Fodor Ferenc és Vígh Viktor

Kalkulus üzemmérnök informatikusoknak előadás olvasólecke

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával.

Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

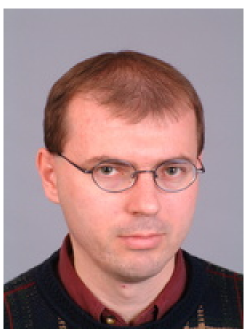
Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Európai Unió
Európai Szociális Alap
Magyarország Kormánya
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

1. Olvasólecke

Azonosságok, egyenlőtlenségek, teljes indukció

Készítette:



Dr. Fodor Ferenc
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Geometria Tanszék

Az olvasólecke tartalma:

- Algebrai és trigonometrikus azonosságok
- Binomiális együtthatók, binomiális tétel
- Teljes indukció
- Nevezetes egyenlőtlenségek
- A $\sum$ és $\prod$ jelölések használata
- Önellenőrző kérdések

Olvasási idő: kb. 1 óra

Algebrai és trigonometrikus azonosságok

Számos alkalommal használjuk a következő egyszerű algebrai összefüggéseket:

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok esetén

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

A fenti összefüggés egy általánosabb változata, amikor nem négyzetszám különbségét bontjuk szorzattá, hanem magasabb hatványokét: Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számokra és $n \in \mathbb{N}_+$ pozitív egész számra teljesül a következő:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

A fenti egyenlőség megint csak a műveletek elvégzésével igazolható:

$$\begin{aligned}
&(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&\qquad = a^n + a^{n-1}b + \ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \ldots - ab^{n-1} - b^n \\
&\qquad = a^n - b^n,
\end{aligned}$$

mivel a többi tag mind kiesik.

Páratlan kitevők esetén teljesül a következő is: Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok és $n = 2k+1 \in \mathbb{N}_+$ pozitív egész szám esetén

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Figyeljük meg, hogy a fenti formulában a második zárójelben szereplő tagok előjele váltakozó. Az első tag pozitív előjelű, az utána következő negatív, aztán pozitív, s.í.t. Az utolsó tag előjele mindig pozitív, hiszen a zárójelben páratlan sok tag szerepel, mivel n páratlan. A formula szintén a műveletek elvégzésével ellenőrizhető

Következőleg felelevenítjük a trigonometrikus függvényekre vonatkozó ún. *addíciós formulákat*, amelyek ismerősek középiskolai tanulmányainkból.

$$\begin{aligned}
&i) \quad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \\
&ii) \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
&iii) \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\
&iv) \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta).
\end{aligned}$$

A fenti összegre vonatkozó formulák sokat használt speciális esete, amikor $\alpha = \beta$. Ekkor kapjuk az ún. *kétszeres szögekre vonatkozó addíciós formulákat*:

$$\begin{aligned}
&i) \quad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha), \\
&ii) \quad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha),
\end{aligned}$$

Ezek igazolása igen egyszerű, csak $2\alpha = \alpha + \alpha$-ra kell alkalmazni a megfelelő addíciós formulát. Példaként leírjuk a ii) levezetését:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha),$$

amit bizonyítani akartunk.

Másik nagyon fontos speciális eset, amikor $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$, azaz az α szöget annak felével írjuk fel. Így kapjuk az ún. *fél-szög formulákat*:

$$i) \quad \sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}},$$

$$ii) \quad \cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}},$$

Bizonyítás. A fél-szög formulák esetén megmutatjuk az i) bizonyítását: tekintsük

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha/2 + \alpha/2) = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) = 1 - 2\sin^2(\alpha/2),$$

ahonnan kifejezve $\sin^2(\alpha/2)$-t adódik, hogy

$$\sin^2(\alpha/2) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}.$$

Mindkét oldalból négyzetgyököt vonva kapjuk a kívánt eredményt. □

Teljes indukció

A *teljes indukció*, mint bizonyítási módszer a következőt jelenti.

1.1. Tétel (Teljes indukció)**.** *Legyenek $P(1), P(2), \ldots$ $n = 1, 2, \ldots$ állítások. Tegyük fel, hogy*

i) $P(1)$ igaz, és

ii) $P(n) \implies P(n+1)$ minden n-re, azaz ha $P(n)$ igaz, akkor következik belőle, hogy $P(n+1)$ is igaz.

Ekkor $P(n)$ igaz minden $n \geq 1$-re.

Tehát a teljes indukció segítségével igazolni tudunk végtelen sok(!) állítást, mindössze az elsőt kell bizonyítanunk, illetve az, hogy ha $P(n)$ igaz, akkor az maga után vonja, hogy a következő állítás, azaz $P(n+1)$ is igaz.

