



Hidrodinamika

Miért szükséges a hidrodinamikai leírás?

Mekkora sebességgel esnek a hidrometeorok?

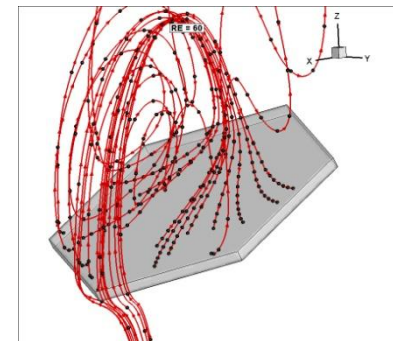
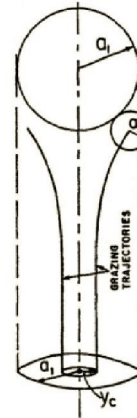
- pl. radarméréseknél

A ventilációs hatás befolyásolja a növekedést

- Diffúzió
- Párolgás / szublimáció
- Zúzmarásodás (riming)
- collision-coalescence (ütközés)
- break-up

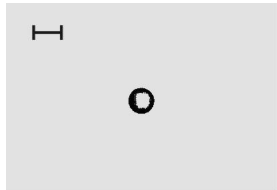
Légköri tisztító folyamatok

- Turbulencia
- Belső keveredés
- Csepp és jégkristály körüli áramlás

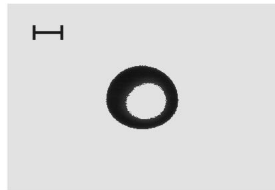


A levegőben lebegő vízcseppek alakja

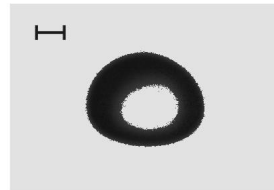
Megfigyelés: a cseppek alakja változik a mérettel



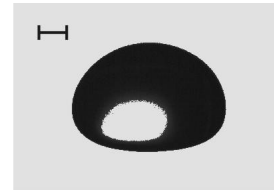
600 μm



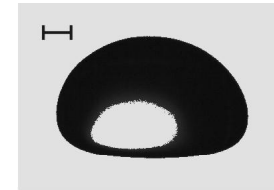
2.6 mm



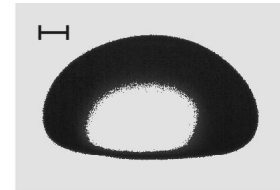
4 mm



5 mm

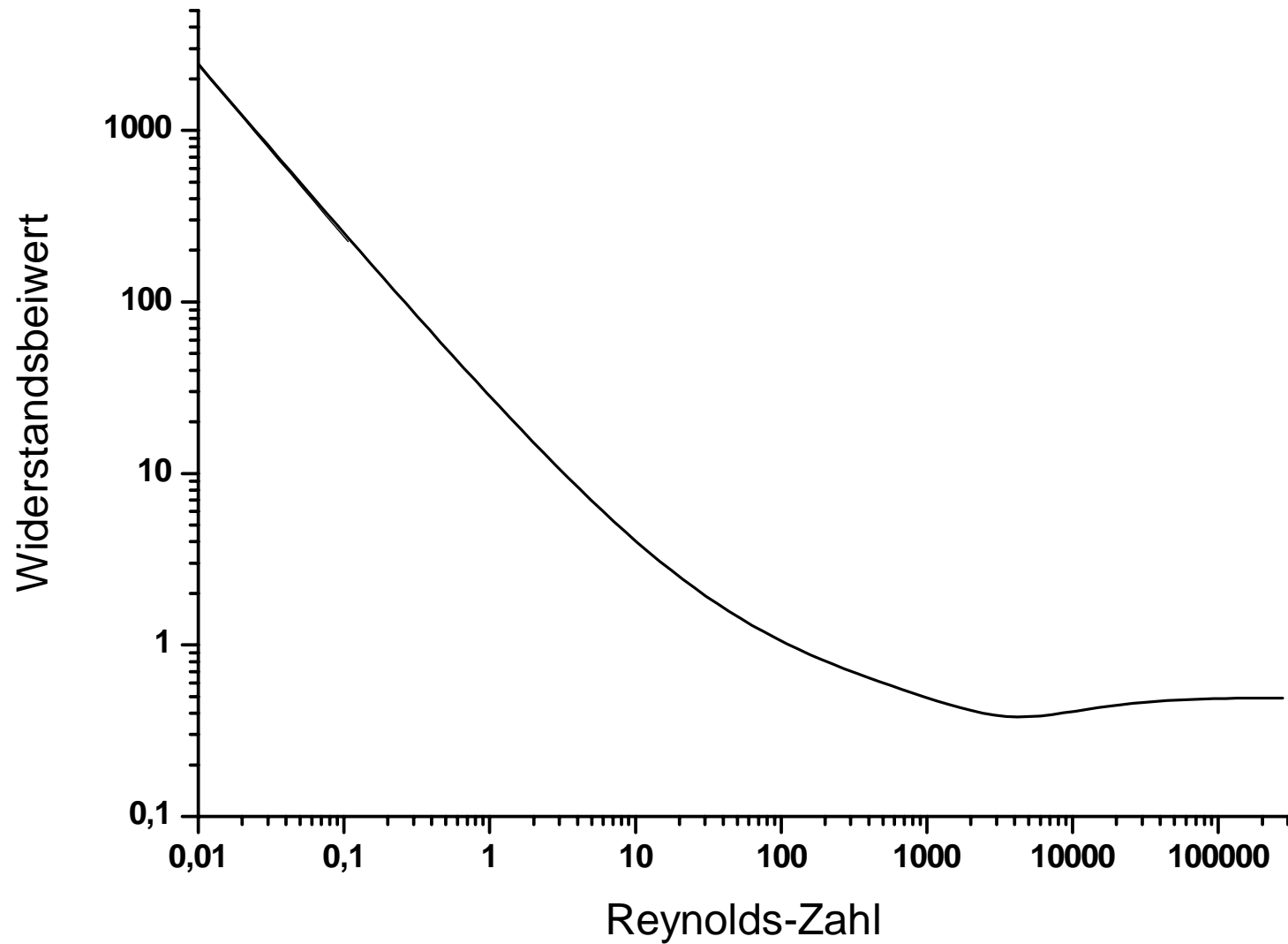


6 mm

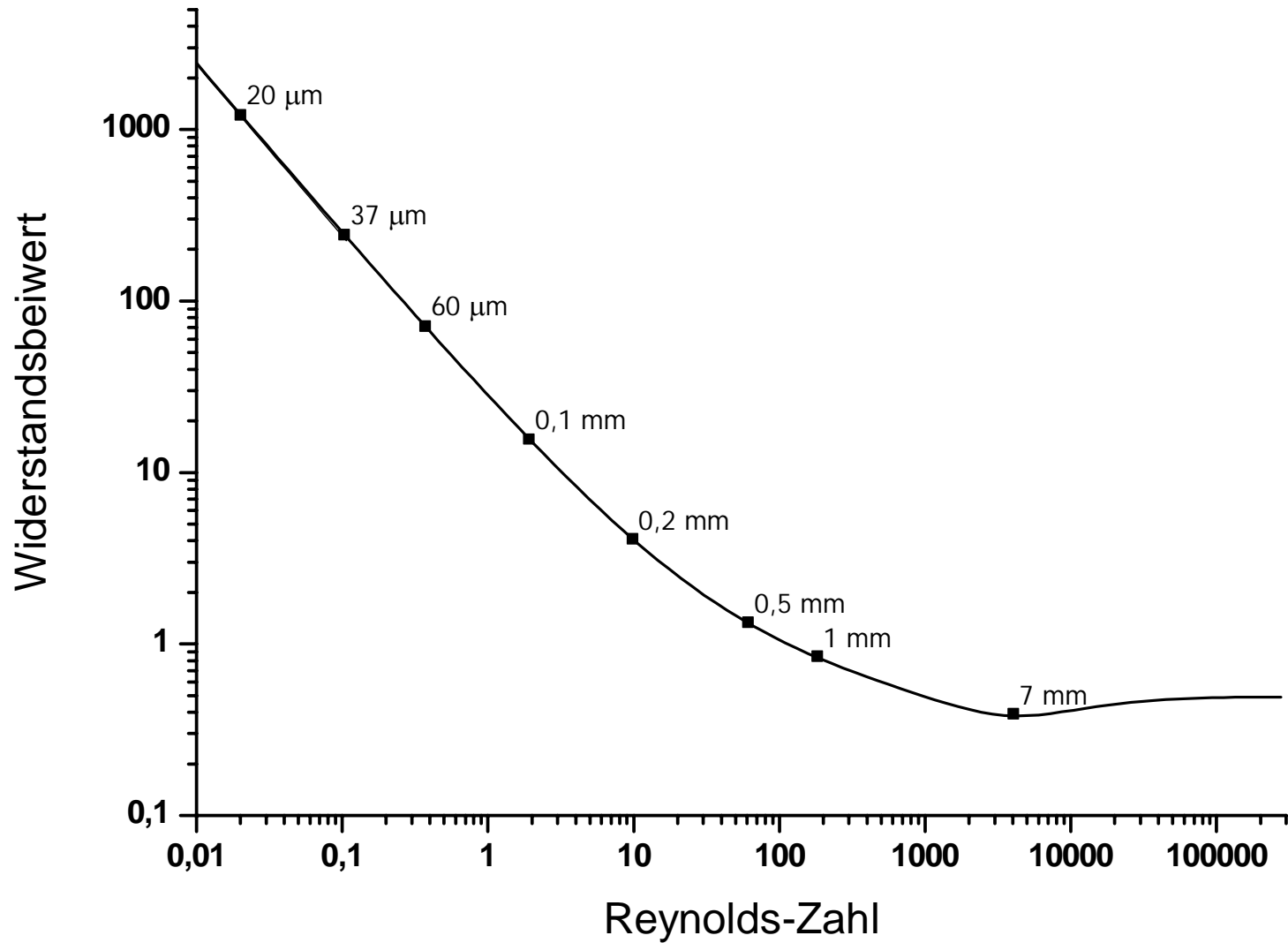


7 mm

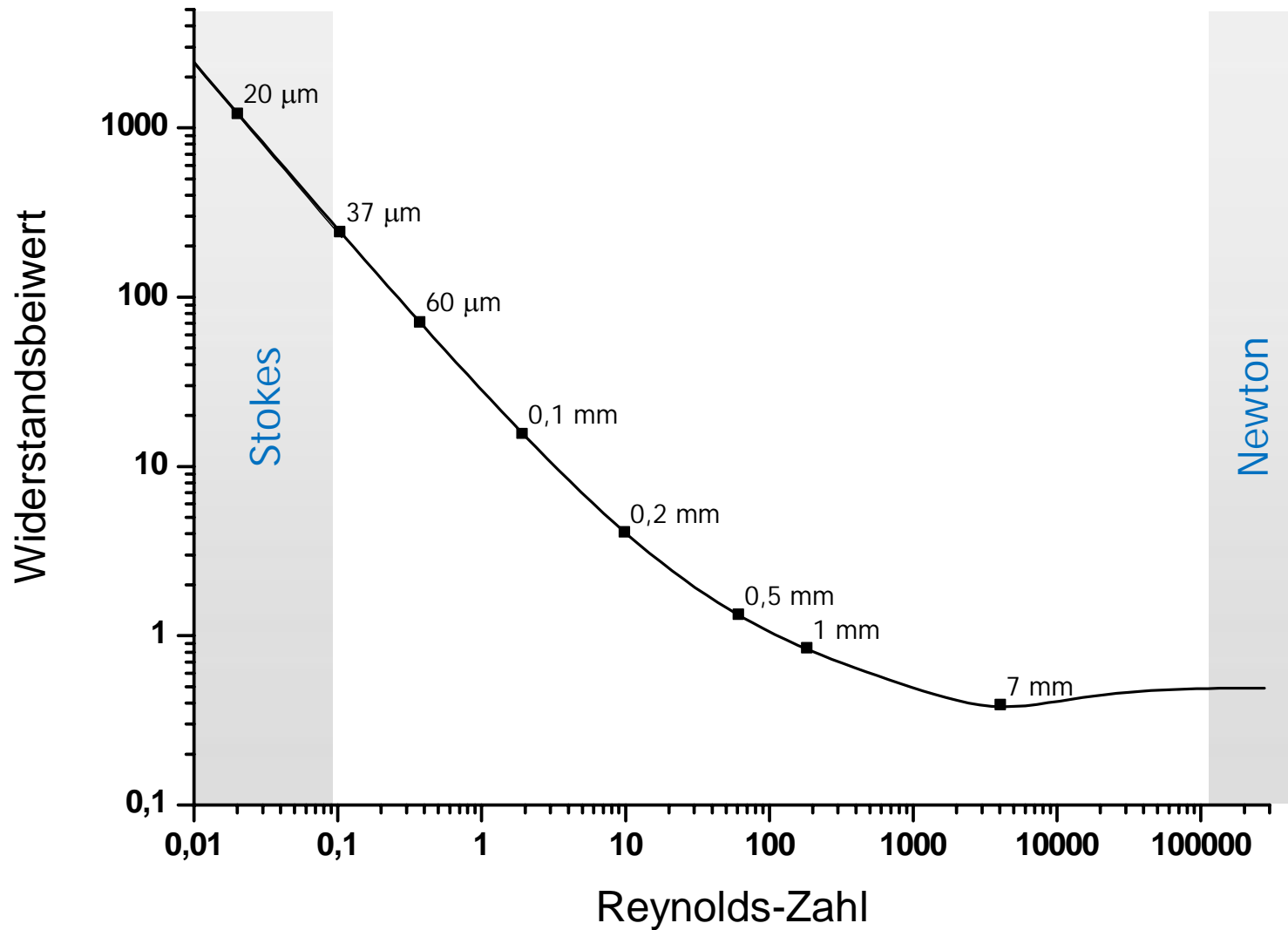
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



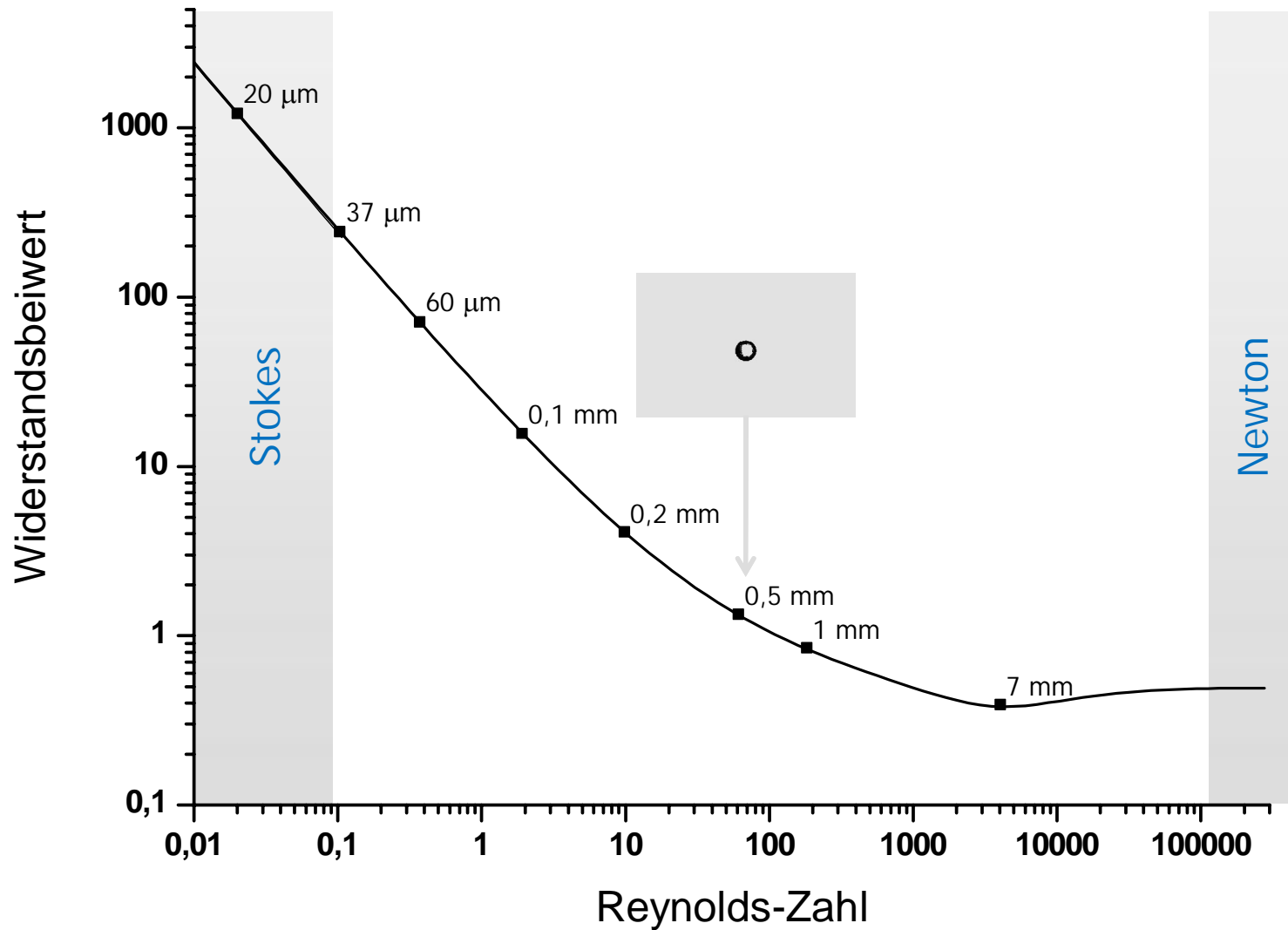
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



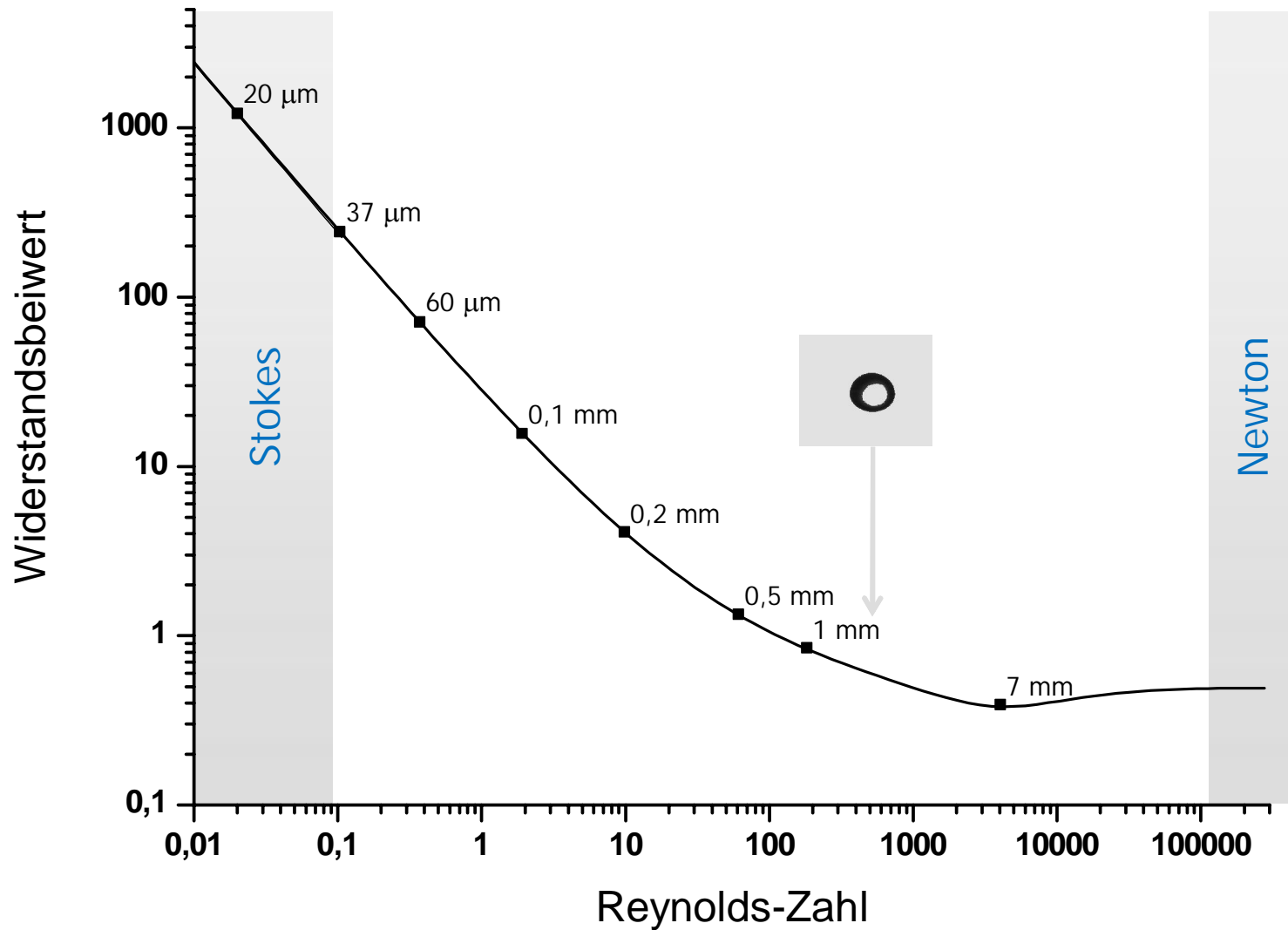
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



