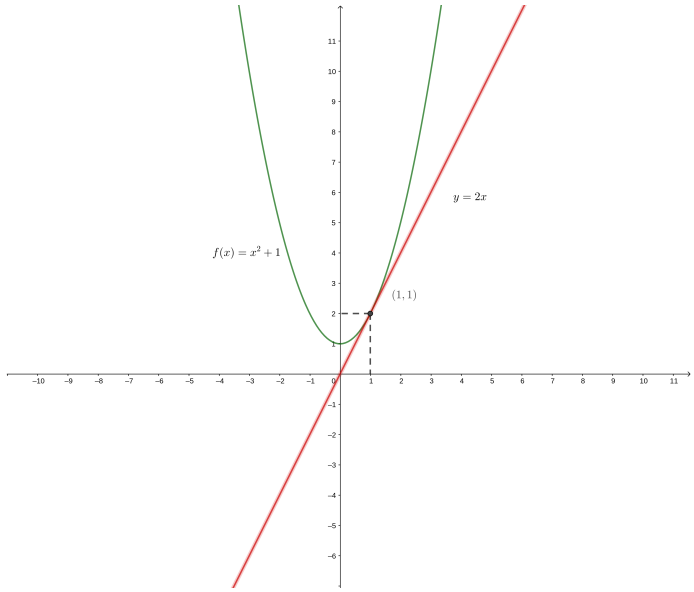
$$y - f(1) = 2(x - 1),$$

azaz némi egyszerűsítés után

$$y = 2x.$$

A derivált definíciója, derivált függvény

A fenti példák motivációját felhasználva bevezetjük a differenciálhányados precíz definícióját.



6.1. ábra. Az $f(x) = x^2 + 1$ függvény grafikonja és az érintő az $x = 1$ helyen.

6.1. Definíció. Legyen az f valós függvény értelmezve az a szám egy környezetében. Ha a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges, akkor akkor azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható (deriválható) az a helyen*, és differenciálhányadosa megegyezik ezzel a határértékkel.

A deriváltra sokféle jelölés létezik a szakirodalomban. Mi ebben a kurzusban az

$$f'(a), \qquad \text{vagy} \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

szimbólumokat fogjuk használni.

6.2. Megjegyzés. Az

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

hányadost az f a-beli *különbségi hányados (differenciahányados) függvényének* szoktuk nevezni.

Motivációs példáink között láttuk, hogy például az $f(x) = x^2+1$ függvény differenciálható az $x = 1$ helyen, és differenciálhányadosának értéke 2.

Fontos megjegyezni, hogy a differenciálhatóság alapvetően *pontbeli* tulajdonság, csakúgy, mint a folytonosság. Persze egy függvényt általában az értelmezési tartományának minden belső pontjában meg szoktunk vizsgálni deriválhatóság szempontjából, így a következő definíció nagyon is természetes.

6.3. Definíció. Azt a függvényt, amely pontosan ott van értelmezve, ahol az f függvény differenciálható, és értéke az ilyen helyeken megegyezik f differenciálhányadosával, az f *differenciálhányados-függvényének* vagy rövidebben *deriváltfüggvényének* nevezzük.

A deriváltfüggvény jelölésére az $f'(x)$, vagy a $\frac{df(x)}{dx}$ szimbólumokat fogjuk használni.

6.2. Példa. Határozzuk meg az $f(x) = x$ deriváltfüggvényét.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$ valós egyenes. El kell döntenünk, hogy f mely pontokban deriválható, és ott mi a deriváltja. Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges rögzített szám. Ekkor

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = 1,$$

azaz a különbségi hányados függvénynek minden helyen létezik határértéke, és ez a határérték mindig 1. Tehát az f függvény értelmezési tartományának ($\mathbb{R}$) minden pontjában differenciálható, és deriváltja mindenhol 1. Ezért deriváltfüggvényének értelmezési tartománya az egész $\mathbb{R}$ valós egyenes, és értéke konstans 1, azaz

$$f'(x) = 1 \text{ minden } x \in \mathbb{R}.$$

Ezt jelölésben úgy is ki fogjuk fejezni röviden, hogy

$$(x)' = 1.$$

Nem nehéz olyan függvényt találni, amely egy adott pontban nem differenciálható. Ennek következményeként, az ilyen függvénynek abban a pontban, ahol a differenciálhányadosa nem létezik, nincs érintője.

6.3. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = |x|$ függvény az $x = 0$ helyen nem differenciálható.

Megoldás. Először is vegyük észre, hogy az f függvény értelmezési tartománya az egész $\mathbb{R}$ számegyenes, tehát a függvény értelmezve van az $x = 0$ pont egy környezetében. Ahhoz, hogy differenciálható legyen, léteznie és végesnek kell lennie a különbségi hányados határértékének a 0 helyen, azaz a

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}$$

limesznek. Erről azonban tudjuk, hogy nem létezik, mert ha x balról (negatív számokon keresztül) tart 0-hoz, akkor

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=-1,$$

míg ha x jobbról tart 0-hoz, azaz pozitív számokon keresztül, akkor

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x}=1,$$

így a két féloldali határérték nem egyenlő, azaz a limesz nem létezik.