Bizonyítás. A bizonyítás indirekt. Az $\mathbb{N}_+$ természetesen számoknak meg van az a tulajdonsága, hogy bármilyen nemüres részhalmazának van legkisebb eleme (ami szinten természetes szám). Indirekt módon, tegyük fel, hogy $P(1), P(2), \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$ olyan állítások, amelyekre teljesül i) és ii), de nem mind igazak. Vegyük azon $i \in \mathbb{N}_+$ indexek halmazát, hogy $P(i)$ nem igaz. Ez az indirekt feltevés miatt nem üres, tehát van legkisebb elem, mondjuk i_0. Nyilván $i_0 \neq 1$ az i) miatt, tehát $i_0 > 1$, így $i_0 - 1 \in \mathbb{N}_+$, azaz szintén természetes szám. Az i_0 minimális tulajdonsága miatt $P(i_0 - 1)$ igaz, de akkor ii) miatt $P(i_0)$ is igaz, ami ellentmond az indirekt feltevésnek. □

1.2. Megjegyzés. Az 1.1. tétel i) feltételét *kezdeti esetnek*, a ii) feltételben a "$P(n)$ igaz" feltevést pedig *indukciós feltevésnek* nevezzük. Megjegyezzük, hogy a teljes indukciónak vannak ennél a legegyszerűbb esetnél kifinomultabb változatait is.

Mutatunk néhány nevezetes példát a teljes indukció alkalmazására:

1.1. Példa. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$ esetén

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Megoldás. Teljes indukcióval a következő módon látható be az összeg formula: legyen $P(n)$ az az állítás, hogy a formula igaz n-re. Ekkor $P(1)$ igaz, hiszen

$$P(1) : 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Most tegyük fel, hogy $P(n)$ igaz, azaz

$$P(n) : 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ekkor

$$(1 + \ldots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

azaz $P(n+1)$ igaz. Így az 1.1. tétel alapján $P(n)$ igaz minden n-re.

Megoldás (2. megoldás). A fenti nevezetes formula az első n egész szám összegét adja meg. Ezt teljes indukció nélkül is könnyű látni, hiszen ha felírjuk a számokat sorban 1-től n-ig, és a lista két végéről kezdjük őket összeadni,

$$1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n,$$

$$1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1, n,$$

akkor a listában szimmetrikusan elhelyezkedő párok összege mindig $n+1$, és ilyen párból $n/2$ van, ha n páros, illetve $(n-1)/2$, ha páratlan, de akkor a "kimaradó" középső szám épp $(n+1)/2$. Így az összeg mindig $n(n+1)/2$.

1.3. Megjegyzés. A 2. megoldásban szereplő gondolatmenet Carl Friedrich Gauss-tól származik.

A következő egy hasonló nagyon fontos példa; ezt azonban már sokkal nehezebb (de nem lehetetlen) igazolni teljes indukció nélkül.

1.2. Példa. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$ pozitív egész szám esetén

$$1^1 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Megoldás. Az $n = 1$ eset nyilván igaz, hiszen

$$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz n, re. Ekkor

$$\begin{aligned} 1^1 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}, \end{aligned}$$

azaz az állítás igaz $n + 1$-re is, így a teljes indukció tétele alapján igaz minden n-re.

A következő példa mutatja, hogy a kezdeti eset nem mindig $n = 1$, hanem az indukció "indulhat" később is.

1.3. Példa. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \geq 4$ pozitív egész szám esetén

$$2^n < n!.$$

Megoldás. Esetünkben $P(4)$ nyilvánvalóan teljesül, hiszen

$$2^4 = 16 < 4! = 24.$$

Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 4$ pozitív egész számra teljesül, hogy

$$2^n < n!.$$

Ekkor, mivel $n+1>2$, ezért

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n+1)n! = (n+1)!.$$

1.4. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a fenti példában nem tudjuk az indukciót "hamarabb" kezdeni, ugyanis $2^1 = 2 > 1!$, $2^2 = 4 > 2! = 2$, és $2^3 = 8 > 3! = 6$. Tehát az állítás $n = 4$-től igaz.

Binomiális együtthatók, binomiális tétel

Egyszerű számolással látható, hogy

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

illetve

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2.$$

Hasonló módon ki lehetne fejezni (bár elég fáradtságos módon) a következő hatványt:

$$(a+b)^{2021} = ?$$

Az ún. *binomiális formula*, amely Sir Isaac Newtontól származik, általános képletet az ilyen típusú hatványok kifejtésére anélkül, hogy az összes aktuális szorzást el kellene végeznünk. Ennek kimondásához először szükségünk van bizonyos jelölésekre.