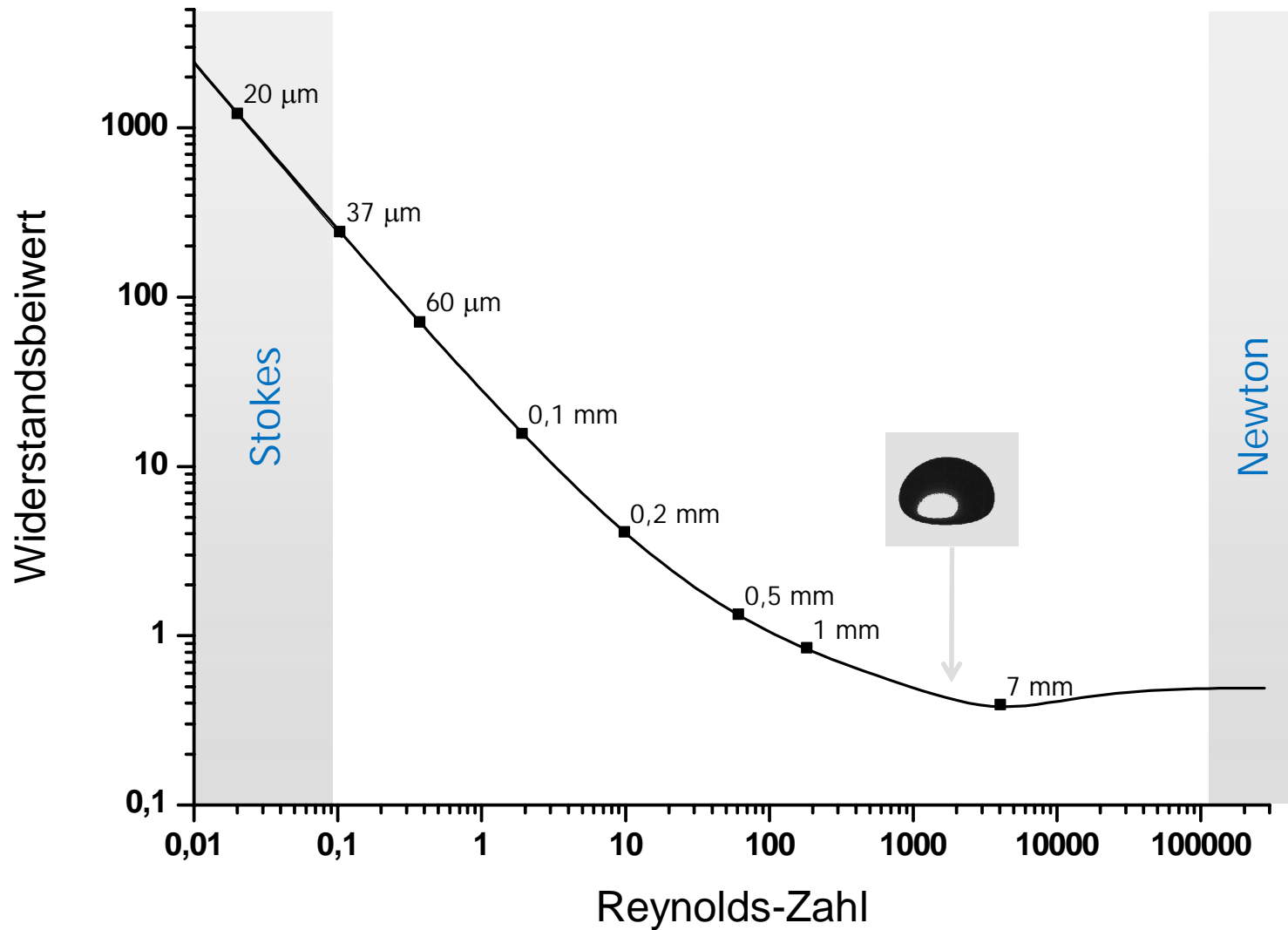
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



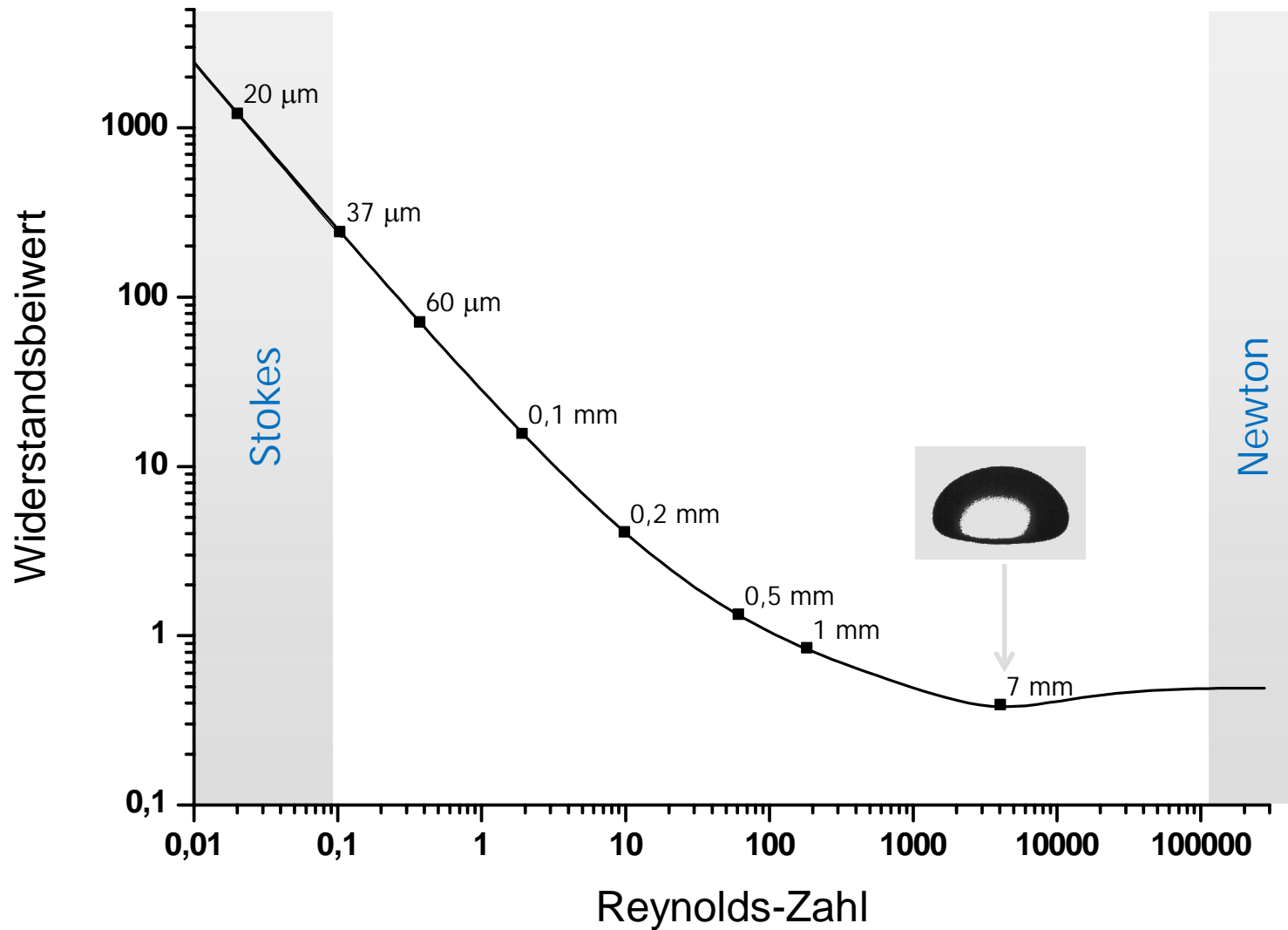
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



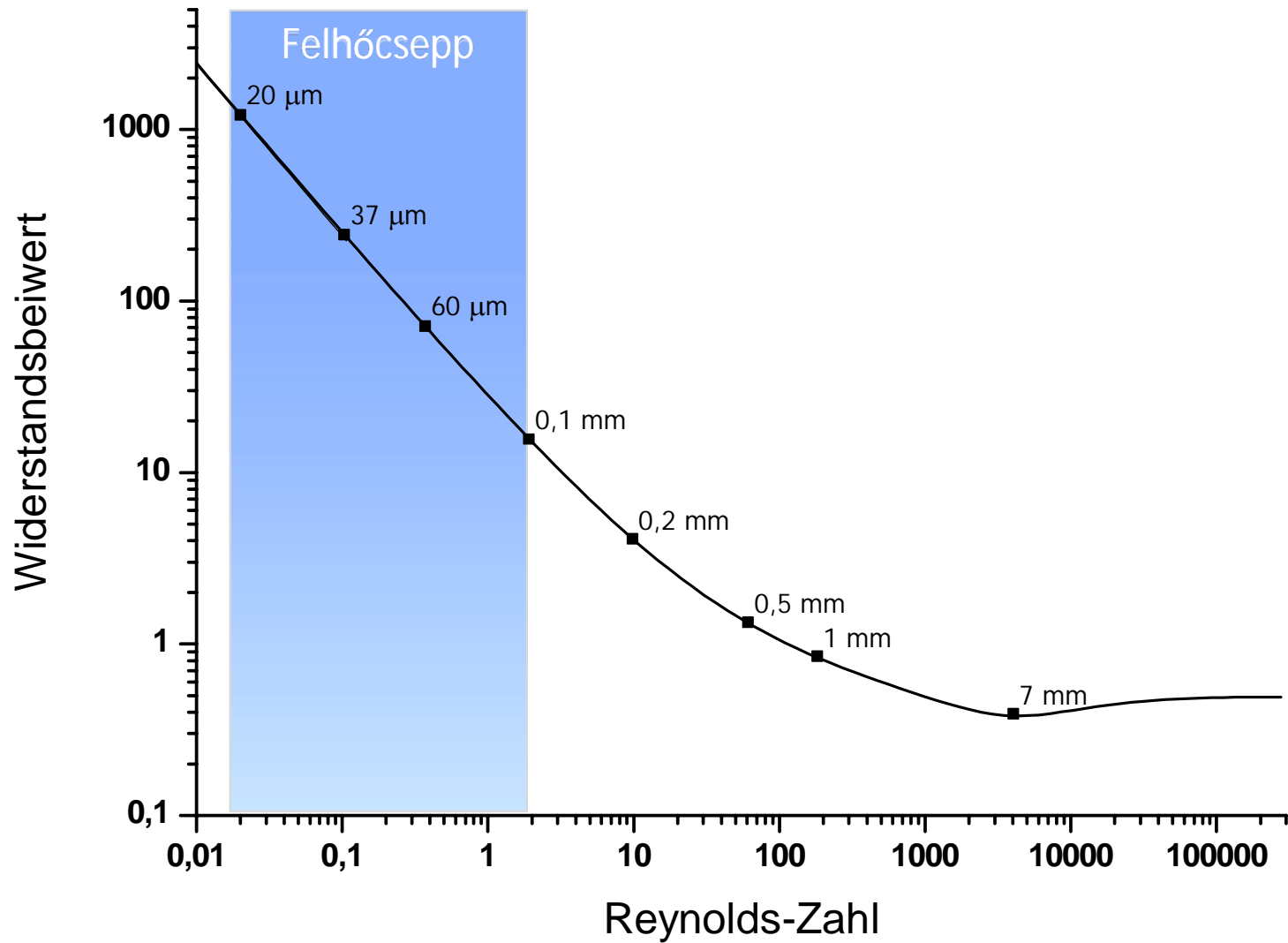
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



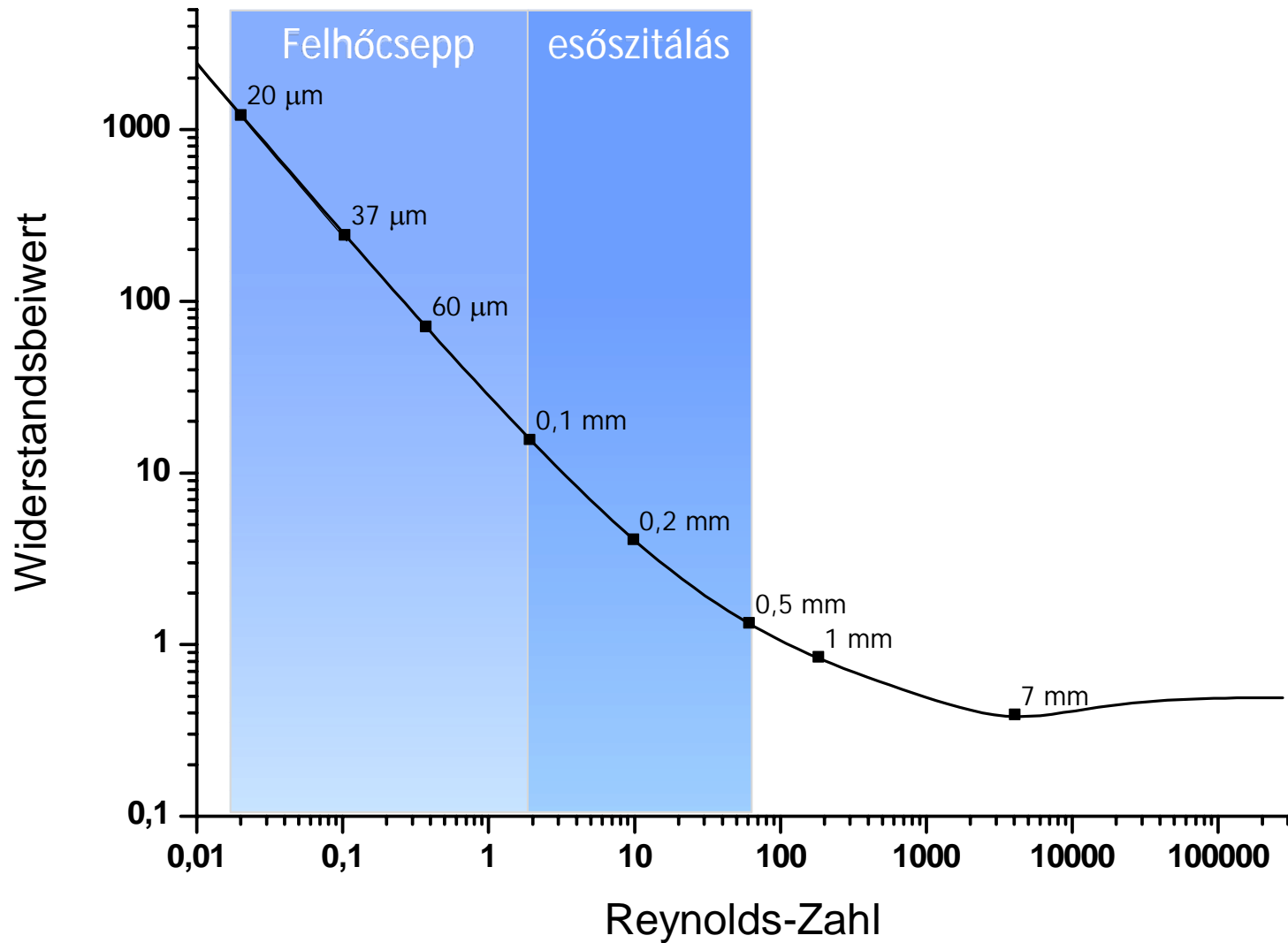
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



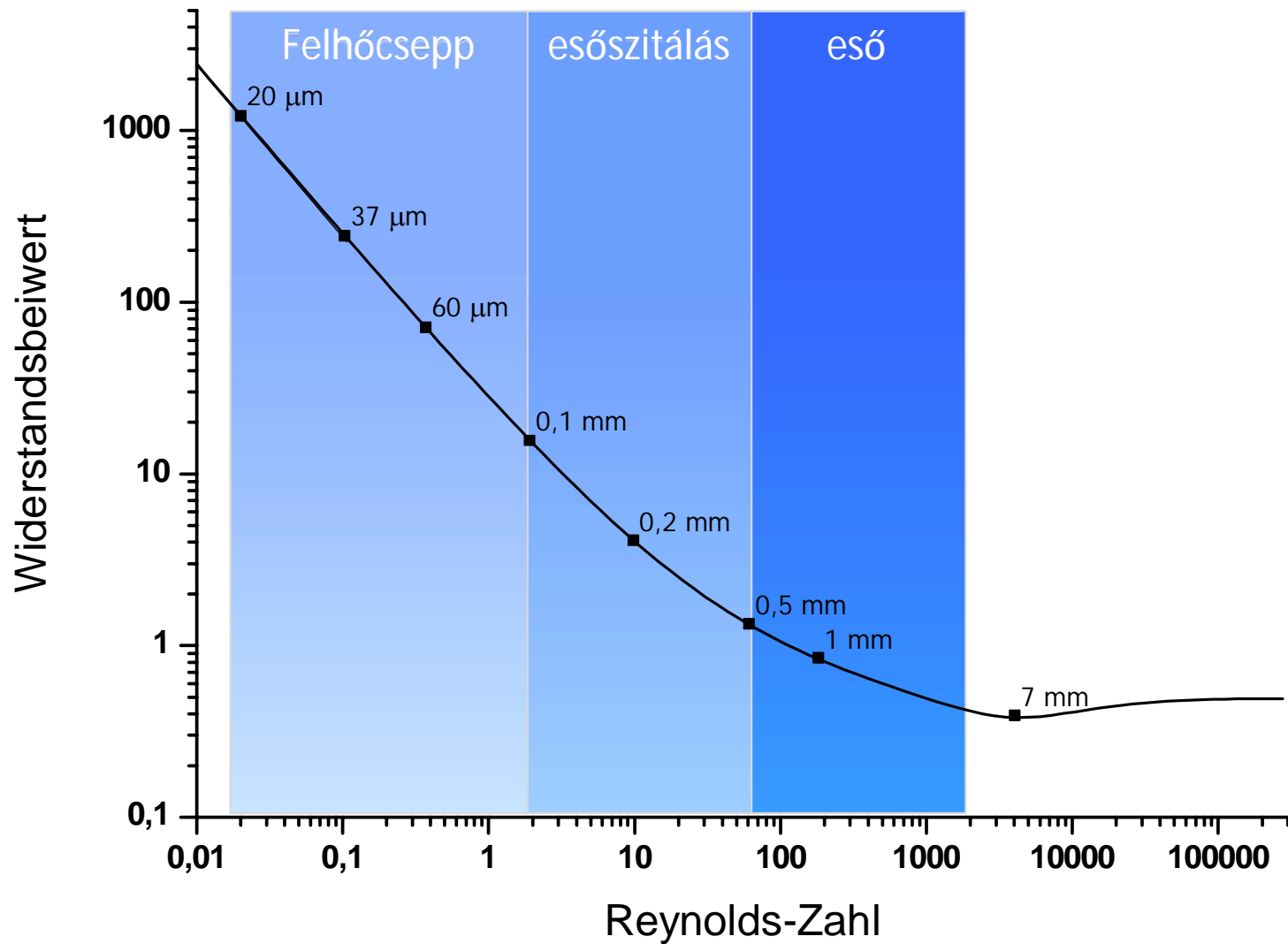
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



