Fodor Ferenc és Vígh Viktor

Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak
előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen
készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

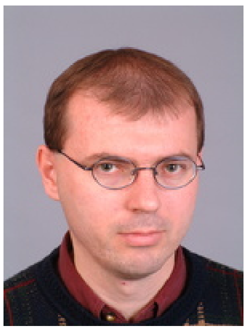
Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

SZÉCHENYI 2020
Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Szociális Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

11. Olvasólecke

A Riemann-integrál bevezetése

Készítette:



Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Az olvasólecke tartalma:

- Területszámítás és közelítő összegek
- Riemann-integrál fogalma
- Primitív függvények, Newton-Leibniz-formula
- Önellenőrző kérdések

Olvasási idő: kb. 1 óra

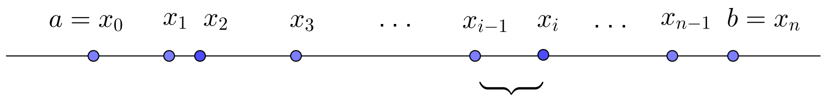
Területszámítás és közelítő összegek

Ebben a fejezetben bevezetjük a *határozott integrál (Riemann-integrál)* fogalmát, amelynek egyik legfontosabb motivációja az alakzatok területének kiszámítása. A területszámításnak, geometriai jelentőségén túl, számos más probléma megoldásában is alapvető szerepe van. A területszámítást most abból a szemszögből nézzük, hogy szeretnénk meghatározni egy f egyváltozós függvény grafikonja és az x-tengely egy darabja közé bezárt tartomány területét.

11.1. Definíció. Az $[a, b]$ korlátos zárt intervallum egy B *beosztása (vagy felosztása)* egy olyan $B = (x_0, \ldots, x_n)$ (véges) számsorozat, amelyre

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Az x_i, $i = 0, \ldots, n$ pontok a B beosztás *osztópontjai*, az $[x_{i-1}, x_i]$-t $(1 \leq i \leq n)$ pedig a beosztás *i-edik részintervalluma*, az i-edik *részintervallum hossza* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



11.1. ábra. Az $[a, b]$ intervallum egy beosztása

Az B beosztásról azt mondjuk, hogy *egyenletes*, azaz, ha minden részintervallum egyforma hosszú, azaz $x_{i-1} - x_i = x_{j-1} - x_j$, $1 \leq i < j \leq n$.

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos (ezt a továbbiakban mindig fel fogjuk tenni). Ekkor mindig léteznek a következő véges

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

mennyiségek.

11.2. Megjegyzés. Itt általában az infimum és szuprémum nem helyettesíthető minimummal, illetve maximummal, ezt ugyanis az f függvény nem feltétlenül veszi föl az adott részintervallumon!

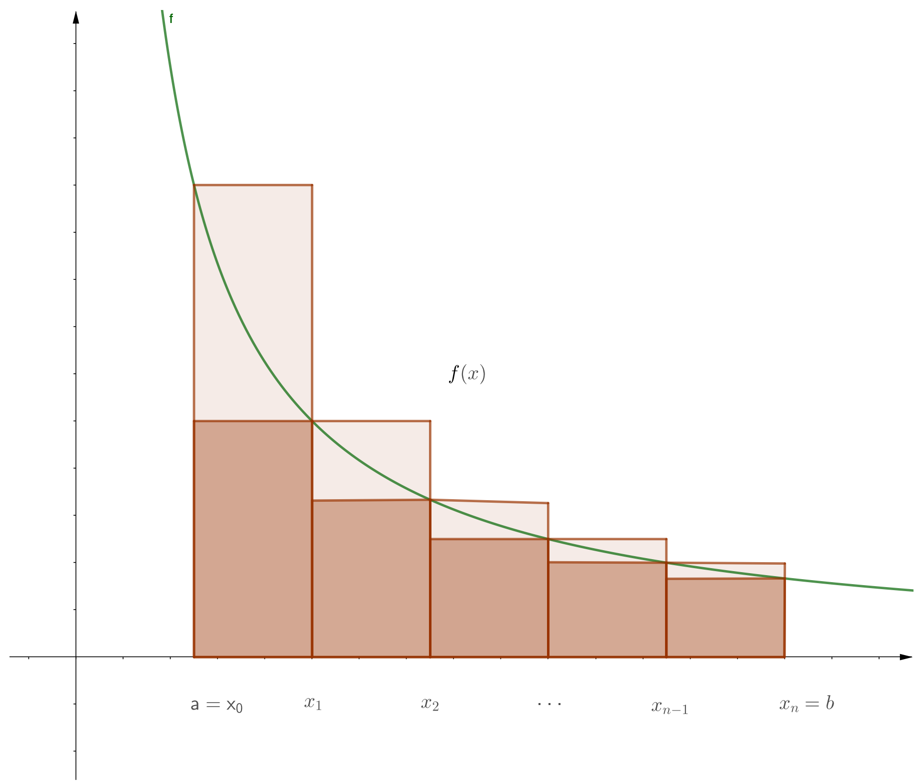
11.3. Definíció. Az f függvény B beosztáshoz tartozó *alsó integrálközelítő összege*