1.5. Definíció. Bevezetjük az ún. *binomiális együtthatókat*, melyeket a következő módon definiálunk: $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ esetén legyen

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

1.6. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy mivel $0! = 1$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

illetve

$$\binom{0}{k} = 0, \text{ ha } k > 0.$$

Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható kombinatorikai jelentése a következő: megegyezik egy n elemű halmazból kiválasztható k elemű részhalmazok számával. Ezt nem nehéz látni, hiszen egy k elemű részhalmaz első elemének az n elemű halmaz bármelyik elemét választhatjuk, azaz n lehetőségünk van. A második elemnek már csak a maradék $n-1$ elemből választhatunk, és így tovább. A k-adik elemre már csak $n-k+1$ lehetőség marad. Azaz összesen a k elemet $n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)$ különböző módon választhatjuk ki. Azonban minket itt csak a részhalmazok száma érdekel, és két k elemű részhalmazt ugyanannak tekintünk, ha elemeik ugyanazok, csak eltérő sorrendben szerepelnek. Ezért k darab konkrét számot tartalmazó részhalmaz $k!$ féle van, azaz ahány sorrendben el tudjuk a k számot rendezni. Ezért a $k!$-al osztani kell.

A fenti kombinatorikai jelentést kihasználva könnyen igazolható az alábbi tétel.

1.7. Tétel (Binomiális tétel)**.** *Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számok és $n \in \mathbb{N}_+$ pozitív egész szám esetén*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+n)}_{n \text{ -szer}}$$

szorzatot. Vegyük észre, hogy minden $0 \leq i \leq n$ esetén, egy $a^{n-i}b^i$ alakú tag pontosan annyiszor szerepel a szorzatban, ahány különböző módon ki tudunk választani i darab b-t a fenti zárójelekből, azaz pontosan annyiszor, ahány i elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak, azaz $\binom{n}{i}$. □

A binomiális együtthatókra számos szép (és sok bonyolult) azonosság teljesül. Ezekből említünk meg itt három olyan fontosat, amelyet később sokszor használni fogunk.

i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ minden $n \geq k$ esetén.

Ez abból következik, hogy egy n elemű halmaznak pontosan annyi k elemű részhalmaza van, mint ahány $n-k$ elemű

ii)
$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \text{ minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Ez látható például a binomiális tétel következő speciális esetéből:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} 1^n 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} 1^1 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^n.$$

Ebből az azonosságból az is következik, hogy egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma (beleértve magát a halmazt és az üres halmazt is) 2^n.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

1.1. ábra. A Pascal-háromszög első hét sora

iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ minden $n \geq k$ esetén.

Ez az azonosság is könnyen belátható algebrailag, ha felírjuk a definíció alapján mindkét oldalt és egyszerűsítünk. Ezt meghagyjuk házi feladatnak.

A binomiális együtthatók kiszámítása (kis n és k esetének kivételével) nehézkes. Erre szolgál(hat) az ún *Pascal-háromszög*: A Pascal-háromszöget úgy kapjuk, hogy az első sorba, a háromszög felső csúcsába 1-et írunk, majd a következő sorba balra és jobbra alá ugyancsak 1-et 1-et. Általában az n-esdik sorban n szám áll, amelyek közül az első és utolsó mindig 1. A köztes számokat pedig úgy kapjuk, hogy a közvetlenül felette balra és jobbra álló számokat összeadjuk.

A iii) összefüggés alapján a Pascal-háromszög $n+1$-esik sorának $k+1$ eleme éppen $\binom{n}{k}$.

Nevezetes egyenlőtlenségek

Tanulmányainkban sokszor fogunk eszközként használni egyes nevezetes egyenlőtlenségeket. Ezek közül sorolunk fel itt néhányat.

1.8. Definíció. Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ valós számok. Ekkor az

$$A = A(a_1, \ldots, a_n) := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

mennyiséget az $a_1, \ldots, a_n$ számok *számtani* vagy *aritmetikai középének* nevezzük.

A számtani közép egyszerűen az $a_1, \ldots, a_n$ számok átlaga. Nyilván, A az $a_1, \ldots, a_n$ számok legkisebbike és legnagyobbika közé esik.

1.9. Definíció. Ha az $a_1, \ldots a_n$ számok mind pozitívak, akkor definiáljuk a *mértani* vagy *geometriai közepüket* a következő módon:

$$G = G(a_1, \ldots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Itt nyilván a gyökvonás miatt fontos, hogy a számok ne legyenek negatívak. A mértani közép is mindig a legkisebb és a legnagyobb szám közé esik.

Az elemi matematika egyik legfontosabb és legnevezetesebb egyenlőtlensége az ún. *számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség*:,

1.10. Tétel (Számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség)**.** *Ha $a_1, \ldots, a_n > 0$ valós számok, akkor*

$$G(a_1, \ldots, a_n) \leq A(a_1, \ldots, a_n),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = \ldots = a_n$, azaz a számok mind egyenlőek.