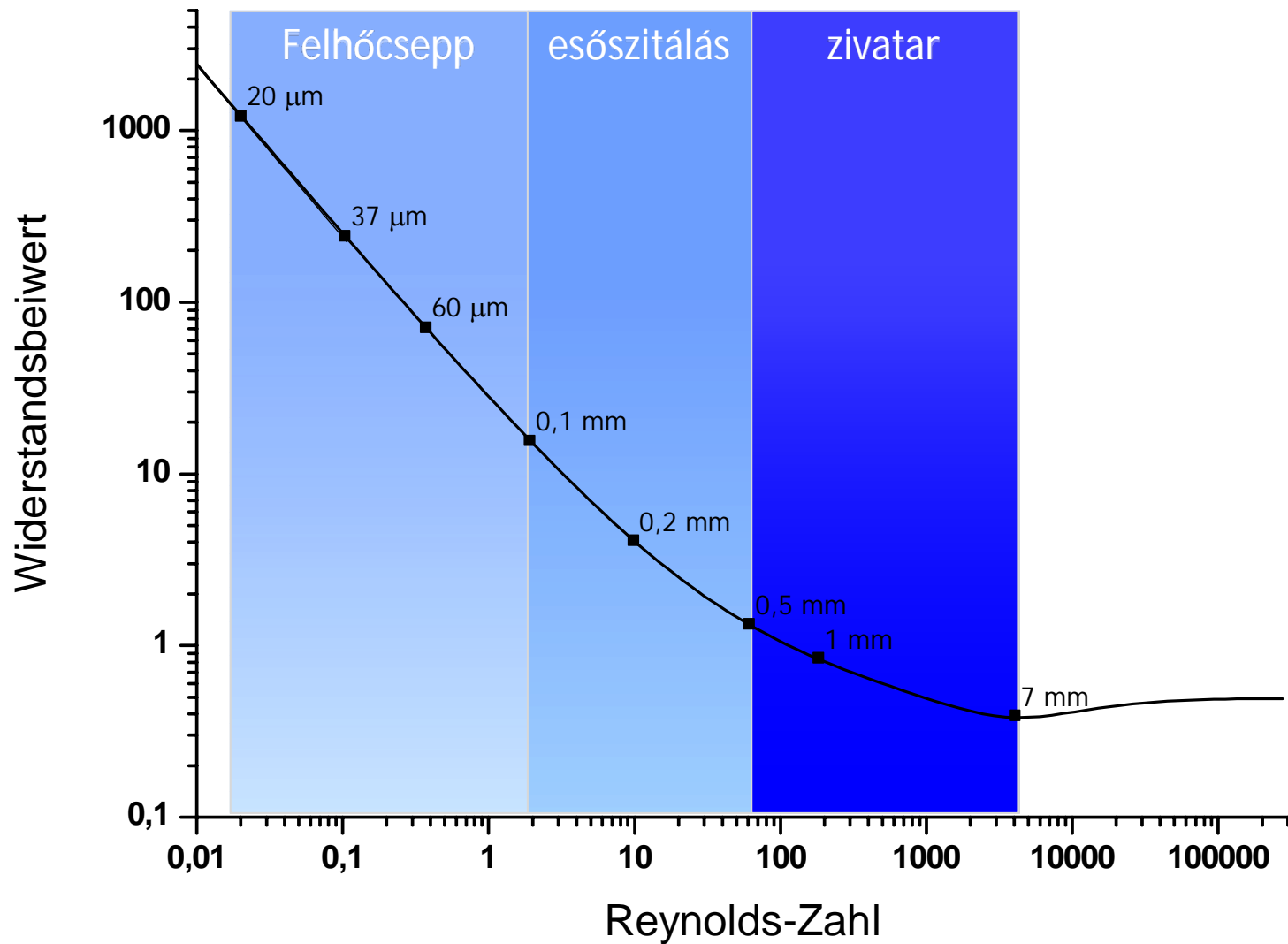
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



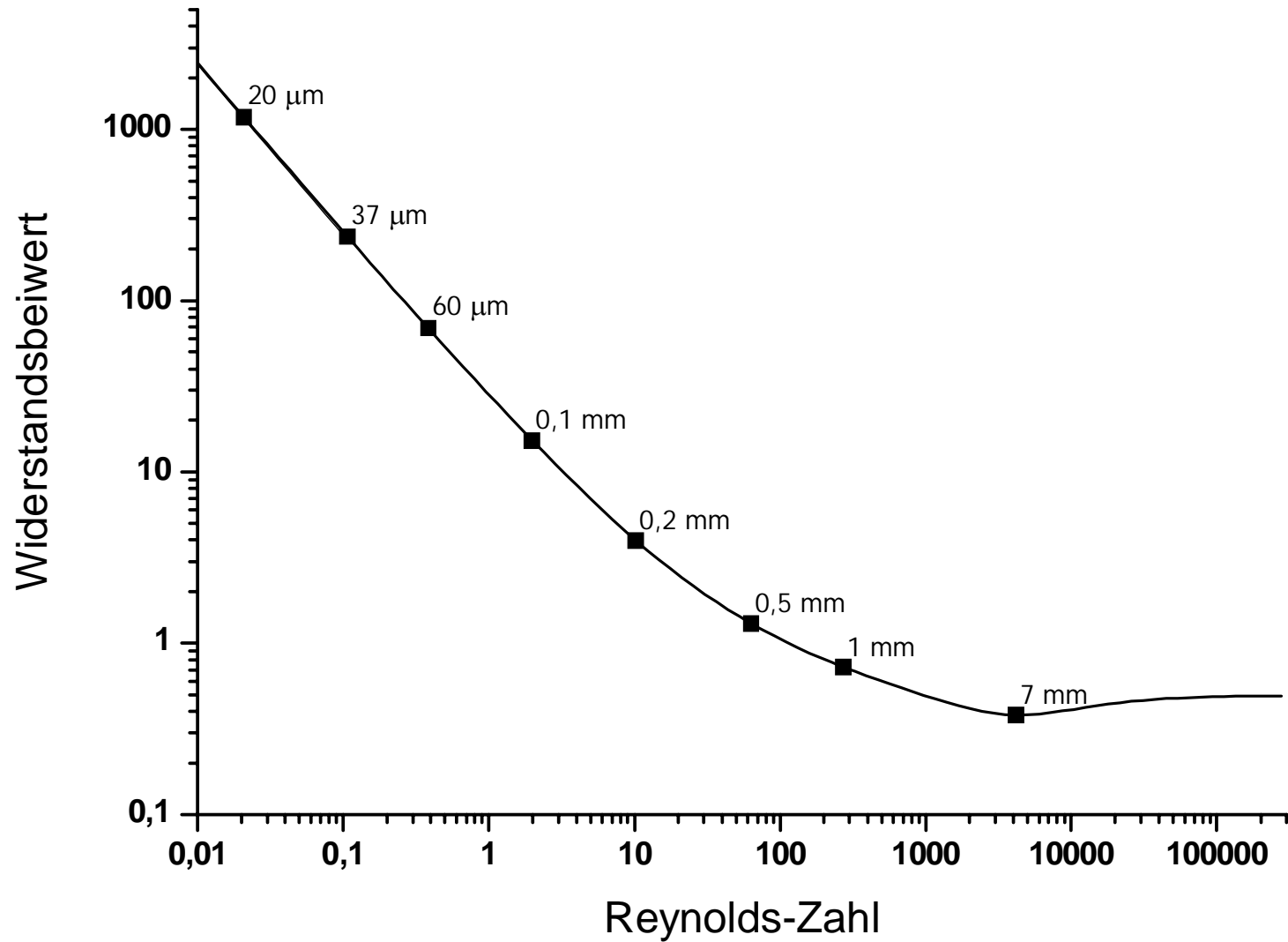
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



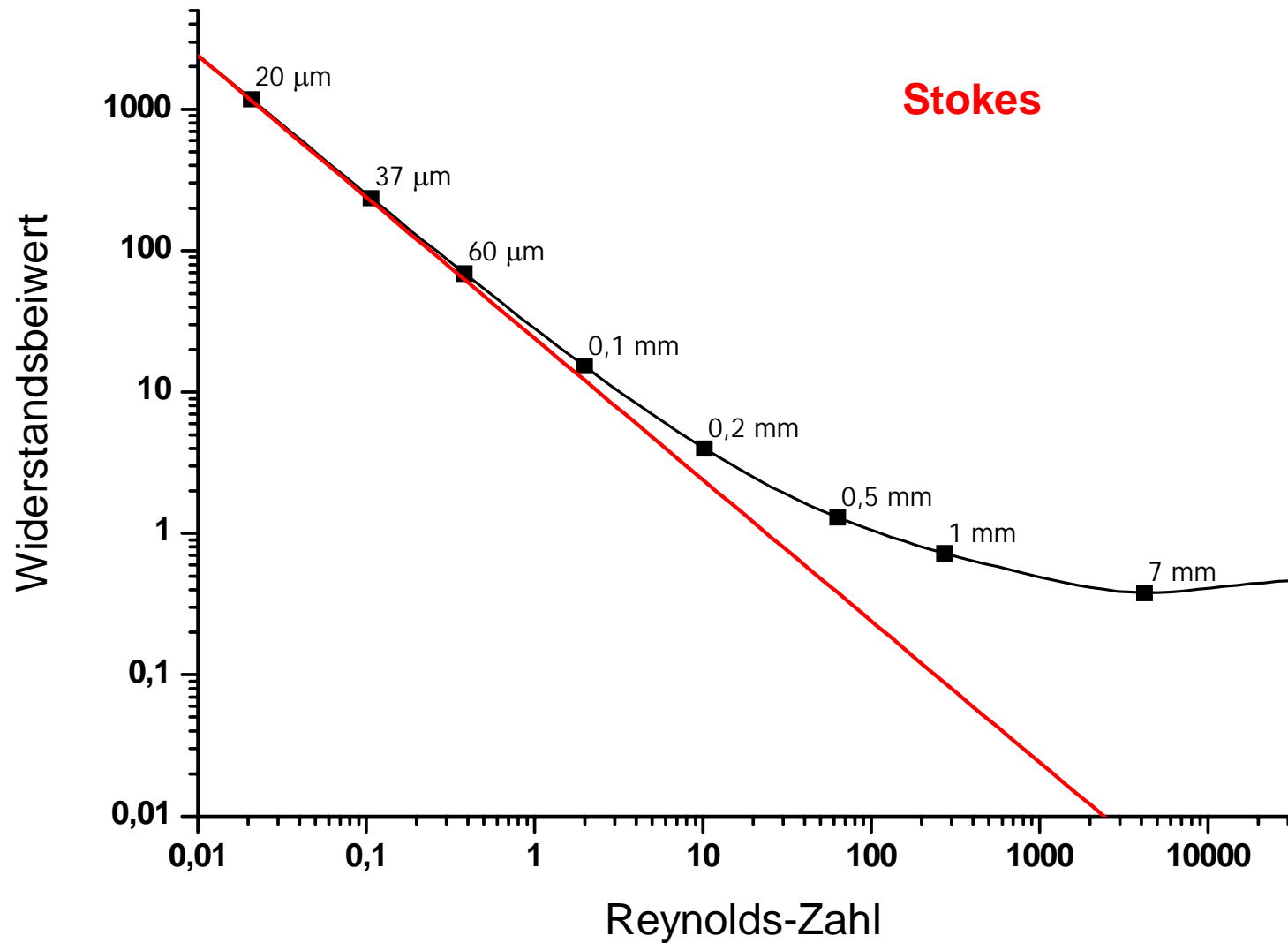
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



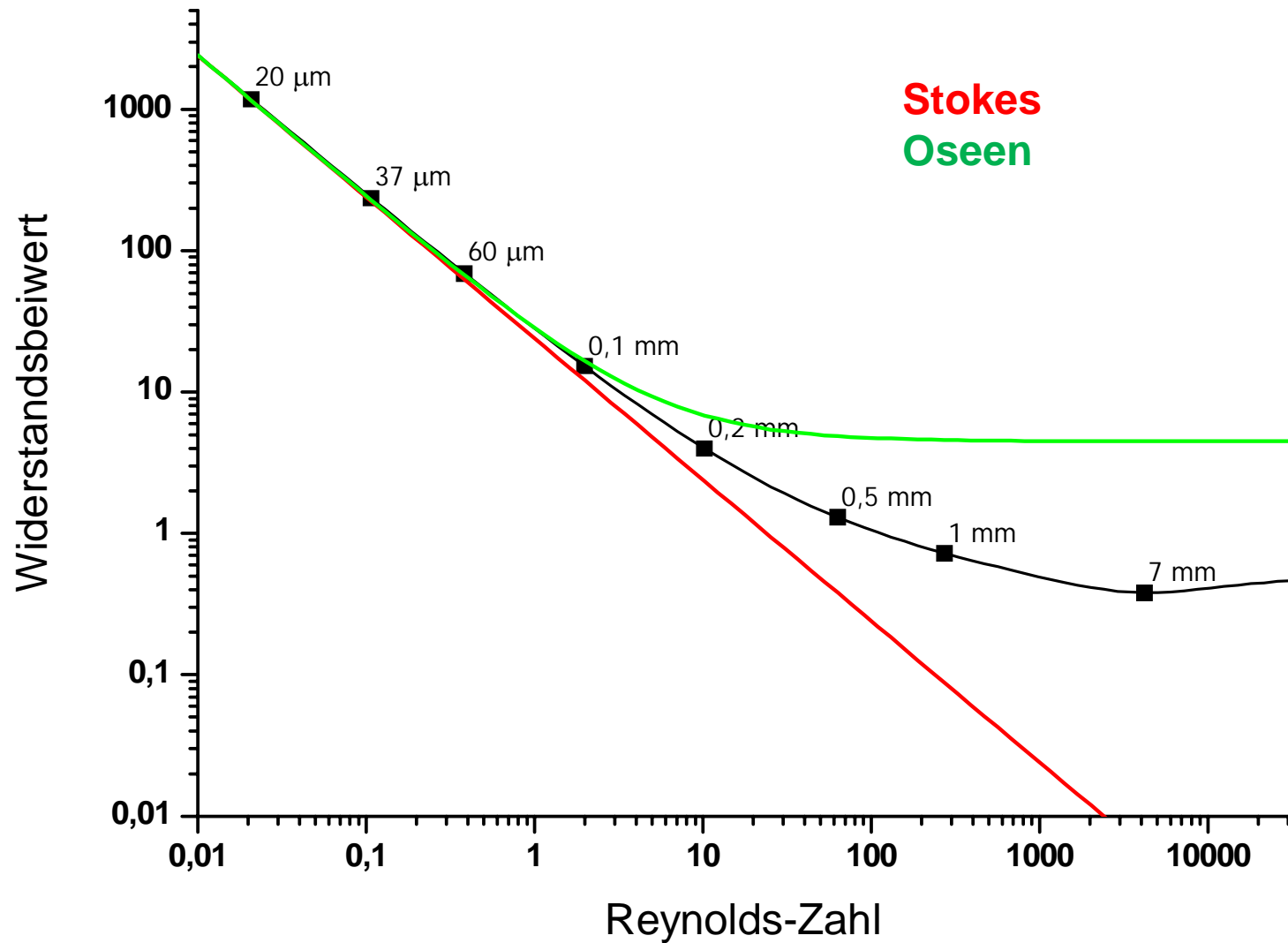
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



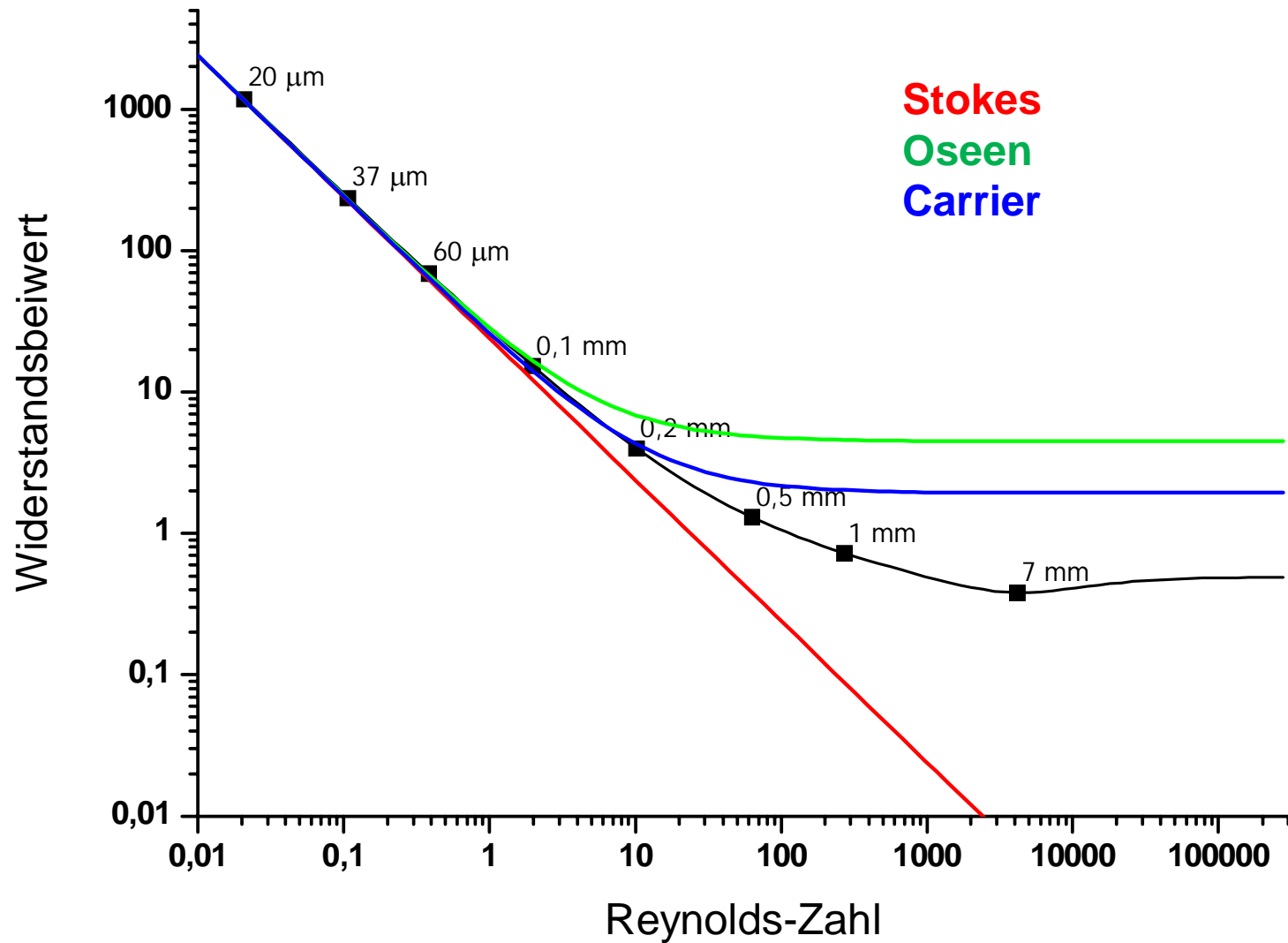
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



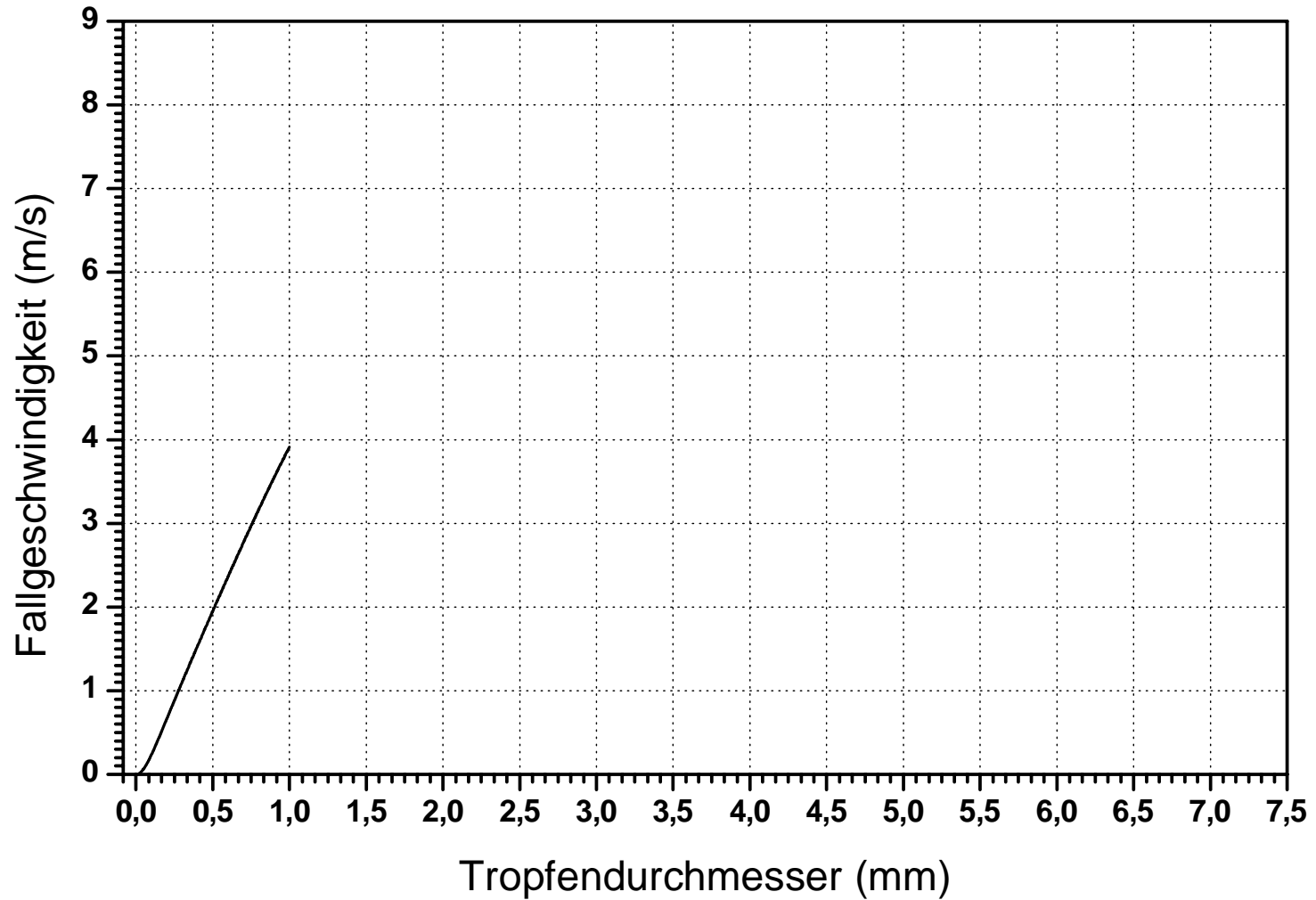
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



