

Matematikai praktikum példatár informatikus felsőoktatási szakképzési szakosoknak

Készítette: Árgilán Viktor Sándor

SZTE JGYPK Informatika Alkalmazásai Tanszék

2018. május 31.

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014.

Alprojekt azonosító: AP2 – Komplex képzés- és szolgáltatásfejlesztés

Altéma azonosító: AP2_JGYPK5 Magyar és idegen nyelvű képzések oktatási innovációja az MTMI területen és tanártovábbképzés

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék.....	2
Bevezetés.....	4
I. Elemi algebra: hatványozás; hatványozás azonosságai; nevezetes szorzatok; a racionális kitevőjű hatvány fogalma; a hatványozás és gyökvonás azonosságai	9
II. Elemi algebra: törtek; tizedes törtek; műveletek törtekkel; arány, aránypárok.....	14
III. Elemi geometria: fogalmak, tételek; vektorok; műveletek vektorokkal	18
IV. Elemi függvények: (lineáris, abszolútérték, másodfokú, négyzetgyök, racionális törtfüggvények és tulajdonságaik)	21
V. Elemi függvények: exponenciális függvény; a logaritmus fogalma; a logaritmus azonosságai; a logaritmus függvény	24
VI. Descartes-féle koordináta-rendszer; Koordináta geometria: szakasz felezőpontja, harmadolópontjai; háromszög súlypontja; két pont távolsága; az egyenes egyenletének különböző alakjai; kör egyenlete.....	26
VII. Egyváltozós polinomok: fogalmak; műveletek polinomokkal (szorzattá alakítás, osztás)	31
VIII. Sorozatok: a sorozat mint függvény; számtani és mértani sorozatok tulajdonságai .	32
IX. Kombinatorika: halmazok; összeszámlálási alapfeladatok; binomiális együtthatók (Pascal háromszög)	35
X. Szögfüggvények: értelmezés (forgásszögekre is); összefüggések; addíciós tételek; trigonometrikus egyenletek, függvények	37
XI. Egyenletek: megoldás; másodfokú egyenlet (gyöktényezős alakja, Viete-formulák); Speciális harmad- és negyedfokú egyenletek; Egyenlőtlenségek	39
XII. Egyenletrendszerek: fogalmak, két- és három-ismeretlenes egyenletrendszerek; megoldási módszerek	41
XIII. Logika, Gráfok: fogalmak; tételek.....	42
XIV. Megoldási segédlet (Elemi algebra: hatványozás; hatványozás azonosságai; nevezetes szorzatok; a racionális kitevőjű hatvány fogalma; a hatványozás és gyökvonás azonosságai)	44
XV. Megoldási segédlet (Elemi algebra: törtek; tizedes törtek; műveletek törtekkel; arány, aránypárok).....	46
XVI. Megoldási segédlet (Elemi geometria: fogalmak, tételek; vektorok; műveletek vektorokkal)	47
XVII. Megoldási segédlet (Elemi függvények: lineáris, abszolútérték, másodfokú, négyzetgyök, reciprok).....	49
XVIII. Megoldási segédlet (Elemi függvények: exponenciális függvény; a logaritmus fogalma; a logaritmus azonosságai; a logaritmus függvény)	52
XIX. Megoldási segédlet (Descartes-féle koordináta-rendszer; Koordináta geometria: szakasz felezőpontja, harmadolópontjai; háromszög súlypontja; két pont távolsága; az egyenes egyenletének különböző alakjai; kör egyenlete)	53
XX. Megoldási segédlet (Egyváltozós polinomok: fogalmak; műveletek polinomokkal (szorzattá alakítás, osztás)).....	54
XXI. Megoldási segédlet (Sorozatok: a sorozat mint függvény; számtani és mértani sorozatok tulajdonságai).....	55

XXII. Megoldási segédlet (Kombinatorika: halmazok; összeszámlálási alapfeladatok; binomiális együtthatók (Pascal háromszög))	57
XXIII. Megoldási segédlet (Szögfüggvények: értelmezés (forgásszögekre is); összefüggések; addíciós tételek; trigonometrikus egyenletek, függvények).....	62
XXIV. Megoldási segédlet (Egyenletek: megoldás; másodfokú egyenlet (gyöktényező alakja, Viete-formulák); Speciális harmad- és negyedfokú egyenletek; Egyenlőtlenségek) ...	66
XXV. Megoldási segédlet (Egyenletrendszerek: fogalmak, két- és háromismeretlenes egyenletrendszerek; megoldási módszerek).....	68
XXVI. Megoldási segédlet (Logika, Gráfok: fogalmak; tételek)	70
XXVII. Megoldás (I. fejezet)	72
XXVIII. Megoldás (II. fejezet).....	84
XXIX. Megoldás (III. fejezet).....	100
XXX. Megoldás (IV. fejezet).....	105
XXXI. Megoldás (V. fejezet).....	126
XXXII. Megoldás (VI. fejezet)	134
XXXIII. Megoldás (VII. fejezet).....	154
XXXIV. Megoldás (VIII. fejezet).....	159
XXXV. Megoldás (IX. fejezet)	173
XXXVI. Megoldás (X. fejezet).....	179
XXXVII. Megoldás (XI. fejezet).....	192
XXXVIII. Megoldás (XII. fejezet)	209
XXXIX. Megoldás (XIII. fejezet).....	215
Felhasznált irodalom	219

Bevezetés

A feladatgyűjtemény a Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Karán meghirdetett informatikus szakirányú felsőoktatási szakképzési szakok hallgatóinak készült. A példatár és a Matematika praktikum című kurzus célja, hogy a felsőoktatási szakképzési szak elvégzéséhez szükséges, középiskolából hozott matematikai ismereteket szintetizálja.

Fontos a középiskolai (középszintű érettségi) matematikai tananyaghoz kapcsolódó készségek fejlesztése, olyan matematikai, algoritmustervezési, programozási, stb. kurzusok kapcsán, amelyek stabil matematikai alapokat, gondolkodásmódot igényelnek.

Cél a megfelelő logikus, matematikai gondolkodás megalapozása és fejlesztése.

Képesek legyenek a hallgatók a matematikai összefüggéseket értő módon, logikusan értelmezni és alkalmazni, tisztában legyenek az informatikában használt matematikai szakkifejezések jelentésével, és tudják használni, alkalmazni azokat.

Az egyes fejezetekben szereplő feladatok megoldása elősegíti a hallgatóban annak az attitűdnek a kialakulását, hogy törekedjen a feladatok precíz megoldására, nyitott legyen a feladatok különböző módszerekkel történő megoldására, figyelembe vegye azokat.

A feladatok megadott megoldásai az önállóság és autonómia kialakításában lehetőséget adnak arra, hogy önállóan ellenőrizze, és szükség esetén javítsa vagy korrigálja a feladatmegoldásait a példatár segítségével. Törekedjen arra, hogy pontosan meghatározza a számításokhoz szükséges adatokat, továbbá a pontos számításokra, ábrázolásokra. Ezáltal elkötelezetté váljon számításaiban, munkájában a minőségi követelményeknek.

A fenti, kitűzött célok eléréséhez a feladatok a példatárban a következő témakörökre vannak felosztva:

- Elemi algebra: hatványozás; a hatványozás azonosságai; nevezetes szorzatok; a racionális kitevőjű hatvány fogalma; a hatványozás és gyökvonás azonosságai

Itt a megszerezhető tudás a feladatok megoldásával, hogy a hallgató legyen tisztában az elemi algebrai fogalmakkal, tételekkel (hatványozás fogalma, azonosságai; gyökvonás fogalma, azonosságai; nevezetes szorzatok).

- Elemi algebra: törtek; tizedes törtek; műveletek törtekkel; arány, aránypárok

Itt a cél, hogy a hallgató képes legyen ilyen jellegű feladatok megoldására, alkalmazza és felismerje az ilyen jellegű összefüggéseket.

- Elemi geometria: fogalmak, tételek; vektorok; műveletek vektorokkal
- Elemi függvények: (lineáris, abszolútérték, másodfokú, négyzetgyök, racionális törtfüggvények és tulajdonságaik)
- Elemi függvények: exponenciális függvény; a logaritmus fogalma; a logaritmus azonosságai; a logaritmus függvény.

A feladatok megoldása után elvárt képesség ezen függvények ábrázolása a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben, valamint az ezekből származtatott függvények, transzformációinak felismerése és ábrázolása is.

- Descartes-féle koordináta-rendszer; Koordináta geometria: szakasz felezőpontja, harmadoló-pontjai; háromszög súlypontja; két pont távolsága; az egyenes egyenletének különböző alakjai; kör egyenlete.

Konkrét tanulási eredmény, hogy a hallgató önállóan meghatározza az egyes alakzatok adatait, egyenleteit.

- Egyváltozós polinomok: fogalmak; műveletek polinomokkal (szorzattá alakítás, osztás)

Itt a feladatok végrehajtása során ezen műveletek elvégzésére lesz képes a hallgató az adott szabályok betartásával.

- Sorozatok: a sorozat, mint függvény; számtani és mértani sorozatok tulajdonságai.

A sorozatokkal kapcsolatos tudáselemek (összegképlet, adott tag kiszámítása) rengetegszer előjönnek más tárgyak kapcsán a későbbiekben, így az ezeknek a felismerésében és az alkalmazásában való jártasság kialakítása az elérendő cél.

- Kombinatorika: halmazok; összeszámlálási alapfeladatok; binomiális együtthatók (Pascal háromszög).

A hallgatónak ismernie kell az alapvető összeszámlálási feladattípusokat (permutáció, variáció, kombináció), készségszinten tudnia kell felismerni, meghatározni ezek típusát.

- Szögfüggvények: értelmezés (forgásszögekre is); összefüggések; addíciós tételek; trigonometrikus egyenletek, függvények

Itt fontos cél, hogy a hallgató ismerje a derékszögű háromszögben definiált szögfüggvényeket, azok geometriai jelentését, a szögfüggvények valós számokra való kiterjesztését.

Pontosan ábrázolja az egyszerűbb trigonometrikus függvényeket és azok transzformációit.

- Egyenletek: megoldás; másodfokú egyenlet (gyöktényezős alakja, Viete-formulák); Speciális harmad- és negyedfokú egyenletek; Egyenlőtlenségek
- Egyenletrendszerek: fogalmak, két- és három-ismeretlenes egyenletrendszerek; megoldási módszerek
- Logika, Gráfok: fogalmak; tételek

A témakörökre osztáson túl, struktúráját tekintve a feladatgyűjtemény három nagy egységre bontható:

- feladatok
- megoldási segédlet (elmélet)
- megoldások

A tantárggyal a következő konkrét **tanulási eredmények** alakíthatók ki:

Legyen tisztában az elemi algebrai fogalmakkal, tételekkel (hatványozás fogalma, azonosságai; gyökvonás fogalma, azonosságai; nevezetes szorzatok).	Képes elemi algebrai feladatok megoldására, melyekben hatványok, gyökök és nevezetes szorzatok szerepelnek.	Törekszik az elemi algebrai feladatok precíz megoldására.	A szakirodalomként megjelölt példatár segítségével képes önállóan munkája ellenőrzésére.
Ismeri az arány fogalmát, fontosabb arányosságokat (egyenes és fordított arányosság),	Képes törteket tartalmazó feladatok megoldására, alkalmazza és felismeri az ilyen jellegű	Nyitott a feladatok különböző módszerekkel történő megoldására, alkalmazására.	Önállóan ellenőrzi, és szükség esetén javítja a feladatmegoldásait a példatár segítségével.

	összefüggéseket szöveges feladatokban.		
Ismerje meg az elemi függvények (lineáris, abszolút-érték, másodfokú, törtfüggvény, exponenciális, logaritmikus) megadási módjait, alapfüggvényeiket, ábrázolásukat, különös tekintettel a függvény-transzformációkra.	Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja az elemi függvényeket, és az ezekből származtatott függvényeket, transzformációikat.	Elkötelezett a pontos számítások, ábrázolások iránt.	Önállóan végez elemi függvényekkel kapcsolatos műveleteket, transzformációkat és ezeket önállóan, pontosan ábrázolja.
Tisztában van a koordináta-geometriai alapfogalmakkal (pont, felezési pont, osztópont, szabadvektor, helyvektor). Ismeri a különböző egyszerű alakzatok egyenleteit.	Képes egyszerű koordináta-geometriai számításokra (pontok koordinátáinak kiszámítása) és ábrázolásokra. Felismeri a különböző alakzatok egyenleteit, alapadatokból képes alakzat egyenleteket felírni. Képes alakzatok metszéspontjainak meghatározására.	Törekszik arra, hogy meghatározza a számításokhoz szükséges adatokat. Belátja, hogy ez euklideszi geometriai tételek algebrai úton is igazolhatók.	Önállóan meghatározza egyes alakzatok adatait, egyenleteit.
Tisztában van a polinom fogalmával, ismeri a különböző műveleteket polinomokkal (szorzattá alakítás, osztás);	Felismeri a polinomokat, és meghatározza azok tulajdonságait. Ki tudja számítani polinomok szorzatát, hányadosát. Fel tudja írni a reducibilis polinomokat szorzatalakban.	Törekszik a pontos számításokra polinomokkal kapcsolatos műveletekben, ezekkel kapcsolatos feladatok megoldása során. Figyelembe veszi a különböző lehetőségeket.	Betartja a műveletek elvégzésének sorrendjét (precedencia szabály). Korrigálja saját hibáit.
Ismeri az alapvető	Képes alapvető	Érdeklődik a valós	Önállóan végez

összeszámlálási feladattípusokat (permutáció, variáció, kombináció).	kombinatorikai feladatok megoldására, felismeri, meghatározza azok típusát.	élet problémái iránt, belátja, a kombinatorikai számítások hasznosságát.	kombinatorikai számításokat.
Ismeri a derékszögű háromszögben definiált szögfüggvényeket, azok geometriai jelentését. Megérti a szögfüggvények valós számokra való kiterjesztését, tisztában van a forgásszögek fogalmával.	Jártas a trigonometrikus feladatokkal kapcsolatos számításokban. Ábrázolja az egyszerűbb trigonometrikus függvényeket és azok transzformációit. Addíciós tételek segítségével feladatokat old meg.	Kíváncsi a valós élet szögfüggvényekkel kapcsolatos feladatainak megoldására. Nyitott a különböző megoldási módszerekre.	Képes az önellenőrzésre és a hibák önálló javítására.
Ismeri a számtani és mértani sorozatok fogalmát, tulajdonságait, általános alakját, összegképletét.	Felismeri a számtani és mértani sorozatokat, képes a hozzájuk kapcsolódó feladatok megoldására.	Érdeklődik a valós élet problémái iránt, törekszik a pontos számításokra a sorozatokkal kapcsolatos feladatok megoldása során	Képes az önellenőrzésre a kapcsolódó példatár segítségével
Tisztában van az egyenletek egyenletrendszerek fogalmával, ismeri a különböző típusú egyenleteket, megoldási módszereket.	Jártas a különböző egyenletek, egyenletrendszerek megoldásában. A különböző típusú megoldások segítségével egyenleteket, egyenletrendszereket old meg.	Elkötelezett a pontos számítások iránt, munkáját körültekintően végzi.	Betartja a megoldási módszerek szabályait, korrigálja saját hibáit.
Ismeri az alapvető gráfelméleti alapfogalmakat, tételeket.	Képes alapvető gráfelméleti feladatok megoldására.	Érdeklődik a valós élet problémái iránt, belátja, a gráfok jelentőségét a valós élet modellezésében.	Önállóan végez gráfelméleti számításokat, ábrázolásokat.

Eredményes és jó munkát!

I. Elemi algebra: hatványozás; hatványozás azonosságai; nevezetes szorzatok; a racionális kitevőjű hatvány fogalma; a hatványozás és gyökvonás azonosságai

I.1. Feladat: Számológép használata nélkül határozza meg a következő kifejezések pontos értékét!

a.) $\frac{2^{48}}{8^{16}}$

b.) $3^{99} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{32}$

c.) $4^{-4} \cdot 8^2$

d.) $\frac{15^{20} \cdot 16^5}{9^{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-19}}$

e.) $(7^{49})^{-2} \cdot 7^{100}$

f.) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$

g.) $\frac{(13+7)^{-\frac{2}{3}} \cdot 8 \cdot \sqrt[3]{2}}{25^{\frac{1}{3}}}$

h.) $\frac{90^6 \cdot 36^4}{120^7}$

i.) $\frac{24^3 \cdot 108^2 \cdot 9^6}{27^4 \cdot 48^5}$

I.2. Feladat: Végezze el a hatványozásokat, majd hozza egyszerűbb alakra a kifejezéseket!

a.) $(x^3)^{-2} \cdot (x^{-3})^{-5} \cdot (x^{-1})^{-1} =$

b.) $(x^3)^{-2} \cdot \left[(x^{-3})^{-5}\right]^{-2} \cdot (x^{-5})^{-6} =$

c.) $(x^3 \cdot y^{-2})^{-2} \cdot (x^{-5} \cdot y^3)^{-1} =$

d.) $\frac{(a^{-3})^{-2} \cdot a^{-4} \cdot a^{-2}}{a^{-3} \cdot (a^{-2})^2 \cdot a^5} =$

e.) $\frac{(2b^2)^{-2} \cdot (8^{-2} \cdot b^{-4})^{-1}}{(2^3 b^{-2})^2 \cdot (2b^{-2})^{-1}} =$

f.) $\frac{(a^2 b^3)^4 \cdot (a^4 b)^3}{(a^2 b^7)^3} =$

g.) $\frac{(x^2 y^5)^6 (x^2 y)^2}{(xy^5)^3 x^3 y^4} =$

h.) $\frac{(x^3 y^2)^5 x y^3}{(x^2 y^4)^2 (x^3 y^4)^2} =$

i.) $\frac{(12d^{-1})^{-2} \cdot (18^2 \cdot d^3)^{-3}}{(8^{-2} d^{-4})^2 \cdot (3^{-5} d^3)^2} =$

j.) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{a^7}} =$

k.) $\frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[4]{a^6}} =$

l.) $\frac{a^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{a^4}}{\left(a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a}\right)^2} =$

m.) $\frac{a^{\frac{5}{2}} \sqrt[4]{a^3 b^2} b^3 \left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{6}}\right)^3}{\left(b^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{b^{\frac{2}{3}}}\right)^2} =$

I.3. Feladat: Végezze el a kijelölt műveleteket, majd hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a.) $\sqrt[4]{x^{-3} \cdot y^{-1}} \cdot \sqrt[4]{x^6 \cdot y^5} =$

b.) $\sqrt[2]{a^{-2} \cdot b^2} \cdot \sqrt[3]{a^5 \cdot b^{-1}} =$

c.) $\sqrt[3]{a^2 \cdot b^4} : \sqrt[3]{a^{-5} \cdot b^1} =$

d.) $\frac{(9x^2y^3)^4}{(5x^4y^4)^3} \cdot \frac{(3xy^2)^6}{(5xy^5)^3} =$

e.) $\frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot b^{-1}}}{\sqrt[3]{a^5 \cdot b^{-3}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot b^4}}{\sqrt[3]{a^{-4} \cdot b^{-1}}} =$

f.) $\frac{(6x^3y^2)^3}{(5a^4b^3)^2} : \frac{(5xy^4)^3}{(3ab^2)^4} =$

g.) $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^{-3}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^4}{a^{-2}}} \right) : \left(\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^{-2}}} : \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^{-5}}} \right) =$

I.4. Feladat: Melyik kifejezés a nagyobb?

a.) $3 \cdot 12^4$ vagy $2^5 \cdot 18^3$

b.) 50^{10} vagy 10^{20}

c.) $24^{-3} \cdot 36^{-4}$ vagy 96^{-5}

d.) $\frac{48^{-3} \cdot 36^2}{24^{-1}}$ vagy 12^2

I.5. Feladat: Azonosságok segítségével írja fel összegalakban a következő kifejezéseket!

a.) $(x+3)^2 =$

b.) $(3x-y)^2 =$

c.) $(2x+3)^2 =$

d.) $(4x-3y)^2 =$

e.) $\left(\frac{2}{7} + 5b\right)^2 =$

f.) $\left(\frac{3}{2}a - \frac{6}{5}b\right)^2 =$

g.) $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right)^2 =$

h.) $(a+1)^3 =$

i.) $(2b-2)^3 =$

j.) $\left(\frac{a}{2} + 4b\right)^3 =$

k.) $(5x-4)(5x+4) =$

l.) $\left(\frac{x}{2} - 3y\right)\left(\frac{x}{2} + 3y\right) =$

m.) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}\right) =$

n.) $(10x^2 - 3y^2)^2 =$

o.) $(x-2y-5)^2 =$

p.) $\left(\frac{x}{2} - 3y + 1\right)^2 =$

I.6. Feladat: Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a.) $5x^2 - 10x =$

j.) $4x^2 - 25y^2 =$

b.) $10y^2 - 16y =$

k.) $9y^2 - x^4 =$

c.) $25a^5b - 10a^3b^4 =$

l.) $x^6 - y^6 =$

d.) $ax - 6a + bx - 6b =$

m.) $75 - 12a^2 =$

e.) $ay + pq + ap + yq =$

n.) $b^2 + 6b + 5 =$

f.) $x^2 - 10x + 25 =$

o.) $2x^2 - 8x + 8 =$

g.) $a^2 - 6a + 9 =$

p.) $y^3 + 4y^2 + 4y =$

h.) $a^2 - 1 =$

q.) $2a^3 - 12a^2 + 18a =$

i.) $y^2 - 16 =$

r.) $b^3 + 3b^2 + 3b + 1 =$

I.7. Feladat: Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a.) $x^2 - 2x - 3 =$

b.) $2x^2 - 12x + 16 = (2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 4))$

c.) $2x^2 + 12x - 32 = (2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 8))$

d.) $4a^2 - 12a + 9 =$

I.8. Feladat: Határozza meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a.) $\sqrt{x - 3}$

d.) $\sqrt{\frac{-5}{x + 2}}$

b.) $\sqrt{x(x + 2)}$

e.) $\sqrt{\frac{4 - x}{x + 3}}$

c.) $\sqrt{\frac{4}{x - 3}}$

I.9. Feladat: Számológép használata nélkül határozza meg a következő kifejezések pontos értékét!

a.) $\sqrt{8 \cdot 18} =$

g.) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{80}} =$

b.) $\sqrt{100^3} =$

h.) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{ab} =$

c.) $\sqrt{32 \cdot 98} =$

i.) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} =$

d.) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} =$

e.) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} =$

f.) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{49}} =$

I.10. Feladat: Számológép használata nélkül határozza meg a következő kifejezések pontos értékét!

a.) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{147} =$

b.) $\sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{63} =$

c.) $2\sqrt{72} - \sqrt{125} + 3\sqrt{20} =$

d.) $6\sqrt{18} + \sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{72} =$

e.) $(\sqrt{12} + 3)(\sqrt{12} - 3) =$

f.) $(\sqrt{27} + \sqrt{13})(\sqrt{27} - \sqrt{13}) =$

k.) $(\sqrt{98} + \sqrt{108} - \sqrt{8} - \sqrt{147}) \cdot (\sqrt{32} - \sqrt{48} + \sqrt{75} + \sqrt{2}) =$

g.) $(5\sqrt{2} + 3\sqrt{3})(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) =$

h.) $\sqrt{(15 + \sqrt{56})} \cdot \sqrt{(15 - \sqrt{56})} =$

i.) $\left(\sqrt{(11 + \sqrt{21})} + \sqrt{(11 - \sqrt{21})}\right)^2 =$

j.) $(\sqrt{27} + \sqrt{2} - \sqrt{12}) \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{3} - \sqrt{18}) =$

I.11. Feladat: Gyöktelenítse a következő törtek nevezőjét!

a.) $\frac{5}{\sqrt{7}} =$

b.) $\frac{15}{\sqrt{3}} =$

c.) $\frac{2}{3\sqrt{5}} =$

d.) $\frac{a}{\sqrt{b}} =$

e.) $\frac{3a}{2\sqrt{b}} =$

f.) $\frac{4}{\sqrt{3} - 2} =$

g.) $\frac{12}{9 - \sqrt{5}} =$

h.) $\frac{9}{2\sqrt{3} - \sqrt{11}} =$

i.) $\frac{25}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}} =$

j.) $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} =$

k.) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} =$

I.12. Feladat: Határozza meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a.) $\sqrt[6]{\frac{x+2}{3-x}}$

b.) $\sqrt[4]{(x+5) \cdot (x-7)}$

c.) $\sqrt[5]{\frac{x+21}{x-10}}$

d.) $\sqrt[10]{\frac{x^2-16}{x-4}}$

e.) $\sqrt[3]{\frac{x^2-49}{x+7}}$

I.13. Feladat: Írja fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket!!

a.) $\sqrt[6]{5 \cdot \sqrt[5]{5}} =$

b.) $\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3}}} =$

c.) $\sqrt[3]{7^2 \cdot \sqrt[4]{7^5}} =$

d.) $\sqrt[4]{x^7 \cdot \sqrt[3]{x^2}} =$

e.) $\sqrt[6]{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^7}}} =$

f.) $\frac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[4]{x^2}} =$

g.) $\frac{\sqrt[5]{b^3} \cdot \sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{b}} =$

h.) $\frac{\sqrt[4]{c^3} \cdot \sqrt[3]{c^7}}{\sqrt[5]{c} \cdot \sqrt{c}} =$

i.) $\sqrt[5]{\frac{x^{12}}{y^9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^{12}}{x^3}} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} =$

I.14. Feladat: Gyöktelenítse a következő törtek nevezőjét!

a.) $\frac{5}{\sqrt[3]{7}} =$

b.) $\frac{25}{\sqrt[5]{5^2}} =$

c.) $\frac{5x}{10 \cdot \sqrt[3]{x}} =$

d.) $\frac{6y}{7 \cdot \sqrt[5]{y^3}} =$

e.) $\frac{8}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}} =$

II. Elemi algebra: törtek; tizedes törtek; műveletek törtekkel; arány, aránypárok

II.1. Feladat: Határozza meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a.) $\frac{2}{x-5}$

h.) $\frac{-3a-6b}{4b^2-a^2}$

b.) $\frac{x-12}{x}$

i.) $\frac{a-b}{4b^2-a^2}$

c.) $\frac{x-4}{x+4}$

j.) $\frac{a}{\sqrt{a+b}}$

d.) $\frac{x-3}{x^2-9}$

k.) $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$

e.) $\frac{y-7}{(y-4)(y+2)}$

l.) $\frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2}}$

f.) $\frac{4a^2-4a+1}{3-6a}$

g.) $\frac{a}{3-6a}$

II.2. Feladat: Egyszerűsítse a következő kifejezéseket!

a.) $\frac{18xy^3}{6x^2y} =$

g.) $\frac{4a^2-4a+1}{3-6a} =$

b.) $\frac{2(x-y)^2}{x-y} =$

h.) $\frac{-3a-6b}{4b^2-a^2} =$

c.) $\frac{7b}{7a-49} =$

i.) $\frac{y^2+6y+13}{2y+6} =$

d.) $\frac{3a-6}{3(a-2)} =$

j.) $\frac{3a^2-15a-17}{6-a} =$

e.) $\frac{4x-16}{x-4} =$

k.) $\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2} =$

f.) $\frac{2x-6}{9-3x} =$

II.3. Feladat: Végezze el a kijelölt műveleteket!

a.) $\frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{4} =$

b.) $\frac{3x-2y}{2x} + \frac{5x-3y}{2x} - \frac{x-4y}{2x} =$

c.) $\frac{2-x}{x} - \frac{x+5}{2} =$

d.) $\frac{2x-3y}{y} + \frac{3x^2-4y^2}{xy} =$

e.) $\frac{5}{3} + \frac{y+6}{3(y-9)} =$

f.) $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+2} =$

g.) $\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+1} =$

h.) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} =$

i.) $\frac{3a^3}{x^2} \cdot \frac{12x^4}{9a} =$

j.) $\frac{54a^5}{14x^3} : \left(-\frac{27a^4}{35x^6} \right) =$

k.) $\frac{x-3}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x-3} =$

l.) $\frac{a^2-25}{a^2-3a} : \frac{a^2+5a}{a^2-9} =$

m.) $\frac{3}{2x+6} - \frac{x-2}{x^2+6x+9} =$

n.) $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} =$

o.) $\frac{2\sqrt{17} \cdot \sqrt{12}}{5} + \frac{\sqrt{17} + \sqrt{12}}{\sqrt{17} - \sqrt{12}} =$

p.) $(x^2-3x+2):(x-2) =$

q.) $(x^2+x-6):(x^2+2x-3) =$

r.) $\sqrt{2x^2+12x-32} : \sqrt{2x^2-12x+16} =$

II.4. Feladat: Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a.) $\frac{5x}{4} - 1 = x + \frac{5}{6}$

b.) $\frac{x}{2} - \frac{14}{5} \cdot (-20) = \frac{x}{4} + 2$

c.) $\frac{x+5}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{x-1}{6} - \frac{3-x}{8}$

d.) $(3x+2)(x-3)+1 = \frac{(3-x)^2-1}{3}$

i.) $3x + \frac{(x-3)^2}{4} = \frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(x+1)(x-1)}{3}$

j.) $\frac{x}{x+4} + \frac{x}{x-4} = \frac{50}{9}$

e.) $\left(\frac{2x+3}{3} \right)^2 - \left(\frac{x-1}{2} \right)^2 = x^2 - \frac{x+1}{4}$

f.) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{4}{3}$

g.) $\frac{x+3}{x+4} + \frac{x}{x-3} = \frac{7}{x^2+x-12}$

h.) $\frac{3}{x^2-3x+2} + \frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x-1} = 0$

II.5. Feladat: Határozza meg a következő törtek tizedestört alakját!

a.) $\frac{1}{2} =$

d.) $\frac{11}{25} =$

b.) $5\frac{4}{5} =$

e.) $\frac{3}{7} =$

c.) $\frac{5}{3} =$

f.) $\frac{321}{100} =$

II.6. Feladat: Határozza meg a következő tizedestörtek tört alakját!

a.) $0,5 =$

e.) $0,2\dot{1}\dot{3} =$

b.) $0,25 =$

f.) $0,3\dot{1}3\dot{5} =$

c.) $0,\dot{5} =$

d.) $0,\dot{2}\dot{5} =$

II.7. Feladat: Bizonyítsa be, hogy $0,2\dot{9} = 0,3$!