A következő egyenlőtlenséggel sokat fogunk még egyre általánosabb kontextusban találkozni.

1.11. Tétel (Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség)**.** *Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ és $b_1, \ldots, b_n$ számok esetén*

$$|a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}.$$

A Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség ezen egyszerű formájának bizonyítása a másodfokú egyenlet megoldóképletén múlik.

Bizonyítás. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ számra tekintsük

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\lambda a_1 + b_1)^2 + \ldots + (\lambda a_n + b_n)^2 \\ &= \lambda^2 (a_1^2 + \ldots + a_n^2) + 2\lambda (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) + (b_1^2 + \ldots + b_n^2), \end{aligned}$$

ami λ másodfokú függvénye Ennek a másodfokú függvénynek vagy nincs gyöke vagy pontosan egy van, ami pontosan akkor következik be, ha diszkriminánsa negatív vagy nulla. Tehát

$$0 \geq 4(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 - 4(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2),$$

ami átrendezés után

$$(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2),$$

pont, ahonnan gyökvonással kapjuk, amit bizonyítani akartunk. □

1.12. Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség)**.** *Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számok esetén*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Bizonyítás. Az egyelőtlenség mindkét oldalának négyzetre emlésével kapjuk, hogy

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq (|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = a^2 + 2|a||b| + b^2,$$

ahonnan egyszerűsítés után adódik, hogy $ab \leq |a||b|$, ami nyilvánvalóan igaz tetszőleges $a.b \in \mathbb{R}$ számra. □

Végezetül mutatunk egy olyan egyenlőtlenséget (pontosabban annak egy nagyon egyszerű formáját), amelyet majd a sorozatok határértékének kiszámításánál játszik kulcsszerepet.

1.13. Tétel (Bernoulli-egyenlőtlenség)**.** *Tetszőleges $n \geq 1$ egész szám és $a \geq -1$ valós szám esetén*

$$(1+a)^n \geq 1 + na,$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = 0$ vagy $n = 1$.

A Bernoulli-egyenlőtlenség bizonyítása kiváló példa az n szerinti teljes indukciós gondolatmenetre.

A $\sum$ és $\prod$ jelölések használata

Számtalanszor használjuk a következő jelöléseket, amelyek sok írást tudnak megtakarítani.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \ldots + a_n.$$

A fenti jelölést "szumma jelölésnek" nevezzük és többtagú (később végtelen sok tagú) összegeket rövidít. A $\sum$ betű a görög szigma, ami a "szumma" szó első betűjére utal. Az i a *futóindex*, az a_i-k pedig az összeg *tagjai.* Természetesen a szumma nem kell, hogy 1-től induljon, és az i helyett is használhatunk más alkalmas betűt a futóindexre.

Korábban láttuk például az első n pozitív egész szám összegét, amit mostmár a következő rövid módon is le tudunk írni:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Az első n természetes szám négyzetének összege pedig

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A Binomiális tételt is könnyebb kimondani a szigma jelöléssel:

$$(a+n)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-k} b^k.$$

Vegyük észre, hogy itt a futóindex k, és az nem 1-től, hanem 0-tól indul.

Az n tényezős szorzat jelölésére is létezik hasonló szimbólum: az ún. *produktum* jelölés:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdots a_n. \tag{1.1}$$

A Π görög pí a produktum szó első betűjére utal. A produktum jelölést némileg ritkábban használjuk, mint a szummát, de azért sokszor hasznos.

Például a faktoriális kiírható vele nagyon kényelmesen:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Önellenőrző kérdések

1. Számoljuk ki $\cos(\pi/8)$ és $\sin(\pi/8)$ pontos értékét.
2. Mutassuk meg, hogy $\cos(n\varphi) = \cos((n-1)\varphi)\cos\varphi \sin((n-1)\varphi)\sin\varphi$ tetszőleges n pozitív egész számra.
3. Keressünk formulát $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$-ra.
4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_+$ esetén

$$1^2 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

5. Bizonyítsuk be az 1.13. tételt (Bernoulli-egyenlőtlenség) teljes indukcióval.

Ajánlott irodalom

1. Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós analízis I–II*, Typotex Kiadó, 2012.
2. Mezei István, Faragó István, Simon Péter, *Bevezetés az analízisbe*, Typotex Kiadó, 2014.
3. Obádovics J. Gyula, *Matematika*, Scolar Kiadó Kft., 2019.
4. Reiman István, *Matematika*, Typotex Kiadó, 2011.
5. George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank, R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus 1–3*, Typotex Kiadó, 2015.