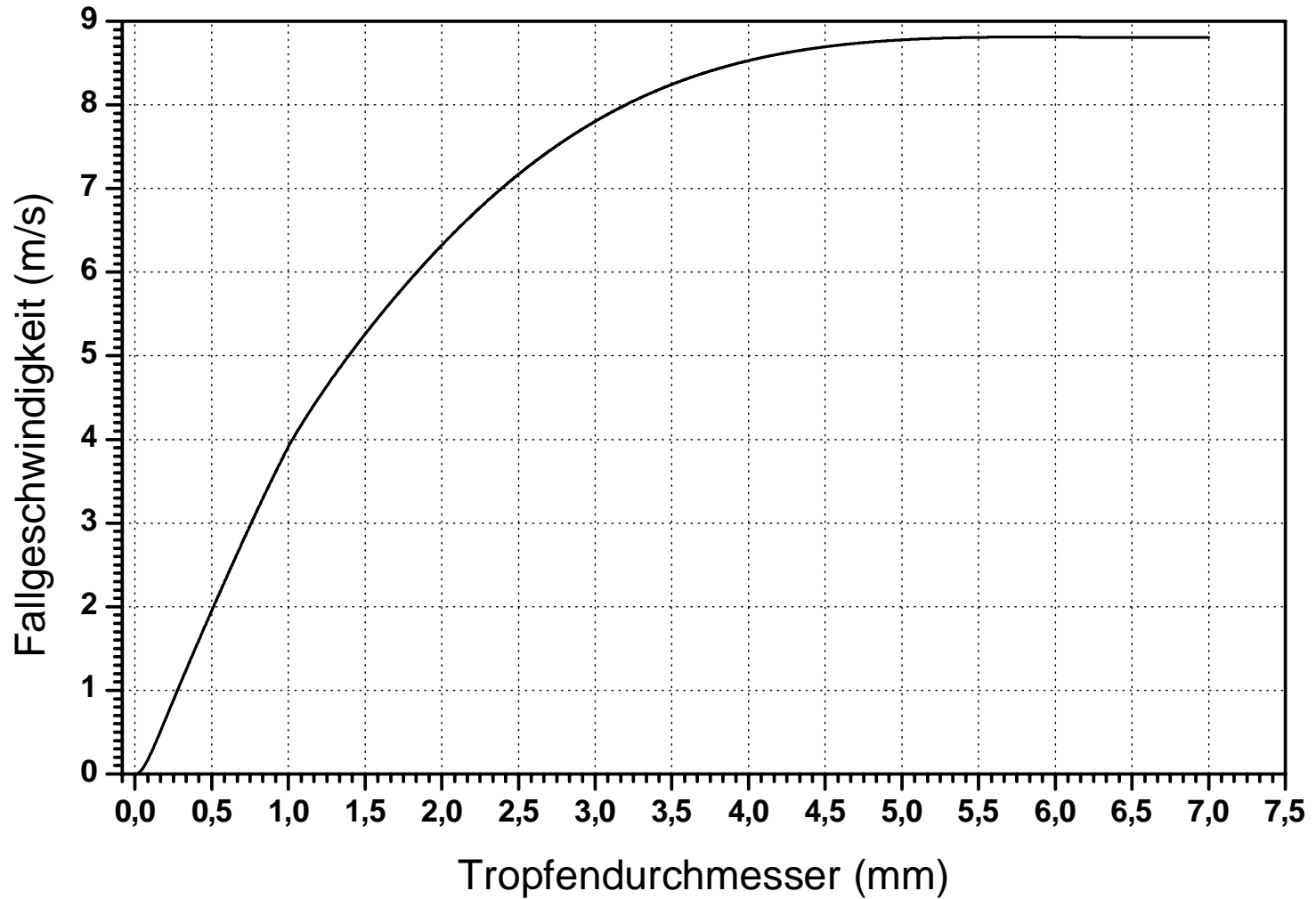
Felhő- és csapadékelemek közegellenállási együtthatója



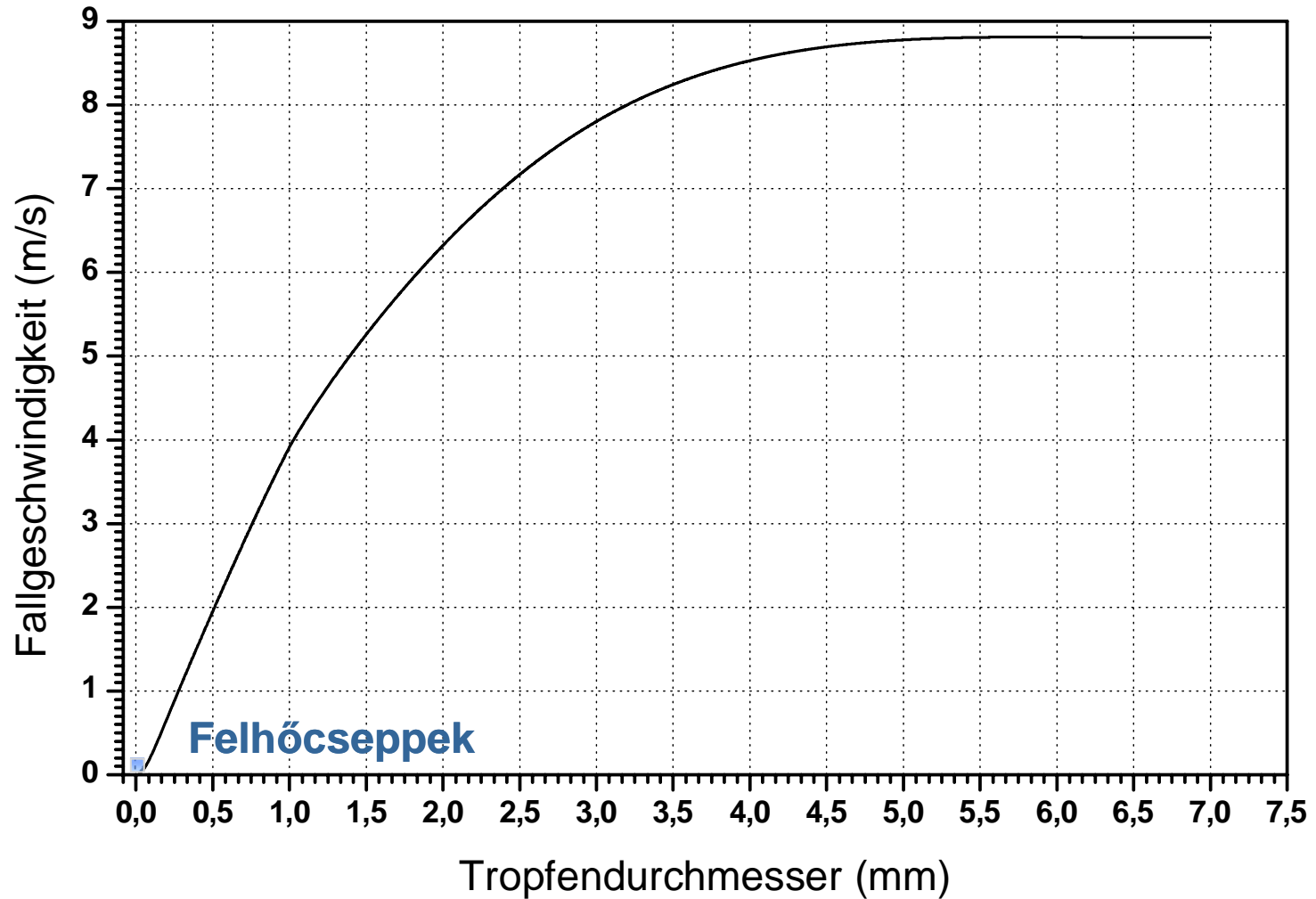
Felhő- és csapadékelemek végsebessége



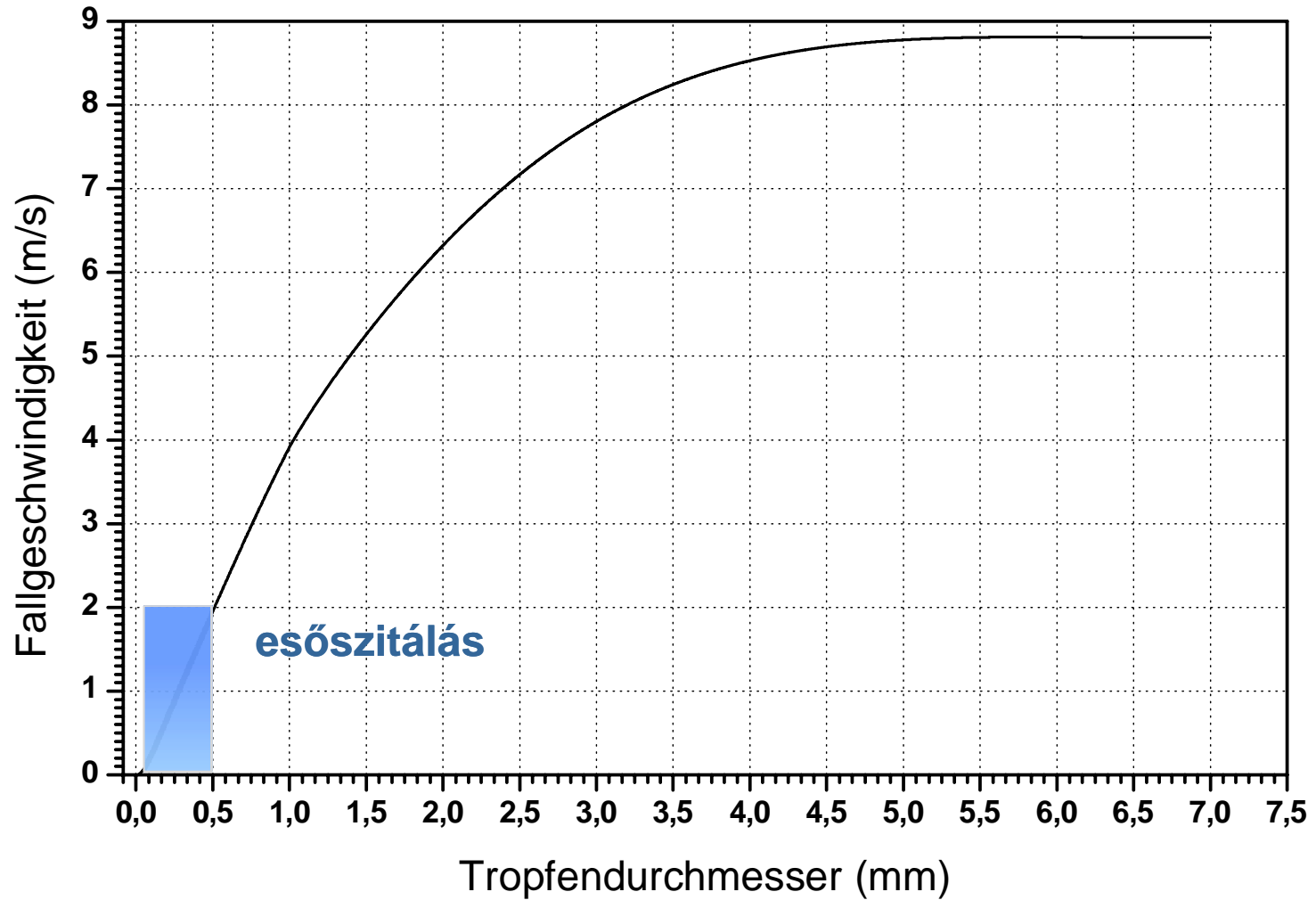
Felhő- és csapadékelemek végsebessége



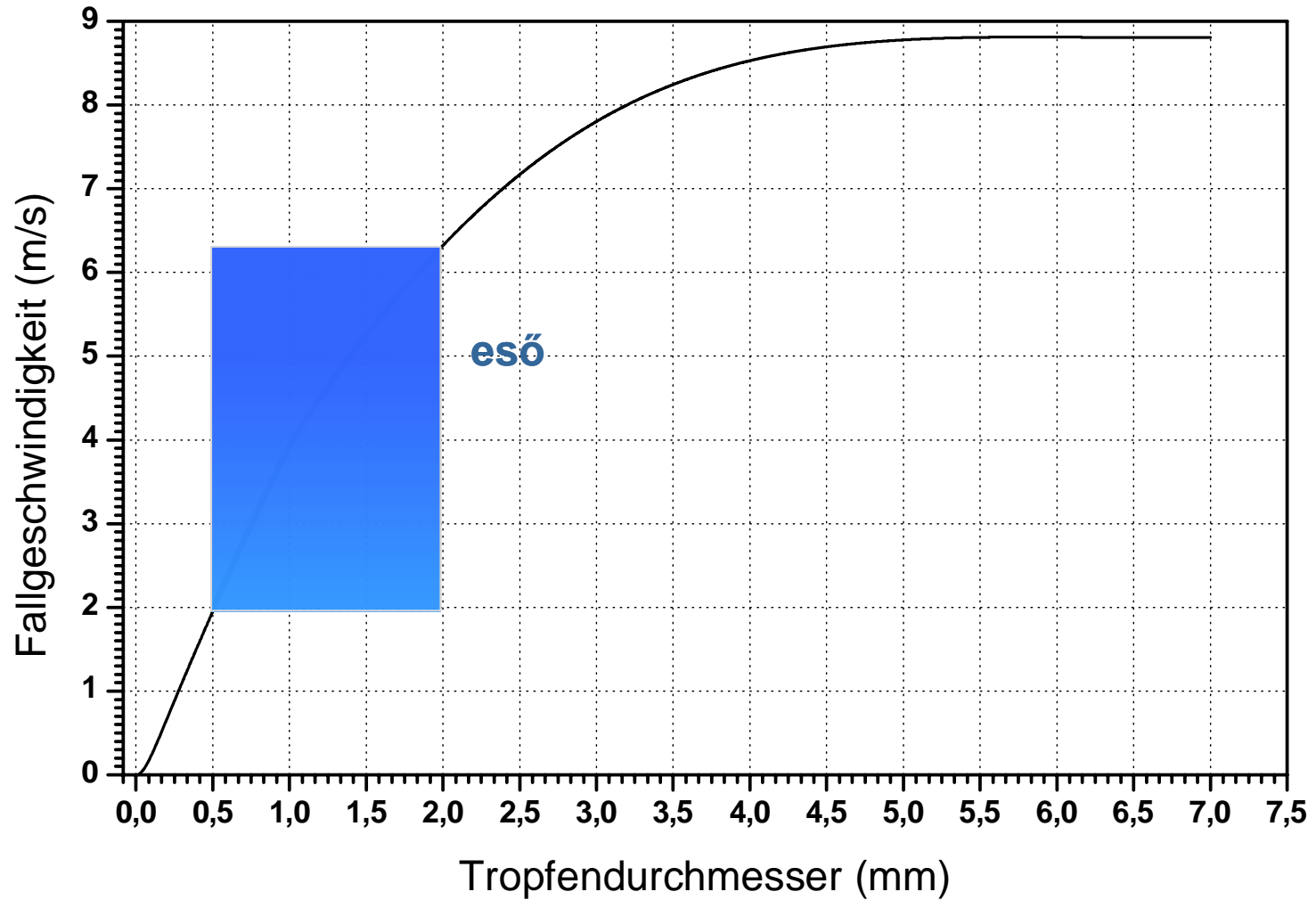
Felhő- és csapadékelemek végsebessége



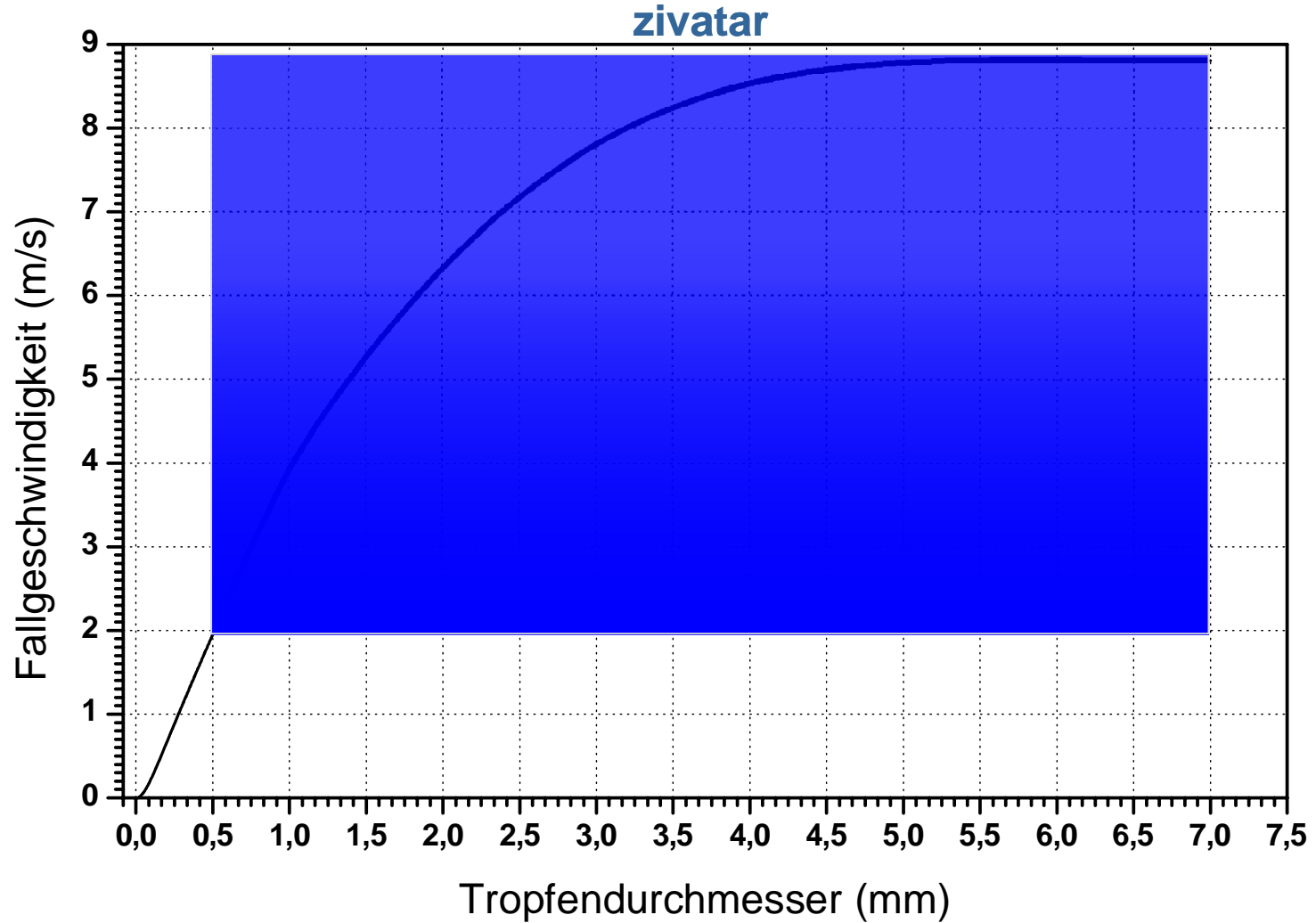
Felhő- és csapadékelemek végsebessége



Felhő- és csapadékelemek végsebessége



Felhő- és csapadékelemek végsebessége



12

Az esőcseppek alakja

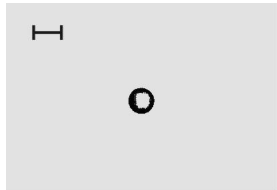
1951



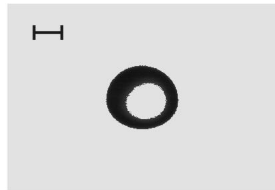
LOOK OUT BELOW--OR
YOU TOO, WILL BECOME A
"CAPTIVE
of the GIANT
RAINDROPS!"

