Fodor Ferenc és Vígh Viktor

Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak
előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen
készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

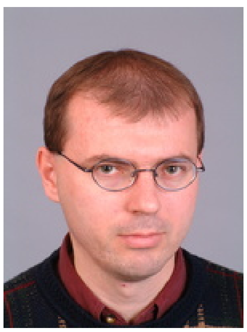
Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Európai Unió
Európai Szociális Alap
Magyarország Kormánya
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

12. Olvasólecke

A Riemann-integrál alkalmazásai

Készítette:



Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Az olvasólecke tartalma:

- Területszámítás, improprius integrálok
- Ívhossz, forgástestek felszíne és térfogata
- Önellenőrző kérdések

Olvasási idő: kb. 1 óra

Területszámítás, improprius integrálok

A határozott integrál segítségével ki tudjuk számítani egy integrálható f függvény esetén a függvény grafikonja és az x-tengely egy $[a, b]$ intervalluma által meghatározott görbevonalú "téglalap" területét. Ennél valamivel általánosabb a következő alakzat:

12.1. Definíció. Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók az $[a, b]$ intervallumon, és $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén. Ekkor az

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

halmazt az f és g függvények által az $[a, b]$ intervallum fölött meghatározott *normáltartománynak* nevezzük.

Az A normáltartomány területe

$$T(A) = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx.$$

12.1. Példa. Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ és $g(x) = x$ függvények által közbezárt alakzat területét.

Megoldás. Előszőri oldjuk meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet, hogy megtaláljuk a két függvénygrafikon metszéspontjait.

$$x^2 = x \iff x = 0, 1,$$

azaz az f és g két pontban metszi egymást. Az f és g által közbezárt alakzat a $[0, 1]$ intervallum fölötti normáltartomány, amelynek területe

$$T = \int_0^1 x - x^2\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

12.2. Példa. Számítsuk ki az $f(x) = \cos x$ és $g(x) = \sin x$ függvények és az y-tengely pozitív féltengelye által közbezárt tartomány területét.

Megoldás. Először határozzuk meg a tartomány határait. Ehhez meg kell oldanunk a következő egyenletet: $\cos x = \sin x$, mégpedig azzal a feltétellel, hogy $0 \leq x \leq \pi/2$. Ekkor azt kapjuk, hogy $x = \pi/4$. Azaz normáltartományunk

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/4, \sin x \leq y \leq \cos x\}.$$

Tehát

$$T(A) = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x\, dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1.$$

Most kiterjesztjük a határozott integrál fogalmát egyes nem korlátos intervallumokra és nemkorlátos függvényekre.

Alapvetően kétféle esetet tárgyalunk. Az első eset a következő:

12.2. Definíció. Tegyük fel, hogy f folytonos az $(a, b]$ intervallumon, de nem folytonos jobbról az $x = a$ helyen. Ha létezik a

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$$

jobboldali határérték, akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az *improprius integrálja az $[a, b]$ intervallumon*, és értéke megegyezik a fenti határértékkel.

Abban az esetben, ha f folytonos az $[a, b)$ intervallumon, de nem balról folytonos az $x = b$ helyen, akkor az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett improprius integrálját a

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

baloldali határértékkel definiáljuk.

Az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett improrius integráljára a szokásos

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

jelölést használjuk.

12.3. Példa. Létezik-e a $\int_0^1 1/\sqrt{x}\, dx$ improrius integrál, és ha igen, akkor mennyi az értéke?

Megoldás. Az $f(x) = 1/\sqrt{x}$ függvény folytonos a $(0, 1]$ intervallumon, de nyilván nem folytonos $x = 0$-ban, hiszen ott értelmezve sincs. Ekkor

$$\lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \left[2x^{1/2}\right]_c^1 = \lim_{c \to 0^+} 2(1 - \sqrt{c}) = 2,$$

tehát az improprius integrál létezik és értéke

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2.$$

12.3. Megjegyzés. A fenti példában az improrius integrál létezése érthető úgy is, hogy az f függvény grafikonja, az x-tengely $[0, 1]$ intervalluma és az y-tengely pozitív féltengelye által meghatározott "görbevonalú háromszög" területe véges, bár maga a háromszög nem korlátos.