II.8. Feladat: 14 Feladat: Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a.) $3,5(x+3) = 2,5x + 20$

c.) $\frac{x-0,2}{0,2} - \frac{0,2x+1}{0,4} + \frac{0,4x-1}{0,6} = x$

b.) $(x+3)^2 - 5 = 8(0,5x - 0,25) + 9$

II.9. Feladat: Péter és Robi testmagasságának aránya $\frac{4}{5}$. Milyen magas Robi, ha Péter 124 cm?

II.10. Feladat: Egy háromszög belső szögeinek aránya 3:4:5. Mekkora a háromszög szögei?

II.11. Feladat: Egy téglalap szomszédos oldalainak aránya 2 : 3, területe 90 cm. Mekkora a tényleges területe?

II.12. Feladat: Ha 3 tyúk 3 nap alatt 3 tojást tojik, akkor 6 tyúk 6 nap alatt hány tojást tojik? Hány ilyen tyúk tojik 9 nap alatt 18 tojást?

II.13. Feladat: Két autó 160 km-en 19,2 liter benzint fogyasztott. (Ugyanolyan körülmények között, ugyanolyan autók.)

a) 4 autó 240 km-en hány liter benzint fogyasztott?

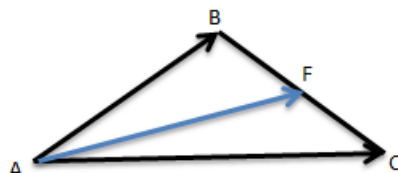
b) Egy autó 640 km-en hány liter benzint fogyasztott?

II.14. Feladat: Egy kirándulásra 42 személyes buszt bérelnék, melynek költsége 23940 Ft. A buszt nem tudták teljesen megtölteni, így fejenként 630 Ft a buszköltség. Hány hely maradt üresen?

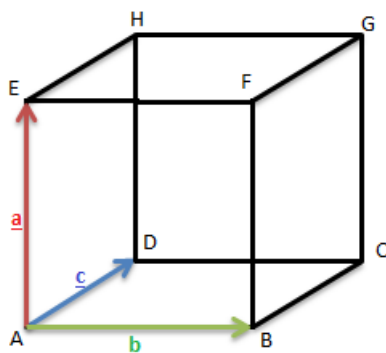
II.15. Feladat: Egy híd cölöpének az $\frac{1}{4}$ része a földben, a $\frac{2}{5}$ része a vízben van, 2,8 m hosszúságú része pedig kiáll a vízből. Milyen hosszúságú a cölöp?

III. Elemi geometria: fogalmak, tételek; vektorok; műveletek vektorokkal

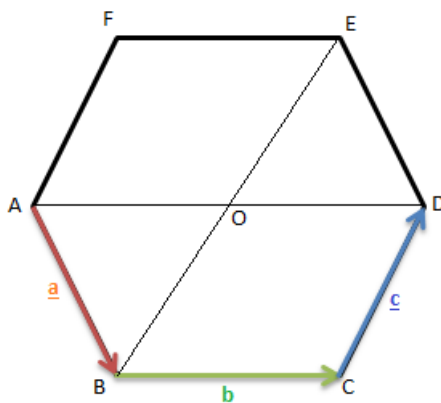
III.1. Feladat: Fejezze ki az $\overrightarrow{AF}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével, ahol F a BC szakasz felezőpontja!



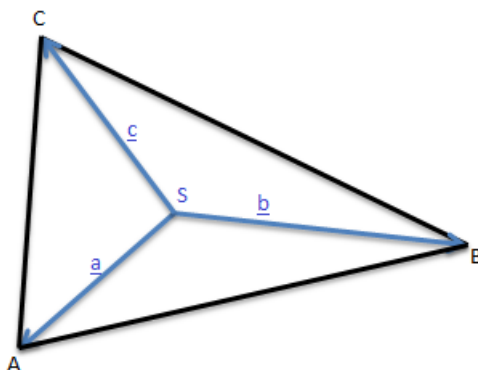
III.2. Feladat: Az ábrán látható kocka A csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AE} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ és $\overrightarrow{AD} = \underline{c}$. Fejezze ki $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével a $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{AG}$ és $\overrightarrow{FH}$ vektorokat!



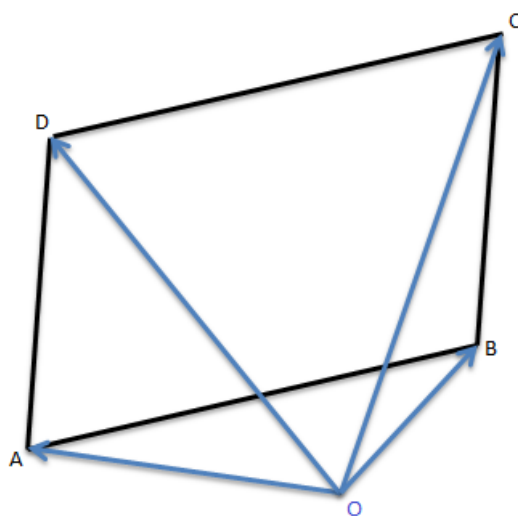
III.3. Feladat: Az ábrán látható szabályos hatszög A csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$ és $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$. Fejezze ki $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével a $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{FA}$ és az $\overrightarrow{FO}$ vektorokat!



III.4. Feladat: Az ábrán látható ABC háromszög S súlypontjából a csúcsokhoz mutató vektorok $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. Határozzuk meg az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok összegét!

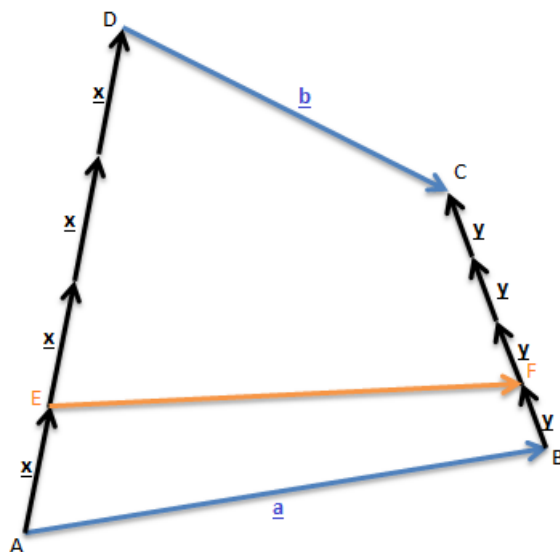


III.5. Feladat: Az ábrán látható $ABCD$ paralelogramma síkjának egy tetszőleges pontja O . Bizonyítsa be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$!



III.6. Feladat: Határozza meg az $\underline{a} + \underline{b}$ és az $\underline{a} - \underline{b}$ vektorok hosszát, ha $|\underline{a}| = 10$, $|\underline{b}| = 8$ és a két vektor hajlásszöge 75° !

III.7. Feladat: Az ábrán látható $ABCD$ négyszög szemközti oldalaira vektorokat illesztettünk: $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{b}$. Az AD oldal A -hoz közelebbi negyedelő pontja E , a BC oldal B -hez közelebbi negyedelő pontja F . Határozzuk meg az $\overrightarrow{EF}$ vektort az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok segítségével.



III.8. Feladat: Határozza meg az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszögét, ha $|\underline{a}| = 5$; $|\underline{b}| = 8$ és $\underline{a} \cdot \underline{b} = -10$!

III.9. Feladat: Egy rombusz átlóinak hossza 6,5cm és 12,25cm. Számítsa ki az átlóvektorok skaláris szorzatát! Válaszát indokolja!

III.10. Feladat: Adott egy $ABCD$ paralelogramma és egy O pont. Bizonyítsuk be, hogy:

$$(OA^2 + OC^2) - (OB^2 + OD^2) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

IV. Elemi függvények: (lineáris, abszolútérték, másodfokú, négyzetgyök, racionális törtfüggvények és tulajdonságaik)

IV.1. Feladat: Feladat: Legyen adva a következő két ponthalmaz:

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \geq -1\}$$

$$B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } x \geq 1\}$$

Ábrázolja a következő ponthalmazokat:

a.) $A \cap B$

b.) $A \cup B$

c.) $A \setminus B$

IV.2. Feladat: Feladat: Ábrázolja a következő függvényeket!

a.) $x \mapsto 3x - 2$

e.) $x \mapsto \frac{1}{3}(x - 6) + 4$

b.) $x \mapsto -3x + 2$

f.) $x \mapsto -\frac{3}{5}(x + 5) + 3$

c.) $x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$

g.) $x \mapsto 2(x + 2) - 4(x + 3)$

d.) $x \mapsto -\frac{3}{4}x + 1$

IV.3. Feladat: Feladat: Ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a következő ponthalmazokat:

a.) $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \geq 2x - 1\}$

b.) $B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \leq -\frac{3}{2}x + 3\}$

c.) $C = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \geq -\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\}$

d.) $D = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } x \geq \frac{5}{2}y + 2\}$

IV.4. Feladat: Feladat: Adott az $f(x) = ax + b$, $x, a, b \in \mathbb{R}$. Továbbá tudjuk, hogy $f(-1) = 2$ és $f(2) = 3$. Adja meg a függvény hozzárendelési szabályát, majd ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben!

IV.5. Feladat: Feladat: Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát!

a.) $f(x) = \frac{3}{4-x}$

c.) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{2-x}$

b.) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

d.) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+6}{5-2x}}$

IV.6. Feladat: Feladat: Függvény-transzformációk segítségével ábrázolja a következő függvényeket!

a.) $f(x) = |x| + 2$

g.) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$

b.) $f(x) = -x^2 - 3$

h.) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$

c.) $f(x) = \sqrt{x} - 1$

i.) $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 1$

d.) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

j.) $f(x) = -2\sqrt{3-x} + 2$

e.) $f(x) = -|x+1| + 3$

f.) $f(x) = (x-1)^2 + 2$

IV.7. Feladat: Feladat: Ábrázolja és jellemezze a következő függvényeket (értelmezési tartomány, értékkészlet; zérushely, menete, szélsőérték, paritás)!

a.) $f(x) = x - 1 - 2|x-2|$

g.) $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$

b.) $f(x) = |6x - x^2|$

h.) $f(x) = \left| \frac{x-3}{x+2} \right|$

c.) $f(x) = |x+2| - 2|x-2|$

i.) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 16}$

d.) $f(x) = ||x| - 2| + 1|$

e.) $f(x) = x^2 - 10x + 9$

f.) $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x+3} - 1$

IV.8. Feladat: Feladat: Grafikus módszerrel (függvénygrafikonok segítségével) oldja meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a.) $x^2 - 4x + 7 = 0$

f.) $\frac{x-1}{x+1} < x$

b.) $8x - 12 - x^2 \geq 0$

g.) $\sqrt{x-2} > (x-2)^2$

c.) $x+2 = \sqrt{4-x}$

h.) $\sqrt{x-1} = 3 - |x-4|$

d.) $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1$

e.) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$

i.) $x^2 - 6x + 7 = \frac{2}{x-4}$

IV.9. Feladat: Feladat: Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományának azon legbővebb részhalmazát, melyen létezik inverze. Adja meg az inverz függvényt!

a.) $y = 2x + 3$

e.) $y = x^2$

b.) $y = \frac{5}{x}$

f.) $y = \frac{1-x}{1+x}$

c.) $y = \frac{x+2}{3}$

g.) $y = \sqrt{1-x^2}$

d.) $y = \frac{3x-1}{2}$

IV.10. Feladat: Feladat: Oldja meg lineáris függvények segítségével az alábbi másodfokú egyenlőtlenségeket:

a.) $(x-2)(x+3) \leq 0$

b.) $\frac{(x-5)(x+2)}{(3-x)(1-x)} \leq 0$

IV.11. Feladat: Feladat: Ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben azon pontok halmazát, amelyeknek koordinátáira teljesül:

a.) $y \leq \sqrt{x} + 3$

c.) $y + \frac{1}{2} > |x^2 - 4x|$

b.) $y - 3 \geq \sqrt{1-x^2}$

d.) $y < 2 - |x-2|$

IV.12. Feladat: Feladat: Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja a következő függvényeket!

a.) $x \mapsto \begin{cases} -|x+5|+3, & \text{ha } x \leq -2 \\ \sqrt{x+2}, & \text{ha } x > -2 \end{cases}$

c.) $x \mapsto \begin{cases} x^2 - 6x, & \text{ha } x < 3 \\ 1, & \text{ha } x = 3 \\ x, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$

b.) $x \mapsto \begin{cases} 2 \cdot (4-x), & \text{ha } x \geq 1 \\ (x+1)^2, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$

V. Elemi függvények: exponenciális függvény; a logaritmus fogalma; a logaritmus azonosságai; a logaritmus függvény

V.1. Feladat: Feladat: Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát!

$$a.) f(x) = \frac{9^x - 1}{3^x - 1}$$

$$c.) f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{x-2}{x+3}}$$

$$b.) f(x) = \ln \frac{x+3}{x-1}$$

$$d.) f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-3)}$$

V.2. Feladat: Feladat: Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja a következő függvényeket!

$$a.) f(x) = 2^{x+1}$$

$$f.) f(x) = \sqrt{2^{2x-2}} - 2$$

$$b.) f(x) = 3^{x-2} - 3$$

$$g.) f(x) = 2^{2-x} + \frac{3}{2^x}$$

$$c.) f(x) = \log_2(x-1)$$

$$h.) f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2$$

$$d.) f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) - 3$$

$$i.) f(x) = \log_2(x^2 - 2x + 1)$$

$$e.) f(x) = \frac{3^2}{3^x}$$

V.3. Feladat: Feladat: Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja a következő függvényeket!

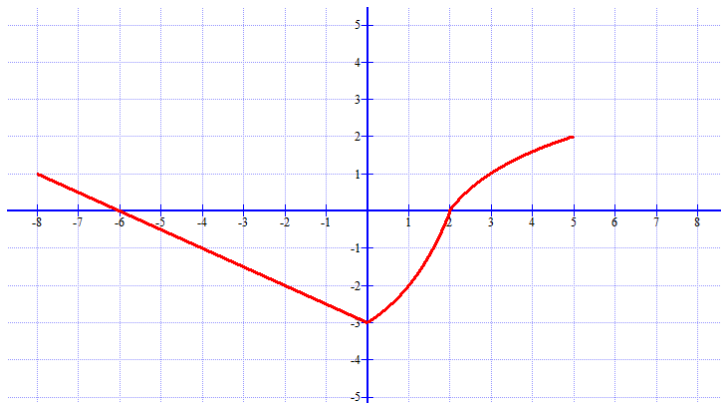
$$a.) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 4^{-2x}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

$$b.) f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & \text{ha } x \leq 1 \\ \log_2 x + 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$c.) f(x) = \begin{cases} 3^{-x+1}, & \text{ha } x \leq 1 \\ 2x - x^2, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$d.) f(x) = \begin{cases} \log_2(x+2), & \text{ha } -2 \leq x \leq 2 \\ 2^{x-1}, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

V.4. Feladat: Feladat: Az alábbi ábrán a $[-8;5]$ -on értelmezett függvény egy egyenes, egy exponenciális és egy logaritmikus függvény íveiből tevődik össze (balról jobbra haladva).



- Adja meg a függvény hozzárendelési szabályát!
- Határozza meg a függvény értékkészletét!
- Adja meg a függvény zérushelyét!
- Határozza meg a függvény minimumát és maximumát!
- Adjon meg olyan intervallumot, ahol a függvény szigorú monoton növekvő!
- Határozza meg, hol negatív, illetve hol pozitív a függvény!

VI. Descartes-féle koordináta-rendszer; Koordináta geometria: szakasz felezőpontja, harmadolópontjai; háromszög súlypontja; két pont távolsága; az egyenes egyenletének különböző alakjai; kör egyenlete

VI.1. Feladat: Adottak az $\underline{a}(-3;2)$ és $\underline{b}(-1;5)$ vektorok. Adjuk meg az alábbi vektorok koordinátáit:

a.) $\underline{a} + \underline{b}$

b.) $\underline{a} - \underline{b}$

c.) $3\underline{a}$

d.) $-2\underline{b}$

e.) $3\underline{a} - 2\underline{b}$

f.) $-\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{3}{2}\underline{b}$

g.) $(\underline{a} - 3\underline{b}) - (3\underline{a} - 2\underline{b})$

h.) $2\left(\frac{5}{2}\underline{a} - \frac{1}{2}\underline{b}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{3}{2}\underline{b}\right)$

VI.2. Feladat: Adja meg a következő vektorok abszolútértékét!

a.) $\underline{a}(-13;12)$

b.) $\underline{b}(-12;7)$

c.) $\underline{c}(-9;-5)$

d.) $\underline{d}\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

e.) $\underline{e}\left(-\frac{12}{10}; \frac{5}{10}\right)$

f.) $\underline{f}\left(\frac{7}{4}; \frac{5}{3}\right)$

VI.3. Feladat: Fejezze ki az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ vektorok segítségével a $\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b}$ vektort, ha $\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$ és $\underline{b} = \underline{i} + 5\underline{j}$!

VI.4. Feladat: Adottak az $\underline{a}(-2;3)$ és $\underline{b}(-1;7)$ vektorok. Számítsa ki az alábbi vektorok skaláris szorzatát:

a.) $\underline{a}$ és $\underline{b}$

b.) $\underline{a}$ és $-\underline{b}$

c.) $3\underline{a}$ és $-2\underline{b}$

d.) $\underline{a} + \underline{b}$ és $\underline{a} - \underline{b}$

e.) $3\underline{a} - 2\underline{b}$ és $2\underline{a} + 3\underline{b}$

VI.5. Feladat: Adott az $\underline{a}(4;3)$ vektor. Számítsa ki a $\underline{b}$ vektor koordinátáit, ha:

a.) $\underline{a} - \underline{b}(10;3)$

b.) $\underline{a} + \underline{b}(-4;6)$

c.) $\underline{a} - 2\underline{b}(10;20)$

d.) $2\underline{a} + 3\underline{b}(-12;-4)$

VI.6. Feladat: Számítsa ki a következő vektorok által bezárt szög nagyságát két tizedes pontossággal!

a.) $\underline{a}(1;4)$ és $\underline{b}(-2;7)$

b.) $\underline{a}(2;-5)$ és $\underline{b}\left(15; \frac{13}{2}\right)$

c.) $\underline{a}\left(2; \frac{3}{2}\right)$ és $\underline{b}\left(\frac{15}{2}; -10\right)$

d.) $\underline{a}\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$ és $\underline{b}\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{3}\right)$

VI.7. Feladat: Számítsa ki a következő pontok origótól való távolságát!

a.) $A(0;2)$

b.) $B(-8;0)$

c.) $C(-3;-4)$

d.) $E\left(\frac{3}{4};\frac{2}{3}\right)$

e.) $F\left(\frac{\sqrt{7}}{3};\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

VI.8. Feladat: Számítsa ki az A és B pontok távolságát!

a.) $A(5;3)$ és $B(-6;3)$

b.) $A(-4;2)$ és $B(1;5)$

c.) $A\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$ és $B\left(\frac{5}{2};-\frac{7}{3}\right)$

VI.9. Feladat: Adott az ABC háromszög. Számítsa ki az oldalainak hosszát, területét és a belső szögeit két tizedes pontossággal!

a.) $A(-2;-4)$, $B(5;-3)$, $C(-1;3)$

b.) $A(12;13)$, $B(1;-8)$, $C(-2;5)$

VI.10. Feladat: Adja meg az AB szakasz felezőpontjának, illetve harmadolópontjainak koordinátáit!

a.) $A(3;4)$, $B(5;2)$

b.) $A(-1;2)$, $B(-3;2)$

c.) $A\left(\frac{3}{2};1\right)$, $B\left(\frac{5}{2};-3\right)$

d.) $A\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{7}{4};-\frac{4}{3}\right)$

e.) $A\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right)$, $B\left(-\frac{5}{6};-\frac{1}{3}\right)$

VI.11. Feladat: Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-1;-1)$, $B(1;3)$, $C(2;-2)$

a.) Számítsa ki a háromszög oldalfelező pontjainak koordinátáit!

b.) Adja meg a háromszög oldalvektorainak, valamint középvonal-vektorainak koordinátáit!

c.) Igazolja, hogy a háromszög bármely oldala párhuzamos a másik két oldal felezőpontját összekötő középvektorral!

VI.12. Feladat: Az ABC háromszög súlypontja: S . Adja meg a hiányzó pont koordinátáit!

a.) $A(-4;-2)$, $B(7;1)$, $C(3;10)$ $S = ?$

b.) $A(-2;5)$, $B(8;5)$, $S(2;4)$ $C = ?$

c.) $B(-3;-4)$, $C(1;2)$, $S\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ $A = ?$

VI.13. Feladat: Adott az e egyenes továbbá két pontja A és B . Adjuk meg az egyenes egy irányvektorát, egy normálvektorát, irányszögét, és iránytangensét (amennyiben létezik)!

a.) $A(3;2), B(-3;2)$

b.) $A(-1;2), B(2;4)$

c.) $A\left(\frac{1}{2};1\right), B\left(\frac{3}{2};-2\right)$

d.) $A\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right), B\left(\frac{3}{4};-\frac{4}{3}\right)$

VI.14. Feladat: Írja fel az egyenes egyenletét, ha adott az egyenes egy pontja (P), továbbá irányvektora, vagy normálvektora, vagy irányszöge, vagy iránytangense ($\underline{v}$, $\underline{n}$, α , m)!

a.) $\underline{v}(-3;2), P(2;-5)$

b.) $\underline{v}\left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right), P(-2;-2)$

c.) $\underline{n}(-2;-4), P(-4;-2)$

d.) $\underline{n}(-\sqrt{3};\sqrt{8}), P(2;3)$

e.) $\underline{n}\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right), P(2;4)$

f.) $\alpha = -30^\circ, P(4;-1)$

g.) $\alpha = 60^\circ, P(7;2)$

h.) $\alpha = 45^\circ, P(-3;-2)$

i.) $m = -2, P(0;0)$

j.) $m = \frac{1}{3}, P(4;5)$

k.) $m = -\frac{2}{7}, P\left(\frac{1}{3};-\frac{3}{5}\right)$

VI.15. Feladat: Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3,5)$ ponton és párhuzamos a $4x + 5y = 0$ egyenletű egyenessel!

VI.16. Feladat: Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2,2)$ ponton és merőleges a $-2x + 3y = 7$ egyenletű egyenesre!

VI.17. Feladat: Az ABC háromszög csúcspontjának koordinátái: $A(1;1), B(-2;4), C(4;5)$

a.) Írja fel az AB oldal egyenesének egyenletét!

b.) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! Válaszát tized fokra kerekítve adja meg!

c.) Számítsa ki az ABC háromszög területét!

d.) Írja fel a BC oldalhoz tartozó magasságvonal egyenletét!

e.) Írja fel a háromszög C csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét!

VI.18. Feladat: Az ABC háromszög csúcspontjának koordinátái: $A(6;9), B(-5;4), C(-2;1)$

a.) Írja fel az AB oldal egyenesének egyenletét!

- b.) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! Válaszát tized fokra kerekítve adja meg!
- c.) Számítsa ki az ABC háromszög területét!
- d.) Írja fel a BC oldalhoz tartozó magasságvonal egyenletét!
- e.) Írja fel a háromszög C csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét!

VI.19. Feladat: Az PQR háromszög csúcspontjának koordinátái: $P(-2;-1)$, $Q(9;-3)$, $R(-3;6)$

- f.) Írja fel az QR oldal egyenesének egyenletét!
- g.) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! Válaszát tized fokra kerekítve adja meg!
- h.) Írja fel a PQ oldallal párhuzamos középvonal egyenletét!
- i.) Írja fel az R csúcson áthaladó súlyvonal egyenesének egyenletét!
- j.) Írja fel a háromszög Q csúcsához tartozó magasságvonal egyenesének egyenletét!

VI.20. Feladat: Írja fel az O középpontú r sugarú kör egyenletét!

- a.) $O(0;0)$ $r=2$
- b.) $O(3;0)$ $r=1$
- c.) $O(-4;2)$ $r=3$
- d.) $O(\sqrt{2};4)$ $r=\sqrt{3}$
- e.) $O(1-\sqrt{3};\sqrt{5})$ $r=\sqrt{11}$
- f.) $O(\log_2 3;-3)$ $r=7$

VI.21. Feladat: Írja fel az O középpontú P ponton áthaladó kör egyenletét!

- a.) $O(0;0)$ $P(4,0)$
- b.) $O(-2;-3)$ $P(-5,-2)$
- c.) $O(1;-4)$ $P(2,5)$
- d.) $O(5;-4)$ $P(-3,2)$

VI.22. Feladat: Határozzuk meg az egyenletével megadott kör középpontjának koordinátáit, valamint sugarát!

- a.) $x^2 + y^2 = 20$
- b.) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$
- c.) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = -5$
- d.) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$
- e.) $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 25$
- f.) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 20 = 0$

VI.23. Feladat: Számítsa ki az egyenleteikkel megadott alakzatok metszéspontjának koordinátáit!

- a.) $4x+3y=7$ és $3x-2y=1$
- b.) $7x+13y=50$ és $-7x+11y=-15$
- c.) $x^2+y^2-2x+2y-8=0$ és $x-2y=-5$
- d.) $(x+2)^2+(y+2)^2=4$ és $x+2y+1=0$

VI.24. Feladat: Határozza meg a háromszög csúcspontjainak koordinátáit, ha oldalegyeneseik egyenlete:

- a.) $2x + 7y = 31$, $-5x + 6y = -7$ és $7x + y = -9$
- b.) $x - 12y = -28$, $-8x + 9y = -37$ és $7x + 3y = -22$

VI.25. Feladat: Írja fel a háromszög köré írható kör egyenletét, ha csúcsai:

- a.) $A(1;1)$, $B(-2;4)$, $C(4;5)$
- b.) $A(6;9)$, $B(-5;4)$, $C(-2;1)$
- c.) $P(-2;-1)$, $Q(9;-3)$, $R(-3;6)$

VI.26. Feladat: Adott a koordináta-rendszerben az $A(9;-8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör. Írja fel a kör $P(1;-2)$ pontjába húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek a meredekségét!

VI.27. Feladat: Adott az $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0$ egyenletű kör és az $x - 8,4 = 0$ egyenletű egyenes.

- a.) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit!
- b.) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől?

VI.28. Feladat: Legyenek $A(7;7)$ és $B(0;0)$ egy egyenlőszárú háromszög alapjának végpontjai. A háromszög C csúcsa rajta van az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű körön. Számítsa ki a C csúcs koordinátáit!

VI.29. Feladat: Adott az $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz!

VII. Egyváltozós polinomok: fogalmak; műveletek polinomokkal (szorzattá alakítás, osztás)

VII.1. Feladat: Végezze el a kijelölt műveleteket, majd rendezze a tagokat fokszám szerint csökkenő sorrendbe!

- a.) $(3x^2 - 2x + 1) - (x^2 - x - 3) - (x^2 + 5x - 2)$
- b.) $2(y^2 - y + 1) + 3(y^2 + y - 3) - 4(y^2 + 5y + 2)$
- c.) $(2x - 4)(5 - x) - (4x + 2)(3 + 3x)$
- d.) $(5x + 1)(2x - 1) - 2\{2 - 3[2x - (-x - 3) + 3]\} - (6 + 5x)(2 - x)$
- e.) $(2x - 4)^2(5 - x)$
- f.) $(x^2 - 2x + 1)(5 - x)$
- g.) $(x^2 - 3x)^2 + 2(3 - 2x^2)(3 + 2x^2) - (4x + 1)^2$

VII.2. Feladat: Oldja meg a következő egyenleteket

- a.) $(3x + 1)(2 - 6x) = 0$
- b.) $(3 + x)(2 - 2x) + (2 - 2x) = 0$
- c.) $\left(\frac{4}{9} - x^2\right)(x^2 - 4) = 0$

VII.3. Feladat: Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket!

- a.) $(x + 1)(1 - 3x)(2 - x) \geq 0$
- b.) $(2x + 6)^2(1 - x)^3(4 - x^2) \leq 0$
- c.) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x - 5) \geq 0$

VII.4. Feladat: Alakítsa szorzattá az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket, majd oldja meg az egyenleteket!

- a.) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$
- b.) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
- c.) $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$
- d.) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$

VII.5. Feladat: Végezze el a két polinom osztását!

- a.) $(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2) : (x^2 - 3x + 2)$
- b.) $(-8x^3 - 27) : (2x + 3)$
- c.) $(11x^3 - 32 + 19x^2 + 3x^4 - 28x) : (-4 + 3x)$

VIII. Sorozatok: a sorozat mint függvény; számtani és mértani sorozatok tulajdonságai

VIII.1. Feladat: Határozza meg az $2a_n = 3 - 2(-1)^n$ sorozat 2018. tagját és az első 2018 tag összegét!

VIII.2. Feladat: Hányadik tagja az alábbi sorozatnak a 30?

a.) $a_n = 8n - 18$

d.) $d_n = n^2 - 11n + 18$

b.) $b_n = \frac{10n + 20}{3n - 26}$

e.) $e_n = \log_2 n$

c.) $c_n = |47 - 7n|$

f.) $f_n = 60 \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{6}$

VIII.3. Feladat: Egy számsorozat első eleme 2. Adja meg a sorozat első öt tagját, ha a második tagtól kezdve igaz, hogy:

a.) $a_n = 5a_{n-1} + 2$

b.) $b_n = \frac{3}{2}b_{n-1} - 2$

VIII.4. Feladat: Egy számsorozatra teljesül, hogy $a_1 = a_2 = 1$, továbbá $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, ahol $n \geq 3$. Adja meg a sorozat 2018. elemét, és az első 2018 tag összegét!