A levegőben lebegő vízcseppek alakja

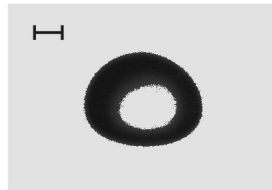
Megfigyelés: a cseppek alakja változik a mérettel



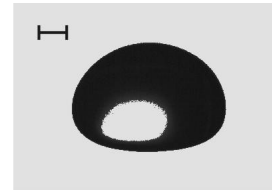
600 μm



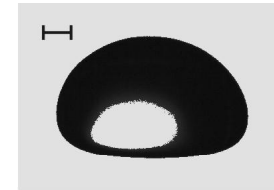
2.6 mm



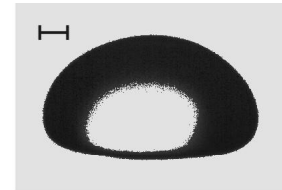
4 mm



5 mm

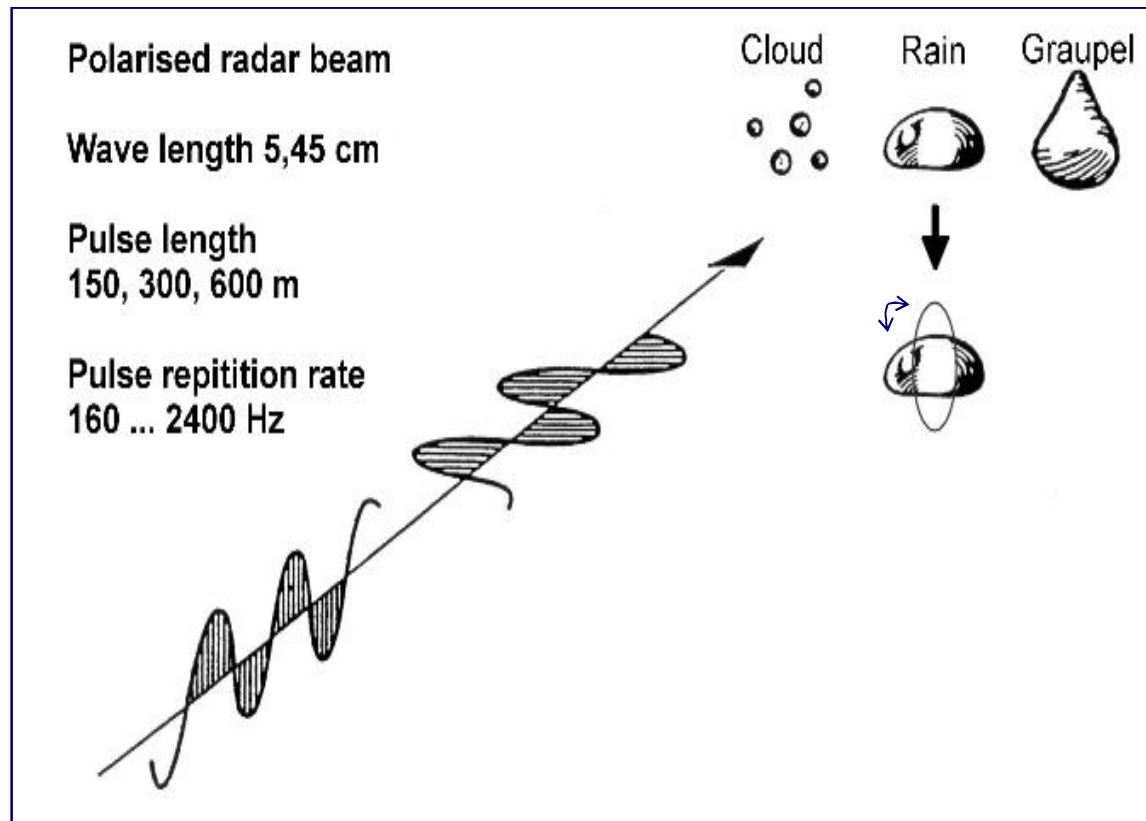


6 mm



7 mm

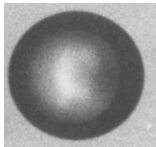
Miért fontos?



Megfigyelés: a cseppek alakja változik a mérettel

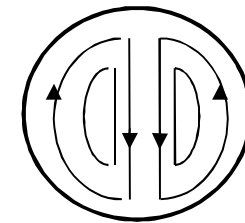
$D_0 < 1 \text{ mm}$

gömb alakú



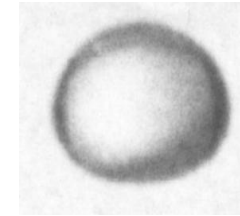
$D_0 = 800 \mu\text{m}$

egyenletes belső cirkuláció



Megfigyelés: a cseppek alakja változik a mérettel

$1 \text{ mm} < D_0 < 1,6 \text{ mm}$ kicsit összenyomott

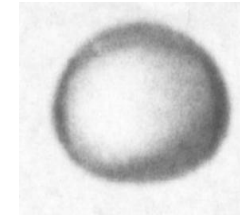


$D_0 = 1,5$
mm

A levegőben lebegő vízcseppek alakja

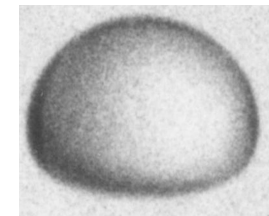
Megfigyelés: a cseppek alakja változik a mérettel

$1 \text{ mm} < D_0 < 1,6 \text{ mm}$ kicsit összenyomott

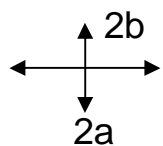


$D_0 = 1,5$
mm

$D_0 > 1,6 \text{ mm}$ erősen összenyomott



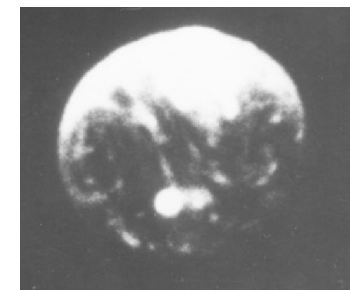
$D_0 = 5 \text{ mm}$



$D_0 = 8 \text{ mm}$

→ ekvivalens átmérő D_0

turbulens belső keveredés



Feltételezés: egyenletes áramlási tér a csepp körül

→ az egyensúlyi alak számítása

→ kísérleti eredményekkel való összevetés

Az erők egyensúlyban vannak:

felületi feszültség

hidrosztatikai erő

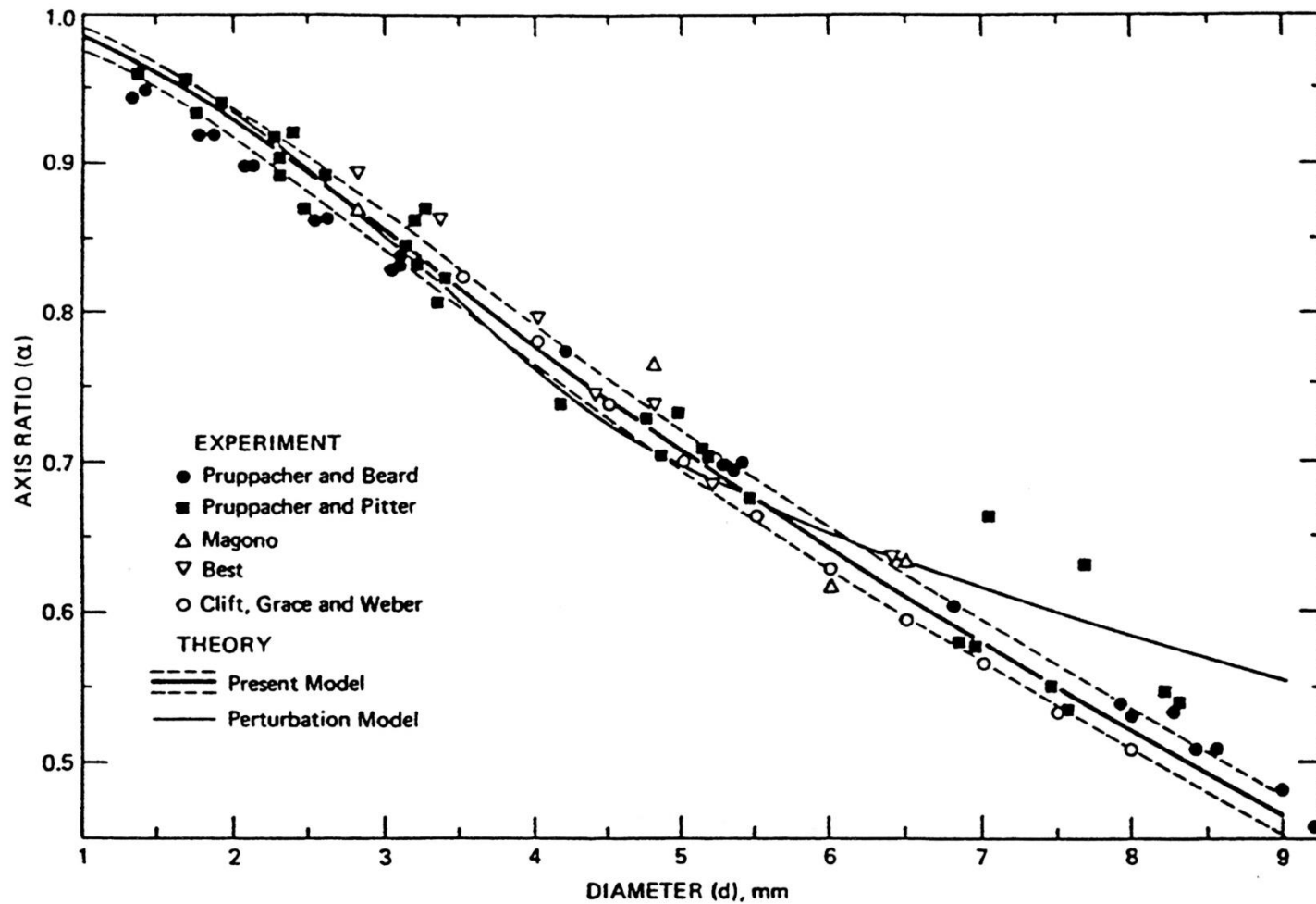
aerodinamikai erő

a belső cirkulációból eredő erő

(elektromos erő)

+ a térfogat megmarad

A levegőben lebegő vízcseppek alakja



A vízcseppek deformációját a tengelyarány adja meg: b/a

A levegőben lebegő vícseppek alakja

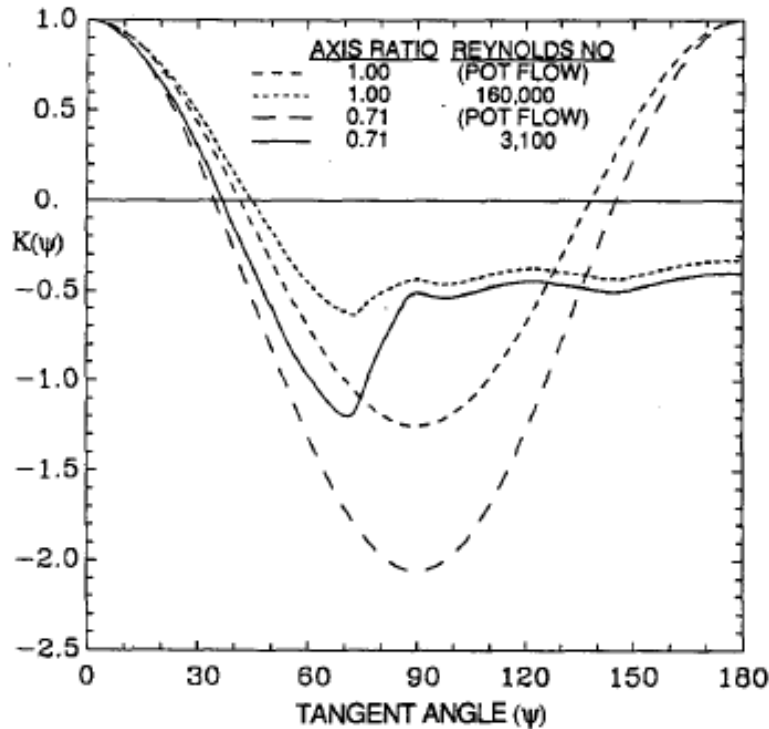


FIG. 5. The aerodynamic pressure (K) as a function of tangent angle (ψ). The curves are shown for potential flow around a sphere, the measured distribution around a sphere at high Reynolds number, for potential flow around an oblate spheroid with $\alpha = 0.71$, and for the adjusted distribution for a raindrop ($d \approx 5$ mm) assuming $Re = 3100$ and $\alpha = 0.71$.

$$C_{dp} = C_d \left[1 - B Re^{-m} \right] \quad (\text{kísérleti})$$

$$B = 13.4; m = 0.58$$

$$C_{dp}(\pi a_0^2) = \int \kappa'(\theta) \cos \psi (2\pi r) ds$$

(elméleti)

ahol

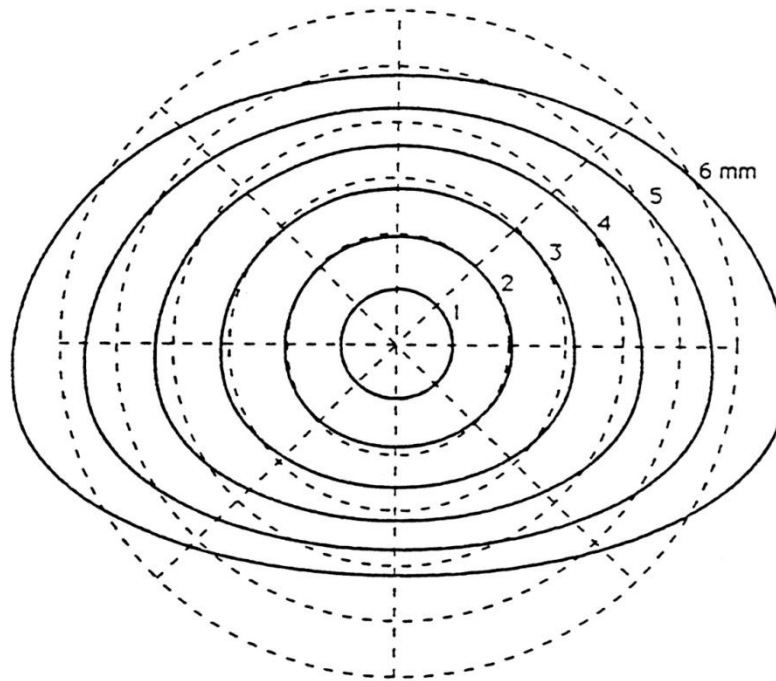
$$\kappa'(\psi) = 1 - \Gamma [1 - \kappa_F(\psi)], \quad 88^\circ < \psi \leq 180^\circ$$

$$\kappa'(\psi) = 1 - \Gamma' [1 - \kappa_F(\psi)], \quad 72^\circ \leq \psi \leq 88^\circ$$

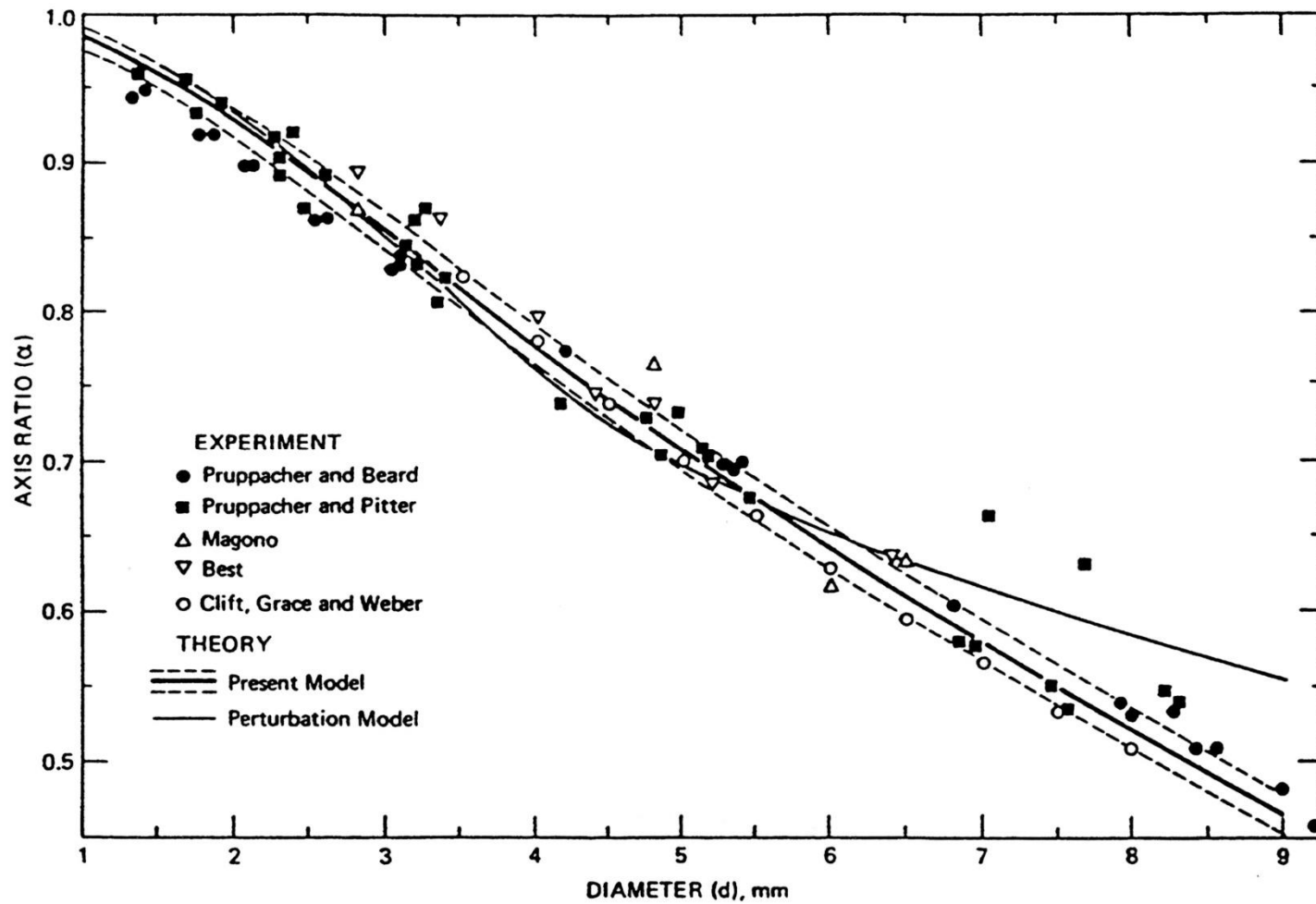
$$\Gamma' = 1 - (1 - \Gamma)(\psi - 72^\circ)/16$$

Beard and Chuang, 1987: *J. Atmos. Sci.* **44**(11), 1509-1524

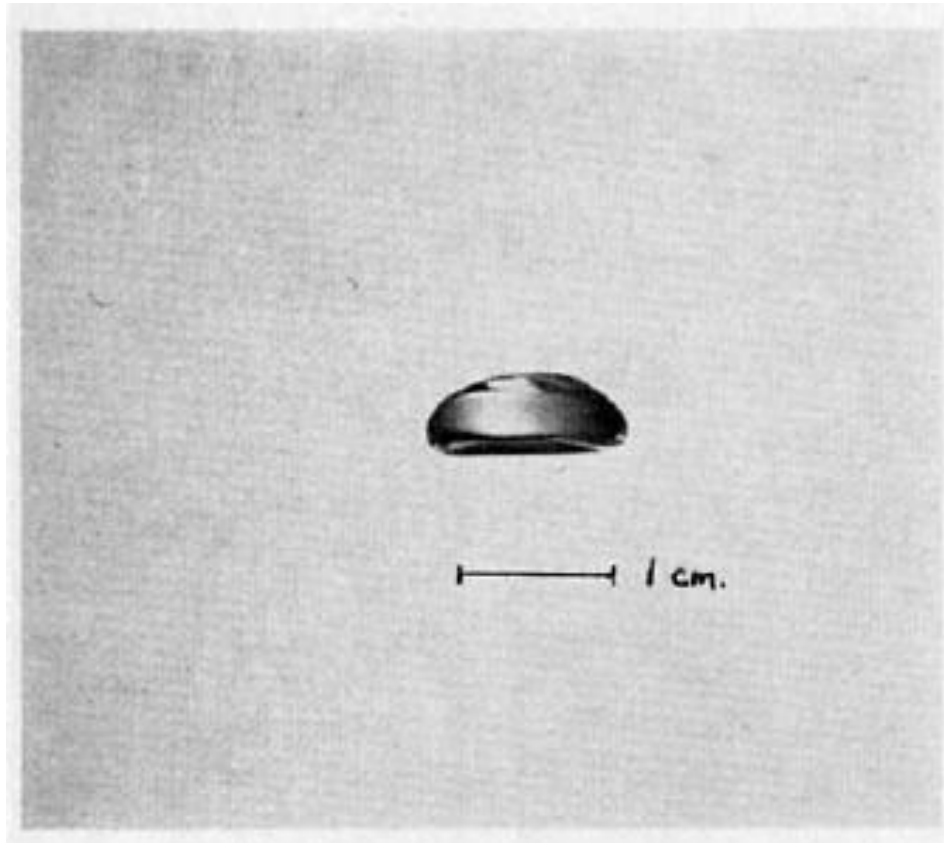
Large deformation model von *Beard and Chuang (1987)*:



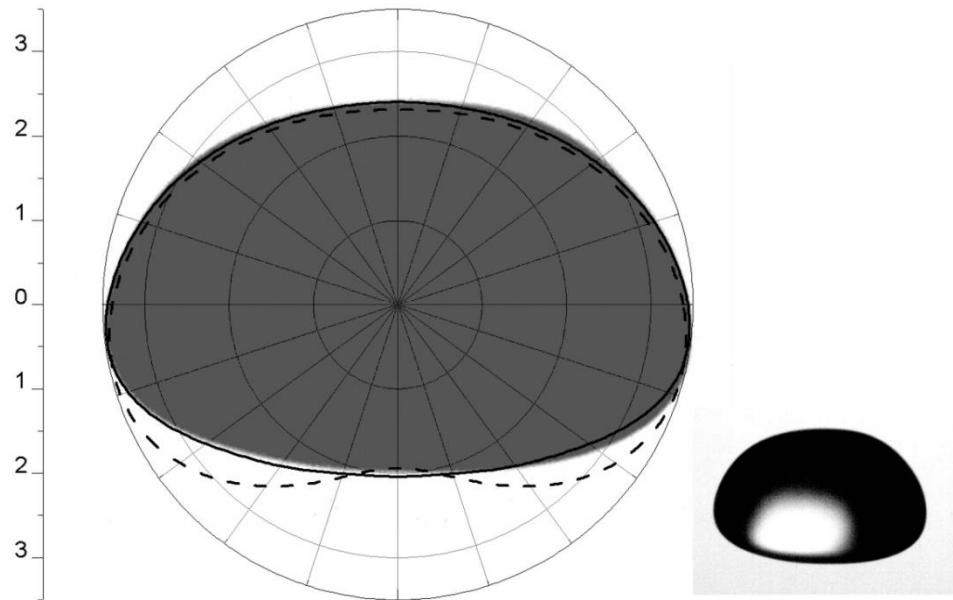
A levegőben lebegő vícseppek alakja



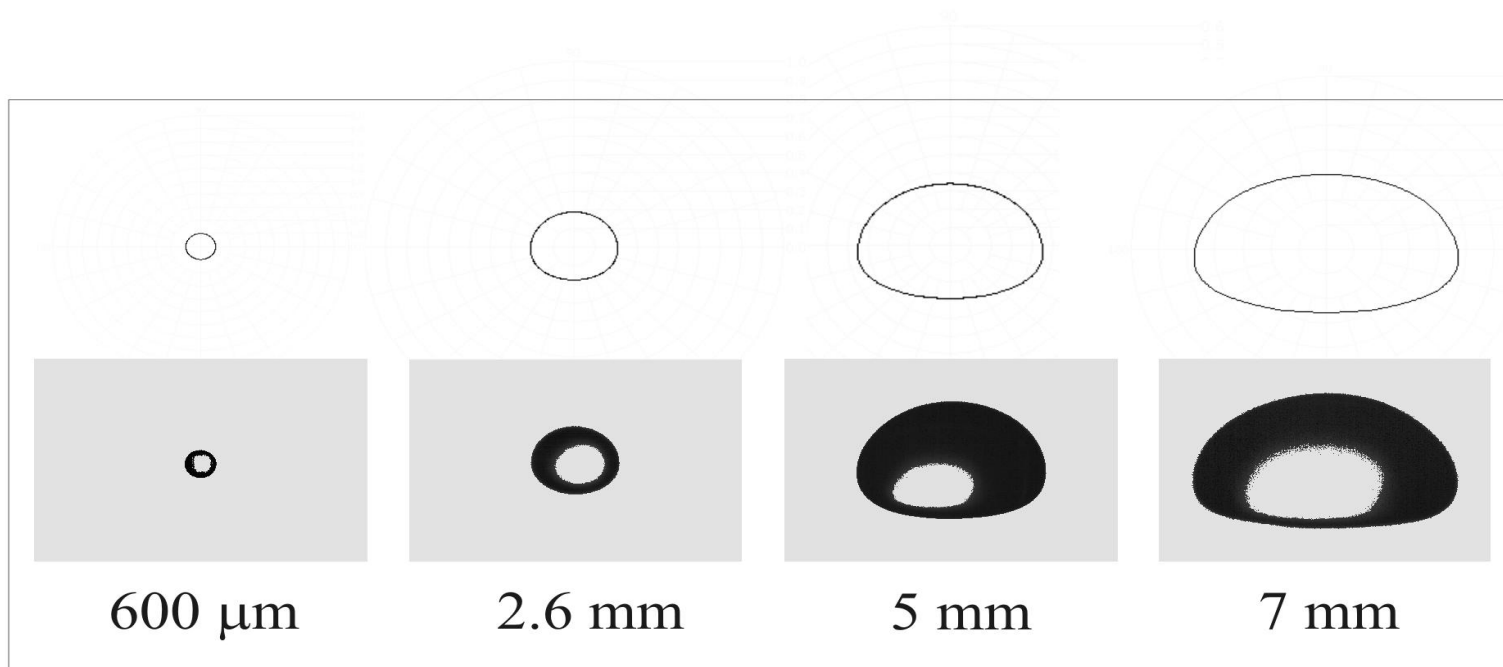
A levegőben lebegő vícseppek alakja



Kísérleti eredménnyel való összehasonlítás



Esőcseppek egyensúlyi alakja

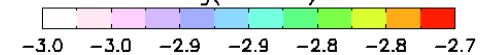
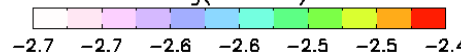
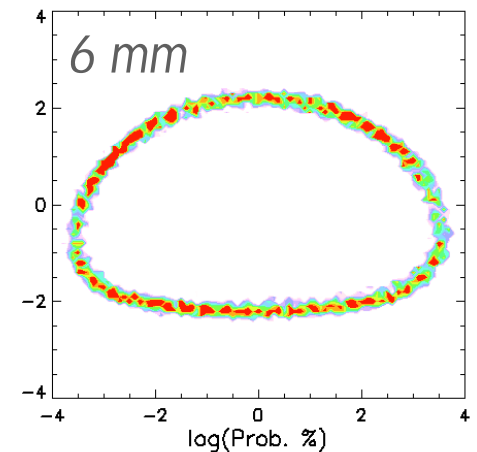
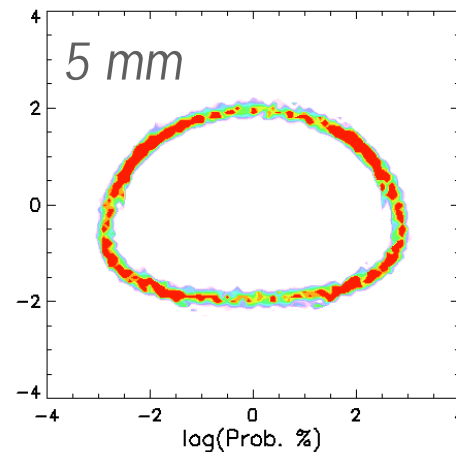
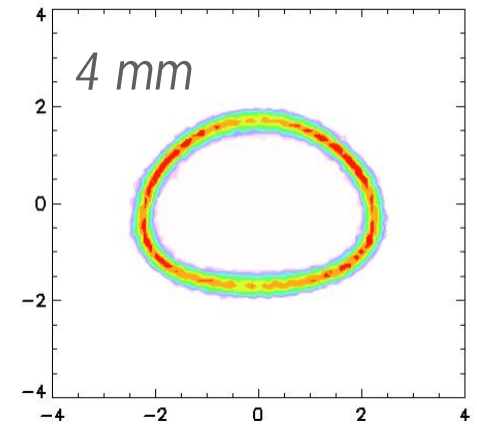
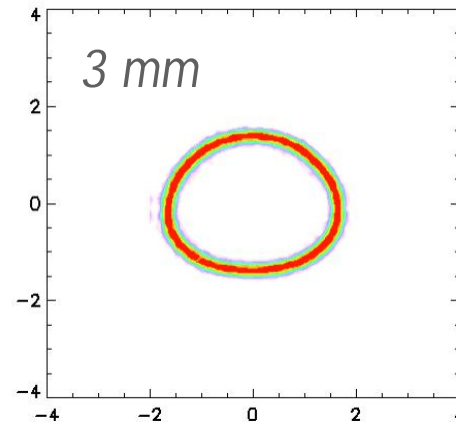
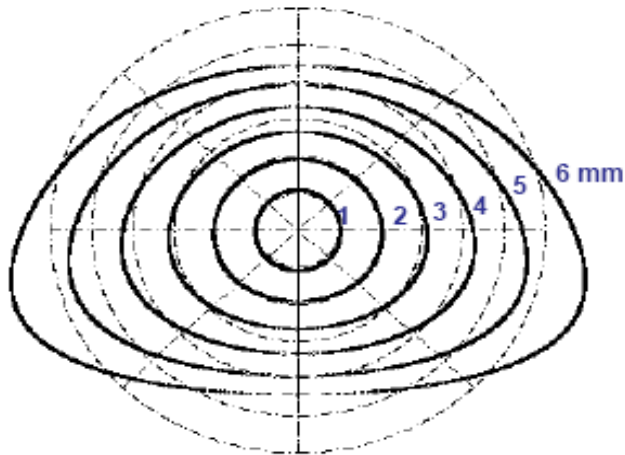


Chuang and Beard, 1990: *J.Atmos.Sci.* 47, 1374
Szakáll et al., 2008: *ERAD08*

Drop Shapes from the 'Artificial Rain' Experiment

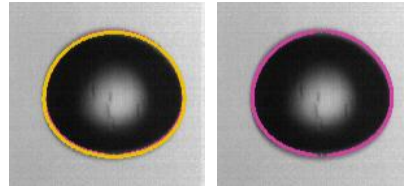
... drop images from both cameras processed to derive shape and orientation of individual drops (> 115,000 in number)

The 'mean' shapes (2007)

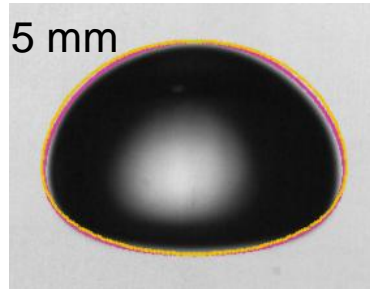


Comparison with Recent Wind-Tunnel Measurements

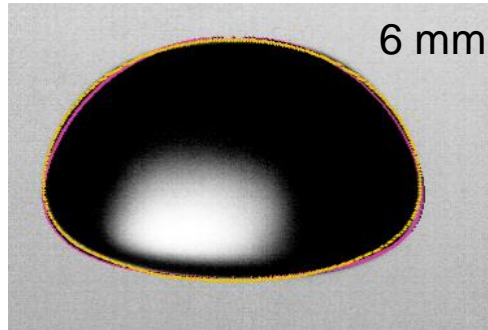
2.5 mm



5 mm

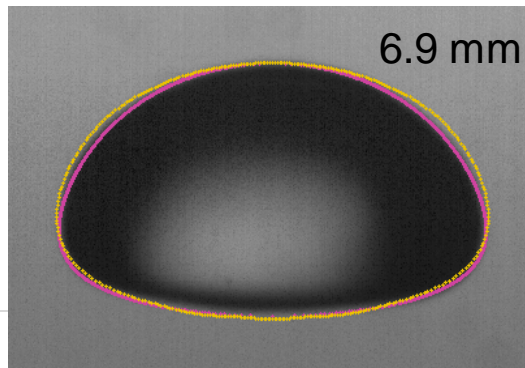


6 mm



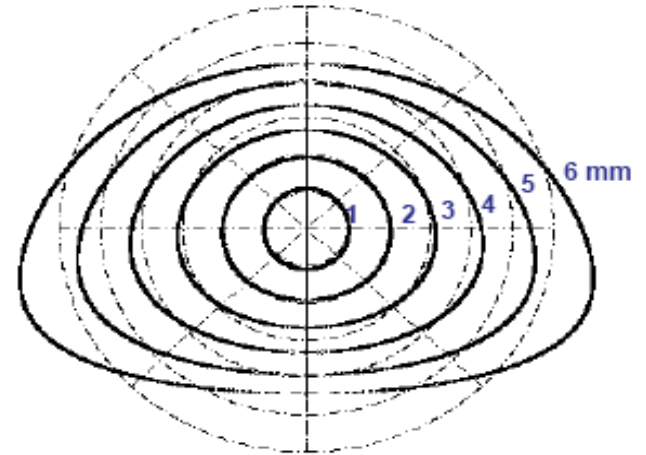
*2DVD (2007)
fitted equation
in pink*

6.9 mm

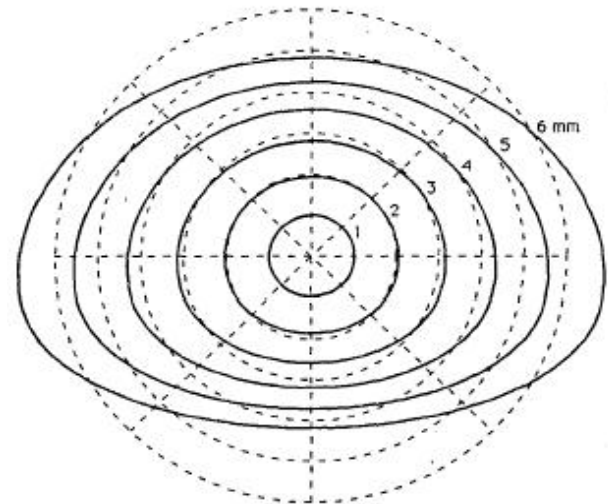


*Beard-Chuang
(1987) in yellow*

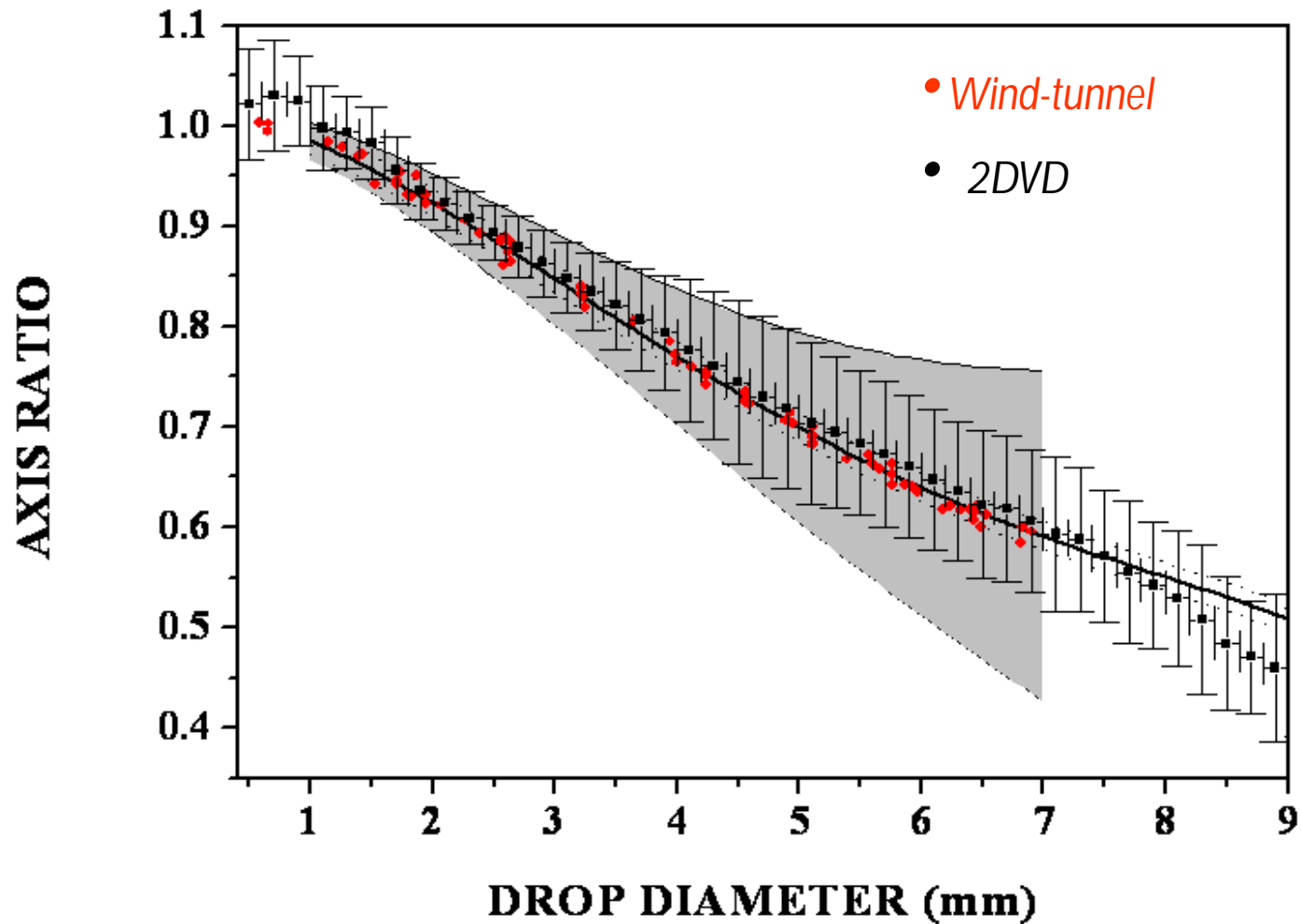
The mean shapes from 2DVD



Beard-Chuang model (1987)



Mean Axis Ratio versus Drop Diameter



(solid line : Beard-Chuang model, dashed lines as the upper/lower bounds)

A levegőben lebegő vízcseppek alakja

Az elektromos mező hatása

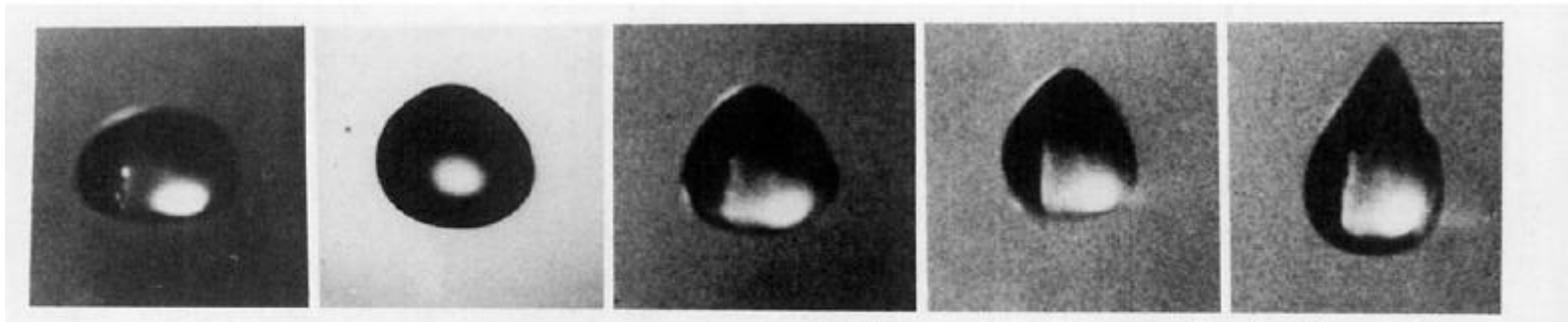
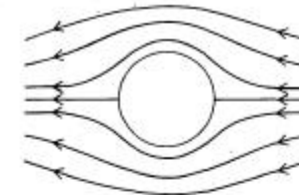


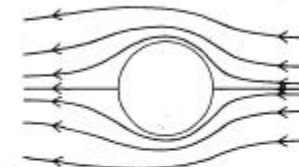
FIG. 2. Photographs from 16 mm motion picture of water drops in airstream being exposed to various external electric fields; $a_0 = 0.23$ cm. From left to right: $b/a = 0.725, 0.925, 0.970, 1.12, 1.52$, for $E_0 = 0, 6.75, 8.25, 9.0$ and 10.0 kV/cm, respectively. Present results.

A cseppek oszcillációja

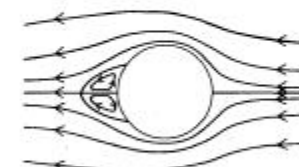
- Regime 1: small cloud droplets, $1 \mu\text{m} \lesssim d_0 \lesssim 20 \mu\text{m}$ (steady wake, vanishingly small Reynolds numbers, $10^{-4} \lesssim N_{Re} \lesssim 0.01$).
- Regime 2: large cloud droplets to small raindrops, $20 \mu\text{m} \lesssim d_0 \lesssim 1 \text{mm}$ (steady wake, low to intermediate Reynolds numbers, $0.01 \lesssim N_{Re} \lesssim 300$).
- Regime 3: small to large raindrops, $1 \text{mm} \lesssim d_0 \lesssim 7 \text{mm}$ (unsteady wake, moderate to large Reynolds numbers, $300 \lesssim N_{Re} \lesssim 4000$).