$$\underline{s}(f, B) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

és *felső integrálközelítő összege*

$$\overline{s}(f, B) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, .$$

Az alsó összeg olyan téglalapok területének összege, amelyek vízszintes éle mindig az $[a, b]$ megfelelő részintervalluma, magassága pedig m_i, azaz f infimuma az adott részintervallumon. Így az alsó összeghez tartozó téglalapok mindig az x-tengely és a függvény grafikonja között vannak. A felső összeghez tartozó téglalapok hasonlóak, de ott az M_i szuprémumot használjuk, így azok mindig teljesen tartalmazzák az x-tengely és az f grafikonja közé eső tartományt. Az alsó és felső integrálközelítő összegeket illusztrálja (egy pozitív f függvényre) a 11.2. ábra, amelyen az alsó összeget alkotó téglalapok sötétek, a felső összeget alkotók világosak.



11.2. ábra. Alsó és felső integrálközelítő összegek

11.4. Megjegyzés. Itt hangsúlyozni kell, hogy ahol az f függvény negatív, ott a megfelelő tagja az integrálközelítő összegnek is negatív. Ezért az integrálközelítő összegek előjeles területösszegek, amik akár 0-t is eredményezhetnek úgy, hogy pedig a függvény nem 0 az $[a, b]$-n.

Mivel f korlátos $[a, b]$, ezért léteznek a

$$m := \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

számok. Ekkor tetszőleges B beosztás esetén

$$m(b-a) \le \underline{s}(f, B) \le \overline{s}(f, B) \le M(b-a).$$

Az $[a, b]$ korlátos zárt intervallum egy B' beosztása a B beosztás *finomítása*, ha a B' osztópontjai egyben osztópontjai B-nek is.

11.5. Tétel. *A beosztás finomításakor az alsó összegek nem csökkennek, a fölső összegek* *pedig nem nőnek. Azaz, ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos, B' a B finomítása, akkor $\underline{s}(f,B) \le \underline{s}(f,B')$ és $\overline{s}(f,B') \le \overline{s}(f,B)$.*

Bizonyítás. Legyen $B = (x_0, \dots, x_n)$, és B' olyan, hogy $a = x_0 < x_1 \dots x_{j-1} < x' < x_j \dots < x_n = b$, azaz B'-nek egyel több osztópontja van, mint B-nek. Legyen

$$M_j' := \sup_{x \in [x_{j-1}, x']} f(x), \quad M_j'' := \sup_{x \in [x', x_j]} f(x),$$

ahol $M_k \ge M_j', M_j''$. Ekkor a fölső összegekre teljesül

$$\begin{aligned}\overline{s}(f,B) - \overline{s}(f,B') &= M_j(x_j - x_{j-1}) - M_j'(x' - x_{j-1}) - M_j''(x_j - x') \\ &\ge M_j(x_j - x_{j-1}) - M_j(x' - x_{j-1}) - M_j(x_j - x') = 0.\end{aligned}$$

□

Az világos, hogy tetszőleges B beosztás esetén

$$\underline{s}(f,B) \le \overline{s}(s,B),$$

azaz a B-hez tartozó alsó összeg nem nagyobb, mint a fölső összeg. Ennél több is igaz:

11.6. Tétel. *Legyen f korlátos függvény az $[a,b]$-n, és B, B' két beosztás. Ekkor $\underline{s}(f,B) \le \overline{s}(s,B')$, azaz tetszőleges beosztáshoz tartozó alsó összeg nem nagyobb, mint bármelyik beosztáshoz tartozó fölső összeg.*

Tekintsük azt a B'' beosztást, amelyet úgy kapunk, hogy B-t és B'-t egyesítjük, és használjuk az előző tételt.