VIII.5. Feladat: Egy számtani sorozat differenciája -7 , első tagja 5. Adja meg a sorozat következő tagjait:

a.) a_{20}

b.) a_{51}

c.) a_{321}

d.) a_{2018}

VIII.6. Feladat: Egy számtani sorozat differenciája $\frac{3}{4}$, első tagja 20. Hányadik tagja a sorozatnak a következő szám:

a.) 95

b.) 191

c.) 935

d.) 3353

VIII.7. Feladat: Egy számtani sorozat 42. tagja -74 , 57. tagja -104 . Határozza meg a sorozatot, azaz adja meg a sorozat első elemét, differenciáját és általános tagját!

VIII.8. Feladat: Egy számtani sorozat harmadik és nyolcadik tagjának összege 34, a második és a tizenegyedik tag összege 46.

a.) Adja meg a sorozat első tagját!

b.) Adja meg a sorozat differenciáját!

c.) Adja meg a sorozat 111. tagját!

d.) Adja meg a sorozat első 41 tagjának az összegét!

VIII.9. Feladat: Egy számtani sorozat első és negyedik tagjának összege 38, a hetedik és a harmadik tag különbsége 16.

a.) Adja meg a sorozat 73. tagját!

b.) Adja meg a sorozat 51. és 29. tagjának a különbségét!

c.) Adja meg a sorozat első 999 tagjának az összegét!

VIII.10. Feladat: Egy számtani sorozat esetén ismertek a következő összefüggések:

$$a_5 \cdot a_{10} = -25 \text{ és } a_2 + a_8 = 10$$

Határozza meg a sorozatot, azaz adja meg a sorozat első elemét, differenciáját és általános tagját!

VIII.11. Feladat: Adott két egész szám 6 és az 1623.

- Iktasson be a megadott számok közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos elemei legyenek!
- Számítsa ki az adott számok által meghatározott zárt intervallumba eső négyel osztható számok összegét!

VIII.12. Feladat: Egy számtani sorozat első tagja 56, differenciája -4 . Számítsa ki n értékét, és a sorozat n -edik tagját, ha az első n tag összege 408.

VIII.13. Feladat: Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egy számtani sorozat szomszédos elemei. Mekkora a háromszög szögei?

VIII.14. Feladat: Egy mértani sorozat hányadosa -2 , első tagja 10. Adja meg a sorozat következő tagjait:

- a_5
- a_{47}
- a_{100}
- a_{2018}

VIII.15. Feladat: Egy mértani sorozat hányadosa $\frac{1}{2}$, első tagja 4. Hányadik tagja a sorozatnak a következő szám:

- 1
- 0,25
- 0,0625

VIII.16. Feladat: Adottak a következő számok: 1,8,22. A számokhoz ugyanazt a valós számot hozzáadva egy mértani sorozat három egymást követő elemét kapjuk. Határozza meg a sorozatot, azaz adja meg a sorozat első elemét, hányadosát és általános tagját!

VIII.17. Feladat: Egy mértani sorozat harmadik és negyedik tagjának összege 80, az ötödik és a harmadik tag különbsége 240. Határozza meg a sorozatot, azaz adja meg a sorozat első elemét, differenciáját és általános tagját!

VIII.18. Feladat: Egy mértani sorozat első tagja 5, második és harmadik tagjának összege 10. Adja meg a sorozat első 7 tagjának összegét!

VIII.19. Feladat: Egy-egy mértani sorozat tagjaira teljesülnek a következő összefüggések. Határozza meg a sorozatot, azaz adja meg a sorozat első elemét, hányadosát és általános tagját!

- $\begin{cases} a_1 + a_2 = 15 \\ a_3 + a_4 = 60 \end{cases}$
- $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 57 \\ a_1 + a_3 = 15 \end{cases}$
- $\begin{cases} a_1 + a_2 = 160 \\ a_6 + a_7 = 1215 \end{cases}$

VIII.20. Feladat: Igaz-e, hogy a következő számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai?

- 32; 24; 18
- 16; 40; 100

VIII.21. Feladat: Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egy mértani sorozat szomszédos elemei. Mekkora a háromszög szögei?

- VIII.22. Feladat:** Egy számtani sorozat első három tagjának összege 6. Ha az első taghoz 5-öt, a másodikhoz 2-t, a harmadikhoz 1-et adunk, egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Határozza meg a sorozatokat, azaz adja meg a sorozat első elemét, differenciáját vagy hányadosát és általános tagját!
- VIII.23. Feladat:** Egy mértani sorozat második tagja 12. Ha a sorozat első tagjához 4-et, a másodikhoz 3-at, a harmadikhoz pedig 1-et adunk, egy számtani sorozat egymást követő elemeit kapjuk. Határozza meg a sorozatokat, azaz adja meg a sorozat első elemét, differenciáját vagy hányadosát és általános tagját!
- VIII.24. Feladat:** Ha elhelyezünk a bankba 200000Ft-ot évi 6%-os kamatra, és a kamat is kamatozik 10 éven át, akkor a 10. év végén mekkora összeget vehetünk ki a bankból?
- VIII.25. Feladat:** Egy család a megtakarított 800000 Ft-ját két évre bankba szeretné helyezni kamatos kamatra. Hány százalékos volt a kamatláb az első év folyamán, ha a bank ezt a kamatlábat 3%-kal növelte a második évben, és így a második év végén 907200 Ft-ot vehetett fel a család?
- VIII.26. Feladat:** Hány év alatt növekszik háromszorosára egy bankban elhelyezett betétünk, ha az éves kamat 6,4% és az évek alatt nem változik!

IX. Kombinatorika: halmazok; összeszámlálási alapfeladatok; binomiális együtthatók (Pascal háromszög)

- IX.1. Feladat:** Igazolja, hogy egy 25 fős társaságban mindig van legalább három olyan ember, aki ugyanabban a hónapban ünnepli a születésnapját?
- IX.2. Feladat:** Egy iskola 470 tanulója 16 osztályban tanul. Bizonyítsa be, hogy van legalább egy osztály, amelynek létszáma eléri a 30-at!
- IX.3. Feladat:** Igazolja, hogy a 2 egység oldalú négyzetben bárhogyan is helyezünk el öt pontot, lesz közöttük legalább két olyan, melynek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$!
- IX.4. Feladat:** Egy 32-es létszámú osztályban év végén hét tanulónak volt jelese matematikából, 12 tanulónak pedig történelemből. Négyen mindkét tárgyból jelest kaptak. Hány olyan tanuló van ebben az osztályban, akinek matematikából és történelemből sem volt jelese?
- IX.5. Feladat:** Hány darab kétjegyű pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?
- IX.6. Feladat:** Hány elemű lehet egy 20 és egy 15 elemű halmaz uniója?
- IX.7. Feladat:** Egy futóverseny nyolc indulója hányféle sorrendben érhet be a célba?
- IX.8. Feladat:** Van 3 piros, 2 fehér, 5 zöld golyónk. Hányféle módon tudjuk őket sorba rendezni?
- IX.9. Feladat:** Egy sakkversenyen egy versenyzőnek az 5. forduló után 3,5 pontja van. Hányféleképpen érhetette el az eredményét, ha azt is figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben szerezte pontjait?
- IX.1. Feladat:** Az alábbi elrendezésből hányféleképpen olvasható ki a BUDAPEST szó, ha csak jobbra és lefele léphetünk?

B	U	D	A	P
U	D	A	P	E
D	A	P	E	S
A	P	E	S	T

- IX.10. Feladat:** Egy futóverseny nyolc indulója között hányféle módon osztható ki az arany-, ezüst- és bronzérem?
- IX.11. Feladat:** Hány 13-tippes totószelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatunk?
- IX.12. Feladat:** Szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Az eredményeket egymás mellé írva hány kétjegyű számot kaphatunk?
- IX.13. Feladat:** Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek minden jegye páratlan (páros)?
- IX.14. Feladat:** Hány rendszám tábla készíthető 24 betű és 10 számjegy felhasználásával, ha a rendszám 3 betűből és 3 számjegyből áll?
- IX.15. Feladat:** Hány pozitív osztója van a 210-nek?

- IX.16. Feladat:** Hány húzási eredmény lehetséges a hagyományos lottóban?
- IX.17. Feladat:** Hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak? Összesen hány részhalmaza van a kérdéses n elemű halmaznak?
- IX.18. Feladat:** Bizonyítsd be a binomiális tételt!
- IX.19. Feladat:** Bizonyítsd be, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$! Rajzold fel a Pascal-háromszöget!
- IX.20. Feladat:** Ha n adott egész szám, akkor $\binom{n}{k}$ mely k értékre lesz maximális?
- IX.21. Feladat:** Hányféleképpen lehet 100 tanulót 25 fős osztályokba beosztani, ha az osztályok sorrendje nem számít?
- IX.22. Feladat:** Az összes lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány négytalálatos van (és 3, és 2)?
- IX.23. Feladat:** Ha a virágboltban hétféle virágot árulnak, hányféleképpen lehet ötszálás csokrot választani?

X. Szögfüggvények: értelmezés (forgásszögekre is); összefüggések; addíciós tételek; trigonometrikus egyenletek, függvények

X.1. Feladat: Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a.) $\sin x = \frac{1}{2}$

b.) $\cos x = -1$

c.) $2\sin x = -\sqrt{2}$

d.) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e.) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

f.) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

g.) $4\cos^2 x = 1$

h.) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$

i.) $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$

j.) $\sin x = \sin y$

k.) $\sin x = \cos x$

l.) $\cos(3x - 4\pi) = \sin(\pi - x)$

m.) $\sin 2x - \cos x = 0$

n.) $4\cos x = \frac{1}{\sin x} \quad \sin x \neq 0$

o.) $\sin^2 x = 2\sin x + 3$

p.) $\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$

q.) $2\cos^2 x = 4 - 5\sin x$

X.2. Feladat: Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség:

a.) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

b.) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$

c.) $\sin \alpha = 0$

d.) $\cos^2 \alpha = 2\cos \alpha + 3$

e.) $\cos 2\alpha = \sin \alpha$

X.3. Feladat: Adja meg az összes olyan forgásszöget fokokban mérve, amelyre

$$f(x) = \frac{2\sin x}{\cos^2 x} \text{ függvény nem értelmezhető! Válaszát indokolja!}$$

X.4. Feladat: Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

a.) Az $x \mapsto \sin x \quad x \in \mathbb{R}$ függvény periódusa 2π .

b.) Az $x \mapsto \sin(2x) \quad x \in \mathbb{R}$ függvény periódusa 2π .

c.) Van olyan derékszögű háromszög, amelyben az egyik szög szinusza $\frac{1}{2}$

d.) Ha egy háromszög egyik hegyesszögének szinusza $\frac{1}{2}$, akkor a háromszög derékszögű.

e.) A derékszögű háromszögnek van olyan szöge, amelynek nincs tangense.

f.) A derékszögű háromszögnek bármelyik szögének értelmezzük a koszinuszát.

g.) Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.

h.) A $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2; 2]$ zárt intervallum.

i.) A $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ zárt intervallum.

X.5. Feladat: Határozza meg a következő, valós számok halmazán értelmezett függvények értékkészletét!

a.) $x \mapsto 1 + \cos x$

b.) $x \mapsto \sin x - 2$

c.) $x \mapsto 2 \cos x + 2$

d.) $x \mapsto -3 \sin(2x) - 1$

e.) $x \mapsto \frac{1}{2}(\sin x - 1)$

f.) $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

g.) $x \mapsto 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

X.6. Feladat: Határozza meg a következő, valós számok halmazán értelmezett függvények értelmezési tartományát

a.) $x \mapsto \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{2}$

b.) $x \mapsto \frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$

c.) $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$

d.) $x \mapsto \frac{\cos 2x}{\sin x(1 - \operatorname{ctg} x)}$

X.7. Feladat: Számológép használata nélkül adja meg a következő kifejezések pontos értékét!

a.) $2 \cos 60^\circ - \sin 45^\circ + \cos 45^\circ + 2 \cdot \sin 30^\circ$

b.) $\sin 30^\circ + \sin 45^\circ + \sin 60^\circ + \sin 90^\circ + \cos 30^\circ + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ + \cos 90^\circ$

c.) $\frac{\cos 60^\circ - \sin 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ}$

d.) $\frac{\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ}{2 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ - 3}$

X.8. Feladat: Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket!

a.) $\sin x > 0$

b.) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$

c.) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

d.) $\operatorname{ctg} x \geq -1$

e.) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

f.) $2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$

g.) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} \geq 0$

XI. Egyenletek: megoldás; másodfokú egyenlet (gyöktényezős alakja, Viète-formulák); Speciális harmad- és negyedfokú egyenletek; Egyenlőtlenségek

XI.1. Feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a.) $2(2x-11)-5(2x+3)=7(4-x)$

b.) $\frac{2}{3}(5x-3)=\frac{1}{2}(3x+5)$

c.) $3(4-x)=2[3-2(4+x)]$

d.) $1-x=\frac{1-2x}{2}+\frac{3-4x}{3}$

e.) $\frac{3x+5}{18}+\frac{1+4x}{12}-\frac{5x-2}{6}=0$

f.) $2x(x+1)(2-3x)(4-x)=0$

g.) $x \cdot \frac{(15-x)(x+7)}{x-15} \cdot (2x-1)=0$

h.) $|5x-13|=7$

i.) $|7-2x|=3x+4$

j.) $2 \cdot |x-1|-|x+4|=x-6$

k.) $14x^2-25x-25=0$

l.) $(5x+1)(3x-5)=2(1-19x)$

m.) $2x-2=\frac{x^2+6}{x+3}$

n.) $(x+1)^2-3=6$

o.) $\frac{x^2-25}{x+5}=0$

p.) $\sqrt{5x-3}=2$

q.) $\sqrt{4x+21}=x+4$

r.) $\sqrt{2x-\frac{3}{4}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$

s.) $\sqrt{7x-5}=\sqrt{4x+7}$

t.) $\sqrt{x-7}-\sqrt{5-x}=2$

u.) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x+4}$

v.) $9^{2x-1}=27^3$

w.) $5^{5x-2}-1=0$

x.) $\sqrt[4]{7^x}=\sqrt[5]{2401}$

y.) $0,125^{2-x}=\frac{8}{2^{x-5}}$

z.) $15 \cdot 2^{x+3}-7 \cdot 2^{x+1}+2^x=107$

aa.) $4^{x+2}-6 \cdot 2^x+2^2=0$

bb.) $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-11x+10}=\frac{25}{4}$

cc.) $5^x=\frac{1}{5^x}+\frac{24}{5}$

dd.) $2^{x-3} \cdot 3^2=3^{x-1}$

ee.) $\lg(8x-15)=\lg(1-x)$

ff.) $\frac{\log_4(x+2)}{\log_4(2x-1)}=1$

gg.) $3+\log_2 5=\log_2(7x-2)$

hh.) $\log_3(5x-7)-\log_3(3x+9)=2$

ii.) $2\lg(2x+3)=\lg(4x+1)+\lg(2x-3)$

jj.) $\log_3(\sqrt{x+1}+1)=2$

XI.2. Feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

a.) $7+x < -2 \cdot (x-2)$

b.) $x^2 \geq 6-x$

c.) $4x^2-35x+20 \leq -4$

d.) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x+2}{5} \geq -1$

e.) $\frac{13x+7}{x^2+22} > 0$

f.) $\frac{4x-3}{3-x} \leq 2$

g.) $\frac{7-3x}{6x-2}-\frac{4x+1}{3x-1} < -2$

h.) $\frac{3x+2}{2x^2-x-10} \geq 0$

i.) $\frac{(3x+1)(x-2)}{(x-5)(3-x)} \leq 0$

j.) $|x+2|-1 \leq 2x$

k.) $7^{3x-4} \geq \frac{1}{49}$

l.) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x-3} < \frac{49}{25}$

m.) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{4-x}$

n.) $\log_5(x^2-25) \geq 0$

o.) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-3) \leq -3$

p.) $\lg(8x+4) - \lg(3x+5) < \lg(2x-4)$

q.) $\frac{\log_{\frac{2}{3}}(x+5)}{\log_{\frac{2}{3}}(x-4)} \geq 0$

XI.3. Feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a.) $x^3 - 5 = 3$

b.) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

c.) $x^4 - 81 = 0$

d.) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

e.) $x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 2x + 1 = 0$

XII. Egyenletrendszerek: fogalmak, két- és három-ismeretlenes egyenletrendszerek; megoldási módszerek

XII.1. Feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő két-ismeretlenes egyenletrendszereket!

$$\text{a.) } \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 7x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$\text{b.) } \begin{cases} x + y = 12 \\ x \cdot y = 32 \end{cases}$$

$$\text{c.) } \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{d.) } \begin{cases} \frac{y-4}{x+1} = 3 \\ (y-1)(x+1) = 12 \end{cases}$$

$$\text{e.) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 3y = x^2 + 5 \end{cases}$$

$$\text{f.) } \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - 3 = \sqrt{3x + y} \end{cases}$$

$$\text{g.) } \begin{cases} 4 \cdot 3^x + 2^y = 16 \\ 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 3 \end{cases}$$

$$\text{h.) } \begin{cases} 5^{xy} = \frac{1}{25} \\ 9^x \cdot 3^y = 27 \end{cases}$$

$$\text{i.) } \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y = 1 \\ \log_2 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$$

$$\text{j.) } \begin{cases} 5^{2x-y} + 2^{x+1} = 21 \\ 5^{2x-y+1} - 2^x = 17 \end{cases}$$

$$\text{k.) } \begin{cases} 7 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_2 y = -6 \\ 3 \cdot \log_3 x + 8 \cdot \log_2 y = 81 \end{cases}$$

l.)

XII.2. Feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő háromismeretlenes egyenletrendszereket!

$$\text{a.) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 3x - 4y + 4z = 4 \end{cases}$$

$$\text{b.) } \begin{cases} 3x + y + 6z = 8 \\ 2x + 2y + 5z = 11 \\ x + y - 3z = 11 \end{cases}$$

$$\text{c.) } \begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ 8x - 2y + 4z = 7 \\ -4x + y - 2z = -14 \end{cases}$$

XIII. Logika, Gráfok: fogalmak; tételek

XIII.1. Feladat: Döntse el, hogy az alább felsoroltak közül melyik mondat a tagadása a következő állításnak! Minden érettségi feladat egyszerű.

- a.) Minden érettségi feladat bonyolult.
- b.) Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű.
- c.) Sok érettségi feladat bonyolult.
- d.) Van olyan érettségi feladat, ami egyszerű

XIII.2. Feladat: Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja: Minden háztartásban van televízió. Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!

- a.) Semelyik háztartásban nincs televízió.
- b.) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
- c.) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
- d.) Nem minden háztartásban van televízió.

XIII.3. Feladat: Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált.

XIII.4. Feladat: Egy gráfban 4 csúcs van. Az egyes csúcsok fokszáma 3;2;2;1. Hány éle van a gráfnak?

XIII.5. Feladat: Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek!

XIII.6. Feladat: Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2.

XIII.7. Feladat: Egy hatfős társaságban mindenkit megkérdeztek, hány ismerőse van a többiek között (az ismertségek kölcsönösek). Az első öt megkérdezett személy válasza: 5,4,3,2,1.

- a.) Ábrázolja gráffal a hatfős társaság ismertségi viszonyait!
- b.) Hány ismerőse van a hatodik személynek a társaságban?

XIII.8. Feladat: Rajzoljon olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma: 0; 1; 2; 2; 3; 4.

XIII.9. Feladat: Egy 5 fős társaságban 8 kézfogás történt. Adj meg egy olyan gráfot, amely ezt szemlélteti! (A gráf csúcsai legyenek a társaság tagjai, élei pedig a kézfogásoknak feleljenek meg.)

XIII.10. Feladat: Ábrázoljuk gráfokkal az alábbiakat!

- a.) Egy Bergengóc falucskában a Főtérről a Tóhoz, a Parkba és a Kilátóhoz vezet út. Ezen kívül még a Tó és a Park között tapostak ki járást a helyiek.
- b.) Egy tengerészeti hadgyakorlaton négy hajó (H1, H2, H3, H4) vett részt és rendre piros, zöld, kék és sárga festékpatronnal lőtték egymást. A gyakorlat végén H1 oldalán zöld és kék, H2 oldalán kék, H4 oldalán piros foltok díszeltek, azonban H3 tiszta volt.
- c.) Négy ember találkozásán a következő kézfogások történtek. Egyvalaki mindenkivel lekezelt, két másik illető pedig egymással.

XIII.11. Feladat: Rajzolj olyan ötpontú gráfot, melyben minden pont fokszáma különböző!

XIV. Megoldási segédlet (Elemi algebra: hatványozás; hatványozás azonosságai; nevezetes szorzatok; a racionális kitevőjű hatvány fogalma; a hatványozás és gyökvonás azonosságai)

Hatványozás azonosságai:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n; \Rightarrow \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \Rightarrow a^n = \frac{1}{a^{-n}}; \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

$$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}; \Rightarrow a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

Nevezetes szorzatok:

$$(a+b)c = ac+bc$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \text{ A tagok előjeles kifejezések!}$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

Másodfokú kifejezések szorzattá alakítása:

Másodfokú egyenlet	
Teljes	Hiányos
Ha, $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$, akkor	$b = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^2 + c = 0$
Megoldó	Megoldás:
képlet: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$ax^2 + c = 0$
Gyöktényezős	$ax^2 = -c$
alak: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$	$x^2 = \frac{-c}{a}$
Viéte – formulák:	ha $\frac{-c}{a} \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$
$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ és $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$	
	$c = 0$
	$ax^2 + bx = 0$
	Megoldás:
	$ax^2 + bx = 0$
	$x(ax + b) = 0$
	$\Updownarrow$
	$x_1 = 0$ v. $ax + b = 0$
	$ax = -b$
	$x_2 = \frac{-b}{a}$

Négyzetgyök fogalma:

$$(\sqrt{a})^2 := a \Rightarrow a \geq 0$$

$$\text{Megjegyzés: } \sqrt{a^2} := |a|$$

Négyzetgyök azonosságai:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k$$

„n-edik” gyök fogalma

$$(\sqrt[n]{a})^n := a$$

$$\sqrt[n]{a} \Rightarrow \begin{cases} \text{ha } n = 2k \text{ alakú} \Rightarrow a \geq 0, \text{ és } \sqrt[n]{a} \geq 0 \\ \text{ha } n = 2k + 1 \text{ alakú} \Rightarrow a \in \mathbb{R} \text{ és } \sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

„n-edik” gyök azonosságai

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n \cdot c]{a^{k \cdot c}}$$

XV. Megoldási segédlet (Elemi algebra: törtek; tizedes törtek; műveletek törtekkel; arány, aránypárok)

Törtek értelmezése:

$$\frac{a}{b}; \Rightarrow a, b \in \mathbb{R} \quad b \neq 0$$

Arány:

Két szám arányán a hányadosukat értjük.

Arányosságok:

Két változó mennyiség egyenesen arányos, ha az egyik valahányszorosára változik, akkor a másik is ugyanannyi szorosára változik.

Az egyenesen arányos mennyiségek HÁNYADOSA állandó.

Két változó mennyiség fordítottan arányos, ha az egyik valahányszorosára változik, akkor a másik ennek reciproka szorosára változik.

A fordítottan arányos mennyiségek SZORZATA állandó.

XVI. Megoldási segédlet (Elemi geometria: fogalmak, tételek; vektorok; műveletek vektorokkal)

Vektorok

Euklideszi tér ($\mathbb{R}^3$) esetén vektornak nevezzük az irányított szakaszokat.

Általánosságban ($\mathbb{R}^n$), $n \geq 2$ esetén vektoroknak nevezzük a rendezett szám n -eseket.

$\mathbb{R}^2$ esetén $\underline{a}(a_1, a_2)$ elnevezések: a_1 – abszcissza, a_2 – ordináta

$\mathbb{R}^3$ esetén $\underline{a}(a_1, a_2, a_3)$ elnevezések: a_1 – abszcissza, a_2 – ordináta, a_3 – applikáta

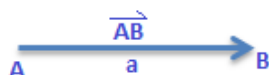
$\mathbb{R}^n$ esetén $\underline{a}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$

Megjegyzés:

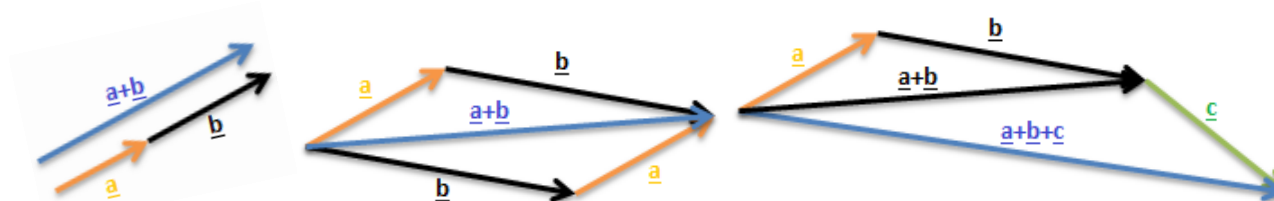
A szokásos jelölés: $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \text{ esetén } \underline{a}(x, y) \\ \mathbb{R}^3 \text{ esetén } \underline{a}(x, y, z) \end{cases}$

Jelölés: $\underline{AB}$; $\underline{a}$

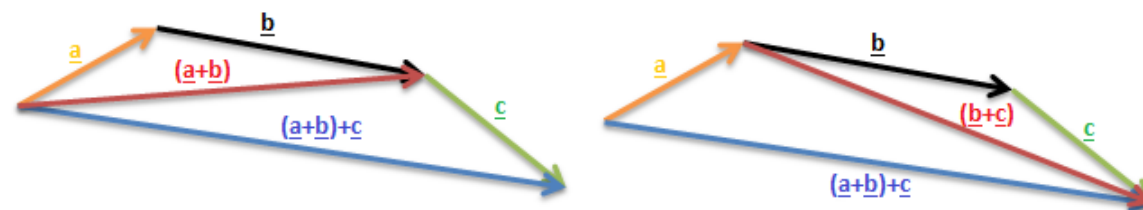
Műveletek vekt



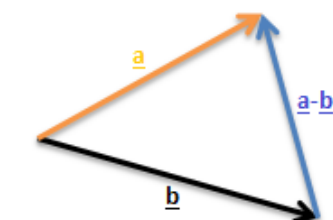
Összeadás:



Az összeadás asszociatív:



Kivonás:



Skaláris Szorzat:

Ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge az φ , akkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzatát a következő módon definiáljuk:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} := |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \varphi$$

Skaláris szorzat tulajdonságai:

- 1) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
- 2) $\underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{c}$
- 3) $\underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2 \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{a} \geq 0$ és $\underline{a} \cdot \underline{a} = 0 \Leftrightarrow \underline{a} = \underline{0}$

XVII. Megoldási segédlet (Elemi függvények: lineáris, abszolútérték, másodfokú, négyzetgyök, reciprok)

Függvények megadása:

Legyen adott f függvényt, amelyre $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

A hozzárendelési szabályt a következő három módon szokták megadni:

1. $f(x) = 2x + 1$
2. $y = 2x + 1$
3. $x \mapsto 2x + 1$

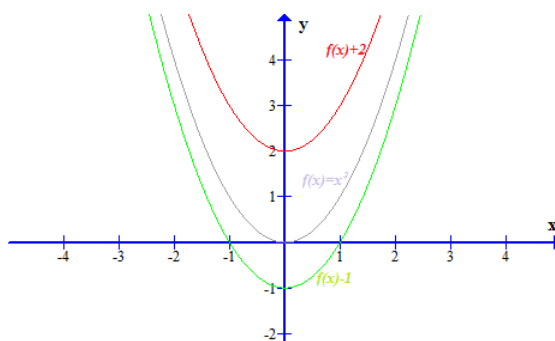
Függvény-transzformációk:

Külső függvénytranszformációk:

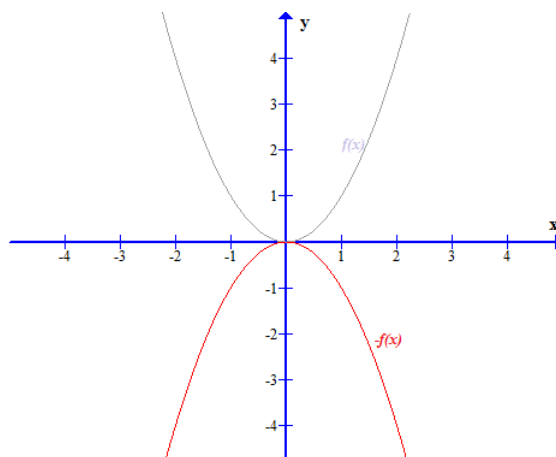
A külső függvény-transzformációkat szokás érték-transzformációknak nevezni, mert mindig a kiszámított függvényértékeket módosítjuk, különböző konstansokat adunk hozzá illetve vonunk ki, vagy különböző skalárral szorozzuk. A külső függvény-transzformációknak az f függvény grafikonján mindig az y tengely irányába történő változás az eredménye.

Legyen adott az f függvény grafikonja.

- 1) Legyen $c \in \mathbb{R}$. Ekkor az $f(x) + c$ függvény grafikonja az $f(x)$ függvény grafikonjának y tengellyel párhuzamos eltolása. Az $f(x)$ grafikonjának $|c|$ nagyságú „emelése”, ha $c > 0$ illetve $|c|$ nagyságú „süllyesztése”, ha $c < 0$.



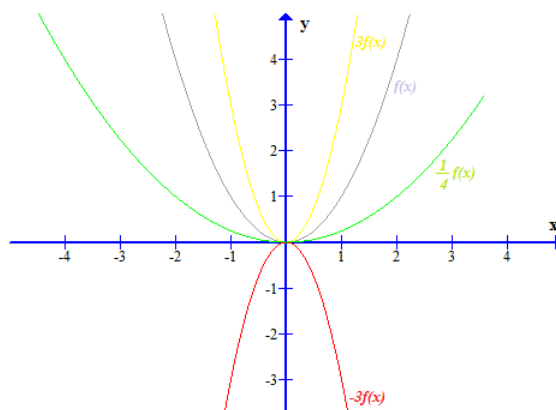
- 2) A $-f(x)$ függvény grafikonja az $f(x)$ függvény grafikonjának x tengelyre vonatkozó tükörképe.