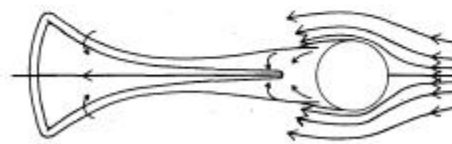
a. Stokes ($N_{Re}=0$). Laminar, steady flow. Streamlines show axial and fore-aft symmetry



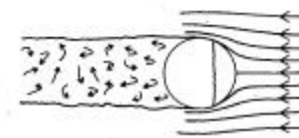
b. Low Reynolds numbers ($0 < N_{Re} \leq 20$). Laminar, steady axisymmetric flow. Flow no longer has fore-aft symmetry.



c. Intermediate Reynolds numbers ($20 \leq N_{Re} \leq 300$). Laminar, steady axisymmetric flow, separated with enclosed vortex ring.



d. Moderate Reynolds numbers ($300 \leq N_{Re} \leq 450$). Vortex loops are formed by roll-up and partial detachment of wake vortex ring. For $200 \leq N_{Re} \leq 300$ steady twin vortex trails are caused by a single loop being carried downstream. Lack of axisymmetry results in steady sideward motion. For $300 \leq N_{Re} \leq 450$ vortex loops detach periodically from diametrical opposite sides of wake axis producing zig-zag motion.*



e. Large Reynolds numbers ($N_{Re} \geq 450$). Wake becomes increasingly chaotic at larger Reynolds numbers. Flow separation point moves forward until $N_{Re} \geq 400,000$, then abruptly backward with the onset of turbulent boundary layer.*

Beard, 1976, *J. Atmos. Sci.* **33**, 851-864

Rayleigh, 1879:

$$f_n = \left[\frac{n(n-1)(n+2)\sigma}{4\pi^2 \rho_w a_0^3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

minden alap oszcillációs módusnak $m = n + 1$ almódusa van, saját térbeli elrendeződés alapján

egy tengelyszimmetrikus módus $m = 0$ és n aszimmetrikus módus

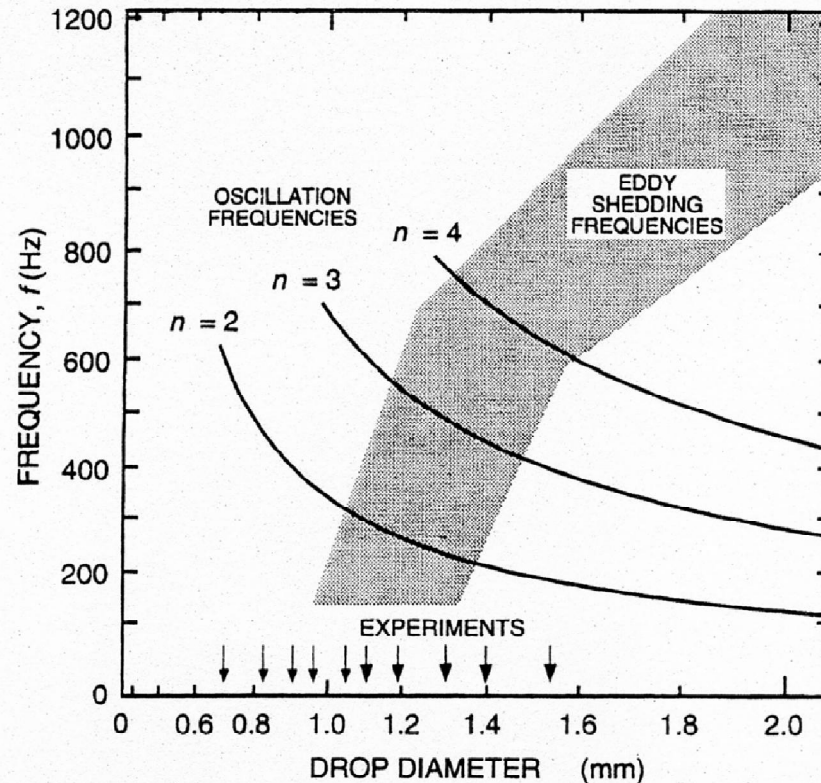
$n = 0$: sugárirányú oszcilláció → az összenyomhatatlanság miatt nem megengedett

$n = 1$: transláció

→ főmódus $n = 2$, frekvenciája

$$f_2 = f_{\text{Rayleigh}} = \left(\frac{2\sigma_{w/v}}{\pi^2 \rho_w a_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

A cseppek oszcillációja



A cseppek oszcillációs frekvenciája és az örvények leválási frekvenciája

Görbék: különböző n –ekhez tartozó oszcillációs frekvenciák

Szürke terület: az örvények leválási frekvenciája

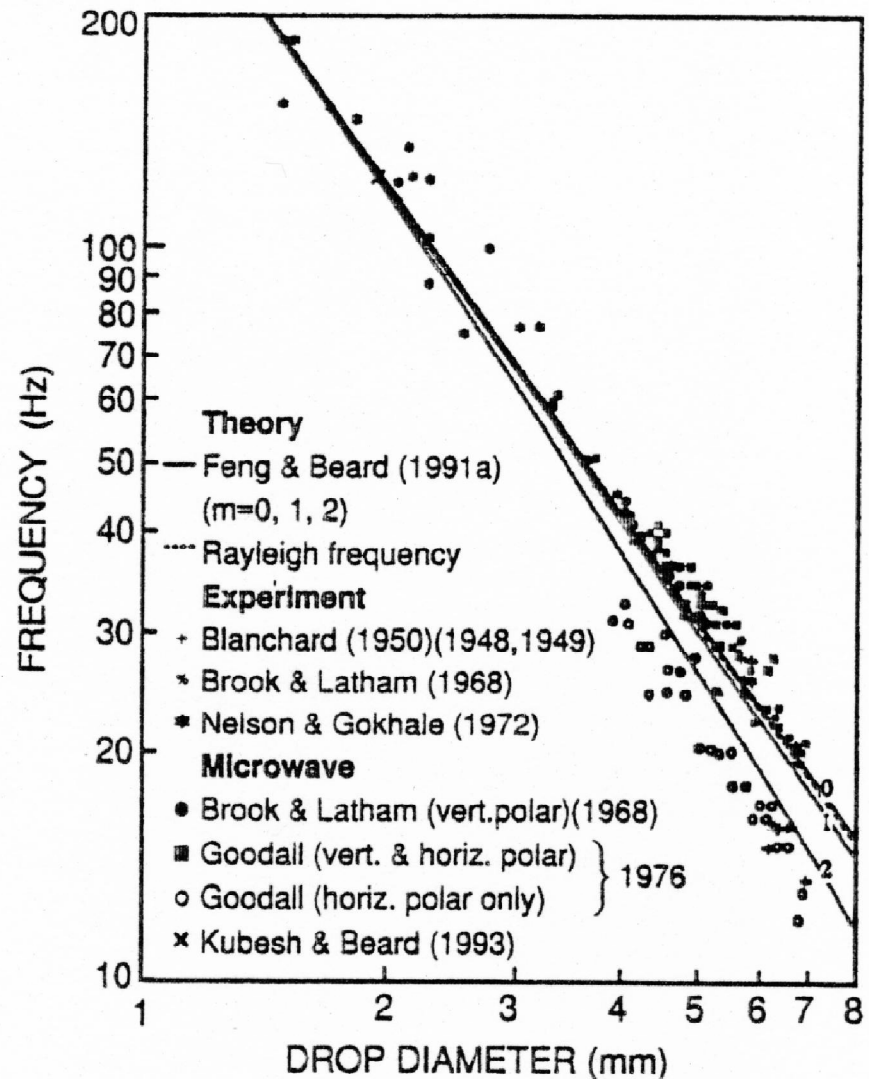
A cseppek oszcillációja

$n=2$ oszcillációs frekvenciák a csepp-átmérő függvényében

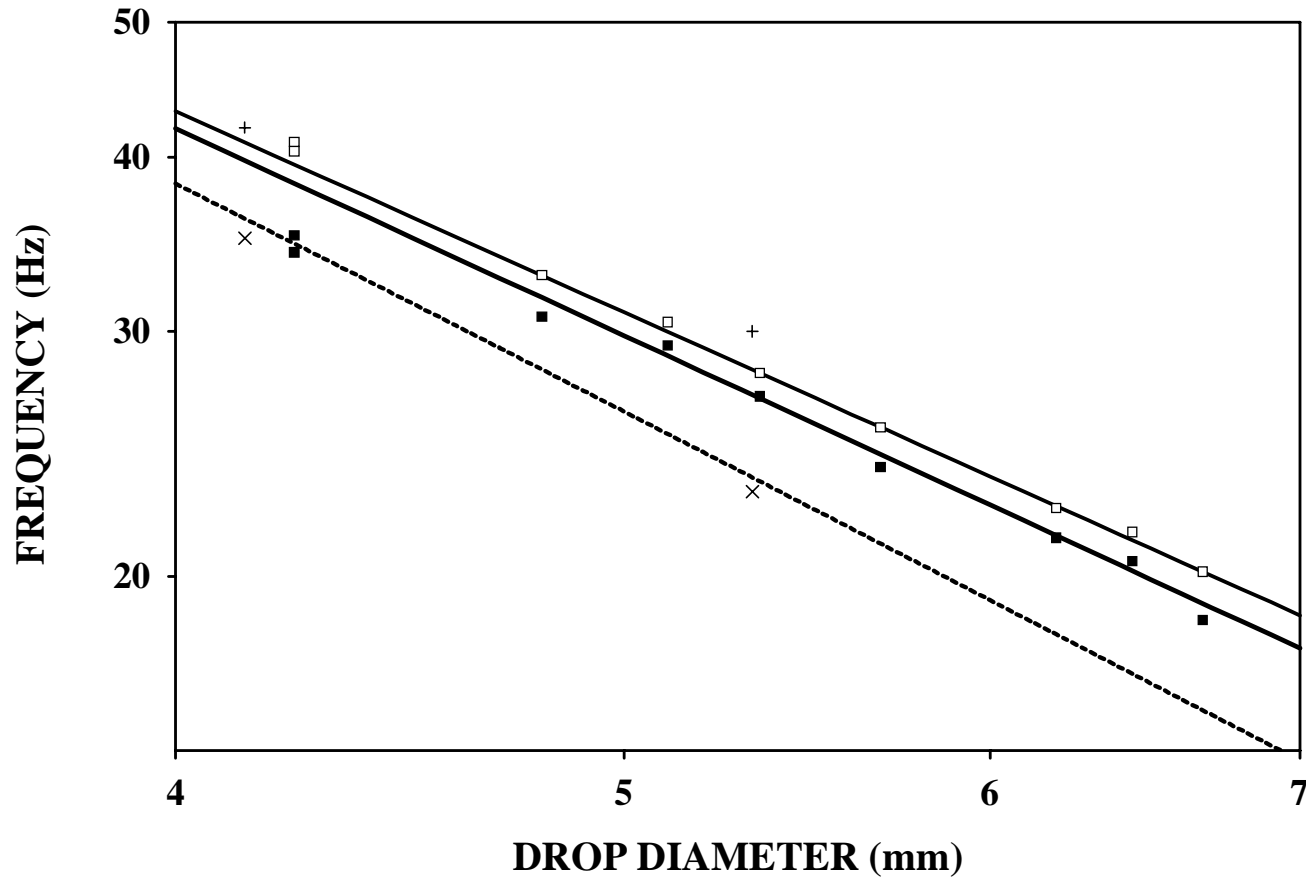
pontok: kísérleti adatok (labor- és terepi mérések), görbék: elméleti számítások

Feng & Beard, 1991: korrekció a Rayleigh-frekvenciához $m = 0, 1, 2$

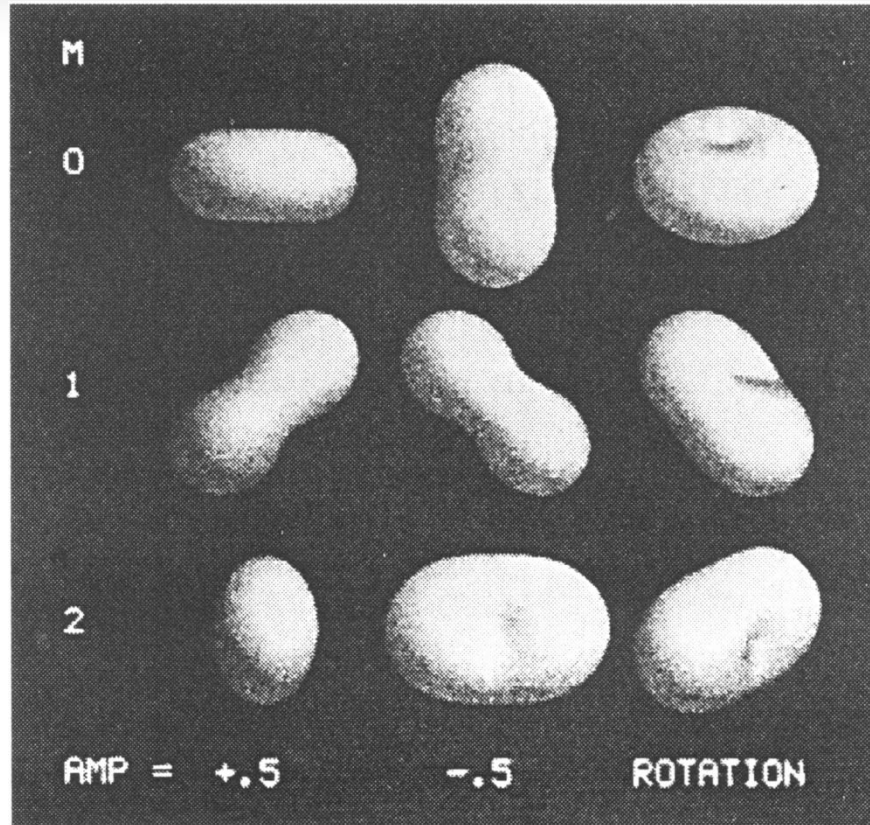
$$f_{n,m}^{FB} = \frac{\omega_{n,m}}{2\pi} \left(\frac{\sigma}{\rho_w a_0^3} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{A_0^{<2,1>}(n,m)}{4\omega_{nm}^2} \varepsilon_1^2 \right)$$



Mainz Vertical Wind Tunnel mérések

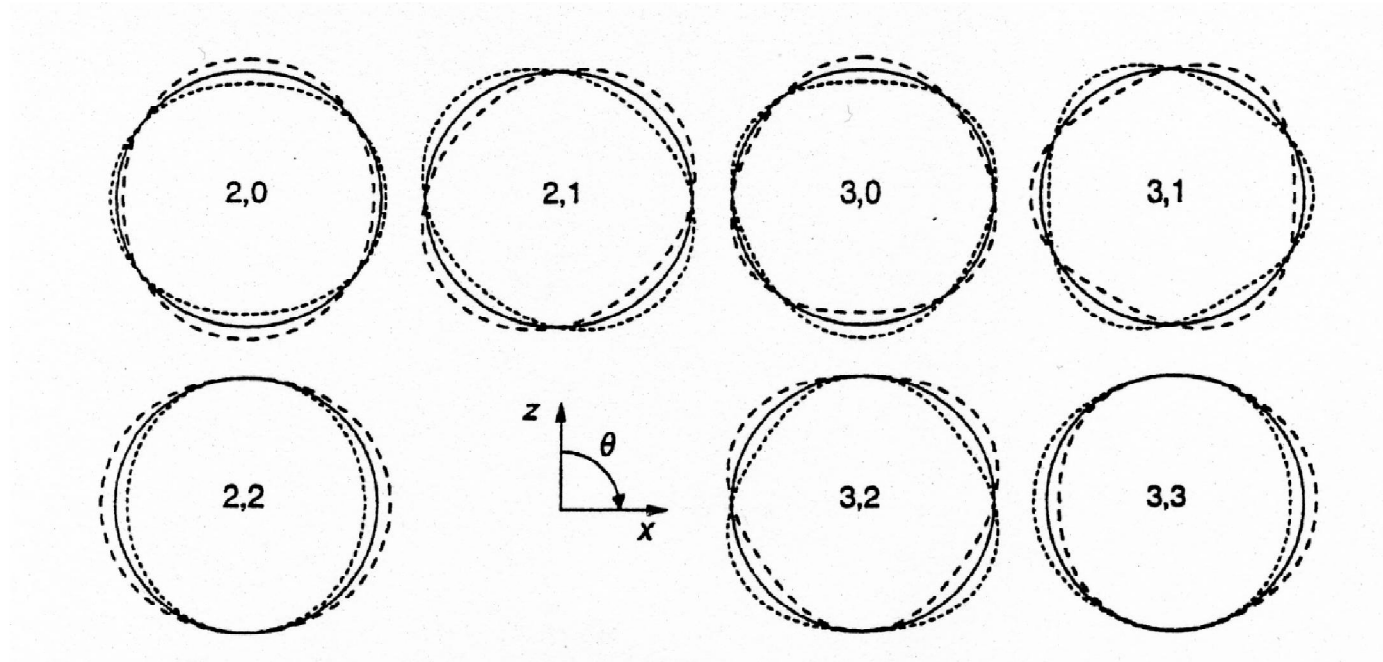


A cseppek oszcillációja



Az ($n=2$) alap módushoz tartozó három almódus ($m=0, 1, 2$) alakja

A cseppek oszcillációja

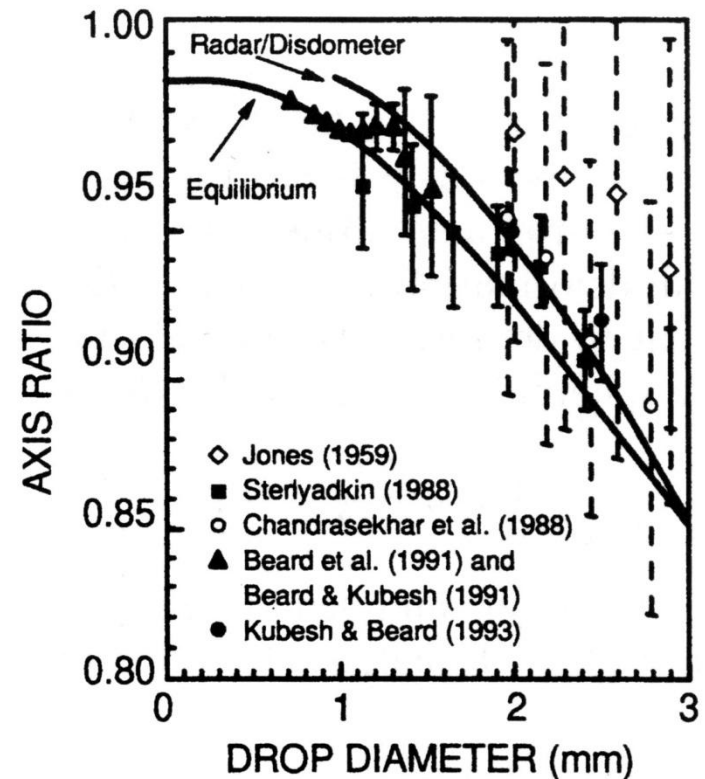


Modellek: a **statikus** középértéket számítják

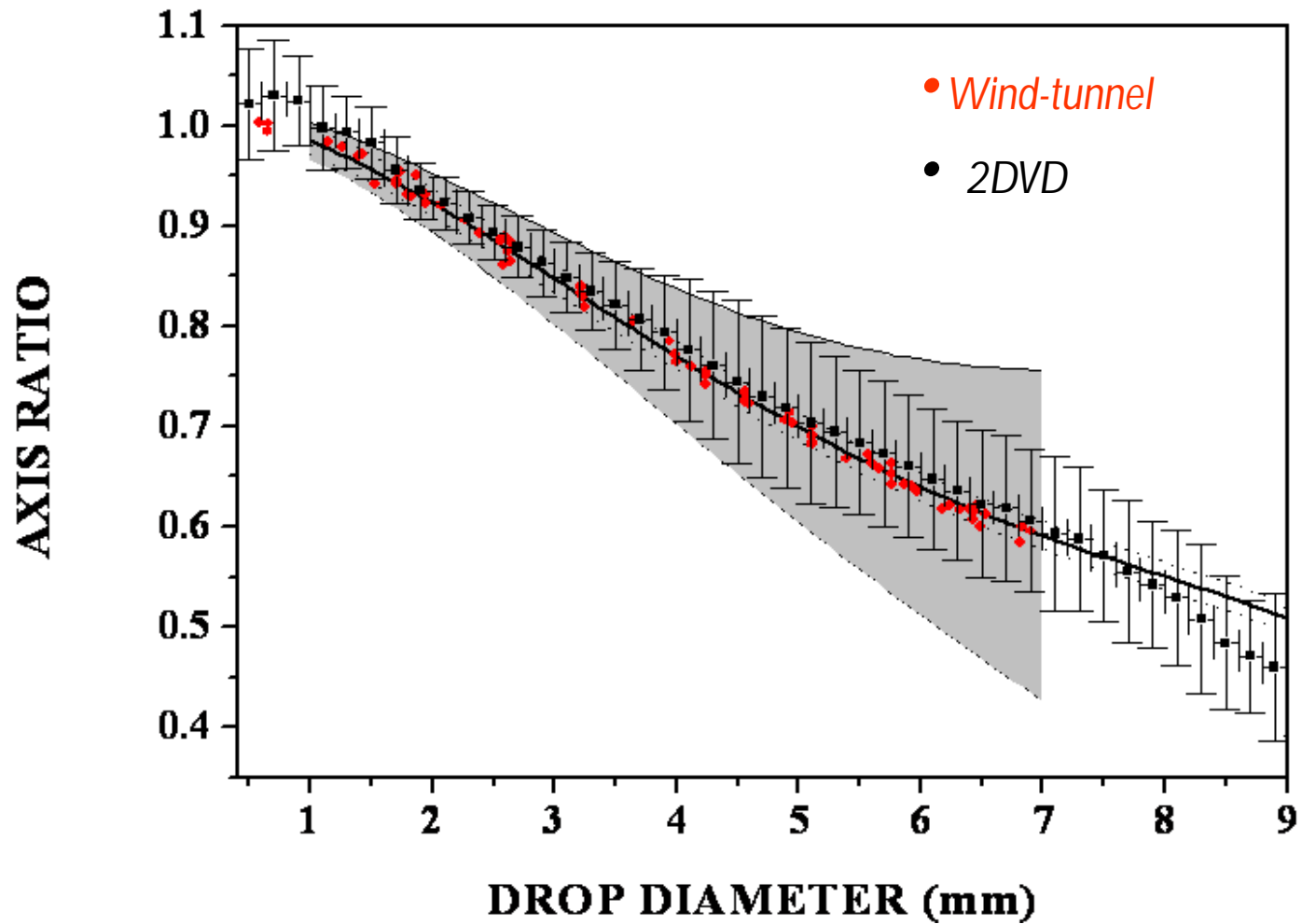
A mérések alapján elképzelhető, hogy az oszcilláló cseppek tengelyarányának középértéke a stitkustól eltér, ún. **dinamikus középérték**

görbék: statikus középérték Beard et al. (1989) és radarmérések

pontok: labor- és terepi mérések



Mean Axis Ratio versus Drop Diameter



(solid line : Beard-Chuang model, dashed lines as the upper/lower bounds)