Az előző tételből következik, hogy

$$\sup_{B \text{ beosztás}} \underline{s}(f,B) \le \inf_{B \text{ beosztás}} \overline{s}(s,B).$$

11.7. Definíció. Legyen f korlátos $[a,b]$-n. Ekkor a

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{B \text{ beosztás}} \underline{s}(f,B)$$

mennyiséget f *(Darboux-féle) alsó integráljának*, a

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_{B \text{ beosztás}} \underline{s}(f,B)$$

mennyiséget pedig f *(Darboux-féle) fölső integráljának* nevezzük.

A Riemann-integrál fogalma

A 11.7. definíció előtti észrevétel alapján az alsó és fölső integrál is véges, továbbá mindig igaz, hogy

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

11.8. Definíció. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényt *Riemann-integrálhatónak* nevezzük $[a, b]$-n, ha $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Ekkor a $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ mennyiséget f $[a, b]$-hez tartozó *Riemann-integráljának vagy határozott integráljának* nevezzük. Jelölése: $\int_a^b f(x)dx$.

Szokásos elnevezések: $[a, b]$ *integrációs intervallum*, a az *integrálás alsó határa*, b az *integrálás felső határa*, f *integrandusz*, x *integrálás változója*.

Legyen $f(x) = c$ konstans az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor nyilvánvaló, hogy $\int_a^b f(x)\,dx = c(b - a)$.

11.1. Példa. Legyen $f(x) = x$. Mutassuk meg, hogy az f függvény integrálható $[0, 1]$-n, és $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Megoldás. Tekintsük a $[0, 1]$ intervallum B_n egyenletes beosztását n részre:

$$B_n = (0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1).$$

Ekkor

$$\underline{s}(f, B_n) = \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n} = \frac{n(n-1)}{2n^2}.$$

Másrészről

$$\overline{s}(f, B_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Tehát $\lim_{n\to\infty} \underline{s}(f, B_n) = \frac{1}{2}$, így $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx \geq \frac{1}{2}$, és $\lim_{n\to\infty} \overline{s}(f, B_n) = \frac{1}{2}$, így $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}$. Ebből viszont következik (alsó integrál $\leq$ fölső integrál), hogy

$$\underline{\int_0^1} x\,dx = \overline{\int_0^1} x\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

azaz f Riemann-integrálható $[0,1]$-en, és integrálja $1/2$.

11.9. Megjegyzés. A továbbiakban amikor azt mondjuk, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor az automatikusan azt is jelenti, hogy f korlátos $[a,b]$-n, hiszen csak ilyen függvényekre definiáltuk a Riemann-integrált.

Később ezt a definíciót ki fogjuk terjeszteni egyes további, nem feltétlenül korlátos függvényekre, illetve nem korlátos intervallumokra (improprius integrál).

Nem nehéz olyan függvényt mutatni, ami nem Riemann-integrálható (semmilyen nemelfajuló intervallumon). Ilyen például a Dirichlet-függvény (ami 1 a racionális helyeken és 0 az irracionális helyeken). Ez semmilyen véges $[a,b]$ $(a < b)$ intervallumon nem integrálható, mert alsó összege mindig 0, míg felső összege mindig $b - a$.

Természetes kérdés, hogy mely függvények Riemann-integrálhatók. Erre adunk két elégséges (de nem szükséges) feltételt.

11.10. Tétel. *Ha az f függvény korlátos és monoton az $[a,b]$ korlátos zárt intervallumon, akkor ott Riemann-integrálható.*

11.11. Tétel. *Ha az f függvény folytonos az $[a,b]$ korlátos zárt intervallumon, akkor ott Riemann-integrálható.*

11.12. Megjegyzés. A 11.11. tételnek azonnali következménye, hogy ha az f elemi függvény értelmezve van az $[a,b]$ korlátos zárt intervallumon, akkor mivel ott folytonos, így Riemann-integrálható $[a,b]$-n. Vigyázat: ez nem vonatkozik nyílt vagy nem korlátos intervallumokra!