- 3) A $cf(x)$ függvény grafikonja az $f(x)$ függvény grafikonjának az y tengely menti nyújtásával ha $c > 1$, vagy zsugorításával ha $0 < c < 1$ kapható.

Megjegyzés.

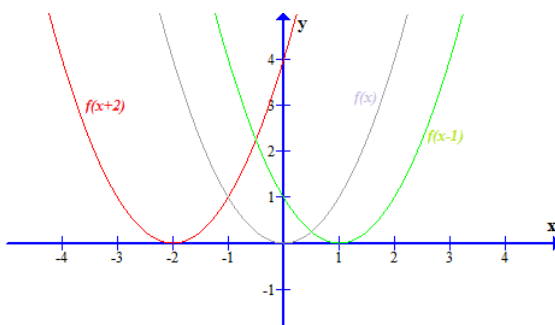
Ha $c < 0$, akkor $|c|$ -vel elvégezzük a szükséges nyújtást, vagy zsugorítást, majd tükrözzük az így kapott grafikont az x tengelyre.



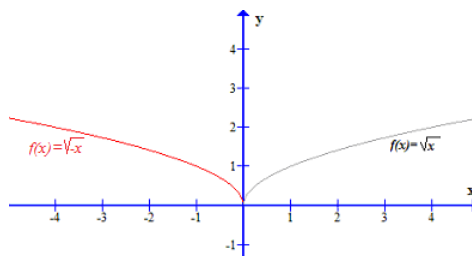
Belső függvény-transzformációk

A belső függvény-transzformációkat szokás változó-transzformációknak nevezni, mert mindig a független változót módosítjuk, különböző konstansokat adunk hozzá illetve vonunk ki, vagy különböző skalárral szorozzuk. A belső függvény-transzformációknak az f függvény grafikonjának mindig az x tengely irányába történő változás az eredménye.

- 1) Az $f(x+c)$, ahol $x+c \in D_f$ függvény grafikonja az $f(x)$ függvény grafikonjának x tengellyel párhuzamos eltolása, mely $|c|$ nagyságú és c előjelével ellentétes irányú.



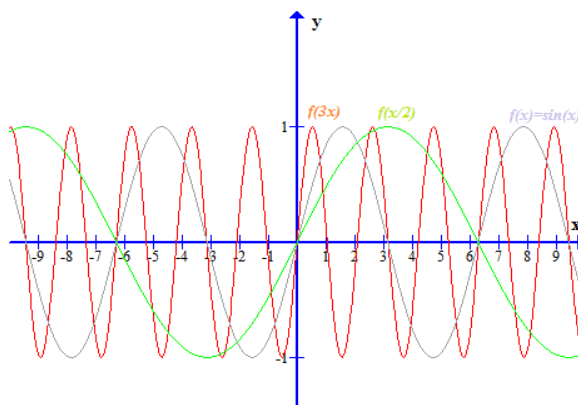
- 2) A $f(-x)$ függvény grafikonja az $f(x)$ függvény grafikonjának y tengelyre vonatkozó tükörképe.



- 3) A $f(cx)$ függvény grafikonja az $f(x)$ függvény grafikonjának az x tengely menti nyújtásával ha $0 < c < 1$, vagy zsugorításával ha $c > 1$ kapható.

Megjegyzés.

Ha $c < 0$, akkor $|c|$ -vel elvégezzük a szükséges nyújtást, vagy zsugorítást, majd tükrözzük az így kapott grafikont az y tengelyre.



Abszolútérték definíciója:

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0 \\ -a, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

XVIII. Megoldási segédlet (Elemi függvények: exponenciális függvény; a logaritmus fogalma; a logaritmus azonosságai; a logaritmus függvény)

Exponenciális függvény:

Exponenciális függvény: Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = a^x$ hozzárendelési szabállyal adott elemi függvényt, ahol $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ exponenciális függvénynek nevezzük.

Megjegyzés:

-ha $a > 1$, akkor a függvény szigorú monoton növekvő

-ha $0 < a < 1$, akkor a függvény szigorú monoton csökkenő

Mivel az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = a^x$ függvény bijektív, ezért van inverze. Az inverz függvény definiálása előtt vezessük be az a alapú logaritmus definícióját.

A logaritmus definíciója:

a alapú logaritmus: $\log_a b$ jelenti azt a számot melyre a -t emelve éppen b -t kapunk, azaz $a^{\log_a b} = b$.

Logaritmus függvény:

Logaritmus függvény: Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \log_a x$ hozzárendelési szabállyal adott elemi függvényt, ahol $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ és $x \in \mathbb{R}^+$, logaritmus függvénynek nevezzük.

Megjegyzés (hasonlóan az exponenciális függvényhez):

-ha $a > 1$, akkor a függvény szigorú monoton növekvő

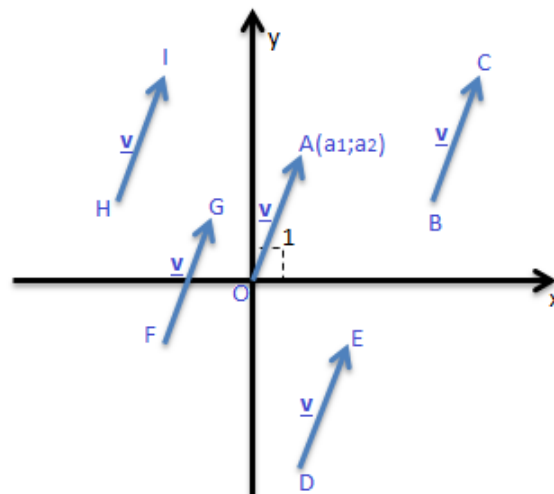
-ha $0 < a < 1$, akkor a függvény szigorú monoton csökkenő

XIX. Megoldási segédlet (Descartes-féle koordináta-rendszer; Koordináta geometria: szakasz felezőpontja, harmadolópontjai; háromszög súlypontja; két pont távolsága; az egyenes egyenletének különböző alakjai; kör egyenlete)

Vektorok a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben.

Helyvektor: $\overrightarrow{OA}$; Szabadvektor: $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{HI}$

$\underline{v}$ vektor koordinátái: $\underline{v}(a_1; a_2)$



XX. Megoldási segédlet (Egyváltozós polinomok: fogalmak; műveletek polinomokkal (szorzattá alakítás, osztás))

Definíció.

Az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ alakú kifejezést, ahol $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ és $a_n \neq 0$, n -ed fokú egyváltozós polinomnak nevezzük.

Polinom egyenlet:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, ahol $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ és $a_n \neq 0$

Speciális esetek:

- lineáris egyenletek: $ax + b = 0$, $a \neq 0$
- másodfokú egyenletek: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
- harmadfokú egyenletek: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$

Polinom egyenletek gyökei és együtthatói közötti kapcsolat:

Ha $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ és $a_n \neq 0$ alakú egyenlet gyökei, akkor az egyenlet a következő alakban írható:

$$a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = 0$$

Megjegyzés.

Az egyenlet gyökei között lehetnek azonosak, azaz többszörös gyökök.

Ha x_1 az egyenlet egy gyöke, akkor $(x - x_1)$ -gyel osztva az eredeti polinomot a maradék 0.

Viéte-formulák általános alakja:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + \dots + x_{n-1} x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ &\vdots \\ x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

XXI. Megoldási segédlet (Sorozatok: a sorozat mint függvény; számtani és mértani sorozatok tulajdonságai)

Számsorozat:

A természetes számok halmazán értelmezett valós szám értékű függvényeket valós számsorozatoknak (röviden sorozatoknak) nevezzük.

Jele: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Megjegyzés.

Az a függvény $n \in \mathbb{N}$ helyen vett helyettesítési értékét a sorozat n -edik tagjának nevezzük és az $a(n)=a_n$ jelölést használjuk. Szokás a_n -t a sorozat általános tagjának nevezni.

Sorozatok megadása.

Képlettel: $a_n = 5n + 2$ vagy $\{5n + 2\}_{n=1}^{\infty}$.

Rekurzióval: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ez az úgynevezett Fibonacci-sorozat.

Felsorolással: $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n+1}, \dots\right\}$.

Speciális sorozatok:

Számtani sorozat

Azokat a sorozatokat, melyekben $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a_{n+1} - a_n = d = \text{állandó}$, számtani sorozatoknak, d -t a sorozat differenciájának nevezzük.

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ a számsorozat } n. \text{ tagja vagy általános tagja}$$

Megjegyzés.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \left(= \frac{a_1 + (n-2)d + a_1 + nd}{2} = \frac{2a_1 + 2(n-1)d}{2} = a_1 + (n-1)d \right)$$

$$a_n = \frac{a_{n-i} + a_{n+i}}{2} \left(= \frac{a_1 + (n-i-1)d + a_1 + (n+i-1)d}{2} = \frac{2a_1 + 2(n-1)d}{2} = a_1 + (n-1)d \right)$$

Azaz a számtani sorozat n -edik tagja az $n-i$ -edik és $n+i$ -edik tagjának a számtani közepe.

Első n tag összege (Gauss):

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$\text{Mivel } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + (n-1)d)n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$$

Mértani sorozat

Azokat a sorozatokat, melyekben $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \text{állandó}$, mértani sorozatoknak,

q -t a sorozat hányadosának (kvóciensének) nevezzük.

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \text{ a számsorozat } n. \text{ tagja vagy általános tagja}$$

Megjegyzés.

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{a_1 q^{n-2} \cdot a_1 q^n} = \sqrt{a_1^2 q^{2n-2}} = |a_1 q^{n-1}|$$

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-i} \cdot a_{n+i}} = \sqrt{a_1 q^{n-i-1} \cdot a_1 q^{n+i-1}} = \sqrt{a_1^2 q^{2n-2}} = |a_1 q^{n-1}|$$

Azaz a mértani sorozat n -edik tagja az $n-i$ -edik és $n+i$ -edik tagjának a mértani közepe.

Első n tag összege:

$$S_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Kamatos kamat:

T_0 : alaptőke

T_n : n . év végén a tőke

p : kamat

n : a kamatozó periódusok száma

$$T_n = T_0 \cdot \left(\frac{100 + p}{100} \right)^n$$

XXII. Megoldási segédlet (Kombinatorika: halmazok; összeszámlálási alapfeladatok; binomiális együtthatók (Pascal háromszög))

A halmazelmélet (megalapozója Georg Cantor) a matematika azon ága, mely a halmazokkal, azok általános tulajdonságaival foglalkozik. Maga a halmaz alapfogalom, így korrekt definíció sem adható rá. Általában különböző, jól meghatározott objektumok összességét értjük egy halmazon (naiv halmazelmélet). Minden objektumról egyértelműen eldönthető, hogy egy adott halmazba beletartozik vagy sem. A halmazt felépítő objektumokat a halmaz elemeinek nevezzük.

Jelölések:

- A halmazokat általában a magyar ABC nagybetűivel, a halmazok elemeit általában a magyar ABC kisbetűivel jelöljük.
- Azt hogy egy a objektum eleme egy H halmaznak az $\in$ szimbólum segítségével a következő módon jelöljük: $a \in H$ (olvasd: a eleme a H halmaznak).
- Azt hogy egy a objektum nem eleme egy H halmaznak a $\notin$ szimbólum segítségével a következő módon jelöljük: $a \notin H$ (olvasd: a nem eleme a H halmaznak).

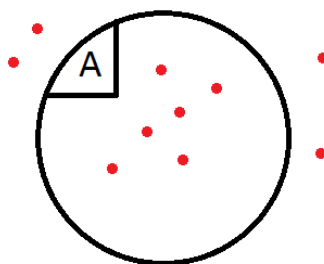
Halmazok megadásának módjai:

- elemei felsorolásával: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$.
- a halmaz elemeire jellemző egyértelmű tulajdonsággal:

$$A = \{a \mid a \in \mathbb{N} \text{ és } a < 10 \text{ és } a \text{ páros}\}, \quad A = \{b \mid b \in \mathbb{N} \text{ és } b \text{ osztható 3-mal}\}.$$

Halmazok ábrázolása:

Venn-diagram



Racionális szám

A $\frac{p}{q}$ alakú számokat, ahol $p, q \in \mathbb{Z}$ és $q \neq 0$, racionális számoknak, vagy törtszámoknak nevezzük.

Megjegyzés.

A racionális számokra egy másik, az előzővel ekvivalens definíció is adható, nevezetesen azokat a számokat, melyek felírhatók véges, vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban racionális számoknak nevezzük. A racionális számok halmazát $\mathbb{Q}$ -val jelöljük.

Irracionális szám

Azokat a számokat, melyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként irracionális számoknak nevezzük.

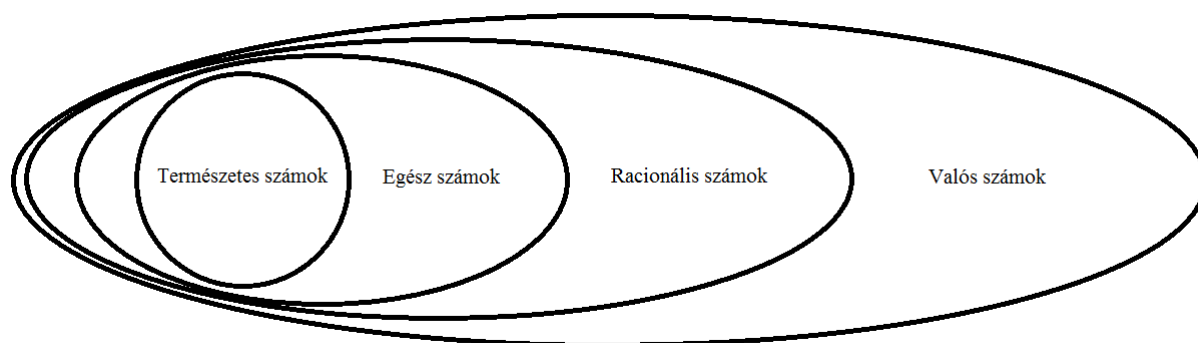
Az irracionális számok azok a számok, melyek felírhatók végtelen nem szakaszos tizedes tört formájában. Az irracionális számok halmazát $\mathbb{Q}^*$ -gal jelöljük.

Valós számok (számhalmazok)

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$$

$$\mathbb{Q}^* = \overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}$$

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \emptyset$, azaz a két számhalmaz diszjunkt.



Megjegyzés.

A számhalmazok betűjeleit szokás egyéb kiegészítő jelöléssel ellátni. Jobb felső indexben az előjelet, míg jobb alsó indexben a nulla hozzávételét jelölik. Pl.:

$$\mathbb{Q}^+ = \{\text{pozitív racionális számok}\}$$

$$\mathbb{Z}_0^- = \{\text{negatív egész számok és a nulla}\}$$

Halmazelméleti Szita-formula:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Skatulyaelv

Adott az A véges számosságú halmaz, azaz $|A| = n$. Legyen $n > m$, ahol $m \in \mathbb{N}^+$. Az A halmaz elemeit m skatulyába helyezve kell lennie olyan skatulyának, amelyben 1-nél több elem van.

Kombinatorika

Permutáció (sorba rendezés)

ismétlés nélküli permutáció

- Adott egy A halmaz, $|A| = n$ és $\forall x, y \in A$ esetén $x \neq y$, azaz minden elem különböző.
- Kérdés n különböző elem összes lehetséges sorrendje.
- Kiszámítása: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$
- Az első n db pozitív egész szám szorzatát n faktoriálisnak nevezzük, és $n!$ jellel jelöljük
- Pl: FÖLDRAJZ szó betűinek permutációja: 8 különböző elem sorrendjeinek száma.
- Megoldás: $P_8 = 8! = 40320$

ismétléses permutáció

- Adott egy A halmaz, $|A| = n$ és $\exists x, y \in A$ amelyre $x = y$, azaz nem minden elem különböző.
- Kérdés n különböző elem összes lehetséges sorrendje, melyek között az azonos elemek száma rendre $k_1; k_2; k_3; \dots; k_r$.
- Kiszámítása: $P_n^{k_1, k_2, k_3, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_r!} P_n^{k, 1} = n! / k! \cdot 1!$
- Pl: MATEMATIKA szó betűinek összes sorrendje: 10 elem, melyben 2-2-3 egymással azonos betű szerepel.
- Megoldás: $P_{10}^{2,2,3} = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 151200$

Variáció (kiválasztás és sorba rendezés)

ismétlés nélküli variáció

- Adott egy A halmaz, $|A| = n$ és $\forall x, y \in A$ esetén $x \neq y$, azaz minden elem különböző. Az A halmaz elemeiből kiválasztunk k -t és vesszük ezek összes lehetséges sorrendjét.
- Kiszámítása: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Pl: Futóversenyen 10 indulóból az összes lehetséges dobogós sorrend.

- Megoldás: $n=10; k=3 \Rightarrow V_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$

ismétléses variáció

- Adott egy A halmaz, $|A|=n$ és $\forall x, y \in A$ esetén $x \neq y$, azaz minden elem különböző. Az A halmaz elemeiből kiválasztunk k db elemet úgy, hogy egy elem többször is előfordulhat.
- Kiszámítása: $V_n^{k(i)} = n^k$
- Adjuk meg az ötjegyű számok számát (10 számjegyből 5 kiválasztása úgy, hogy egy elem többször is előfordulhat).
- Megoldás: $n=10; k=5 \Rightarrow V_{10}^{5(i)} = 10^5 = 100000$

Kombináció (kiválasztás, sorba rendezés nélkül)

ismétlés nélküli

- Adott egy A halmaz, $|A|=n$ és $\forall x, y \in A$ esetén $x \neq y$, azaz minden elem különböző. Az A halmaz elemeiből kiválasztunk k darabot úgy, hogy a sorrend nem számít, azaz az A halmaz összes k elemű részhalmazainak a száma.
- Kiszámítása: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$
- Pl: Hány lottószelvényt vásároljunk, hogy biztosan legyen ötös találatunk?
- $n=90$ elemből kell $k=5$ -öt kiválasztani, a sorrend nem számít.
- Megoldás: $n=90; k=5 \Rightarrow C_{90}^5 = \frac{90!}{5!85!} = 43949268$

ismétléses

- Adott egy A halmaz, $|A|=n$ és $\forall x, y \in A$ esetén $x \neq y$, azaz minden elem különböző. Az A halmaz, kiválasztunk k darabot, úgy, hogy az egyes elemek többször is előfordulhatnak és a sorrend nem számít.
- Kiszámítása: $C_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
- Pl: 8 különböző fagylaltból 4 gömbös fagylaltot szeretnénk vásárolni, úgy, hogy a gömbök között lehetnek azonos gömbök.

- Megoldás: minden állapot jellemezhető a következőhöz hasonló jelsorozattal:

$$| \quad | \circ | \quad | \circ \circ | \quad | \circ |$$

ahol a nyolc különböző ízű fagyaltot 7 db pálcikával választottuk el, a fagyalt gömböket körökkel jelöltük. Feladat a jelek összes lehetséges sorrendjének megadása, ami visszavezethető $n+k-1$ elem ismétléses permutációjára.

$$n=8; k=4 \Rightarrow C_n^{k(i)} = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = 330 \left(= \binom{8+4-1}{4} \right)$$

Binomiális együtthatók

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$$

$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$$

⋮

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k \dots \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

A kéttagú összeg hatványaiban a tagok együtthatóit **binomiális együtthatóknak** nevezzük.

A binomiális együtthatókra vonatkozó azonosságok:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

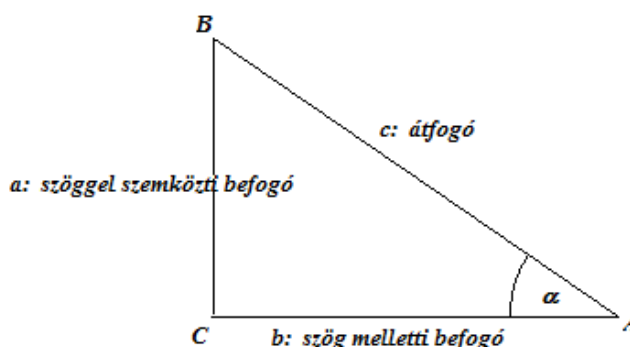
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

Pascal háromszög:

$$\begin{array}{ccccccc} 0. \text{ szint} & & & & 1 & & \\ 1. \text{ szint} & & & 1 & 1 & & \\ 2. \text{ szint} & & 1 & 2 & 1 & & \\ 3. \text{ szint} & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 4. \text{ szint} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & & & & & & \vdots \\ n. \text{ szint} & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{array}$$

XXIII. Megoldási segédlet (Szögfüggvények: értelmezés (forgásszögekre is); összefüggések; addíciós tételek; trigonometrikus egyenletek, függvények)

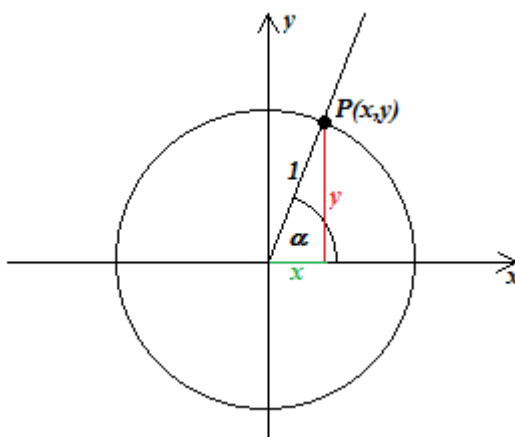
A derékszögű háromszögben a hegyesszögek és az oldalak közötti kapcsolatokat kifejező szögfüggvény definíciók ismertek a középiskolai tanulmányokból. Ezek röviden a következők:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Ahhoz, hogy trigonometrikus függvényekről tudjunk beszélni, az előző definíciókat általánosítsuk tetszőleges nagyságú szögekre. Első lépésben helyezzük a szöget egy egységsugarú körbe úgy, hogy az egyik szögszár az x tengelyre essen, a szög csúcsa pedig az egységsugarú kör középpontja. Ekkor a szög jellemezhető a kör sugarával, valamint a kör és a szög másik szárának metszéspontjának koordinátaival (a „mozgó” szögsugar tengelyekre vonatkozó vetületeivel).



Definiáljuk a szögfüggvényeket a következő módon:

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x \Rightarrow \text{Pitagóraszai azonosság: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

Pótszögekre vonatkozó összefüggések:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

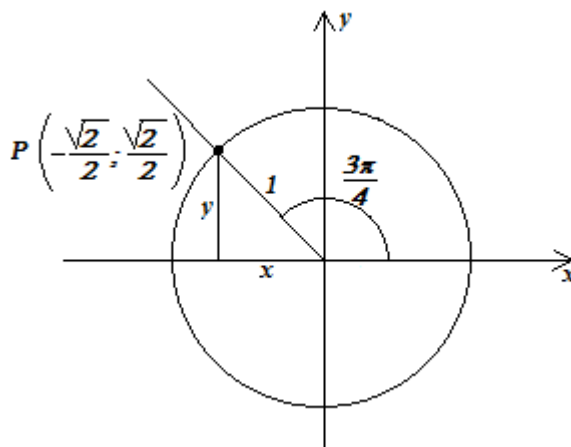
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Megjegyzés.

Az új definíciók hegyesszögek esetén visszaadják az eredeti derékszögű háromszögben felírt kapcsolatokat.

Példa.



$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

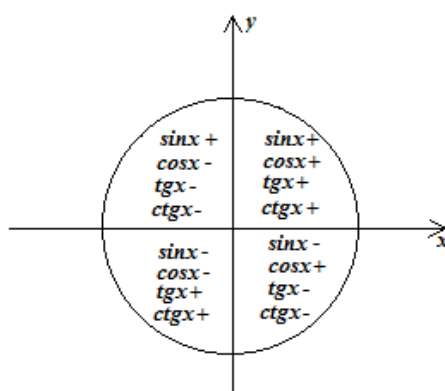
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

Forgásszögek értelmezése

α_0 (I.) x_0 (I.)	I.	II.	III.	IV.
α_0	$\alpha_1 = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ$	$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_0 + l \cdot 360^\circ$	$\alpha_3 = 180^\circ + \alpha_0 + m \cdot 360^\circ$	$\alpha_4 = 360^\circ - \alpha_0 + n \cdot 360^\circ$
x_0	$x_1 = x_0 + k \cdot 2\pi$	$x_2 = \pi - x_0 + l \cdot 2\pi$	$x_3 = \pi + x_0 + m \cdot 2\pi$	$x_4 = 2\pi - x_0 + n \cdot 2\pi$

ahol $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$

A különböző síknegyedekben a szögfüggvények különböző előjelűek, ezt a következő ábrán szemléltetjük.



Addíciós tételek:

$[\alpha + \beta]$ -ra vonatkozó összefüggések

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \\ \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}\end{aligned}$$

$[2\alpha]$ -ra vonatkozó összefüggések

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin\alpha \cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\end{aligned}$$

$[\alpha - \beta]$ -ra vonatkozó összefüggések

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \\ \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}\end{aligned}$$

$[3\alpha]$ -ra vonatkozó összefüggések

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \operatorname{ctg} 3\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\end{aligned}$$

$\left[\frac{\alpha}{2}\right]$ -ra vonatkozó összefüggések

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

XXIV. Megoldási segédlet (Egyenletek: megoldás; másodfokú egyenlet (gyöktényezős alakja, Viète-formulák); Speciális harmad- és negyedfokú egyenletek; Egyenlőtlenségek)

Másodfokú egyenlet megoldása

Teljes	Másodfokú egyenlet	
	Hiányos	
Ha, $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ Megoldó képlet: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$b = 0$ $ax^2 + c = 0$ Megoldás: $ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = \frac{-c}{a}$ ha $\frac{-c}{a} \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$	$c = 0$ $ax^2 + bx = 0$ Megoldás: $ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $\Downarrow$ $x_1 = 0$ v. $ax + b = 0$ $ax = -b$ $x_2 = \frac{-b}{a}$

Gyöktényezős alak

Ha x_1, x_2 megoldásai az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek, akkor:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Viète – formulák:

Ha x_1, x_2 megoldásai az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek, akkor:

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \text{ és } \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$$

Szimmetrikus negyedfokú egyenlet

Tekintsük a következő negyedfokú egyenletet: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$.

Ha $x \neq 0$ (behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy $x = 0$ megoldása-e az egyenletnek), akkor x^2 -tel osszuk az egyenlet mindkét oldalát.

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

$$ax^2 + \frac{a}{x^2} + bx + \frac{b}{x} + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Vizsgáljuk meg a következő kifejezést:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

⇓

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2a + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Legyen: $y = x + \frac{1}{x}$

$$ay^2 + by + c - 2a = 0$$

⋮

XXV. Megoldási segédlet (Egyenletrendszerek: fogalmak, két- és háromismeretlenes egyenletrendszerek; megoldási módszerek)

Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Megjegyzés

Általánosságban az egyenletrendszerekben, szerepelhetnek magasabb fokú ismeretlenek, abszolút-értékes, gyökös, exponenciális és logaritmikus egyenletek.

Megoldási módszerek

Behelyettesítéssel módszer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \rightarrow \text{ha } a_{11} \neq 0, \text{ akkor } x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} \text{ helyettesítsük be a második egyenletbe}$$

$$a_{21} \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}} + a_{22}x_2 = b_2$$

$$a_{21}b_1 - a_{21}a_{12}x_2 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2$$

$$x_2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = a_{11}b_2 - a_{21}b_1, \text{ ha } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \Rightarrow x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Egyenlő együtthatók módszere

Jelölje $[a_{11}, a_{21}]$ az a_{11} és a_{21} számok legkisebb közös többszörösét

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \begin{cases} / \cdot \frac{[a_{11}, a_{21}]}{a_{11}} \\ / \cdot \frac{[a_{11}, a_{21}]}{a_{21}} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} [a_{11}, a_{21}]x_1 + \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot a_{12}}{a_{11}} x_2 &= \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot b_1}{a_{11}} \\ [a_{11}, a_{21}]x_1 + \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot a_{22}}{a_{21}} x_2 &= \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot b_2}{a_{21}} \end{aligned} \right\}$$

A két egyenletet egymásból kivonva:

$$\begin{aligned} \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot a_{22}}{a_{21}} x_2 &= \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot b_1}{a_{11}} - \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot b_2}{a_{21}} \\ x_2 \cdot \left(\frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot a_{12}}{a_{11}} - \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot a_{22}}{a_{21}} \right) &= \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot b_1}{a_{11}} - \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot b_2}{a_{21}}, \text{ ha } \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot a_{12}}{a_{11}} - \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot a_{22}}{a_{21}} \neq 0 \\ x_2 &= \frac{\frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot b_1}{a_{11}} - \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot b_2}{a_{21}}}{\frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot a_{12}}{a_{11}} - \frac{[a_{11}, a_{21}] \cdot a_{22}}{a_{21}}} \end{aligned}$$

A kiszámított x_2 értékét valamelyik eredeti egyenletbe visszahelyettesítve x_1 kiszámítható!

Új változó bevezetése

A módszer bemutatása a megoldások részben konkrét feladatokon keresztül történik.

XXVI. Megoldási segédlet (Logika, Gráfok: fogalmak; tételek)

Logika

Állítás vagy kijelentés: Egy kijelentő mondatot, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.

Ellentmondástalanság elve: Egy állítás egyidejűleg nem lehet igaz is és hamis is.

Kizárt harmadik elve: Egy állítás nem lehet sem igaz sem hamis.