A másik eset a következő:

12.4. Definíció. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a, +\infty)$ intervallumon. Ha létezik a

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik az *improrius integrálja* az $[a, +\infty)$ intervallumon, és annak értéke egyenlő a fenti határértékkel

Hasonló módon, ha az f függvény folytonos az $(-\infty, a]$ intervallumon, és létezik a

$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)\, dx$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek létezik az *improrius integrálja* az $(-\infty, a]$ intervallumon, és annak értéke egyenlő a fenti határértékkel

A végtelen intervallumon vett improprius integrálra a következő jelöléseket használjuk:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^a f(x)\, dx.$$

12.4. Példa. Létezik-e a $\int_1^{+\infty} 1/x^2\, dx$ improprius integrál, és ha igen, mennyi az értéke?

Megoldás. Az $f(x) = 1/x^2$ függvény folytonos az $[1, +\infty)$ intervallumon. Az improrius integrál meghatározásához számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right) = 1,$$

tehát az improrius integrál létezik, és értéke

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1.$$

12.5. Megjegyzés. Erre az improprius integrálra is lehet úgy gondolni, mint annak a görbevonalú nem korlátos háromszögnek a területe, amelyet az f grafikonja és az $[1, +\infty)$ intervallum határoz meg.

A következő egy nevezetes és fontos példa improprius integrálokra.

12.5. Példa. Milyen p értékre létezik az $\int_1^{+\infty} 1/x^p \, dx$ imprporius integrál?

Megoldás. Először tegyük fel, hogy $p \neq 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p} \, dx &= \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_1^c \\ &= \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{-p+1} (c^{-p+1} - 1) \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{ha } p < 1 \\ \frac{1}{1-p}, & \text{ha } p > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Kimaradt az az eset, amikor $p = -1$. Ekkor

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx = \lim_{c\to+\infty} [\ln |x|]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \ln c = +\infty.$$

Tehát

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx = \frac{1}{1-p}, \text{ ha } p > 1,$$

és $+\infty$ különben.

Ívhossz, forgástestek felszíne és térfogata

Az alábbiakban mutatunk néhány geometriai alkalmazást a határozott integrálra. A konkrét formulákat itt nem bizonyítjuk.

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ intervallumon, és tekintsük az a T testet, amelyet az f függvény gráfjának x-tengely körüli megforgatásával kapunk. A T forgástest térfogata

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx. \tag{12.1}$$

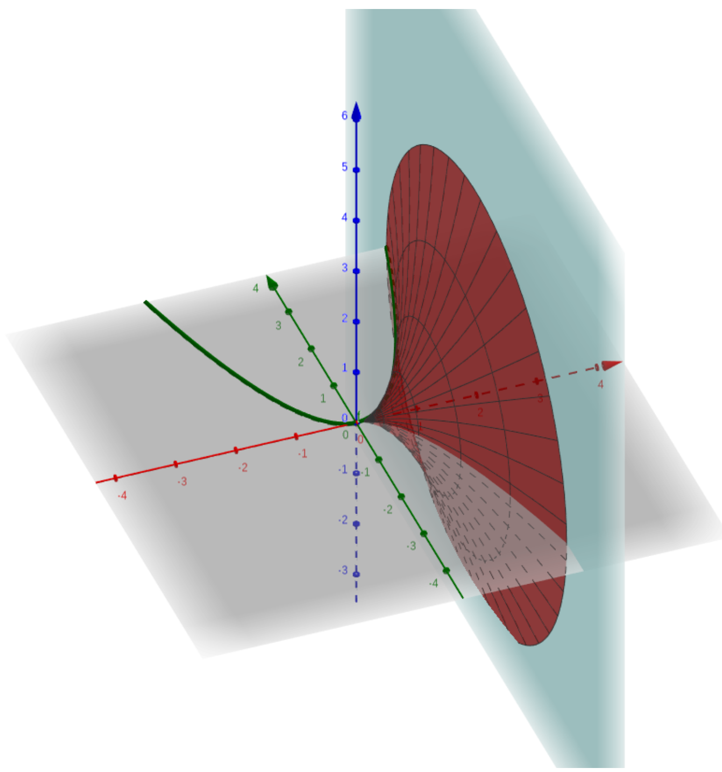
A 12.1. formula bizonyításában a forgástestet "felszeleteljük" az x-tengelyre merőlegesen "vékony", Δx vastagságú szeletekre, amelyek közelítőleg henger alakúak. Egy ilyen szelet (amelynek egyik körlapja x-nél van) térfogata körülbelül $f(x)^2 \Delta x$. Ezek összege közelíti a test térfogatát, és megmutatható, hogy ha $\Delta \to 0$, akkor a 12.1. formulához tart. Ez a "szelető" eljárás más esetben is használható, szokás rá *Cavalieri-elvként* is hivatkozni.

12.6. Példa. Számítsuk ki annak a $\pi/2$ félnyílásszögű forgáskúpnak a térfogatát, amelynek magassága 2.

Megoldás. Képezzük úgy a kúp palástját, hogy az $y = x$ egyenes grafikonjának $[0, 2]$ fölötti darabját az x-tengely körül megforgatjuk. A kapott test térfogata a 12.1. formula alapján

$$V = \pi \int_0^2 x^2 \, dx = \left[\pi \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

12.7. Példa. Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja $[0, 2]$ intervallum fölötti darabjának x-körüli megforgatásával kapott T test térfogatát, lásd a 12.1. ábra.