Szemléletesen azt is mondhatjuk, hogy az $f(x)=|x|$ függvény, bár folytonos az $x=0$ helyen, ott nem sima", hanem "töréspontja" van. A két féloldali határérték létezik, amit le lehet fordítani geometriai nyelvre úgy is, hogy az $x=0$ pontban a függvénynek vannak "féloldali érintői", de ezek nem egyeznek meg, ezért igazi érintő nincs.

6.4. Példa. Mutassuk meg, hogy az $f(x)=\sqrt[3]{(x^2)}$ függvény az $x=0$ helyen nem differenciálható.

Megoldás. Az f függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, így az értelmezve van a 0 egy környezetében. Vizsgáljuk meg a különbségi hányados határértékét a 0 helyen, azaz a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2/3}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{-1/3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

limeszt. Ha x balról tart 0-hoz, akkor

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty,$$

míg ha jobbról, akkor

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=+\infty,$$

amelyek sem nem egyenlőek, se nem végesek. Tehát a különbségi hányados limesze nem létezik, ezért a függvény nem differenciálható $x=0$-ban.

Nagyon fontos tényt fejez ki a következő tétel:

6.4. Tétel. *Ha az f függvény differenciálható az a helyen, akkor ott folytonos is.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0.$$

Ezt a következőképpen tudjuk megmutatni:

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{\cdot} \lim_{x\to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

ugyanis a feltevés szerint f differenciálható a-ban, azaz

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

és természetesen

$$\lim_{x\to a}(x - a) = 0.$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

A fenti tételt úgy is szokás fogalmazni, hogy *az differenciálhatóság erősebb, mint a folytonosság*, vagy a *folytonosság szükséges feltétele a differenciálhatóságnak*. Ennek megfordítása nem igaz, azaz abból, hogy egy f függvény folytonos az a helyen, nem következik, hogy ott differenciálható is; ezt láttuk a fenti két példában.

Elemi függvények deriváltja

A definíció segítségével meghatározhatók az elemi függvények deriváltjai. Ezeket fogjuk használni a differenciálási szabályok segítségével arra, hogy más, bonyolultabb képlettel leírt függvények deriváltját kiszámoljuk. Az elemi függvények deriváltjait célszerű megtanulni, mint a szorzótáblát.

A legfontosabbak a következőek:

$$\begin{aligned}
&f(x) = c, c \in \mathbb{R}, && f'(x) = 0 \\
&f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, && f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \\
&f(x) = \sin x, && f'(x) = \cos x \\
&f(x) = \cos x, && f'(x) = -\sin x \\
&f(x) = \operatorname{tg} x \ (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi), && f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \operatorname{ctg} x \ (x \neq k\pi), && f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \\
&f(x) = e^x, && f'(x) = e^x \\
&f(x) = a^x, && f'(x) = a^x \ln a \\
&f(x) = \ln x \ (x > 0), && f'(x) = \frac{1}{x} \\
&f(x) = \log_a x \ (x > 0), && f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \\
&f(x) = \arcsin x \ (|x| < 1) && f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&f(x) = \arccos x \ (|x| < 1) && f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&f(x) = \operatorname{arctg} x && f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
&f(x) = \operatorname{arcctg} x && f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Bár nem célunk az összes fenti összefüggést részletesen igazolni, azért az egyik bizonyítását megmutatjuk közülük, legalábbis annak egy speciális (szép) esetét: Legyen $f(x) = x^n$, ahol n pozitív egész szám. Ha $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges rögzített szám, akkor

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a} x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1} \\
&= na^{n-1},
\end{aligned}
$$

ami igazolja az $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ összefüggést, ha $\alpha = n$ pozitív egész. Ha α nem pozitív egész szám, akkor ennek az összefüggésnek a bizonyítása másként történik; ezt a gondolatmenetet itt nem tárgyaljuk.

Differenciálási szabályok

Láttuk, hogy a differenciálhatóság eldöntése, illetve a differenciálhányados kiszámítása a definíció alapján sokszor fáradtságos. Ezt legtöbbször nem is így szoktuk elvégezni, hanem az elemi függvények deriváltjának ismeretében a differenciálási szabályok használatával. Ezekkel lényegében minden képlettel leírható függvényt deriválni tudunk, a definícióra való közvetlen hivatkozás nélkül.

6.5. Tétel. *Ha az f és g függvények differenciálhatók az a helyen, akkor*

i) *$f \pm g$ is differenciálható az a helyen, és $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$;*

ii) *tetszőleges c valós számra $(c \cdot f)$ is differenciálható az a helyen, és $(cf)'(a) = cf'(a)$;*

iii) *(szorzat szabály) $f \cdot g$ is differenciálható az a helyen, és*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a); \tag{6.1}$$

iv) *(hányados szabály) ha $g(a) \neq 0$, akkor (f/g) is differenciálható az a helyen, és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \tag{6.2}$$

Bizonyítás. Az i) és ii) állítások közvetlenül adódnak a derivált definíciójából. A iii) és iv) állítások bizonyítása nagyon hasonló, ezért ezek közül csak (a technikailag kicsit egyszerűbb) iii) esetet mutatjuk meg.