A negáció műveletének igazságtáblája:

p	$\neg p$
i	h
h	i

A konjunkció igazságtáblája:

p	q	$p \wedge q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A diszjunkció igazságtáblája:

p	q	$p \vee q$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Az implikáció igazságtáblája:

p	q	$p \rightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

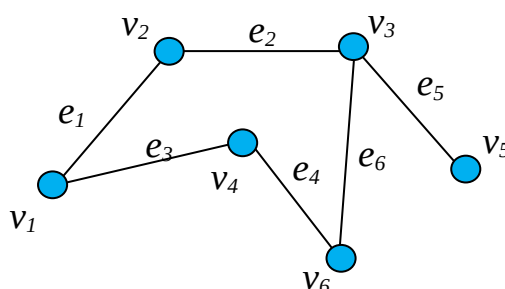
Az ekvivalencia műveletének igazságtáblája:

p	q	$p \leftrightarrow q$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Gráfelméleti alapfogalmak

Legyen V elemeknek egy véges halmaza, és E a V elemeiből képezett rendezett párok – esetleg üres – halmaza. **Gráfnak** nevezzük a V és E által meghatározott struktúrát. Jelölése: $G(V, E)$.

A $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ halmazt nevezzük a G gráf **csúcshalmazának**, jelölése $V(G)$.



1. ábra. Példa egy $G(V, E)$ gráfra.

$V(G)$ elemeinek a számát a **gráf rendjének** nevezzük. Jelölése: $n(G)$. $E(G)$ elemeinek a számát a **gráf méretének** nevezzük. Jelölése: $m(G)$. Az n -ed rendű, m méretű gráfot **$G(n, m)$** vagy $G_{n, m}$ jelöli. Azt mondjuk, hogy $e_1 = \{v_1, v_2\}$ **összeköti** a v_1 és v_2 csúcsokat, v_2 és v_3 **szomszédos csúcsok**, e_2 és e_5 **szomszédos élek** és e_4 és v_6 **illeszkednek**. Egy G gráf v **csúcsának fokszámán** a csúcshoz illeszkedő élek számát értjük. Egy csúcsot **párosnak** vagy **páratlannak** nevezzük attól függően, hogy a fokszáma páros vagy páratlan. Egy csúcsot **izoláltnak** nevezünk, ha fokszáma 0, és **vég-csúcsnak**, ha fokszáma 1.

Tétel: Bármely gráfban a csúcsok fokszámának az összege páros.

Következmény: Bármely gráfban a páratlan csúcsok száma mindig páros.

XXVII. Megoldás (I. fejezet)

I.1. Feladat: Számológép használata nélkül határozza meg a következő kifejezések pontos értékét!

$$a.) \frac{2^{48}}{8^{16}} = \frac{2^{48}}{(2^3)^{16}} = \frac{2^{48}}{2^{48}} = 1$$

$$b.) 3^{99} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{32} = 3^{99} \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^{32} = 3^{99} \cdot \frac{1}{3^{96}} = \frac{3^{99}}{3^{96}} = 3^3 = 27$$

$$c.) 4^{-4} \cdot 8^2 = \frac{1}{4^4} \cdot 8^2 = \frac{8^2}{4^4} = \frac{(2^3)^2}{(2^2)^4} = \frac{2^6}{2^8} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$d.) \frac{15^{20} \cdot 16^5}{9^{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-19}} = \frac{(3 \cdot 5)^{20} \cdot (2^4)^5}{(3^2)^{10} \cdot (2 \cdot 5)^{19}} = \frac{3^{20} \cdot 5^{20} \cdot 2^{20}}{3^{20} \cdot 2^{19} \cdot 5^{19}} = 5 \cdot 2 = 10$$

$$e.) (7^{49})^{-2} \cdot 7^{100} = \frac{7^{100}}{7^{98}} = 7^2 = 49$$

$$f.) \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$g.) \frac{(13+7)^{-\frac{2}{3}} \cdot 8 \cdot \sqrt[3]{2}}{25^{-\frac{1}{3}}} = \frac{20^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{(5^2)^{-\frac{1}{3}}} = \frac{20^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{10}{3}}}{5^{-\frac{2}{3}}} = \left(\frac{20}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{10}{3}} =$$

$$= \left(\frac{5}{20}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{10}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{10}{3}} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{10}{3}} = (2^{-2})^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{10}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{10}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

$$h.) \frac{90^6 \cdot 36^4}{120^7} = \frac{(3^2 \cdot 2 \cdot 5)^6 \cdot ((2 \cdot 3)^2)^4}{(2^3 \cdot 3 \cdot 5)^7} = \frac{3^{12} \cdot 2^6 \cdot 5^6 \cdot 2^8 \cdot 3^8}{2^{21} \cdot 3^7 \cdot 5^7} = \frac{2^{14} \cdot 5^6 \cdot 3^{20}}{2^{21} \cdot 3^7 \cdot 5^7} = \frac{3^{14}}{2^7 \cdot 5}$$

$$i.) \frac{24^3 \cdot 108^2 \cdot 9^6}{27^4 \cdot 48^5} = \frac{(2^3 \cdot 3)^3 \cdot (2^2 \cdot 3^3)^2 \cdot (3^2)^6}{(3^3)^4 \cdot (3 \cdot 2^4)^5} = \frac{2^9 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 3^{12}}{3^{12} \cdot 3^5 \cdot 2^{20}} = \frac{2^{13} \cdot 3^{21}}{2^{20} \cdot 3^{17}} = \frac{3^4}{2^7}$$

I.2. Feladat: Végezze el a hatványozásokat, majd hozza egyszerűbb alakra a kifejezéseket!

$$a.) (x^3)^{-2} \cdot (x^{-3})^{-5} \cdot (x^{-1})^{-1} = x^{-6} \cdot x^{15} \cdot x^1 = x^{10}$$

$$b.) (x^3)^{-2} \cdot \left[(x^{-3})^{-5} \right]^{-2} \cdot (x^{-5})^{-6} = x^{-6} \cdot (x^{15})^{-2} \cdot x^{30} = x^{-6} \cdot x^{-30} \cdot x^{30} = x^{-6}$$

$$c.) (x^3 \cdot y^{-2})^{-2} \cdot (x^{-5} \cdot y^3)^{-1} = x^{-6} \cdot y^4 \cdot x^5 \cdot y^{-3} = x^{-1} \cdot y^1 = \frac{y}{x}$$

$$d.) \frac{(a^{-3})^{-2} \cdot a^{-4} \cdot a^{-2}}{a^{-3} \cdot (a^{-2})^2 \cdot a^5} = \frac{a^6 \cdot a^{-4} \cdot a^{-2}}{a^{-3} \cdot a^{-4} \cdot a^5} = \frac{a^0}{a^{-2}} = \frac{1}{a^{-2}} = a^2$$

$$e.) \frac{(2b^2)^{-2} \cdot (8^{-2} \cdot b^{-4})^{-1}}{(2^3 b^{-2})^2 \cdot (2b^{-2})^{-1}} = \frac{2^{-2} \cdot b^{-4} \cdot 2^6 \cdot b^4}{2^6 \cdot b^{-4} \cdot 2^{-1} \cdot b^2} = \frac{2^4}{2^5 \cdot b^{-2}} = \frac{b^2}{2}$$

$$f.) \frac{(a^2 b^3)^4 \cdot (a^4 b)^3}{(a^2 b^7)^3} = \frac{a^8 b^{12} a^{12} b^3}{a^6 b^{21}} = \frac{a^{20} b^{15}}{a^6 b^{21}} = \frac{a^{14}}{b^6}$$

$$g.) \frac{(x^2 y^5)^6 (x^2 y)^2}{(xy^5)^3 x^3 y^4} = \frac{x^{12} y^{30} x^4 y^2}{x^3 y^{15} x^3 y^4} = \frac{x^{16} y^{32}}{x^6 y^{19}} = \frac{x^{10}}{y^{13}}$$

$$h.) \frac{(x^3 y^2)^5 x y^3}{(x^2 y^4)^2 (x^3 y^4)^2} = \frac{x^{15} y^{10} x y^3}{x^4 y^8 x^6 y^8} = \frac{x^{16} y^{13}}{x^{10} y^{16}} = \frac{x^6}{y^3}$$

$$i.) \frac{(12d^{-1})^{-2} \cdot (18^2 \cdot d^3)^{-3}}{(8^{-2} d^{-4})^2 \cdot (3^{-5} d^3)^2} = \frac{3^{-2} 2^{-4} d^2 2^{-3} 3^{-6} d^{-9}}{2^{-12} d^{-8} 3^{-10} d^6} = \frac{2^{-7} 3^{-8} d^{-7}}{2^{-12} 3^{-10} d^{-2}} = \frac{2^5 3^2}{d^5}$$

$$j.) \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{a^7}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{2}}} = \frac{a^2}{a^{\frac{7}{2}}} = a^{\frac{4}{2} - \frac{7}{2}} = a^{-\frac{3}{2}}$$

$$k.) \frac{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[4]{a^6}} = \frac{a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{5}{4}}}{a^{\frac{6}{4}}} = \frac{a^{\frac{6}{4}}}{a^{\frac{6}{4}}} = 1$$

$$l.) \frac{a^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{a^4}}{\left(a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a} \right)^2} = \frac{a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{4}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \right)^2} = \frac{a^{\frac{6}{3}}}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$m.) \frac{a^{\frac{5}{2}} \sqrt[4]{a^3 b^2} b^3 \left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{6}} \right)^3}{\left(b^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{b^{\frac{2}{3}}} \right)^2} = \frac{a^{\frac{5}{2}} a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{2}{2}} b^3 a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{3}{6}}}{b^{\frac{6}{2}} b^{\frac{4}{12}}} = \frac{a^{\frac{30}{12}} a^{\frac{9}{12}} b^{\frac{6}{12}} b^3 a^{\frac{24}{12}} b^{\frac{6}{12}}}{b^{\frac{36}{12}} b^{\frac{4}{12}}} = \frac{a^{\frac{63}{12}} b^{\frac{48}{12}}}{b^{\frac{40}{12}}} = a^{\frac{63}{12}} b^{\frac{8}{12}}$$

I.3. Feladat: Végezze el a kijelölt műveleteket, majd hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

$$a.) \sqrt[4]{x^{-3} \cdot y^{-1}} \cdot \sqrt[4]{x^6 \cdot y^5} = (x^{-3} \cdot y^{-1})^{\frac{1}{4}} (x^6 \cdot y^5)^{\frac{1}{4}} = x^{-\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{6}{4}} \cdot y^{\frac{5}{4}} = x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{4}{4}} = x^{\frac{3}{4}} \cdot y$$

$$b.) \sqrt[2]{a^{-2} \cdot b^2} \cdot \sqrt[3]{a^5 \cdot b^{-1}} = (a^{-2} \cdot b^2)^{\frac{1}{2}} (a^5 \cdot b^{-1})^{\frac{1}{3}} = a^{-1} \cdot b^1 \cdot a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3}} = (ab)^{\frac{2}{3}}$$

$$c.) \sqrt[3]{a^2 \cdot b^4} : \sqrt[3]{a^{-5} \cdot b^1} = \frac{(a^2 \cdot b^4)^{\frac{1}{3}}}{(a^{-5} \cdot b^1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{7}{3}} \cdot b^{\frac{3}{3}} = a^{\frac{7}{3}} \cdot b$$

$$d.) \frac{(9x^2 y^3)^4}{(5x^4 y^4)^3} \cdot \frac{(3x y^2)^6}{(5x y^5)^3} = \frac{3^8 x^8 y^{12}}{5^3 x^{12} y^{12}} \cdot \frac{3^6 x^6 y^{12}}{5^3 x^3 y^{15}} = \frac{3^{14} x^{14} y^{24}}{5^6 x^{15} y^{27}} = \frac{3^{14}}{5^6 x y^3}$$

$$e.) \frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot b^{-1}}}{\sqrt[3]{a^5 \cdot b^{-3}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2 \cdot b^4}}{\sqrt[3]{a^{-4} \cdot b^{-1}}} = \frac{(a^2 \cdot b^{-1})^{\frac{1}{3}}}{(a^5 \cdot b^{-3})^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(a^2 \cdot b^4)^{\frac{1}{3}}}{(a^{-4} \cdot b^{-1})^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{a^2 \cdot b^{-1} \cdot a^2 \cdot b^4}{a^5 \cdot b^{-3} \cdot a^{-4} \cdot b^{-1}} \right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left(\frac{a^4 \cdot b^3}{a \cdot b^{-4}} \right)^{\frac{1}{3}} = (a^3 \cdot b^7)^{\frac{1}{3}} = a \cdot b^{\frac{7}{3}}$$

$$f.) \frac{(6x^3 y^2)^3}{(5a^4 b^3)^2} : \frac{(5x y^4)^3}{(3a b^2)^4} = \frac{(6x^3 y^2)^3}{(5a^4 b^3)^2} \cdot \frac{(3a b^2)^4}{(5x y^4)^3} = \frac{2^3 3^3 x^9 y^6 3^4 a^4 b^8}{5^2 a^8 b^6 5^3 x^3 y^{12}} =$$

$$= \frac{2^3 3^7 a^4 b^8 x^9 y^6}{5^5 a^8 b^6 x^3 y^{12}} = \frac{2^3 3^7 b^2 x^6}{5^5 a^4 y^6}$$

$$g.) \left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^{-3}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^4}{a^{-2}}} \right) : \left(\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^{-2}}} : \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^{-5}}} \right) = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^{-3}} \cdot \frac{b^4}{a^{-2}}} : \sqrt[3]{\frac{a^5}{b^{-2}} \cdot \frac{a^4}{b^{-5}}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^{-3}} \cdot \frac{b^4}{a^{-2}}} : \sqrt[3]{\frac{a^5}{b^{-2}} \cdot \frac{b^5}{a^4}} =$$

$$= \sqrt[3]{a^4 b^7} : \sqrt[3]{\frac{a}{b^3}} = \sqrt[3]{a^4 b^7} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^3}{a}} = \sqrt[3]{a^4 b^7 \cdot \frac{b^3}{a}} = \sqrt[3]{a^3 b^{10}} = ab^{\frac{10}{3}}$$

I.4. Feladat: Melyik kifejezés a nagyobb?

a.) $3 \cdot 12^4$ vagy $2^5 \cdot 18^3$

$$3 \cdot (3 \cdot 2^2)^4 \text{ vagy } 2^5 \cdot (2 \cdot 3^2)^3$$

$$3 \cdot 3^4 \cdot 2^8 \text{ vagy } 2^5 \cdot 2^3 \cdot 3^6$$

$$3^5 \cdot 2^8 < 2^8 \cdot 3^6$$

b.) 50^{10} vagy 10^{20}

$$(5^2 \cdot 2)^{10} \text{ vagy } (5 \cdot 2)^{20}$$

$$5^{20} \cdot 2^{10} < 5^{20} \cdot 2^{20}$$

c.) $24^{-3} \cdot 36^{-4}$ vagy 96^{-5}

$$(3 \cdot 2^3)^{-3} \cdot (2^2 \cdot 3^2)^{-4} \text{ vagy } (2^5 \cdot 3)^{-5}$$

$$3^{-3} \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-8} \cdot 3^{-8} \text{ vagy } 2^{-25} \cdot 3^{-5}$$

$$3^{-11} \cdot 2^{-17} \text{ vagy } 2^{-25} \cdot 3^{-5}$$

$$(3^{-5} \cdot 2^{-5}) \cdot 3^{-6} \cdot 2^{-12} \text{ vagy } (3^{-5} \cdot 2^{-5}) \cdot 2^{-12} \cdot 2^{-8}$$

$$3^{-6} \text{ vagy } 2^{-8}$$

$$\frac{1}{729} < \frac{1}{256}$$

d.) $\frac{48^{-3} \cdot 36^2}{24^{-1}}$ vagy 12^2

$$\frac{(4 \cdot 12)^{-3} \cdot (3 \cdot 12)^2}{(2 \cdot 12)^{-1}} \text{ vagy } 12^2$$

$$\frac{4^{-3} \cdot 12^{-3} \cdot 3^2 \cdot 12^2}{2^{-1} \cdot 12^{-1}} \text{ vagy } 12^2$$

$$\frac{4^{-3} \cdot 3^2 \cdot 12^{-1}}{2^{-1} \cdot 12^{-1}} \text{ vagy } 12^2$$

$$\frac{3^2}{2^5} < 12^2$$

I.5. Feladat: Azonosságok segítségével írja fel összegalakban a következő kifejezéseket!

a.) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

b.) $(3x-y)^2 = 9x^2 - 6xy + y^2$

c.) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

d.) $(4x-3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$

$$e.) \left(\frac{2}{7} + 5b\right)^2 = \frac{4}{49} + \frac{20}{7}b + 25b^2$$

$$f.) \left(\frac{3}{2}a - \frac{6}{5}b\right)^2 = \frac{9}{4}a^2 - \frac{18}{5}ab + \frac{36}{25}b^2$$

$$g.) \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{9}x^4$$

$$h.) (a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

$$i.) (2b-2)^3 = 8b^3 - 24b^2 + 24b - 8$$

$$j.) \left(\frac{a}{2} + 4b\right)^3 = \frac{a^3}{8} + 3\frac{a^2}{4}4b + 3\frac{a}{2}16b^2 + 64b^3 = \frac{a^3}{8} + 3a^2b + 24ab^2 + 64b^3$$

$$k.) (5x-4)(5x+4) = 25x^2 - 16$$

$$l.) \left(\frac{x}{2} - 3y\right)\left(\frac{x}{2} + 3y\right) = \frac{x^2}{4} - 9y^2$$

$$m.) \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{9}{25}$$

$$n.) (10x^2 - 3y^2)^2 = 100x^4 - 2 \cdot 10x^2 \cdot 3y^2 + 9y^4 = 100x^4 - 60x^2y^2 + 9y^4$$

$$o.) (x - 2y - 5)^2 = x^2 + 4y^2 + 25 - 4xy - 10x + 20y$$

$$p.) \left(\frac{x}{2} - 3y + 1\right)^2 = \frac{x^2}{4} + 9y^2 + 1 - 3xy + x - 6y$$

I.6. Feladat: Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

$$a.) 5x^2 - 10x = 5x(x - 2)$$

$$b.) 10y^2 - 16y = 2y(5y - 8)$$

$$c.) 25a^5b - 10a^3b^4 = 5a^3b(5a^2 - 2b^3)$$

$$d.) ax - 6a + bx - 6b = x(a + b) - 6(a + b) = (a + b)(x - 6)$$

$$e.) ay + pq + ap + yq = a(y + p) + q(p + y) = (y + p)(a + q)$$

$$f.) x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

$$g.) a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$$

$$h.) a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$$

$$i.) y^2 - 16 = (y - 4)(y + 4)$$

$$j.) 4x^2 - 25y^2 = (2x - 5y)(2x + 5y)$$

$$k.) \quad 9y^2 - x^4 = (3y - x^2)(3y + x^2)$$

$$l.) \quad x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$$

$$m.) \quad 75 - 12a^2 = 3(25 - 4a^2) = 3(5 - 2a)(5 + 2a)$$

$$n.) \quad b^2 + 6b + 5 = (b + 1)(b + 5)$$

$$b_{1;2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} b_1 = \frac{-6 + 4}{2} = -1 \\ b_2 = \frac{-6 - 4}{2} = -5 \end{cases}$$

$$o.) \quad 2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)^2$$

$$p.) \quad y^3 + 4y^2 + 4y = y(y^2 + 4y + 4) = y(y + 2)^2$$

$$q.) \quad 2a^3 - 12a^2 + 18a = 2a(a^2 - 6a + 9) = 2a(a - 3)^2$$

$$r.) \quad b^3 + 3b^2 + 3b + 1 = (b + 1)^3$$

I.7. Feladat: Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

$$a.) \quad x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2 + 4}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -1 \end{cases}$$

$$b.) \quad 2x^2 - 12x + 16 = 2(x^2 - 6x + 8) = 2 \cdot (x - 4) \cdot (x - 2)$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6 + 2}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{6 - 2}{2} = 2 \end{cases}$$

$$c.) \quad 2x^2 + 12x - 32 = 2(x^2 + 6x - 16) = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 8)$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-6 + 10}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-6 - 10}{2} = -8 \end{cases}$$

$$d.) \quad 4a^2 - 12a + 9 = (2a - 3)^2$$

I.8. Feladat: Határozza meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

$$\begin{aligned} \text{a.) } & \sqrt{x-3} \\ & x-3 \geq 0 \\ & x \geq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } & \sqrt{x(x+2)} \\ & x(x+2) \geq 0 \end{aligned}$$

I. eset:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} x &\geq 0 \\ x+2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} x &\geq 0 \\ x &\geq -2 \end{aligned} \right\} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

II. eset:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} x &\leq 0 \\ x+2 &\leq 0 \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} x &\leq 0 \\ x &\leq -2 \end{aligned} \right\} \\ & x \leq -2 \end{aligned}$$

$$\text{ÉT.: } x \in]-\infty; -2] \cup [0; \infty[$$

$$\begin{aligned} \text{c.) } & \sqrt{\frac{4}{x-3}} \\ & \frac{4}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \\ & x \geq 3 \end{aligned}$$

$$\text{ÉT.: } x \in [3; \infty[$$

$$\begin{aligned} \text{d.) } & \sqrt{\frac{-5}{x+2}} \\ & \frac{-5}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x+2 \leq 0 \\ & x \leq -2 \end{aligned}$$

$$\text{ÉT.: } x \in]-\infty; -2]$$

$$e.) \sqrt{\frac{4-x}{x+3}}$$

$$\frac{4-x}{x+3} \geq 0$$

I. eset:

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \geq x \\ x > -3 \end{cases}$$

$$-3 < x \leq 4$$

$$ÉT.: x \in]-3; 4]$$

II. eset:

$$\begin{cases} 4-x \leq 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \leq x \\ x < -3 \end{cases}$$

$$\emptyset$$

I.9. Feladat: Számológép használata nélkül határozza meg a következő kifejezések pontos értékét!

$$a.) \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{2^3 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$b.) \sqrt{100^3} = \sqrt{(2^2 \cdot 5^2)^3} = \sqrt{2^6 \cdot 5^6} = 2^3 \cdot 5^3 = 1000$$

$$c.) \sqrt{32 \cdot 98} = \sqrt{2^5 \cdot 2 \cdot 7^2} = \sqrt{2^6 \cdot 7^2} = 2^3 \cdot 7$$

$$d.) \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3^3} = \sqrt{3 \cdot 3^3} = \sqrt{3^4} = 3^2$$

$$e.) \sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{5 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = 3 \cdot 5$$

$$f.) \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{7^2}} = \sqrt{\frac{2^2}{7^2}} = \frac{2}{7}$$

$$g.) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{5}{80}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4^2}} = \frac{1}{4}$$

$$h.) \sqrt{a} \cdot \sqrt{ab} = \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

$$i.) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a}{ab}} = \sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}$$

I.10. Feladat: Számológép használata nélkül határozza meg a következő kifejezések pontos értékét!

$$a.) \sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{147} = \sqrt{3 \cdot 4} + \sqrt{3 \cdot 25} - \sqrt{3 \cdot 49} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = 0$$

$$b.) \sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{63} = \sqrt{4 \cdot 7} + \sqrt{7} - \sqrt{9 \cdot 7} = 2\sqrt{7} + \sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 0$$

$$c.) 2\sqrt{72} - \sqrt{125} + 3\sqrt{20} = 2\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 9} - \sqrt{5 \cdot 25} + 3\sqrt{4 \cdot 5} = 12\sqrt{2} - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 12\sqrt{2} + \sqrt{5}$$

$$d.) 6\sqrt{18} + \sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{72} = 6\sqrt{2 \cdot 9} + \sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 2} = 18\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} + 5\sqrt{5}$$

$$e.) (\sqrt{12}+3)(\sqrt{12}-3)=12-9=3$$

$$f.) (\sqrt{27}+\sqrt{13})(\sqrt{27}-\sqrt{13})=27-13=14$$

$$g.) (5\sqrt{2}+3\sqrt{3})(5\sqrt{2}-3\sqrt{3})=25\cdot 2-9\cdot 3=50-27=23$$

$$h.) \sqrt{(15+\sqrt{56})}\cdot \sqrt{(15-\sqrt{56})}=\sqrt{(15+\sqrt{56})(15-\sqrt{56})}=\sqrt{225-56}=\sqrt{169}=13$$

$$i.) \left(\sqrt{(11+\sqrt{21})}+\sqrt{(11-\sqrt{21})}\right)^2=11+\sqrt{21}+2\sqrt{(11+\sqrt{21})(11-\sqrt{21})}+11-\sqrt{21}=\\=22+2\sqrt{121-21}=22+2\sqrt{100}=22+2\cdot 10=42$$

$$j.) (\sqrt{27}+\sqrt{2}-\sqrt{12})\cdot (\sqrt{8}+\sqrt{3}-\sqrt{18})=(\sqrt{3\cdot 9}+\sqrt{2}-\sqrt{3\cdot 4})\cdot (\sqrt{2\cdot 4}+\sqrt{3}-\sqrt{2\cdot 9})=\\=(3\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3})\cdot (2\sqrt{2}+\sqrt{3}-3\sqrt{2})=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$$

$$k.) (\sqrt{98}+\sqrt{108}-\sqrt{8}-\sqrt{147})\cdot (\sqrt{32}-\sqrt{48}+\sqrt{75}+\sqrt{2})=\\=(\sqrt{2\cdot 49}+\sqrt{36\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 4}-\sqrt{3\cdot 49})\cdot (\sqrt{16\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 3}+\sqrt{25\cdot 3}+\sqrt{2})=\\=(7\sqrt{2}+6\sqrt{3}-2\sqrt{2}-7\sqrt{3})\cdot (4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+5\sqrt{3}+\sqrt{2})=\\=(5\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot (5\sqrt{2}+\sqrt{3})=25\cdot 2-3=47$$

I.11. Feladat: Gyöktelenítse a következő törtek nevezőjét!

$$a.) \frac{5}{\sqrt{7}}=\frac{5}{\sqrt{7}}\cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$$

$$b.) \frac{15}{\sqrt{3}}=\frac{15}{\sqrt{3}}\cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{3}}{3}$$

$$c.) \frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{2}{3\sqrt{5}}\cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$d.) \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a}{\sqrt{b}}\cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$e.) \frac{3a}{2\sqrt{b}}=\frac{3a}{2\sqrt{b}}\cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{3a\sqrt{b}}{2b}$$

$$f.) \frac{4}{\sqrt{3}-2}=\frac{4}{\sqrt{3}-2}\cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}=\frac{4(\sqrt{3}+2)}{3-2}=4(\sqrt{3}+2)$$

$$g.) \frac{12}{9-\sqrt{5}}=\frac{12}{9-\sqrt{5}}\cdot \frac{9+\sqrt{5}}{9+\sqrt{5}}=\frac{12(9+\sqrt{5})}{81-5}=\frac{12(9+\sqrt{5})}{76}$$

$$h.) \frac{9}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}} = \frac{9}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}} \cdot \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2\sqrt{3}+\sqrt{11}} = \frac{9(2\sqrt{3}+\sqrt{11})}{12-11} = 9(2\sqrt{3}+\sqrt{11})$$

$$i.) \frac{25}{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \frac{25}{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}} \cdot \frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}} = \frac{25(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})}{32-27} = 5(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})$$

$$j.) \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2}{12-18} = -\frac{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2}{6}$$

$$k.) \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$$

I.12. Feladat: Határozza meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

$$a.) \sqrt[6]{\frac{x+2}{3-x}}$$

$$\frac{x+2}{3-x} \geq 0$$

I. eset:

$$\left. \begin{array}{l} x+2 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq -2 \\ 3 > x \end{array} \right\}$$

$$-2 < x \leq 3$$

$$ET.: x \in]-2; 3]$$

II.eset:

$$\left. \begin{array}{l} x+2 \leq 0 \\ 3-x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq -2 \\ 3 < x \end{array} \right\}$$

$$\emptyset$$

$$b.) \sqrt[4]{(x+5) \cdot (x-7)}$$

$$(x+5) \cdot (x-7) \geq 0$$

I. eset:

$$\left. \begin{array}{l} x+5 \geq 0 \\ x-7 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq -5 \\ x \geq 7 \end{array} \right\}$$

$$x \geq 7$$

$$ET.: x \in]-\infty; -5] \cup [7; \infty[$$

II.eset:

$$\left. \begin{array}{l} x+5 \leq 0 \\ x-7 \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq -5 \\ x \leq 7 \end{array} \right\}$$

$$x \leq -5$$

$$c.) \sqrt[5]{\frac{x+21}{x-10}}$$

$$x-10 \neq 0$$

$$x \neq 10$$

$$ET.: x \in \mathbb{R} \setminus \{10\}$$

$$d.) \sqrt[10]{\frac{x^2-16}{x-4}}$$

$$\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4$$

$$x+4 \geq 0$$

$$x \geq -4$$

$$ET.: x \in [-4; \infty[$$

$$e.) \sqrt[3]{\frac{x^2-49}{x+7}}$$

$$\frac{x^2-49}{x+7} = \frac{(x+7)(x-7)}{x+7} = x-7$$

$$ET.: x \in \mathbb{R}$$

I.13. Feladat: Írja fel egyetlen gyökjel segítségével a következő kifejezéseket!!