Az alábbiakban felsoroljuk a határozott integrál néhány egyszerű tulajdonságát, amelyek közvetlenül következnek a definícióból.

11.13. Tétel. *Ha az f, g függvények Riemann-integrálhatók az $[a, b]$-n, akkor $c \cdot f$ (tetszelgős $c \in \mathbb{R}$-re) és $f + g$ is Riemann-integrálhatóak $[a, b]$-n, és*

i) $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx,$

ii) $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$

A 11.13. tétel i) és ii) pontjából az is következik,hogy

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Az i) és ii) ismételt alkalmazásával adódik, hogy ha $f_1, \ldots f_k$ integrálhatók $[a, b]$-n, akkor tetszőleges $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ esetén

$$\int_a^b c_1 f_1(x) + \ldots + c_k f_k(x)\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \cdots + c_k \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

11.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók. Ekkor $f \cdot g$ és $|f|$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-n. Továbbá, ha g jeltartó és $|g(x)| \geq c > 0$ minden $x \in [a, b]$-re. Ekkor f/g is Riemann-ingerálható $[a, b]$-n.*

11.15. Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy bár a 11.14. tételben szereplő függvények Riemann-integrálhatók, integráljuk kiszámítására nincs egyszerű formula!

Az elfajuló (amikor $a = b$) intervallumon 0-nak definiáljuk minden a helyen értelmezett függvény Riemann-integrálját, azaz

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

Továbbá, ha felcseréljük az integrálás határait, akkor az integrál mínusz egyszeresére változik (ezzel elérjük, hogy a Riemann-integrál akkor is definiálva van, ha $a > b$), azaz ha f integrálható $[a, b]$-n, akkor legyen

$$\int_b^b f(x)\,dx := - \int_a^b f(x)\,dx.$$

11.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-n. Ekkor igazak a következők.*

i) *f integrálható az $[a, b]$ minden részintervallumán.*

ii) *Tetszőleges $a < c < b$ esetén*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

iii) *Ha f integrálható $[b, c']$-n is, akkor integrálható $[a, c']$-n is, és*

$$\int_a^{c'} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{c'} f(x)dx.$$

Primitív függvények és a Newton-Leibniz-formula

A határozott integrált ritkán számoljuk ki közvetlenül a definícióból. Erre legtöbbször a *Newton-Leibniz-formulát* használjuk. Ennek ismertetése előtt bevezetjük a *primitív függvény fogalmát.*

11.17. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, és $F : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ valós függvények. Azt mondjuk, hogy F *primitív függvénye* f-nek I-n, ha F az I-ben differenciálható és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén.

Például legyen $f(x) = x^3$, $I = (-\infty, +\infty)$. Ekkor $F(x) = x^4/4$ az f egy primitív függvénye az I-n, amit közvetlen deriválással ellenőrizhetünk. Vegyük észre, hogy $F(x) = x^4/4 + c$ is primitív függvénye f-nek az I intervallumon, mégpedig tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén. Ez általában is így van: ha F primitív függvénye f-nek az I intervallumon, akkor tetszőleges c konstans esetén $F + c$ is primitív függvénye f-nek I-n. Tehát ha egy függvénynek létezik primitív függvénye egy intervallumon, akkor végtelen sok ilyen is van.

11.18. Tétel. *Tegyük fel, hogy F és G primitív függvényei az f függvénynek az I intervallumon. Ekkor $F(x) = G(x) + c$ valamely c konstansra, azaz egy függvény primitív függvényei csak egy konstansban különbözhetnek.*

11.19. Definíció. Egy f függvény primitív függvényeinek halmazát az f *határozatlan* *integráljának* nevezzük. Ezt az

$$\int f(x)\,dx = \{F(x)+c, c\in\mathbb{R}\}$$

szimbólummal jelöljük, ahol F az f függvény egy tetszőleges primitív függvénye az I-n.