12.1. ábra. Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja $[0, 2]$ fölötti darabjának megforgatásával kapott forgástest

Megoldás. A 12.1. formula alapján

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 \, dx = \pi \int_0^1 x^4 \, dx = \left[\pi \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

12.8. Példa. Számoljuk ki az r sugarú gömb térfogatát.

Megoldás. Az origó középpontú 1 sugarú gömböt előállíthatjuk úgy, hogy az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ függvény grafikonjának $[-1, 1]$ közötti darabját megforgatjuk az x-tengely körül. A kapott gömb térfogata

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^2 \, dx = 2\pi \int_0^1 1 - x^2 \, dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}.$$

Legyen az $f[a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, és $B = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ az $[a,b]$ intervallum egy beosztása. Az $(x_0, f(x_0)) = (a, f(a)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_{n-1}, f(x_{n-1})), (x_n, f(x_n)) = (b, f(B))$ egymás után következő pontokat összekötő szakaszok unióját az f függvénybe írt B szerinti *töröttvonalnak* nevezzük. A töröttvonal i-edik darabjának hossza (ami egy szakasz)

$$s_i = \sqrt{(f(x_i - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2}.$$

Így az f-be írt B szerinti töröttvonal teljes hossza

$$s(f, B) = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f(x_i - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2}.$$

Ha az $s(f, B)$ hosszúságok halmaza felülről korlátos, akkor azt mondjuk, hogy f grafikonja az $[a,b]$ fölött *rektifikálható*, és ebben az esetben *ívhossza*

$$s(f) := \sup_{B \text{ beosztás}} s(f, B).$$

Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az (a,b) intervallumon és derivált függvénye folytonos. Ekkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint minden i-re létezik olyan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, hogy

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i_1}),$$

tehát

$$s(f, B) = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}(x_i - x_{i-1}).$$

Megmutatható, hogy ebben az esetben az f függvény grafikonja $[a,b]$ intervallum fölötti darabjának *ívhossza*

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx. \tag{12.2}$$

12.9. Példa. Számítsuk ki az $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ függvény grafikonjának ívhosszát $x = 1$ és $x = 4$ között.

Megoldás. Először számoljuk ki f deriváltját:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(x-1)^{1/2} = \sqrt{x-1},$$

tehát a 12.2. formula alapján a keresett ívhossz

$$s = \int_1^4 \sqrt{1 + (\sqrt{x-1})^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + (x-1)}\, dx = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{3}{2}x^{3/2}\right]_1^4 = \frac{3}{2}7.$$

12.10. Példa. Számoljuk ki az egység sugarú kör kerületét.

Megoldás. Az origó középpontú egység sugarú kör kerülete négyszerese az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ függvény grafikonja hosszának $x = 0$ és $x = 1$ között.

Az f deriváltja

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}},$$

így a 12.2. formula a keresett ívhossz

$$s = 4\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = [\arcsin x]_0^1 = 4(\pi/2 - 0) = 2\pi.$$

Tegyük fel, hogy az f függvény folytonosan differenciálható az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest palástjának felszínét a következőképpen definiáljuk:

$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{12.3}$$

12.11. Példa. Számítsuk ki az egység sugarú gömb felszínét.

Megoldás. Az origó középpontú egységsugarú gömböt megkapjuk az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ függvény grafikonjának x-tengely körüli megforgatásával. Tehát a 12.3. formula alapján a gömb felszíne szimmetria okokból

$$F = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = 4\pi \int_0^1 1\,dx = 4\pi.$$

12.12. Példa. Számítsuk ki a $\pi/4$ félnyílásszögű x-tengelyű 1 magasságú forgáskúp palástjának felszínét.

Megoldás. A keresett kúp palástját úgy kapjuk meg, hogy megforgatjuk az $f(x) = x$ függvény grafikonjának $x = 0$ és $x = 1$ közötti darabját az x-tengely körül. Ekkor a palást felszíne a 12.3. formula alapján

$$F = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+1}\,dx = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \sqrt{2}\pi.$$

Önellenőrző kérdések

1. Számítsuk ki annak a tartománynak a területét, amelyet az $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = x/2$ függvények grafikonja zár körbe.
2. Határozzuk meg a $\int_1^2 \frac{1}{(1-x)^{2/5}}\,dx$ improprius integrált.
3. Határozzuk meg a $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ improprius integrált.
4. Határozzuk meg annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonja $x = 0$ és $x = 2$ közötti darabjának x-tengely megforgatásával kapunk.
5. Számoljuk ki az egységsugarú gömbfelület két párhuzamos a távolságú sík között darabjának (a szélességű gömböv) felszínét.

Ajánlott irodalom

1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.