$$a.) \sqrt[6]{5 \cdot \sqrt[5]{5}} = \sqrt[6]{5 \cdot 5^{5/5}} = \sqrt[6]{5^6}$$

$$b.) \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3^3 \cdot 3}} = \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3^4}} = \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{3^4}} = \sqrt[3]{9 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{3^{13}}$$

$$c.) \sqrt[3]{7^2 \cdot \sqrt[4]{7^5}} = \sqrt[3]{4 \sqrt[4]{(7^2)^4} \cdot 7^5} = \sqrt[3]{4 \cdot 7^8 \cdot 7^5} = \sqrt[3]{7^{13}}$$

$$d.) \sqrt[4]{x^7 \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[4]{3 \sqrt[3]{(x^7)^3} \cdot x^2} = \sqrt[4]{x^{21} \cdot x^2} = \sqrt[4]{x^{23}}$$

$$e.) \sqrt[6]{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^7}} = \sqrt[6]{a^2 \cdot \sqrt[5]{3 \sqrt[3]{(a^3)^3} \cdot a^7}} = \sqrt[6]{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^{16}}} = \sqrt[6]{15 \sqrt[5]{(a^2)^{15} \cdot a^{16}}} = \sqrt[6]{a^{46}}$$

$$f.) \frac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[4]{x^2}} = \frac{6 \sqrt[6]{x^{5 \cdot 2}}}{4 \sqrt[4]{x^{2 \cdot 3}}} = \frac{12 \sqrt[6]{x^{10}}}{12 \sqrt[4]{x^6}} = \sqrt[12]{\frac{x^{10}}{x^6}} = \sqrt[12]{x^4}$$

$$g.) \frac{\sqrt[5]{b^3} \cdot \sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{b}} = \frac{5 \sqrt[5]{b^{3 \cdot 4}} \cdot 2 \sqrt[2]{b^{5 \cdot 10}}}{4 \sqrt[4]{b^{1 \cdot 5}}} = \frac{20 \sqrt[5]{b^{12}} \cdot 20 \sqrt[2]{b^{50}}}{20 \sqrt[4]{b^5}} = \sqrt[20]{\frac{b^{12} \cdot b^{50}}{b^5}} = \sqrt[20]{b^{62}} = \sqrt[20]{b^{62}}$$

$$h.) \frac{\sqrt[4]{c^3} \cdot \sqrt[3]{c^7}}{\sqrt[5]{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{60 \sqrt[4]{c^{45}} \cdot 60 \sqrt[3]{c^{140}}}{60 \sqrt[5]{c^{12}} \cdot 60 \sqrt[2]{c^{30}}} = \frac{60 \sqrt[4]{c^{185}}}{60 \sqrt[5]{c^{42}}} = \sqrt[60]{\frac{c^{185}}{c^{42}}} = \sqrt[60]{c^{143}}$$

$$i.) \sqrt[5]{\frac{x^{12}}{y^9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^{12}}{x^3}} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt[5]{\frac{x^{12}}{y^9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^{24}}{x^6}} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt[5]{\frac{x^{12}}{y^9}} \cdot \sqrt[6]{\frac{y^{23}}{x^5}} = \sqrt[5]{\frac{x^{72}}{y^{54}}} \cdot \sqrt[6]{\frac{y^{23}}{x^5}} = \sqrt[30]{\frac{x^{67}}{y^{31}}}$$

I.14. Feladat: Gyöktelenítse a következő törtek nevezőjét!

$$f.) \frac{5}{\sqrt[3]{7}} = \frac{5}{\sqrt[3]{7}} \cdot \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^2}} = \frac{5\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{5\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

$$g.) \frac{25}{\sqrt[5]{5^2}} = \frac{25}{\sqrt[5]{5^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^3}} = \frac{25\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^5}} = \frac{25\sqrt[5]{5^3}}{5}$$

$$h.) \frac{5x}{10 \cdot \sqrt[3]{x}} = \frac{5x}{10 \cdot \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{5x\sqrt[3]{x^2}}{10 \cdot \sqrt[3]{x^3}} = \frac{5x\sqrt[3]{x^2}}{10 \cdot x} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}$$

$$i.) \frac{6y}{7 \cdot \sqrt[5]{y^3}} = \frac{6y}{7 \cdot \sqrt[5]{y^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{y^2}}{\sqrt[5]{y^2}} = \frac{6y\sqrt[5]{y^2}}{7 \cdot \sqrt[5]{y^5}} = \frac{6y\sqrt[5]{y^2}}{7 \cdot y} = \frac{6\sqrt[5]{y^2}}{7}$$

$$j.) \frac{8}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}} = \frac{8}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2} = \frac{8((\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2)}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2} =$$

$$= \frac{8((\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2)}{5 - 3} = \frac{8((\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2)}{2} =$$

$$= 4((\sqrt[3]{5})^2 + \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2)$$

XXVIII. Megoldás (II. fejezet)

II.1. Feladat: Határozza meg a következő kifejezések értelmezési tartományát!

a.) $\frac{2}{x-5}$
 $x-5 \neq 0$
 $x \neq 5$

$\acute{E}T.: x \notin \mathbb{R} \setminus \{5\}$

b.) $\frac{x-12}{x}$
 $x \neq 0$

$\acute{E}T.: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c.) $\frac{x-4}{x+4}$
 $x+4 \neq 0$
 $x \neq -4$

$\acute{E}T.: x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

d.) $\frac{x-3}{x^2-9}$
 $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$
 $x+3 \neq 0$
 $x \neq -3$

$\acute{E}T.: x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

e.) $\frac{y-7}{(y-4)(y+2)}$
 $y-4 \neq 0$ és $y+2 \neq 0$
 $y \neq 4$ $y \neq -2$

$\acute{E}T.: y \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$

f.) $\frac{4a^2-4a+1}{3-6a}$
 $\frac{4a^2-4a+1}{3-6a} = \frac{(2a-1)^2}{3(1-2a)} = -\frac{(2a-1)^2}{3(2a-1)} = -\frac{(2a-1)}{3}$
 $\acute{E}T.: a \in \mathbb{R}$

$$g.) \frac{a}{3-6a}$$

$$3-6a \neq 0$$

$$3 \neq 6a$$

$$a \neq \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \left(a \neq \frac{1}{2} \right)$$

$$\acute{E}T.: a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$h.) \frac{-3a-6b}{4b^2-a^2}$$

$$\frac{-3a-6b}{4b^2-a^2} = \frac{-3(a+2b)}{(2b-a)(2b+a)} = \frac{-3}{(2b-a)}$$

$$2b-a \neq 0$$

$$2b \neq a$$

$$\acute{E}T.: a, b \in \mathbb{R} \text{ és } 2b \neq a$$

$$i.) \frac{a-b}{4b^2-a^2}$$

$$\frac{a-b}{4b^2-a^2} = \frac{a-b}{(2b-a)(2b+a)}$$

$$2b-a \neq 0 \text{ és } 2b+a \neq 0$$

$$2b \neq a$$

$$2b \neq -a$$

$$\acute{E}T.: a, b \in \mathbb{R} \text{ és } 2b \neq \pm a$$

$$j.) \frac{a}{\sqrt{a+b}}$$

$$\sqrt{a+b} \neq 0 \text{ és } a+b \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a+b > 0$$

$$a > -b$$

$$\acute{E}T.: a, b \in \mathbb{R} \text{ és } a > -b$$

$$k.) \frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$$

$$\sqrt{a+b} \neq 0 \text{ és } a+b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a+b > 0$$

$$a > -b$$

$$\text{ÉT.: } a, b \in \mathbb{R} \text{ és } a > -b$$

$$l.) \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2}}$$

$$\sqrt{(a+b)^2} \neq 0 \text{ és } (a+b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(a+b)^2 \neq 0$$

$$a+b \neq 0$$

$$a \neq -b$$

$$\text{ÉT.: } a, b \in \mathbb{R} \text{ és } a \neq -b$$

II.2. Feladat: Egyszerűsítse a következő kifejezéseket!

$$a.) \frac{18xy^3}{6x^2y} = \frac{3y^2}{x}$$

$$b.) \frac{2(x-y)^2}{x-y} = 2(x-y)$$

$$c.) \frac{7b}{7a-49} = \frac{7b}{7(a-7)} = \frac{b}{a-7}$$

$$d.) \frac{3a-6}{3(a-2)} = \frac{3(a-2)}{3(a-2)} = 1$$

$$e.) \frac{4x-16}{x-4} = \frac{4(x-4)}{x-4} = 4$$

$$f.) \frac{2x-6}{9-3x} = \frac{2(x-3)}{3(3-x)} = -\frac{2(x-3)}{3(x-3)} = -\frac{2}{3}$$

$$g.) \frac{4a^2-4a+1}{3-6a} = \frac{(2a-1)^2}{3(1-2a)} = -\frac{(2a-1)^2}{3(2a-1)} = -\frac{2a-1}{3}$$

$$h.) \frac{-3a-6b}{4b^2-a^2} = \frac{-3(a+2b)}{(2b-a)(2b+a)} = \frac{-3}{2b-a}$$

$$i.) \frac{y^2 + 6y + 13}{2y + 6} =$$

$$y^2 + 6y + 13 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} \quad D < 0 \Rightarrow \text{nincs valós megoldás}$$

Nem lehet felírni a gyöktényetős alakot, teljes négyzetté kell alakítani!

$$\frac{y^2 + 6y + 13}{2y + 6} =$$

$$(y + 3)^2 = y^2 + 6y + 9 \Rightarrow y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$$

$$\begin{aligned} \frac{y^2 + 6y + 13}{2y + 6} &= \frac{(y + 3)^2 - 9 + 13}{2(y + 3)} = \frac{(y + 3)^2 + 4}{2(y + 3)} = \frac{(y + 3)^2}{2(y + 3)} + \frac{4}{2(y + 3)} = \\ &= \frac{(y + 3)}{2} + \frac{2}{(y + 3)} \end{aligned}$$

$$j.) \frac{3a^2 - 15a - 17}{6 - a} =$$

$$3a^2 - 15a - 17 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 204}}{6} \quad D \approx 20,7123151 \notin \mathbb{Z}$$

Teljes négyzetté alakítás:

$$\left. \begin{aligned} 3a^2 - 15a &= 3(a^2 - 5a) \\ \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 &= a^2 - 5a + \frac{25}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3a^2 - 15a = 3\left(\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) = 3\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{75}{4}$$

$$\frac{3a^2 - 15a - 17}{6 - a} = \frac{3\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{75}{4} - 17}{6 - a} = \frac{3\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{143}{4}}{6 - a} = \dots$$

$$k.) \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} =$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3 \end{cases}$$

⇓

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{x + 3}{x - 1}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{3 + 1}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{3 - 1}{2} = 1 \end{cases}$$

⇓

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

II.3. Feladat: Végezze el a kijelölt műveleteket!

$$a.) \frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{4} = \frac{4(x-2)}{12} + \frac{3(x-2)}{12} = \frac{4x-8+3x-6}{12} = \frac{6x-14}{12} = \frac{3x-7}{6}$$

$$b.) \frac{3x-2y}{2x} + \frac{5x-3y}{2x} - \frac{x-4y}{2x} = \frac{3x-2y+5x-3y-(x-4y)}{2x} = \frac{3x-2y+5x-3y-x+4y}{2x} = \frac{7x-y}{2x}$$

$$c.) \frac{2-x}{x} - \frac{x+5}{2} = \frac{2(2-x)}{2x} - \frac{x(x+5)}{2x} = \frac{2(2-x)-x(x+5)}{2x} = \frac{4-2x-x^2-5x}{2x} = \frac{-x^2-7x+4}{2x}$$

$$d.) \frac{2x-3y}{y} + \frac{3x^2-4y^2}{xy} = \frac{x(2x-3y)}{xy} + \frac{3x^2-4y^2}{xy} = \frac{2x^2-3xy+3x^2-4y^2}{xy} = \frac{5x^2-3xy-4y^2}{xy}$$

$$e.) \frac{5}{3} + \frac{y+6}{3(y-9)} = \frac{5(y-9)}{3(y-9)} + \frac{y+6}{3(y-9)} = \frac{5y-45+y+6}{3(y-9)} = \frac{6y-39}{3(y-9)}$$

$$f.) \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x+4-3x+6}{(x-2)(x+2)} = \frac{-x+10}{x^2-4}$$

$$g.) \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{(x-3)(x+1)} + \frac{x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{x+1+x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{2x-2}{(x-3)(x+1)}$$

$$h.) \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{2(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{3(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{(x+2)(x+3)+2(x+1)(x+3)-3(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2+5x+6+2(x^2+4x+3)+3(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2+5x+6+2x^2+8x+6+3x^2+9x+6}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{6x^2+22x+18}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$i.) \frac{3a^3}{x^2} \cdot \frac{12x^4}{9a} = \frac{3a^2}{1} \cdot \frac{4x^2}{3} = \frac{a^2}{1} \cdot \frac{4x^2}{1} = 4a^2x^2$$

$$j.) \frac{54a^5}{14x^3} : \left(-\frac{27a^4}{35x^6} \right) = \frac{54a^5}{14x^3} \cdot \left(-\frac{35x^6}{27a^4} \right) = -\frac{54a}{14} \cdot \frac{35x^3}{27} = -\frac{2a}{2} \cdot \frac{5x^3}{1} = -5ax^3$$

$$k.) \frac{x-3}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x-3} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x-3} = \frac{1}{(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x-3} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-3}$$

$$\begin{aligned} \text{l.) } \frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} : \frac{a^2 + 5a}{a^2 - 9} &= \\ &= \frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} \cdot \frac{a^2 - 9}{a^2 + 5a} = \frac{(a-5)(a+5)}{a(a-3)} \cdot \frac{(a-3)(a+3)}{a(a+5)} = \frac{(a-5) \cdot 1}{a \cdot 1} \cdot \frac{1 \cdot (a+3)}{a \cdot 1} = \frac{(a-5)(a+3)}{a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{m.) } \frac{3}{2x+6} - \frac{x-2}{x^2+6x+9} &= \\ &= \frac{3}{2(x+3)} - \frac{x-2}{(x+3)^2} = \frac{3(x+3)}{2(x+3)^2} - \frac{2(x-2)}{2(x+3)^2} = \frac{3(x+3) - 2(x-2)}{2(x+3)^2} = \\ &= \frac{3x+9-2x+4}{2(x+3)^2} = \frac{x+13}{2(x+3)^2} \end{aligned}$$

$$\text{n.) } \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\begin{aligned} \text{o.) } \frac{2\sqrt{17} \cdot \sqrt{12}}{5} + \frac{\sqrt{17} + \sqrt{12}}{\sqrt{17} - \sqrt{12}} &= \\ &= \frac{2\sqrt{17} \cdot \sqrt{12} \cdot (\sqrt{17} - \sqrt{12})}{5(\sqrt{17} - \sqrt{12})} + \frac{5(\sqrt{17} + \sqrt{12})}{5(\sqrt{17} - \sqrt{12})} = \frac{2\sqrt{17} \cdot \sqrt{12} \cdot (\sqrt{17} - \sqrt{12}) + 5(\sqrt{17} + \sqrt{12})}{5(\sqrt{17} - \sqrt{12})} = \\ &= \frac{2 \cdot 17 \cdot \sqrt{12} - 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{17} + 5\sqrt{17} + 5\sqrt{12}}{5(\sqrt{17} - \sqrt{12})} = \frac{39 \cdot \sqrt{12} - 19 \cdot \sqrt{17}}{5(\sqrt{17} - \sqrt{12})} = \dots \end{aligned}$$

$$\text{p.) } (x^2 - 3x + 2) : (x - 2) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = x-1$$

$$\text{q.) } (x^2 + x - 6) : (x^2 + 2x - 3) = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x-2}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \text{r.) } \sqrt{2x^2 + 12x - 32} : \sqrt{2x^2 - 12x + 16} &= \\ &= \sqrt{(2x^2 + 12x - 32) : (2x^2 - 12x + 16)} = \sqrt{\frac{2x^2 + 12x - 32}{2x^2 - 12x + 16}} = \\ &= \sqrt{\frac{2(x^2 + 6x - 16)}{2(x^2 - 6x + 8)}} = \sqrt{\frac{2(x+8)(x-2)}{2(x-2)(x-4)}} = \sqrt{\frac{x+8}{x-4}} \end{aligned}$$

II.4. Feladat: Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

$$k.) \frac{5x}{4} - 1 = x + \frac{5}{6}$$

$$\frac{5x}{4} - 1 = x + \frac{5}{6} \quad / \cdot kn$$

$$\frac{15x}{12} - 1 = x + \frac{10}{12} \quad / \cdot kn$$

$$15x - 12 = 12x + 10 \quad / -12x$$

$$3x - 12 = 10 \quad / +12$$

$$3x = 22 \quad / :3$$

$$x = \frac{22}{3}$$

Ell.!

$$l.) \frac{x}{2} - \frac{14}{5} \cdot (-20) = \frac{x}{4} + 2$$

$$\frac{x}{2} - \frac{14}{5} \cdot (-20) = \frac{x}{4} + 2 \quad / \cdot kn$$

$$\frac{10x}{20} - \frac{56}{20} \cdot (-20) = \frac{5x}{20} + 2 \quad / \cdot kn$$

$$10x + 1120 = 5x + 40 \quad / -5x$$

$$5x + 1120 = 40 \quad / -1120$$

$$5x = -1080 \quad / :5$$

$$x = -216$$

Ell.!

$$m.) \frac{x+5}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{x-1}{6} - \frac{3-x}{8}$$

$$\frac{x+5}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{x-1}{6} - \frac{3-x}{8} \quad / \cdot kn$$

$$\frac{8(x+5)}{24} - \frac{6(x-2)}{24} = \frac{4(x-1)}{24} - \frac{3(3-x)}{24} \quad / \cdot kn$$

$$8(x+5) - 6(x-2) = 4(x-1) - 3(3-x) \quad / \cdot kb$$

$$8x + 40 - 6x + 12 = 4x - 4 - 9 + 3x \quad / \cdot \ddot{o}v$$

$$2x + 52 = 7x - 13 \quad / -2x$$

$$52 = 5x - 13 \quad / +13$$

$$65 = 5x \quad / :5$$

$$13 = x$$

Ell.!

$$n.) (3x+2)(x-3)+1 = \frac{(3-x)^2-1}{3}$$

$$(3x+2)(x-3)+1 = \frac{(3-x)^2-1}{3} \quad / \cdot 3$$

$$3(3x+2)(x-3)+3 = (3-x)^2-1 \quad / \text{zb}$$

$$3(3x^2-9x+2x-6)+3 = 9-6x+x^2-1$$

$$9x^2-21x-18+3 = x^2-6x+8 \quad / 0\text{-ra redukálás}$$

$$8x^2+15x-23=0$$

$$x_{1;2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225+1564}}{16} = \begin{cases} x_1 = \frac{-15+31}{16} = 1 \\ x_2 = \frac{-15-31}{16} = -\frac{46}{16} \end{cases}$$

$$o.) \left(\frac{2x+3}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x+1}{4}$$

$$\left(\frac{2x+3}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x+1}{4} \quad / \text{zb}$$

$$\frac{4x^2+12x+9}{9} - \frac{x^2-2x+1}{4} = x^2 - \frac{x+1}{4} \quad / \text{kn}$$

$$\frac{4(4x^2+12x+9)}{36} - \frac{9(x^2-2x+1)}{36} = x^2 - \frac{9(x+1)}{36} \quad / \cdot \text{kn}$$

$$16x^2+48x+36-9x^2+18x-9 = 36x^2-9x-9$$

$$7x^2+66x+27 = 36x^2-9x-9$$

$$0 = 29x^2-75x-36$$

$$x_{1;2} = \frac{75 \pm \sqrt{5625+4176}}{58} = \begin{cases} x_1 = \frac{75+99}{58} = 3 \\ x_2 = \frac{75-99}{58} = -\frac{24}{58} \end{cases}$$

$$p.) \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{(x+3)^2}{3(x-3)(x+3)} + \frac{(x-3)^2}{3(x-3)(x+3)} = \frac{4(x-3)(x+3)}{3(x-3)(x+3)}$$

$$(x+3)^2 + (x-3)^2 = 4(x-3)(x+3)$$

$$x^2 + 6x + 9 + x^2 - 6x + 9 = 4x^2 - 36$$

$$2x^2 + 18 = 4x^2 - 36$$

$$54 = 2x^2$$

$$27 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{27}$$

$$q.) \frac{x+3}{x+4} + \frac{x}{x-3} = \frac{7}{x^2+x-12}$$

$$\frac{x+3}{x+4} + \frac{x}{x-3} = \frac{7}{(x+4)(x-3)}$$

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+4)(x-3)} + \frac{x(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \frac{7}{(x+4)(x-3)}$$

$$x^2 - 9 + x^2 + 4x = 7$$

$$2x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{2} \\ x_2 = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{r.) } \frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x-1} &= 0 \\ \frac{3}{(x-2)(x-1)} + \frac{x(x-1)}{x-2} + \frac{(x+2)(x-2)}{x-1} &= 0 \\ 3 + x^2 - x + x^2 - 4 &= 0 \\ 2x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{s.) } 3x + \frac{(x-3)^2}{4} &= \frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(x+1)(x-1)}{3} \\ 3x + \frac{6(x-3)^2}{24} &= \frac{3(x+3)^2}{24} + \frac{8(x+1)(x-1)}{24} \\ 72x + 6x^2 - 36x + 54 &= 3x^2 + 18x + 27 + 8x^2 - 8 \\ 6x^2 + 36x + 54 &= 11x^2 + 18x + 19 \\ 0 &= 5x^2 - 18x - 35 \end{aligned}$$

$$x_{1;2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 700}}{10} = \begin{cases} x_1 = \frac{18+32}{10} = 5 \\ x_2 = \frac{18-32}{10} = -\frac{14}{10} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{t.) } \frac{x}{x+4} + \frac{x}{x-4} &= \frac{50}{9} \\ \frac{9x(x-4)}{9(x-4)(x+4)} + \frac{9x(x+4)}{9(x-4)(x+4)} &= \frac{50(x-4)(x+4)}{9(x-4)(x+4)} \\ 9x^2 - 36x + 9x^2 + 36x &= 50x^2 - 800 \\ 18x^2 &= 50x^2 - 800 \\ 800 &= 32x^2 \\ 25 &= x^2 \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

II.5. Feladat: Határozza meg a következő törtek tizedestört alakját!

$$\text{a.) } \frac{1}{2} = 1:2 = 0,5$$

$$\text{b.) } 5\frac{4}{5} = \frac{29}{5} = 29:5 = 5,8$$

$$c.) \frac{5}{3} = 5:3 = 1,6$$

$$d.) \frac{11}{25} = 11:25 = 0,44$$

$$e.) \frac{3}{7} = 3:7 = 0,428571$$

$$f.) \frac{321}{100} = 321:100 = 3,21$$

II.6. Feladat: Határozza meg a következő tizedestörtek tört alakját!

$$a.) 0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$b.) 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$c.) 0,5 =$$

Legyen:

$$\left. \begin{array}{l} a = 0,5 \\ 10a = 5,5 \end{array} \right\} II. - I.$$

$$9a = 5$$

$$a = \frac{5}{9}$$

$$d.) 0,25 =$$

Legyen:

$$\left. \begin{array}{l} a = 0,25 \\ 100a = 25,25 \end{array} \right\} II. - I.$$

$$99a = 25$$

$$a = \frac{25}{99}$$

$$e.) 0,213 =$$

Legyen

$$a = 0,213$$

$$\left. \begin{array}{l} 100a = 21,3 \\ 1000a = 213,3 \end{array} \right\} II. - I.$$

$$900a = 192$$

$$a = \frac{192}{900}$$

f.) $0,3\dot{1}3\ddot{5} =$

Legyen:

$$a = 0,3\dot{1}3\ddot{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10a = 3,1\dot{3}\ddot{5} \\ 10000a = 3135,1\dot{3}\ddot{5} \end{array} \right\} II. - I.$$

$$9990a = 3132$$

$$a = \frac{3132}{9990}$$

II.7. Feladat: Bizonyítsa be, hogy $0,2\dot{9} = 0,3$!

Legyen:

$$a = 0,2\dot{9}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10a = 2,9\dot{ } \\ 100a = 29,9\dot{ } \end{array} \right\} II. - I.$$

$$90a = 27$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{27}{90} = 0,3 \\ a = 0,2\dot{9} \end{array} \right\} \Rightarrow 0,2\dot{9} = 0,3$$

II.8. Feladat: Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a.) $3,5(x+3) = 2,5x + 20$

$$3,5x + 10,5 = 2,5x + 20$$

$$x + 10,5 = 20$$

$$x = 9,5$$

Ell.!

b.) $(x+3)^2 - 5 = 8(0,5x - 0,25) + 9$

$$x^2 + 6x + 9 - 5 = 4x + 2 + 9$$

$$x^2 + 2x - 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 28}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2} = \begin{cases} x_1 = -1 + 2\sqrt{2} \\ x_2 = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c.) } \frac{x-0,2}{0,2} - \frac{0,2x+1}{0,4} + \frac{0,4x-1}{0,6} &= x \\ \frac{\frac{x-0,2}{2}}{\frac{2}{10}} - \frac{\frac{0,2x+1}{4}}{\frac{4}{10}} + \frac{\frac{0,4x-1}{6}}{\frac{6}{10}} &= x \\ (x-0,2) \frac{10}{2} - (0,2x+1) \frac{10}{4} + (0,4x-1) \frac{10}{6} &= x \\ (x-0,2) \frac{60}{12} - (0,2x+1) \frac{30}{12} + (0,4x-1) \frac{20}{12} &= x \\ 60x-12-6x-30+8x-20 &= 12x \\ 62x-62 &= 12x \\ 50x &= 62 \\ x &= \frac{62}{50} = \frac{31}{25} \end{aligned}$$

Ell.!

II.9. Feladat: Péter és Robi testmagasságának aránya $\frac{4}{5}$. Milyen magas Robi, ha Péter 124 cm?

$$P = 124 \text{ cm}$$

$$\frac{P}{R} = \frac{4}{5} \quad (\Rightarrow P : R = 4 : 5)$$

Legyen:

$$P = 4x = 124 \text{ cm} \Rightarrow x = 31$$

$$R = 5x = 3 \cdot 31 = 155 \text{ cm}$$

Ell.!

V.: Tehát Robi magassága 155 cm.

II.10. Feladat: Egy háromszög belső szögeinek aránya 3:4:5. Mekkora a háromszög szögei?

$$\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$$

Legyen:

$$\alpha = 3x$$

$$\beta = 4x$$

$$\gamma = 5x$$

Tudjuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$$3x + 4x + 5x = 180^\circ$$

$$12x = 180^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

$$\alpha = 3x = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ; \beta = 4x = 4 \cdot 15^\circ = 60^\circ; \gamma = 5x = 5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$$

Ell.!

V.: Tehát a háromszög szögei $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\gamma = 75^\circ$.

II.11. Feladat: Egy téglalap szomszédos oldalainak aránya 2:3, kerülete 90 cm. Mekkora a tényleges területe?

$$K = 90\text{cm}$$

$$a : b = 2 : 3$$

Legyen :

$$a = 2x$$

$$b = 3x$$

Tudjuk, hogy $K = 2(a + b)$

$$90 = 2(2x + 3x)$$

$$90 = 10x$$

$$x = 9$$

$$a = 2x = 2 \cdot 9 = 18\text{cm}; b = 3x = 3 \cdot 9 = 27\text{cm}$$

$$T = a \cdot b = 18 \cdot 27 = 486\text{cm}^2$$

Ell.!

V.: Tehát a téglalap területe 486cm^2 .

II.12. Feladat: Ha 3 tyúk 3 nap alatt 3 tojást tojik, akkor 6 tyúk 6 nap alatt hány tojást tojik?

$$\left. \begin{array}{l} 3\text{tyúk} \quad 3\text{nap alatt} \quad 3\text{tojás} \\ 6\text{tyúk} \quad 3\text{nap alatt} \quad x\text{tojás} \end{array} \right\}$$

Egyenes arányosság :

$$x = \frac{6 \cdot 3}{3} = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} 6\text{tyúk} \quad 3\text{nap alatt} \quad 6\text{tojás} \\ 6\text{tyúk} \quad 6\text{nap alatt} \quad y\text{tojás} \end{array} \right\}$$

Egyenes arányosság :

$$y = \frac{6 \cdot 6}{3} = 12$$

V.: Tehát 6 tyúk hat nap alatt 12 tojást tojik.

Hány ilyen tyúk tojik 9 nap alatt 18 tojást?

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ tyúk } 3 \text{ nap alatt } 3 \text{ tojás} \\ 3 \text{ tyúk } 9 \text{ nap alatt } x \text{ tojás} \end{array} \right\}$$

Egyenes arányosság :

$$x = \frac{9 \cdot 3}{3} = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ tyúk } 9 \text{ nap alatt } 9 \text{ tojás} \\ x \text{ tyúk } 9 \text{ nap alatt } 18 \text{ tojás} \end{array} \right\}$$

Egyenes arányosság :

$$y = \frac{18 \cdot 3}{9} = 6$$

V.: Tehát 6 tyúk tojik 9 nap alatt 18 tojást.

II.13. Feladat: Két autó 160 km-en 19,2 liter benzint fogyasztott. (Ugyanolyan körülmények között, ugyanolyan autók.)

a.) 4 autó 240 km-en hány liter benzint fogyasztott?

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ autó } 160 \text{ km } 19,2 \text{ liter} \\ 4 \text{ autó } 160 \text{ km } x \text{ liter} \end{array} \right\}$$

Egyenes arányosság :

$$x = \frac{4 \cdot 19,2}{2} = 38,4$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \text{ autó } 160 \text{ km } 38,4 \text{ liter} \\ 4 \text{ autó } 240 \text{ km } y \text{ liter} \end{array} \right\}$$

Egyenes arányosság :

$$y = \frac{240 \cdot 38,4}{160} = 57,6 \text{ liter}$$

V.: Tehát 4 autó 240km-en 57,6 liter üzemanyagot fogyaszt.

b.) Egy autó 640 km-en hány liter benzint fogyasztott?

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ autó } 160 \text{ km } 19,2 \text{ liter} \\ 1 \text{ autó } 160 \text{ km } x \text{ liter} \end{array} \right\}$$

Egyenes arányosság :

$$x = \frac{1 \cdot 19,2}{2} = 9,6$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ autó } 160 \text{ km } 8,6 \text{ liter} \\ 1 \text{ autó } 640 \text{ km } y \text{ liter} \end{array} \right\}$$

Egyenes arányosság :

$$y = \frac{640 \cdot 8,6}{160} = 34,4 \text{ liter}$$

V.: Tehát 1 autó 640km-en 34,4 liter üzemanyagot fogyaszt.