Némiképpen pontatlanul, de a határozatlan integrálra a következő jelölést is szoktuk használni:

$$\int f(x)dx = F(x)+c.$$

11.20. Tétel. *Ha az f és g függvényeknek létezik primitív függvénye az I intervallumon, akkor az $f+g$ összegfüggvénynek és tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ számra a $c\cdot f$ függvénynek is létezik primitív függvénye I-n. Továbbá*

$$\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

$$\int (cf)(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

A primitív függvény keresés lényegében a differenciálás műveletének megfordítása: olyan függvényt keresünk (primitív függvény), amit differenciálva az adott függvényt kapjuk. Ez általában igen nehéz feladat. Itt mi csak a legegyszerűbb esetre szorítkozunk, amikor f függvényünk olyan egyszerű, hogy az elemi függvények deriváltjára vonatkozó szabályok megfordításával megtalálható primitív függvénye.

Az elemi függvények deriváltjainak megfordításával kapjuk az ún. *alapintegrálokat.* Néhány alapintegrál:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^\alpha}{\alpha+1}+c, \alpha\neq 1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln x}+c, a>0, a\neq 1 \qquad \int e^x dx = e^x+c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + c, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c,$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c, \qquad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx = \operatorname{th} x + c, \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx = -\operatorname{cth} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \operatorname{arsh} x + c = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + c,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arch} x + c = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + c,$$
$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\cdot \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

11.2. Példa. Határozzuk meg a $\int x\,dx$ integrált.

*Megoldás***.** Itt használjuk az első alapintegrált, mégpedig $\alpha = 0$ helyettesítéssel, azaz

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

11.3. Példa. Határozzuk meg a következő integrált: $\int (3x+1)^2\,dx$.

*Megoldás***.** Ezt a feladatot nyilván meg tudjuk oldani közvetlenül, a zárójelben lévő kifejezés négyzetre emelésével és aztán a határozatlan integrál műveleti tulajdonságait, illetve az alapintegrálok használva:

$$\begin{aligned}\int (3x+1)^2\,dx = &\int 9x^2+6x+1\,dx\\ &9\int x^2\,dx + 6\int x\,dx + \int 1\,dx\\ &= 9\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} + x + c.\end{aligned}$$

A primitív függvények ismeretében mostmár kimondhatjuk azt a tételt, amelynek segítségével könnyen kiszámolhatóvá válnak a határozott integrálok.

11.21. Tétel (Newton-Leibniz-formula)**.** *Tegyük fel, hogy a korlátos f függvény folytonos (a,b)-n, és $F(x)$ primitív függvénye folytonos $[a,b]$-n. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

A fenti formulát a következő alakba is szoktuk írni

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

11.4. Példa. Számítsuk ki a következő határozott integrált:

$$\int_0^4 x\,dx.$$

Megoldás. Mivel

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c,$$

így a 11.21. tétel alapján

$$\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{4^2}{2} - 0 = 8.$$

11.5. Példa. Számítsuk ki a következő határozott integrált:

$$\int_0^1 x^3 + 2x - 1\,dx.$$

Megoldás. Itt először is kihasználjuk a határozatlan integrál linearitását:

$$\begin{aligned}\int x^3 + 2x - 1\,dx &= \int x^3\,dx + 2\int x\,dx - \int 1\,dx \\ &= \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} - x + c,\end{aligned}$$

ahonnan a 11.21. tétel alapján

$$\int_0^1 x^3 + 2x - 1\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 - x\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

11.6. Példa. Számítsuk ki a következő határozott integrált:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx.$$

Megoldás. Mivel

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c,$$

ezért a 11.21. tétel alapján

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$$

Önellenőrző kérdések

1. Határozzuk meg a következő integrált $\int x^5 - 3x^2 + 1 + \frac{1}{x} \, dx$.
2. Határozzuk meg a következő integrált $\int \frac{2}{1+x^2} + 2 \, dx$.
3. Határozzuk meg a következő integrált $\int \operatorname{tg} x + \frac{x^2-1}{x+1} \, dx$.
4. Számoljuk ki a következő határozott integrált $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$.
5. Mekkora annak a tartománynak a területe, amely a $3 \sin x + 1$ függvény grafikonja és az x-tengely közé esik a $[0, \pi]$ intervallum fölött?

Ajánlott irodalom

1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.