Igazolnunk kell, hogy a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges. Ehhez azt a szokásos "trükköt" használjuk, hogy a számlálóhoz hozzáadjuk és kivonjuk $f(a)g(x)$-t, majd felhasználjuk, hogy f és g folytonos a-ban.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + \lim_{x \to a} f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a),
\end{aligned}$$

ami pontosan az, amit bizonyítani akartunk. □

6.5. Példa. Differenciáljuk a következő függvényt $f(x) = 3x^4 - x + 1$.

Megoldás. Az i) és ii) szabályt fogjuk használni. Az i) azt mondja ki, hogy lehet tagonként deriválni, a ii) pedig azt, hogy a konstansokat ki lehet emelni.

$$(3x^4 - x + 1)' = 3(x^4)' - (x)' + (1)' = 3 \cdot 4x^3 - 1 + 0,$$

ahol használtuk az $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ szabályt az x^4 és x differenciálására, illetve a $(c)' = 0$ szabályt az 1 deriválására.

6.6. Példa. Differenciáljuk az $h(x) = x^2 \sin x$ függvényt.

Megoldás. Itt a iii) szorzat szabályt alkalmazzuk. Tehát

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cos x,$$

ahol kihasználtuk, hogy $(\sin x)' = \cos x$.

6.7. Példa. Differenciáljuk az $h(x) = xe^x \cos x$ függvényt.

Megoldás. Itt megint csak a iii) szorzat szabályt használjuk, de most kétszer egymás után. A szorzás asszociativitása miatt mindegy, hogy a hármasszorzatot hogyan zárójelezzük.

$$\begin{aligned}(xe^x \cos x)' &= (xe^x)'(\cos x) + (xe^x)(\cos x)' = (xe^x)'(\cos x) + (xe^x)(-\sin x)\\ &= ((x)'(e^x) + (x)(e^x)')(\cos x) - xe^x \sin x = (1 \cdot e^x + xe^x)\cos x - xe^x \sin x,\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy $(\cos x)' = -\sin x$, illetve $(e^x)' = e^x$.

6.8. Példa. Differenciáljuk a $h(x) = \frac{3x^2+1}{2x-1}$ függvényt.

Megoldás. Ezt a feladatot a iv) hányados szabály segítségével oldjuk meg.

$$\left(\frac{3x^2+1}{2x-1}\right)' = \frac{(3x^2+1)'(2x-1) - (3x^2+1)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{6x(2x-1) - 2(3x^2+1)}{(2x-1)^2}.$$

6.9. Példa. Differenciáljuk a $h(x) = \frac{x^3-1}{\sin x - x}$ függvényt.

Megoldás. Ehhez a feladathoz a iii) szorzat és a iv) hányados szabály segítségére van szükségünk.

$$\left(\frac{x^3-1}{\sin x - x}\right)' = \frac{(x^3-1)'(\sin x - x) - (x^3-1)(\sin x - x)'}{(\sin x - x)^2}$$
$$= \frac{3x^2(\sin x - x) - (x^3-1)(\cos x - 1)}{(\sin x - x)^2}.$$

További nagyon fontos szabály a következő:

6.6. Tétel (Láncszabály)**.** *Tegyük fel, hogy az $f \circ g$ függvény értelmezve van az a egy környezetében, és*

6.10. Példa. Differenciáljuk az $f(x) = \sin^2 x$ függvényt.

Megoldás. Itt a külső függvény a négyzetfüggvény, a belső függvény pedig a $\sin x$. A láncszabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$(\sin^2 x)' = 2(\sin x)(\sin x)' = 2 \sin x \cos x.$$

6.11. Példa. Differenciáljuk az $f(x) = x^2 \cos(2x-1)$ függvényt.

Megoldás. Most a függvényünk szorzat, és egyben a második tényezője összetett függvény is, tehát a szorzat szabályra és a láncszabályra is szükségünk van.

$$\begin{aligned}(x^2\cos(2x-1))' &= (x^2)'(\cos(2x-1)) + (x^2)(\cos(2x-1))' \\ &= 2x\cos(2x-1) + x^2(-\sin(2x-1))(2x-1)' \\ &= 2x\cos(2x-1) + 2x^2(-\sin(2x-1)).\end{aligned}$$

A láncszabályt, amennyiben a feltétek telesülnek, lehet alkalmazni többszörösen összetett függvényekre is.

Önellenőrző kérdések

1. Mutassuk meg a definícióból, hogy az $f(x) = 2x^2 - 1$ függvény differenciálható az $x = -1$ helyen.
2. Keressük meg az $f(x) = x + \sin x$ függvény érintőjének egyenletét az $x = 1$ pontban.
3. Deriváljuk az $f(x) = x^2 \cos x \mathrm{sh}\, x$ függvényt.
4. Deriváljuk az $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-6)}$ függvényt.
5. Differenciáljuk az $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$ függvényt.

Ajánlott irodalom

1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.