II.14. Feladat: Egy kirándulásra 42 személyes buszt bérelnek, melynek költsége 23940 Ft. A Buszt nem tudták teljesen megtölteni, így fejenként 630 Ft a buszköltség. Hány hely maradt üresen?

$$42 \text{ fő } \Sigma : 23940 \text{ Ft} \Rightarrow 23940 / 42 = 570 \text{ Ft} / \text{fő}$$

$$\left. \begin{array}{l} 42 \text{ fő } 570 \text{ Ft} \\ x \text{ fő } 630 \text{ Ft} \end{array} \right\}$$

Fordított arányosság :

$$x = \frac{42 \cdot 570}{630} = 38 \text{ fő}$$

V.: Tehát a kiránduláson 38 fő vett részt, azaz 4 hely maradt szabadon.

II.15. Feladat: Egy híd cölöpének az $\frac{1}{4}$ része a földben, a $\frac{2}{5}$ része a vízben van, 2,8 m hosszúságú része pedig kiáll a vízből. Milyen hosszúságú a cölöp?

Legyen :

$$x = \text{acölöphossza}$$

$$\text{földben } \frac{1}{4} \text{ rész} \quad \text{vízben } \frac{2}{5} \text{ rész} \quad 2,8 \text{ m kiáll a vízből}$$

$$\frac{1}{4} \cdot x + \frac{2}{5} \cdot x + 2,8 = x$$

$$\frac{1}{4} \cdot x + \frac{2}{5} \cdot x + 2,8 = x$$

$$\frac{5}{20} \cdot x + \frac{8}{20} \cdot x + 2,8 = x$$

$$5x + 8x + 56 = 20x$$

$$56 = 7x$$

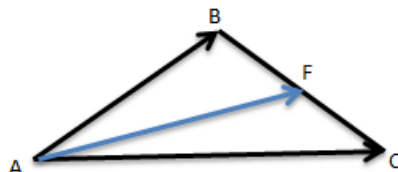
$$x = 8$$

Ell.!

V.: Tehát a cölöp 8 méter hosszú.

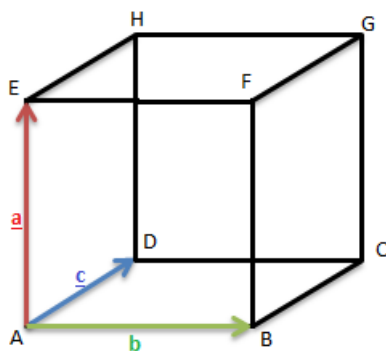
XXIX. Megoldás (III. fejezet)

III.1. Feladat: Fejezze ki az $\overrightarrow{AF}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorok segítségével, ahol F a BC szakasz felezőpontja!



$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

III.2. Feladat: Az ábrán látható kocka A csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AE} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ és $\overrightarrow{AD} = \underline{c}$. Fejezze ki $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével a $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{AG}$ és $\overrightarrow{FH}$ vektorokat!

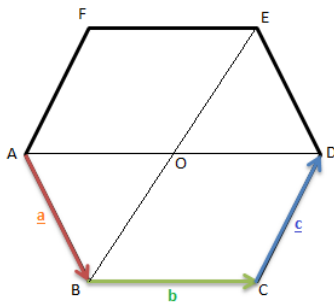


$$\overrightarrow{GC} = -\underline{a}$$

$$\overrightarrow{GC} = \underline{b} + \underline{c} + \underline{a}$$

$$\overrightarrow{FH} = \underline{c} - \underline{b}$$

III.3. Feladat: Az ábrán látható szabályos hatszög A csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$ és $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$. Fejezze ki $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével a $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{FA}$ és az $\overrightarrow{FO}$ vektorokat!



$$\overrightarrow{AC} = \underline{a} + \underline{b}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{2} \text{ vagy } \overrightarrow{AO} = \underline{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \underline{b} + \underline{c}$$

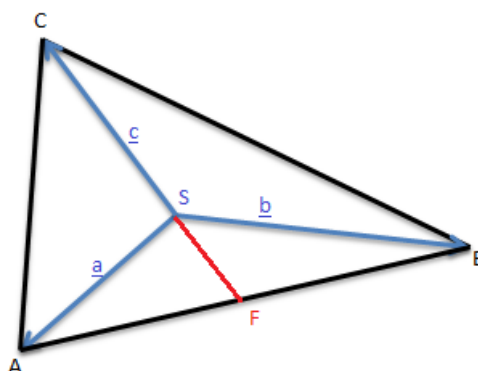
$$\overrightarrow{BE} = \underline{b} + \underline{c} - \underline{a}$$

$$\overrightarrow{CE} = \underline{c} - \underline{a}$$

$$\overrightarrow{FA} = -\underline{c}$$

$$\overrightarrow{FO} = \underline{a}$$

III.4. Feladat: Az ábrán látható ABC háromszög S súlypontjából a csúcsokhoz mutató vektorok $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. Határozzuk meg az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok összegét!



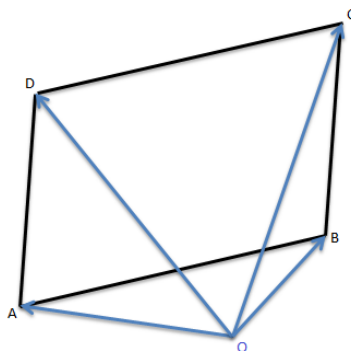
$$\overrightarrow{SF} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$$

A súlypont 1:2 arányban osztja a súlyvonalat. $\Rightarrow \underline{c} = -2 \cdot \overrightarrow{SF}$

$\Downarrow$

$$\underline{c} = -2 \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} = -(\underline{a} + \underline{b}) \Rightarrow \underline{c} + \underline{a} + \underline{b} = 0$$

III.5. Feladat: Az ábrán látható $ABCD$ paralelogramma síkjának egy tetszőleges pontja O . Bizonyítsa be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$!



$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \end{aligned} \right\}$$

AB és DC paralelogramma szemközti oldalai (párhuzamosak és egyenlők)

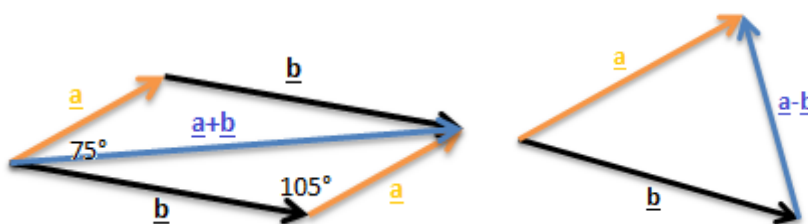
↓

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

↓

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$$

III.6. Feladat: Határozza meg az $\underline{a} + \underline{b}$ és az $\underline{a} - \underline{b}$ vektorok hosszát, ha $|\underline{a}| = 10$, $|\underline{b}| = 8$ és a két vektor hajlásszöge 75° !



Háromszögekre vonatkozó Coszinusz – tétel alapján:

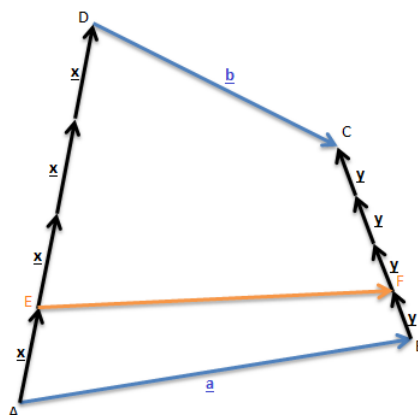
$$|\underline{a} + \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2|\underline{a}||\underline{b}|\cos 105^\circ \quad |\underline{a} - \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2|\underline{a}||\underline{b}|\cos 75^\circ$$

$$|\underline{a} + \underline{b}|^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cos 105^\circ \quad |\underline{a} - \underline{b}|^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cos 75^\circ$$

$$|\underline{a} + \underline{b}|^2 = 205,4110 \quad |\underline{a} - \underline{b}|^2 = 122,5889$$

$$|\underline{a} + \underline{b}| = \sqrt{205,4110} = 14,3321 \quad |\underline{a} - \underline{b}| = \sqrt{122,5889} = 11,0719$$

III.7. Feladat: Az ábrán látható $ABCD$ négyszög szemközti oldalaira vektorokat illesztettünk: $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{b}$. Az AD oldal A-hoz közelebbi negyedelő pontja E , a BC oldal B-hez közelebbi negyedelő pontja F . Határozzuk meg az $\overrightarrow{EF}$ vektort az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok segítségével.



$$\overrightarrow{AD} = 4\underline{x} \text{ és } \overrightarrow{BC} = 4\underline{y}$$

Az ábrán jól látható, hogy:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{EF} = -\underline{x} + \underline{a} + \underline{y} \\ \overrightarrow{EF} = 3\underline{x} + \underline{b} - 3\underline{y} \end{array} \right\} \cdot 3 \quad \left. \begin{array}{l} 3 \cdot \overrightarrow{EF} = -3\underline{x} + 3\underline{a} + 3\underline{y} \\ \overrightarrow{EF} = 3\underline{x} + \underline{b} - 3\underline{y} \end{array} \right\} I. + II.$$

$$4 \cdot \overrightarrow{EF} = 3\underline{a} + \underline{b}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3\underline{a} + \underline{b}}{4}$$

III.8. Feladat: Határozza meg az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszögét, ha $|\underline{a}| = 5$; $|\underline{b}| = 8$ és $\underline{a} \cdot \underline{b} = -10$!

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = -10$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \alpha$$

$$-10 = 5 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-10}{5 \cdot 8} \quad \alpha = 104,4775^\circ$$

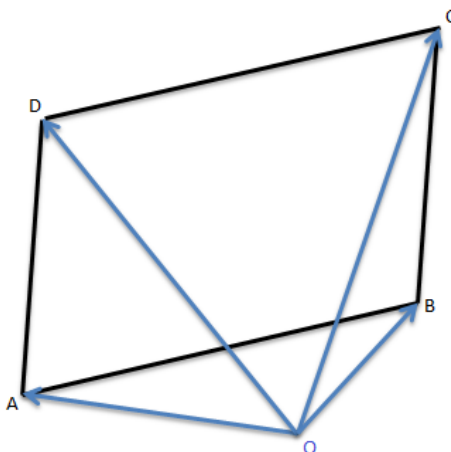
III.9. Feladat: Egy rombusz átlóinak hossza 6,5cm és 12,25cm. Számítsa ki az átlóvektorok skaláris szorzatát! Válaszát indokolja!

Rombusz átlói merőlegesek egymásra.

$$\text{Az átlók skaláris szorzata: } \underline{e} \cdot \underline{f} = |\underline{e}| |\underline{f}| \cos 90^\circ$$

$$\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \text{Az átlók skaláris szorzata szintén 0.}$$

III.10. Feladat: Adott egy ABCD paralelogramma és egy O pont. Bizonyítsuk be, hogy:

$$(OA^2 + OC^2) - (OB^2 + OD^2) = 2 \underline{AB} \cdot \underline{AD}$$


$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2) - (\overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2) &= \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OD}^2 = \\
 &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \\
 &= \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AB}(-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \\
 &= \overrightarrow{AB}(-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \\
 &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}) = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}
 \end{aligned}$$

XXX. Megoldás (IV. fejezet)

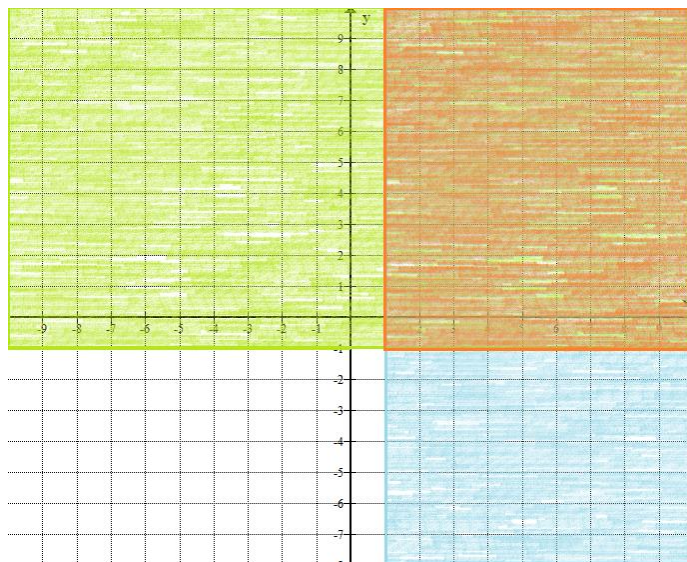
IV.1. Feladat: Legyen adva a következő két ponthalmaz:

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \geq -1\}$$

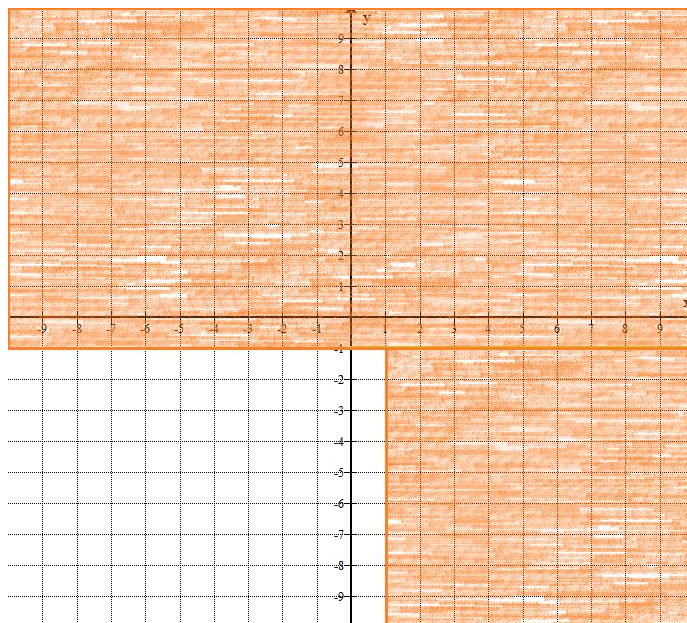
$$B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } x \geq 1\}$$

Ábrázolja a következő ponthalmazokat:

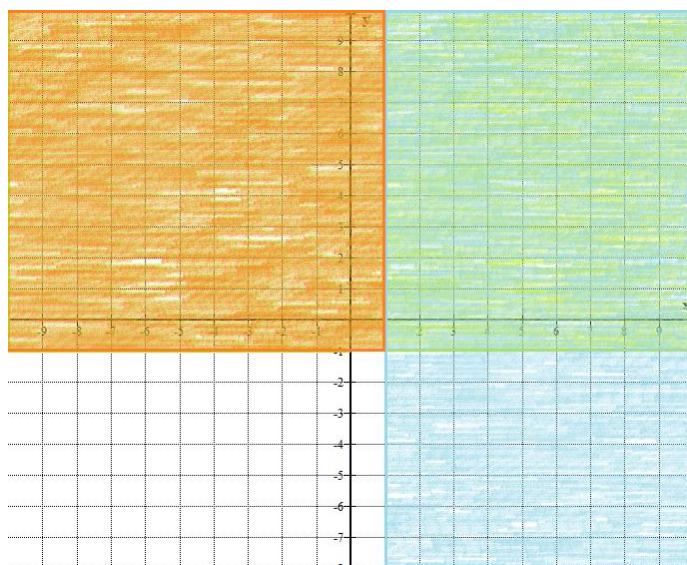
a.) $A \cap B$



b.) $A \cup B$



c.) $A \setminus B$



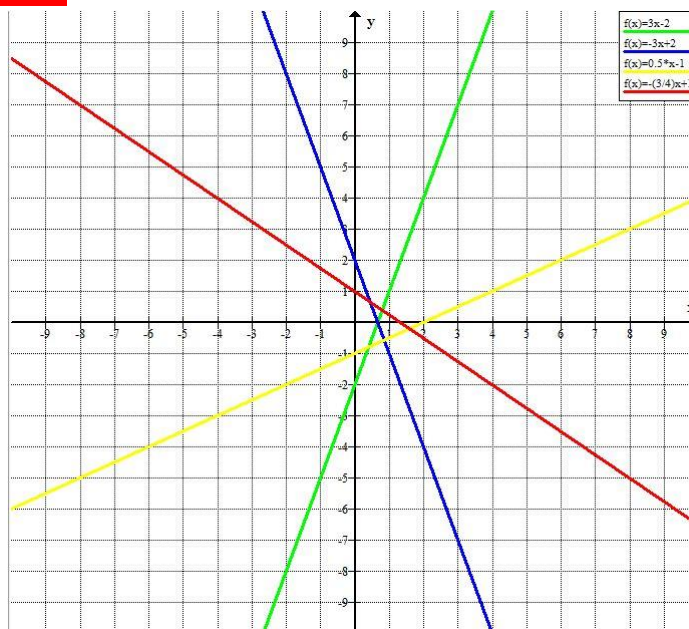
IV.2. Feladat: Ábrázolja a következő függvényeket!

a.) $x \mapsto 3x - 2$

b.) $x \mapsto -3x + 2$

c.) $x \mapsto \frac{1}{2}x - 1$

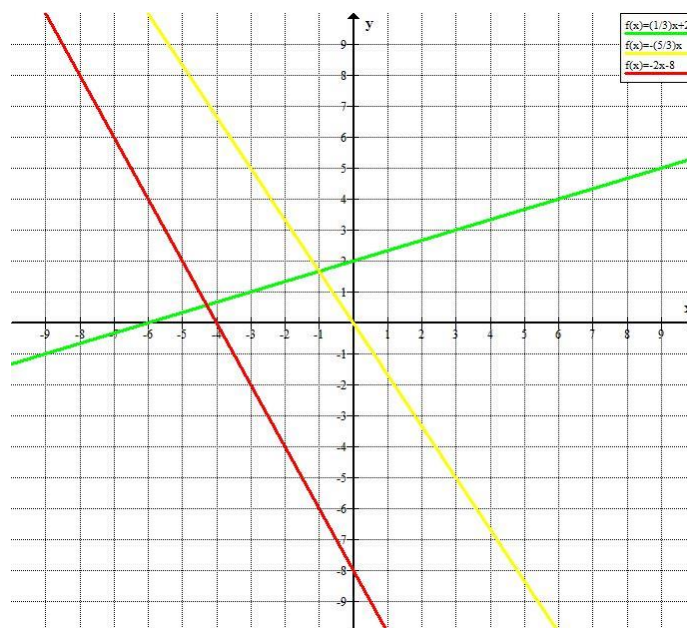
d.) $x \mapsto -\frac{3}{4}x + 1$



e.) $x \mapsto \frac{1}{3}(x - 6) + 4 = \frac{1}{3}x - \frac{6}{3} + 4 = \frac{1}{3}x + 2$

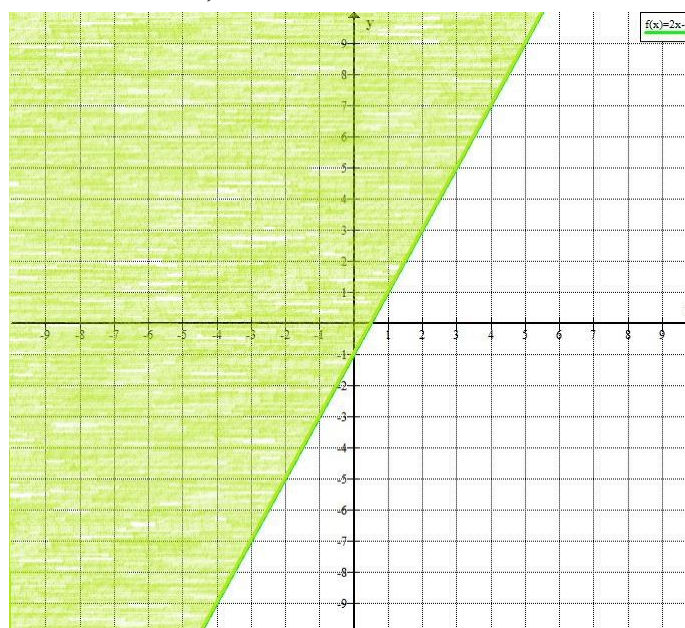
f.) $x \mapsto -\frac{3}{5}(x + 5) + 3 = -\frac{3}{5}x - 3 + 3 = -\frac{3}{5}x$

g.) $x \mapsto 2(x + 2) - 4(x + 3) = 2x + 4 - 4x - 12 = -2x - 8$

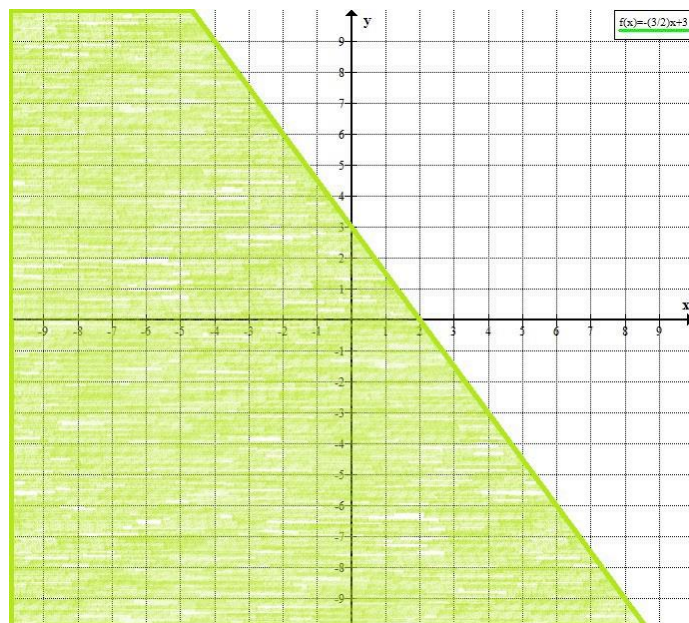


IV.3. Feladat: Ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a következő ponthalmazokat:

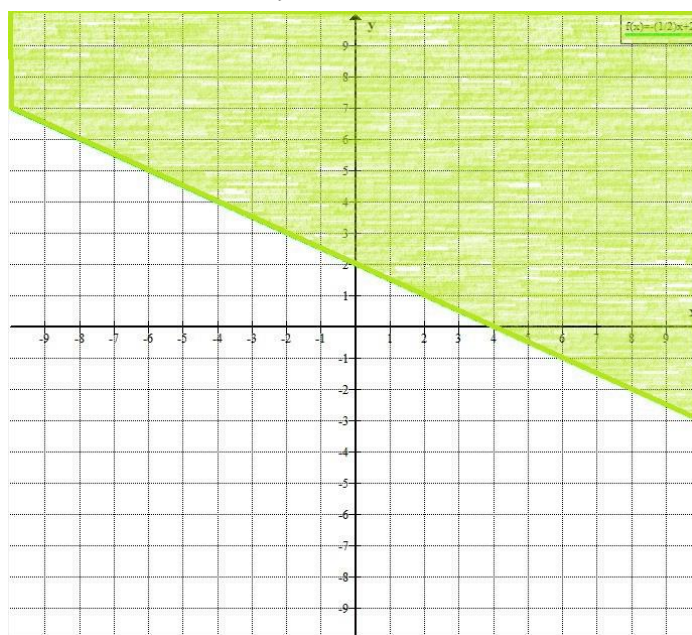
a.) $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \geq 2x - 1\}$



$$b.) B = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \leq -\frac{3}{2}x + 3 \right\}$$



$$c.) C = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } y \geq -\left(\frac{1}{2}x - 2\right) \right\}$$



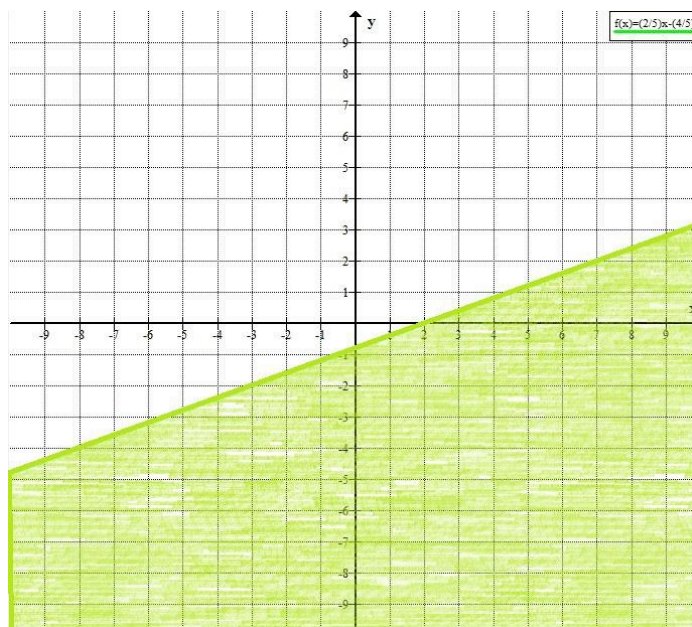
$$d.) D = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ és } x \geq \frac{5}{2}y + 2 \right\}$$

$$x \geq \frac{5}{2}y + 2$$

$$2x \geq 5y + 4$$

$$2x - 4 \geq 5y$$

$$\frac{2}{5}x - \frac{4}{5} \geq y$$



IV.4. Feladat: Adott az $f(x) = ax + b$, $x, a, b \in \mathbb{R}$. Továbbá tudjuk, hogy $f(-1) = 2$ és $f(2) = 3$. Adja meg a függvény hozzárendelési szabályát, majd ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben!

$$f(-1) = 2 \text{ és } f(2) = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} -a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} / \cdot 2 \\ -2a + 2b = 4 \end{array} \left. \begin{array}{l} -2a + 2b = 4 \\ 2a + b = 3 \end{array} \right\} I. + II.$$

$$3b = 7$$

$$b = \frac{7}{3}$$

$$-a + \frac{7}{3} = 2$$

$$-a = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

IV.5. Feladat: Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát!

$$a.) f(x) = \frac{3}{4-x}$$

$$4-x \neq 0$$

$$x \neq 4$$

$$ÉT.: x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$$b.) f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$$

$$x^2-x-6 = (x-3)(x+2) \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x-3 \neq 0 \quad \text{és} \quad x+2 \neq 0$$

$$x \neq 3 \quad \quad \quad x \neq -2$$

$$ÉT.: x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$$

$$c.) f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{2-x}$$

$$x+3 \geq 0 \quad \text{és} \quad 2-x \neq 0$$

$$x \geq -3 \quad \quad \quad 2 \neq x$$

$$ÉT.: x \in [-3; \infty[\setminus \{2\}$$

$$d.) f(x) = \sqrt{\frac{2x+6}{5-2x}}$$

$$\frac{2x+6}{5-2x} \geq 0$$

I. eset:

$$\left. \begin{array}{l} 2x+6 \geq 0 \\ 5-2x > 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq -3 \\ \frac{5}{2} > x \end{array} \right\}$$

$$-3 \leq x < \frac{5}{2}$$

$$ÉT.: x \in \left[-3; \frac{5}{2}\right[$$

II. eset:

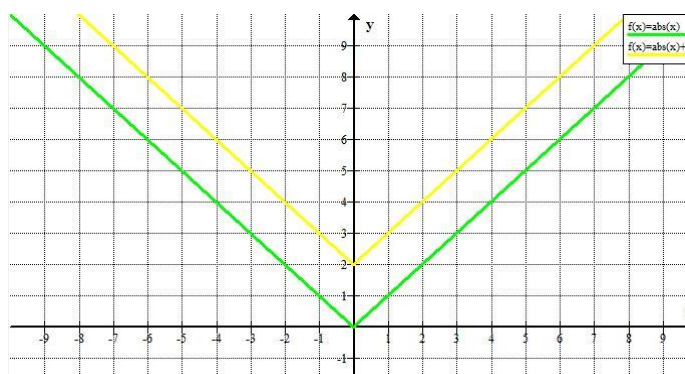
$$\left. \begin{array}{l} 2x+6 \leq 0 \\ 5-2x < 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq -3 \\ \frac{5}{2} < x \end{array} \right\}$$

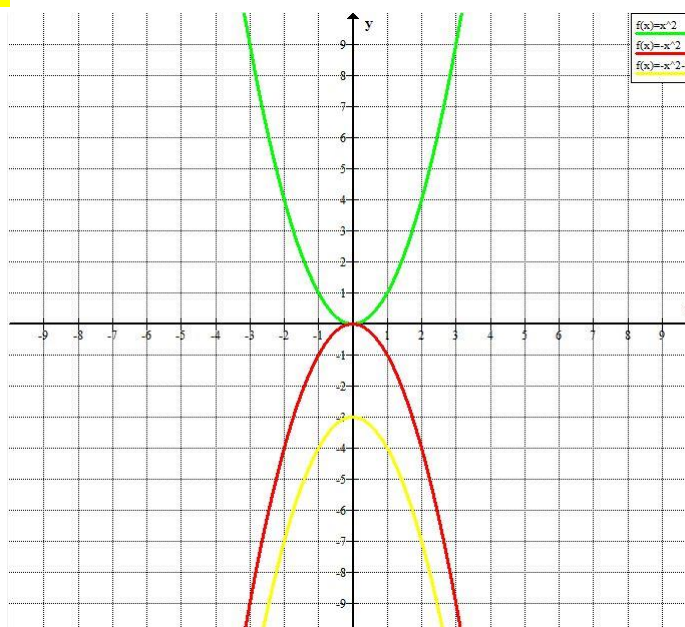
$$\emptyset$$

IV.6. Feladat: Függvény-transzformációk segítségével ábrázolja a következő függvényeket!