Diffúzió

Mozgó levegőben vízgőz tömegárama megadható a következőképpen:

$$\vec{j}_v = \rho_v \vec{u}_v$$

ahol ρ_v a vízgőz sűrűsége,
 u_v pedig a vízgőz áramlási sebessége

Nedves levegőben hulló csepp esetén a vízgőz tömegárama a vízgőz felületen keresztüli diffúziójából és az áramló közeg (levegő) általi konvekciójából tevődik össze, vagyis írhatjuk:

$$\vec{j}_v = \rho_v \vec{u}_v = -\rho D_v \nabla \frac{\rho_v}{\rho} + \rho_v \vec{u} \quad (1)$$

ahol D_v a vízgőz diffúziós együtthatója,
 ρ, ρ_a a nedves ill. a száraz levegő sűrűsége,
 u a nedves levegő áramlási sebessége

$$\vec{u} = \frac{\rho_v \vec{u}_v + \rho_a \vec{u}_a}{\rho}$$

A kontinuitási egyenlet alapján:

$$\frac{d\rho_v}{dt} + \rho_v \nabla \cdot \vec{u}_v = 0$$

mivel

$$\frac{d\rho_v}{dt} = \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \vec{u}_v \nabla \cdot \rho_v \quad \text{és} \quad \nabla \cdot (\rho_v \vec{u}_v) = \rho_v \nabla \cdot \vec{u}_v + \vec{u}_v \cdot \nabla \rho_v$$

ezért

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \vec{u}_v) = 0 \tag{2}$$

Az (1)-es és (2)-es egyenletekből:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \vec{u}_v) = \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \left[-\rho D_v \nabla \frac{\rho_v}{\rho} + \rho_v \vec{u} \right] = 0$$

illetve

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \vec{u}) = \nabla \cdot \left[\rho D_v \nabla \frac{\rho_v}{\rho} \right]$$

ha feltesszük, hogy ρ és D_v állandó, akkor

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_v \vec{u}) = D_v \nabla^2 \rho_v$$

Mivel $\nabla \cdot (\rho_v \vec{u}) = \vec{u} \nabla \rho_v + \rho_v \nabla \cdot \vec{u}$ és $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

megkapjuk Fick II. törvényét:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \vec{u} \nabla \rho_v = D_v \nabla^2 \rho_v$$

$$D_v = 0,211 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1,94} \frac{p_0}{p} \quad T_0 = 273,15 \text{ K}, p_0 = 1013,25 \text{ hPa és } D_v \text{ cm}^2/\text{s}$$

A (Fick II.) differenciálegyenlet megoldásához meg kell adnunk a határfeltételeket.

Merev gömb esetén ez:

$$\vec{u} \Big|_S = 0$$

vagyis (1)-ből:

$$\vec{j}_v \Big|_S = \rho_v \vec{u}_v \Big|_S = -[D_v \nabla \rho_v]_S$$

A vízgőz sebessége a határfelületen azonban nem tűnhet el, így

$$\vec{u}_a \Big|_S = 0$$

elhanyagolható

így

$$\vec{j}_v \Big|_S = \rho_v \vec{u}_v \Big|_S = - \left[D_v \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho} \right)^{-1} \nabla \rho_v \right]_S$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \vec{u} \nabla \rho_v = D_v \nabla^2 \rho_v$$

Feltevés:

A kezdetiérték probléma egy gömbszimmetrikus diffúzió
a sugarú nyugvó csepp, vagyis $u = 0$

Hatérfeltétel:

$$\rho_v(a, t) = \rho_{v,a} = \text{const.}$$

Kezdeti érték:

$$\rho_v(r, 0) = \rho_{v,\infty} = \text{const. für } r > a$$

A felhőkben lejátszódó folyamatok időbeli lefutása, illetve a cseppek növekedése elegendően lassú ahhoz, hogy a folyamatokat stacionáriusnak tekinthessük.

Elegendő tehát a stacionárius állapotra megoldani Fick II. törvényét, vagyis $\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$

Tehát

$$\vec{u} \nabla \rho_v = D_v \nabla^2 \rho_v$$

Nyugvó csepp esetén:

$$\nabla^2 \rho_v = 0$$

vagy gömbi koordinátákban:

$$\nabla^2 \rho_v = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \rho_v) = \frac{\partial^2 \rho_v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho_v}{\partial r} = 0$$

A megoldandó differenciálegyenlet általános alakja:

$$g''(r) + \frac{2g'(r)}{r} = 0$$

Keressük a megoldást $g(r) = \frac{A}{r} + B$ alakban!

Így

$$g'(r) = -\frac{A}{r^2} \quad g''(r) = \frac{2A}{r^3}$$

A határfeltételekből:

$$\rho_v(r = \infty) = \rho_{v,\infty} \quad \rightarrow \quad B = \rho_{v,\infty}$$

$$\rho_v(r = a) = \rho_{v,a} \quad \rightarrow \quad A = a (\rho_{v,a} - \rho_{v,\infty})$$

vagyis

$$\rho_v(r) = \rho_{v,\infty} + (\rho_{v,a} - \rho_{v,\infty}) \frac{a}{r} \quad (7)$$

A megoldásból:

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial r} = -(\rho_{v,a} - \rho_{v,\infty}) \frac{a}{r^2}$$

illetve

$$\left. \frac{\partial \rho_v}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{\rho_{v,\infty} - \rho_{v,a}}{a}$$

Most térjünk vissza Fick I. törvényéhez (1):

$$\vec{j}_v = \rho_v \vec{u}_v = -\rho D_v \nabla \frac{\rho_v}{\rho} + \rho_v \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\rho_v \vec{u}_v + \rho_a \vec{u}_a}{\rho} \quad \text{Mivel} \quad \left. \vec{u}_a \right|_s = 0 \quad \longrightarrow \quad \left. \vec{u} \right|_s = \frac{\rho_v}{\rho} u_v \quad \longrightarrow \quad \left. u_r \right|_{r=a} = \frac{\rho_v}{\rho} u_{v,r}$$

Így (1) átalakításából kapjuk:

$$j_{v,r} \Big|_{r=a} = (\rho_v u_{v,r})_{r=a} = - \frac{\left[\rho D_v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_v}{\rho} \right) \right]_{r=a}}{\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho} \right)_{r=a}}$$

Mivel $\frac{\rho_v}{\rho} \ll 1$ ezért

$$j_{v,r} \Big|_{r=a} = -D_v \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial r} \right)_{r=a}$$

A csepp felületén átáramló teljes vízgőzmennyiségre írhatjuk:

$$J_{v,a} = \int_S (j_{v,r})_{r=a} dS = -D_v \int_S \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial r} \right)_{r=a} dS$$

Másrészt, mivel a csepp tömegének változását éppen a felületén áthaladó vízgőz mennyisége határozza meg:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right) = -J_{v,a}$$

azaz

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = D_v \int_S \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial r}\right)_{r=a} dS$$

Behelyettesítve kapjuk:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = 4\pi a D_v (\rho_{v,\infty} - \rho_{v,a})$$

illetve

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = \frac{4\pi a D_v M_w}{R} \left(\frac{e_\infty}{T_\infty} - \frac{e_a}{T_a}\right)$$

A fent kapott megoldás épp kis cseppek esetében érvénytelen lesz, mert a cseppek felületén a vízgőz sűrűség-eloszlása nem egyenletes. Emiatt célszerű bevezetni egy korrigált diffúziós együtthatót, így

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = \frac{4\pi a D_v^* M_w}{R} \left(\frac{e_\infty}{T_\infty} - \frac{e_{sat}(T_a)}{T_a}\right)$$

Csepptsugár (μm)	0,01	0,1	1,0	10,0	∞
D_v^* ($\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$)	$5,2 \times 10^{-4}$	$5,2 \times 10^{-3}$	$4,5 \times 10^{-2}$	0,19	0,30

A diffúziós növekedés során vízgőz kondenzálódik a csepre. A fázisátalakulás során természetesen hő szabadul fel, vagyis a csepp és a környezete között hőmérsékletkülönbség alakul ki. Tekintsük most azt a folyamatot, amelynek során ez a hőmérsékletkülönbség kiegyenlítődik!

A tömeg-diffúzióhoz hasonlóan itt is definiálhatjuk a hőáramot, melyre a Fourier-törvény érvényes:

$$\vec{j}_h = -k \nabla T$$

k : a nedves levegő hővezetési együtthatója

A termikus diffuzivitás:

$$K_a \equiv \frac{k_a}{\rho c_p}$$

A belsőenergia változásából

$$\rho \frac{du^*}{dt} = -\nabla \cdot \vec{j}_h = \nabla \cdot (k_a \nabla T)$$

A termodinamika I. főtétele alapján

$$du^* = -pdv^* + c_p dT$$

Fentiekből, feltételezve, hogy a sűrűség állandó kaphatjuk:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \nabla T = K_a \nabla^2 T$$

Ez az egyenlet Fick II. törvényével teljesen analóg, így a megoldása is teljesen hasonló módon történik a következő határfeltételekkel:

$$T(r = \infty) = T_\infty$$

$$T(r = a) = T_a$$

Vagyis

$$T(r) = T_{\infty} + (T_a - T_{\infty}) \frac{a}{r}$$

és

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)_0 = 4\pi a k_a (T_{\infty} - T_a)$$

Most is bevezethetjük a módosított hővezetési együtthatót:

Cseppszugár (μm)	0,01	0,1	1,0	10,0	∞
k_a^* ($\text{cal cm}^{-1} \text{s}^{-1}$ ($^{\circ}\text{C}$) $^{-1}$)	$1,9 \times 10^{-6}$	$1,7 \times 10^{-5}$	$5,2 \times 10^{-3}$	$5,9 \times 10^{-1}$	6,0



Felhőcsepp diffúziós növekedésének leírása

Egy felhőcsepp (oldat) növekedése tanulmányozható tömegének, illetve sugarának növekedésén keresztül:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = 4\pi\rho_s'' a^2 \frac{da}{dt}$$

ρ_s'' : az oldat sűrűsége

A fázisátalakulás során felszabaduló hőre:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_0 = -L_e \left(\frac{dm}{dt}\right)_0$$

ahol L_e a párolgáshő. A hődiffúziós egyenletek megoldásait behelyettesítve:

$$T_a = T_\infty + \frac{L_e \rho_s''}{k_a^*} a \frac{da}{dt}$$

Vagyis egy párolgó csepp hőmérséklete mindig alacsonyabb mint a környezeté.

Vízgőz diffúziójával a csepp növekedésére kaptuk:

$$a \frac{da}{dt} = \frac{D_v^* M_w}{R \rho_s''} \left(\frac{e_\infty}{T_\infty} - \frac{e_{sat}(T_a)}{T_a} \right)$$

Az egyenlet megoldásához szükségünk van az $e_a = e_{sat,s}(T_a)$ összefüggésre.

Ezt a korábban megismert Köhler-egyenlet adja:

$$e_{sat,s}(T_a) = e_{sat,w}(T_a) \exp \left[\frac{2 M_w \sigma_{s/a}}{R T_a \rho_w a} - \frac{v \Phi_s \frac{M_w}{M_s} m_s}{\left(\frac{4 \pi \rho_s'' a^3}{3} - m_s \right)} \right]$$

Továbbá a csepp hőmérsékletéhez tartozó telítési gőznyomást kifejezzük az egyszerűbben mérhető környezeti telítési gőznyomással a Clausius-Clapeyron egyenlet segítségével:

$$e_{sat,w}(T_a) = e_{sat,w}(T_\infty) \exp \left[\frac{L_e M_w}{R} \left(\frac{T_a - T_\infty}{T_a T_\infty} \right) \right]$$

A megoldáshoz tehát rendelkezésünkre áll egy egyenletrendszer, az ismeretlenek pedig a következők:

$$T_a, e_{sat,s}(T_a), e_{sat,w}(T_a), a \frac{da}{dt}$$

A megoldás általában numerikus módszerekkel történik.

...vagy

$$a \frac{da}{dt} = \frac{D_v^* M_w e_{sat,w}(T_\infty)}{\rho_s'' RT_\infty} \left\{ S_{v,w} - \frac{1}{1+\delta} \exp \left[\frac{L_e M_w}{RT_\infty} \left(\frac{\delta}{1+\delta} \right) + \frac{2M_w \sigma_{s,a}}{RT_\infty (1+\delta) \rho_w a} - \frac{\nu \Phi_s \varepsilon_m M_w \rho_N r_N^3}{M_s \rho_w (a^3 - r_N^3)} \right] \right\}$$

$$1 + \delta = \frac{T_a}{T_\infty} \quad \delta = \frac{L_e \rho_s''}{T_\infty k_a^*} a \frac{da}{dt} \quad \varepsilon_m = \frac{m_s}{m_N}$$

Közelítő megoldás:

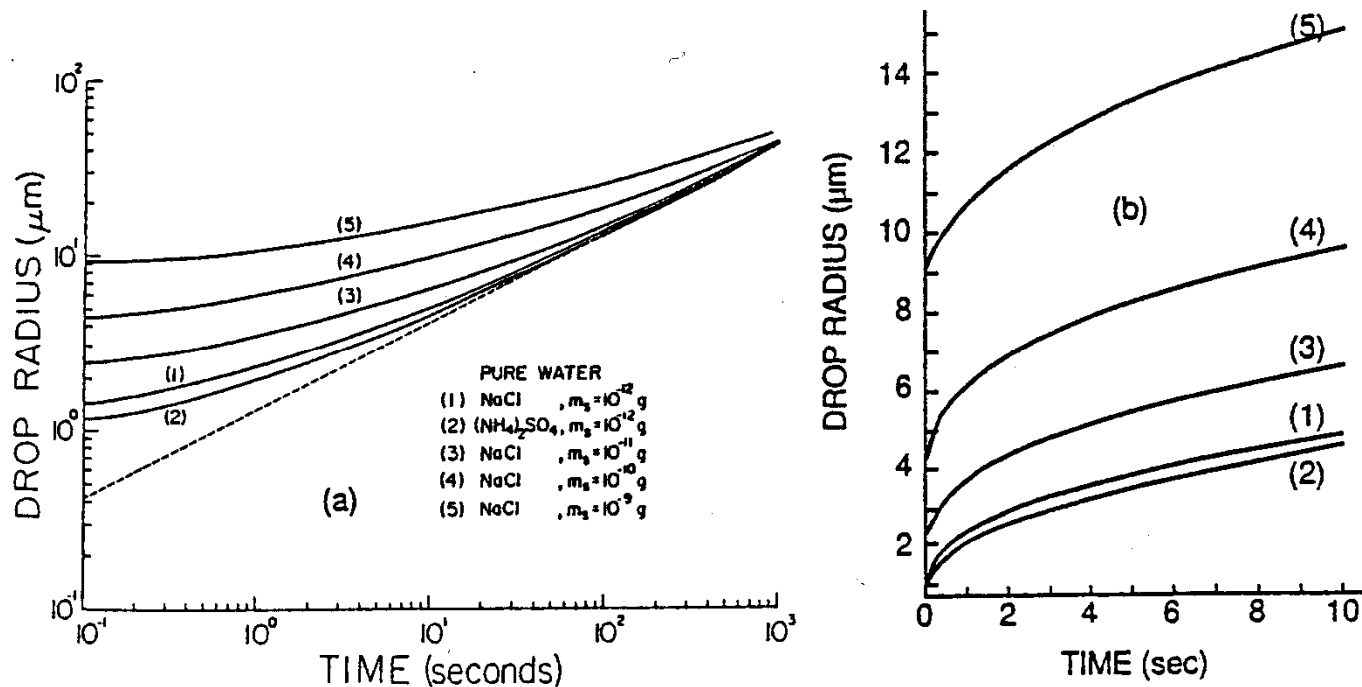
$$a \frac{da}{dt} \approx \frac{s_{v,w} - y}{\frac{RT_\infty \rho_w}{e_{sat,w}(T_\infty) D_v^* M_w} + \frac{L_{e,0} \rho_w}{k_a^* T_\infty} \left(\frac{L_{e,0} M_w}{RT_\infty} - 1 \right)}$$

$$y = \frac{2\sigma_{s/a} M_w}{a \rho_w RT_\infty} - \frac{\nu \Phi_s m_s M_w / M_s}{(4\pi \rho_s'' a^3 / 3) - m_s}$$

tútelítettség: $s_{v,w}$

Ha $a \rightarrow \infty$ és $m_s \rightarrow 0$, akkor $y = 0$

$$\frac{da}{dt} \approx \frac{C}{a}$$



1% túltelítettség és 20°C

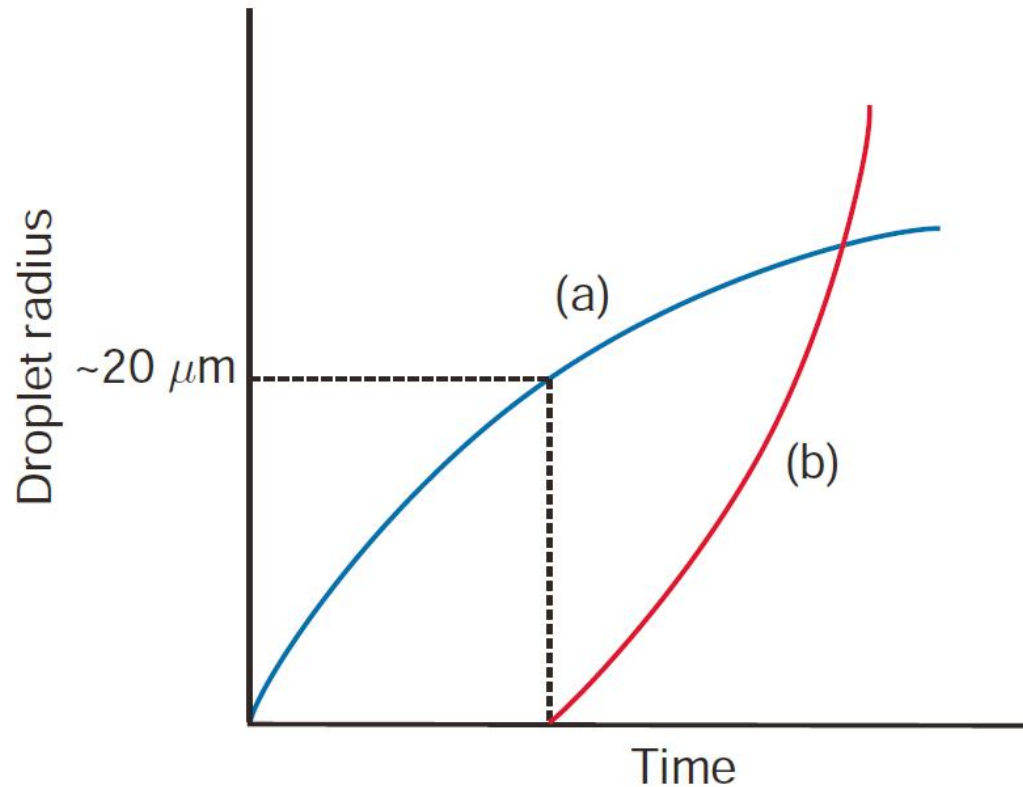


Fig. 6.15 Schematic curves of droplet growth (a) by condensation from the vapor phase (blue curve) and (b) by collection of droplets (red curve).