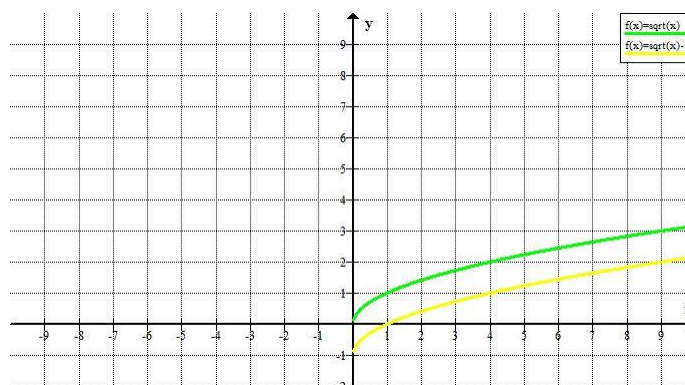
a.) $f(x) = |x| + 2$



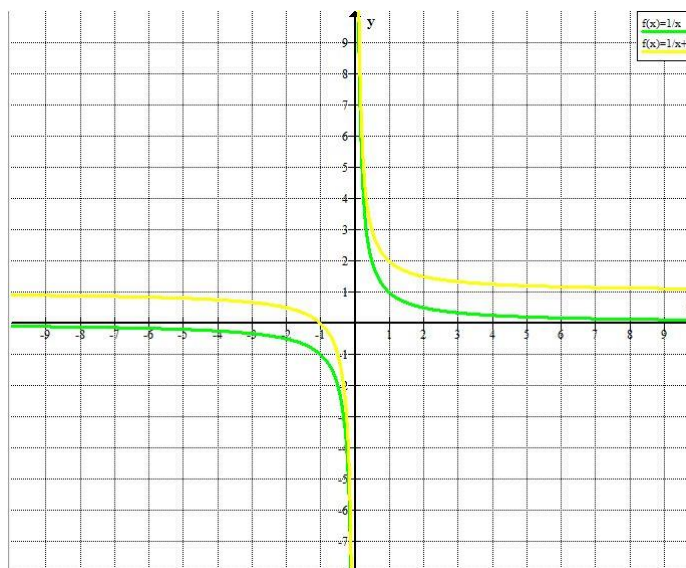
b.) $f(x) = -x^2 - 3$



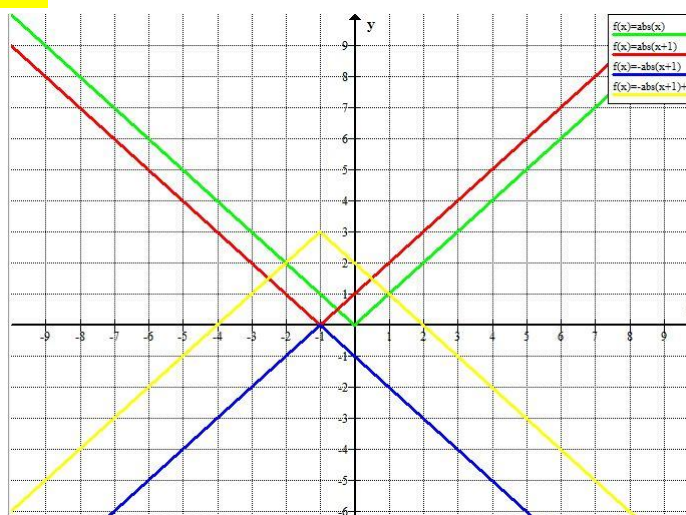
c.) $f(x) = \sqrt{x} - 1$



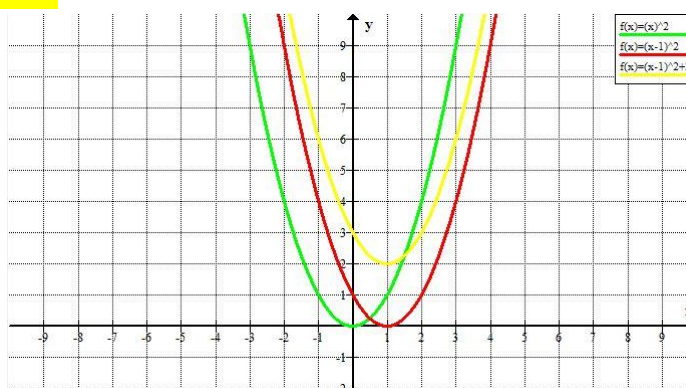
d.) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$



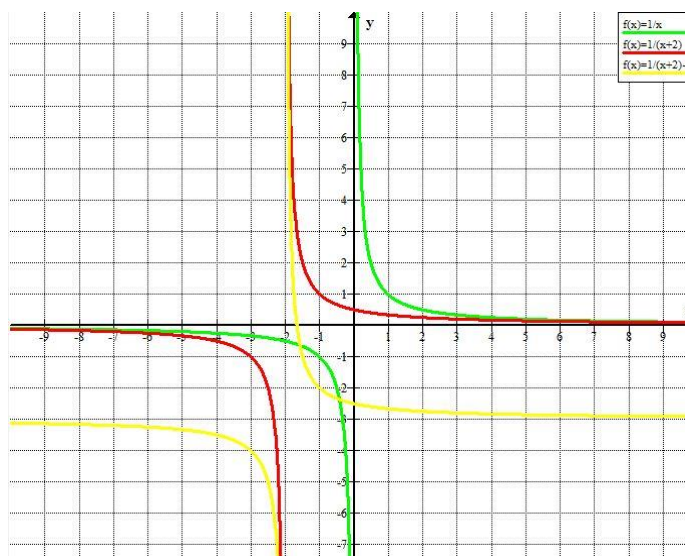
e.) $f(x) = -|x+1| + 3$



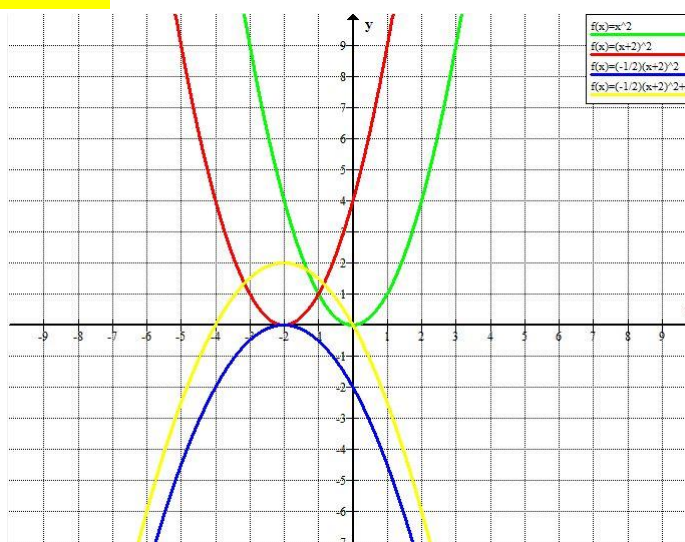
f.) $f(x) = (x-1)^2 + 2$



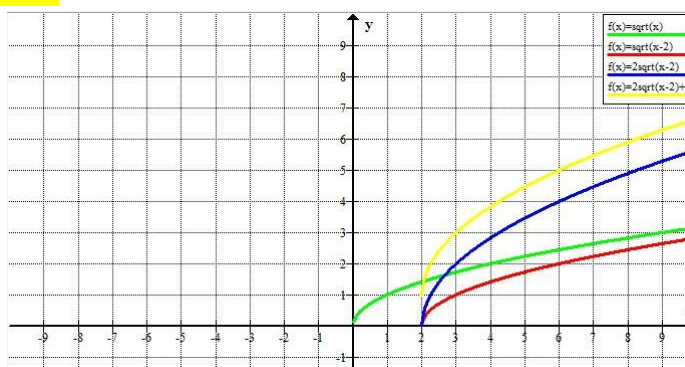
g.) $f(x) = \frac{1}{x+2} - 3$



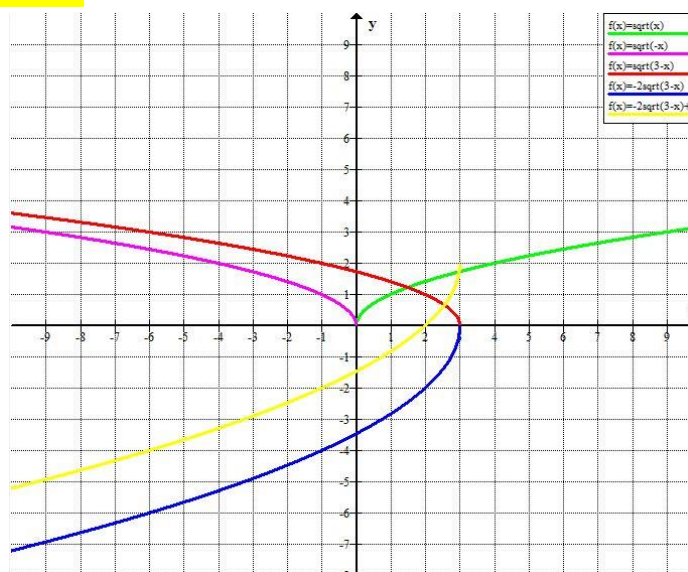
h.) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$



i.) $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 1$



j.) $f(x) = -2\sqrt{3-x} + 2$



IV.7. Feladat: Ábrázolja és jellemezze a következő függvényeket (értelmezési tartomány, értékkészlet; zérushely, menete, szélsőérték, paritás)!

a.) $f(x) = x - 1 - 2|x - 2|$

1. *ÉT.*: $x \in \mathbb{R}$

2. *ÉK.*: $y \in]-\infty; 1]$

3. *Zérushely*:

$$f(x) = 0$$

$$x - 1 - 2|x - 2| = 0$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{ha } x - 2 \geq 0 \text{ azaz } x \geq 2 \\ -(x - 2), & \text{ha } x - 2 < 0 \text{ azaz } x < 2 \end{cases}$$

I.eset: $x - 1 - 2x + 4 = 0 \quad x = 3$

II.eset: $x - 1 + 2x - 4 = 0 \quad x = \frac{5}{3}$

4. *Menete*:

$$]-\infty; 2] \text{ szig.mon.nő}$$

$$[2; \infty[\text{ szig.mon.csökken}$$

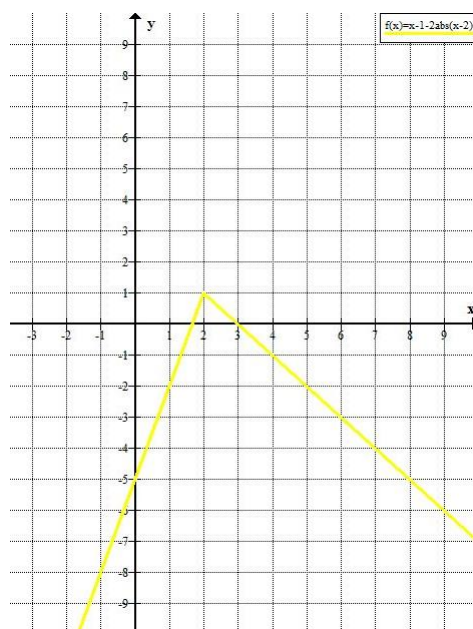
5. *Szélsőérték*:

Maximuma van

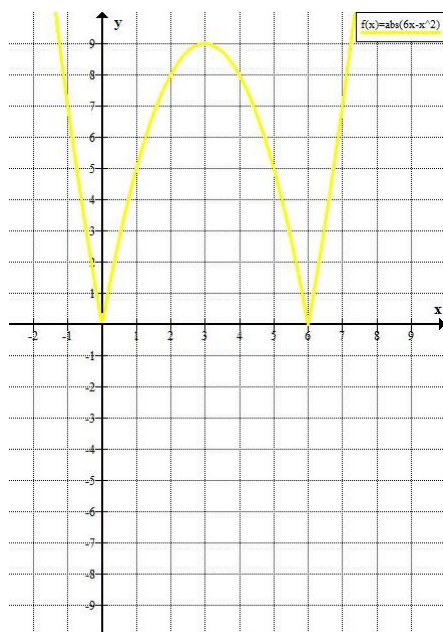
$$\text{helye: } x = 2$$

$$\text{értéke: } y = 1$$

6. *Paritása nincs*



b.) $f(x) = |6x - x^2|$



1. ÉT.: $x \in \mathbb{R}$

2. ÉK.: $y \in [0; \infty[$

3. Zérushely:

$$f(x) = 0$$

$$|6x - x^2| = 0$$

$$x(6 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ vagy } x = 6$$

4. Menete:

$] -\infty; 0]$ szig.mon.csökken

$[0; 3[$ szig.mon.nő

$[3; 6]$ szig.mon.csökken

$[6; \infty[$ szig.mon.nő

5. Szélsőérték:

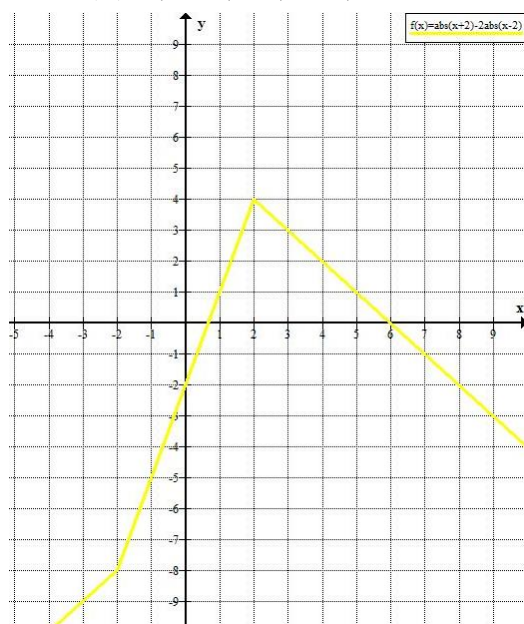
Minimuma van

$$\text{helye: } x_1 = 0; \quad x_2 = 6$$

$$\text{értéke: } y_1 = 0; \quad y_2 = 0$$

6. Paritása nincs

c.) $f(x) = |x + 2| - 2|x - 2|$



1. ÉT.: $x \in \mathbb{R}$

2. ÉK.: $y \in [0; \infty[$

3. Zérushely:

$$f(x) = 0 \quad x = \frac{2}{3} \text{ vagy } x = 6$$

4. Menete:

$] -\infty; 2]$ szig.mon.nő

$[2; \infty[$ szig.mon.csökken

5. Szélsőérték:

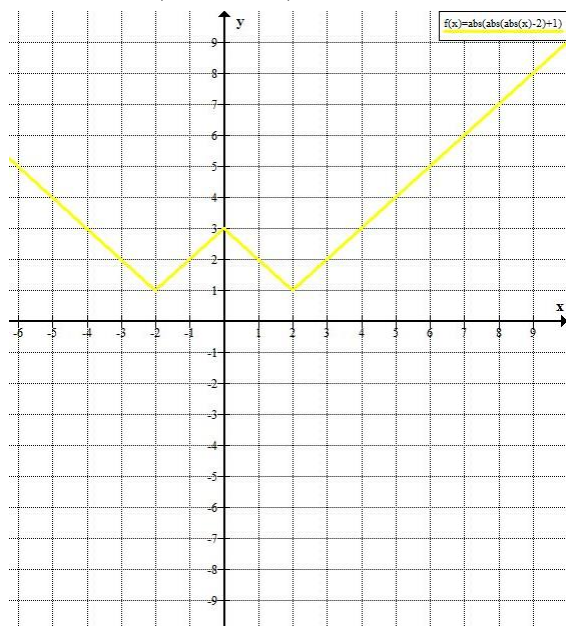
Maximuma van

$$\text{helye: } x = 2$$

$$\text{értéke: } y = 4$$

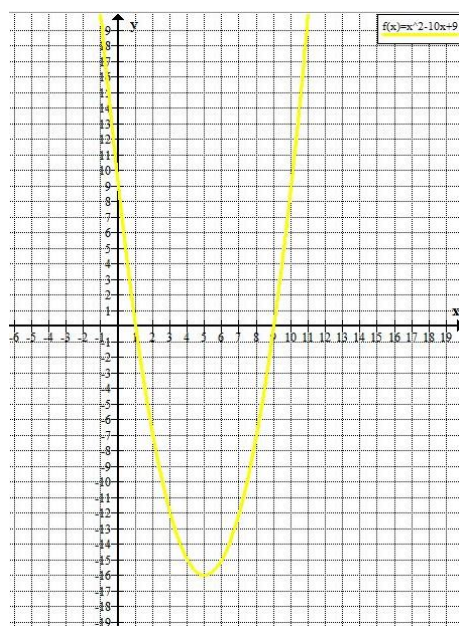
6. Paritása nincs

d.) $f(x) = ||x| - 2| + 1$



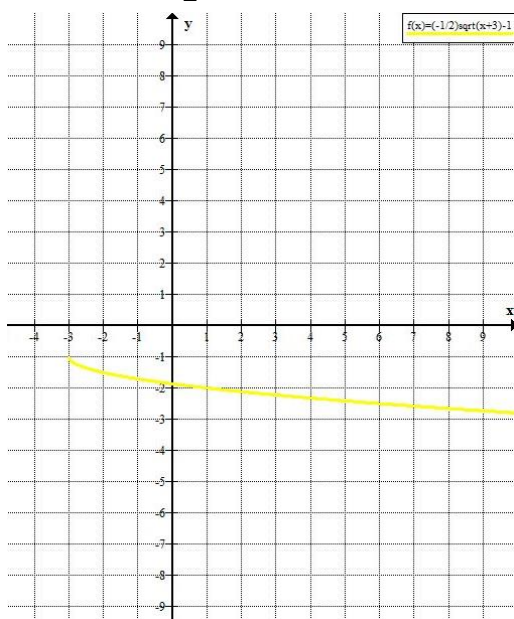
1. ÉT.: $x \in \mathbb{R}$
2. ÉK.: $y \in [1; \infty[$
3. Zérushely: nincs
4. Menete :
 $]-\infty; -2]$ szig.mon.csökken
 $[2; 0[$ szig.mon.nő
 $[0; 2]$ szig.mon.csökken
 $[2; \infty[$ szig.mon.nő
5. Szélsőérték :
 Minimuma van
 helye: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$
 értéke: $y_1 = 1$; $y_2 = 1$
6. Paritása nincs

e.) $f(x) = x^2 - 10x + 9$



1. ÉT.: $x \in \mathbb{R}$
2. ÉK.: $y \in [-16; \infty[$
3. Zérushely :
 $f(x) = 0$
 $x^2 - 10x + 9 = (x - 9)(x - 1) = 0$
 $\Updownarrow$
 $x = 1$ vagy $x = 9$
4. Menete :
 $]-\infty; 5]$ szig.mon.csökken
 $[5; \infty[$ szig.mon.nő
5. Szélsőérték :
 Minimuma van
 helye: $x = 5$
 értéke: $y = -16$
6. Paritása nincs

f.) $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x+3} - 1$



1.ÉT.:

$$x+3 \geq 0$$

$$x \geq -3$$

$$x \in [-3; \infty[$$

2.ÉK.: $y \in]-\infty; -1]$

3.Zérushely: nincs

4. Menete:

$[-3; \infty[$ szig.mon.csökken

5. Szélsőérték:

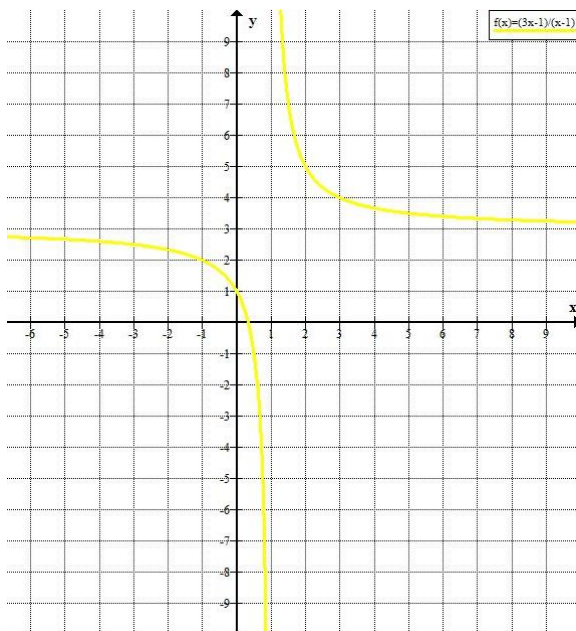
Maximuma van

$$\text{helye: } x = -3$$

$$\text{értéke: } y = -1$$

6. Paritása nincs

g.) $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$



1.ÉT.:

$$x-1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

2.ÉK.: $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

3.Zérushely:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{3x-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

4. Menete:

$]-\infty; 1[$ szig.mon.csökken

$]1; \infty[$ szig.mon.csökken

5. Szélsőértéke nincs

6. Paritása nincs

$$h.) f(x) = \left| \frac{x-3}{x+2} \right|$$

$$1. \text{ÉT.: } x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$2. \text{ÉK.: } y \in \mathbb{R}_0^+$$

$$3. \text{Zérushely: } f(x) = 0$$

$$\left| \frac{x-3}{x+2} \right| = 0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

4. Menete:

$]-\infty; -2[$ szig.mon.csökken

$]-2; 3]$ szig.mon.csökken

$[3; \infty[$ szig.mon.nő

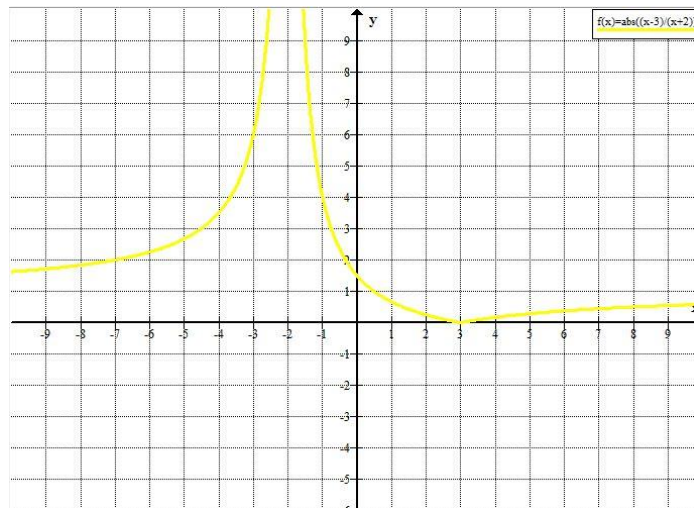
5. Szélsőérték:

Minimuma van

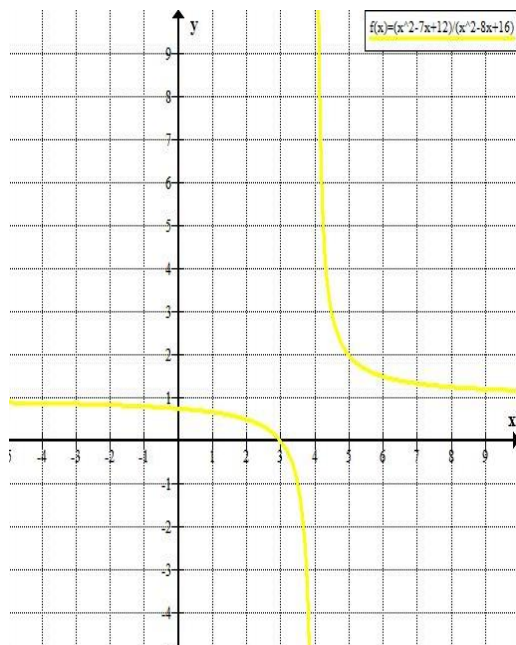
helye: $x=3$

értéke: $y=0$

6. Paritása nincs



$$i.) f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 16} = \frac{(x-4)(x-3)}{(x-4)^2} = \frac{x-3}{x-4}$$



$$1. \text{ÉT.: } x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

$$2. \text{ÉK.: } y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$3. \text{Zérushely: } f(x) = 0$$

$$\frac{x-3}{x-4} = 0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

4. Menete:

$]-\infty; 4[$ szig.mon.csökken

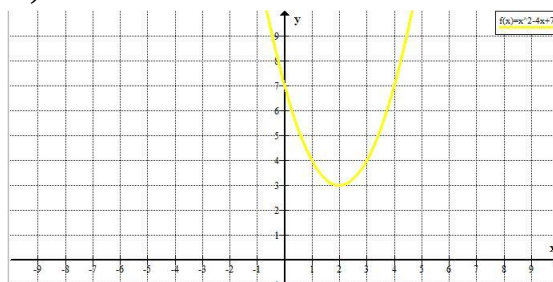
$]4; \infty[$ szig.mon.csökken

5. Szélsőértéke nincs

6. Paritása nincs

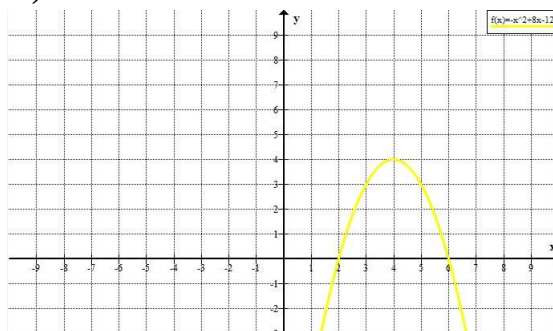
IV.8. Feladat: Grafikus módszerrel (függvénygrafikonok segítségével) oldja meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket!

a.) $x^2 - 4x + 7 = 0$



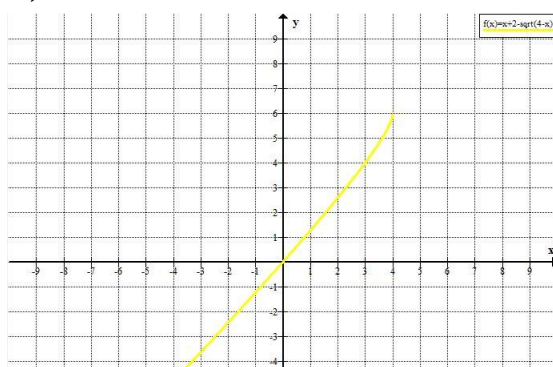
Nincs megoldás!

b.) $8x - 12 - x^2 \geq 0$



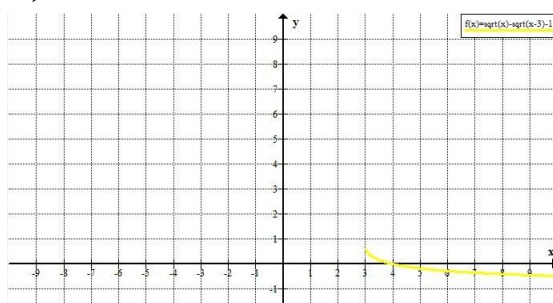
$2 \leq x \leq 6$ azaz $x \in [2; 6]$

c.) $x + 2 = \sqrt{4 - x} \Leftrightarrow x + 2 - \sqrt{4 - x} = 0$



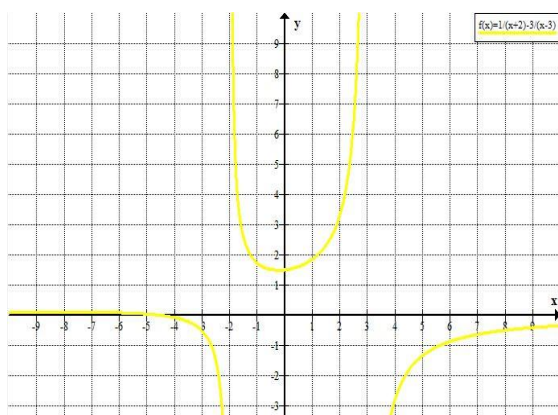
$x = 0$

d.) $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x-3} - 1 = 0$



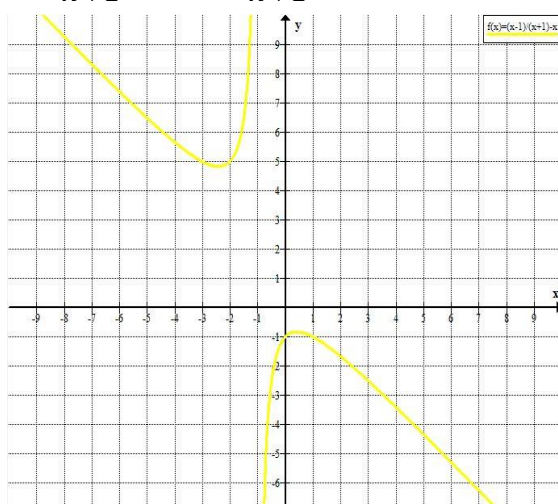
$x = 0$

$$e.) \frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-3} < 0$$



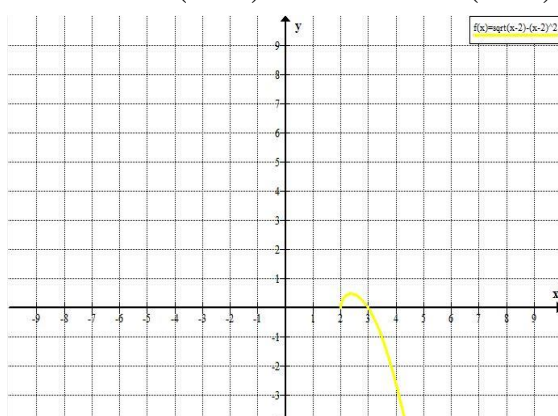
$$x \in]-5; -2[\text{ és } x \in]3; \infty[$$

$$f.) \frac{x-1}{x+1} < x \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - x < 0$$



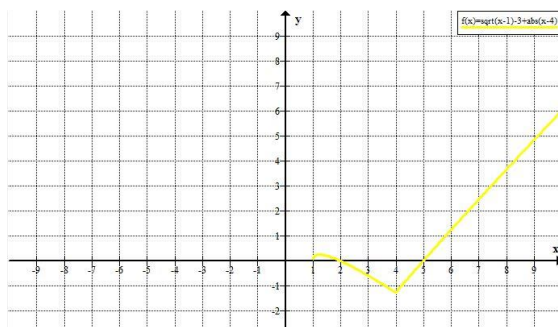
$$x \in]-1; \infty[$$

$$g.) \sqrt{x-2} > (x-2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - (x-2)^2 > 0$$



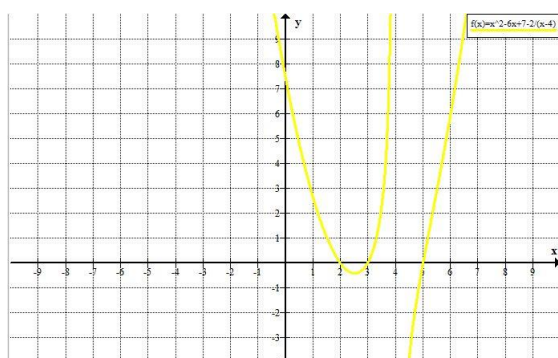
$$x \in]2; 3[$$

$$h.) \sqrt{x-1} = 3 - |x-4| \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 3 + |x-4| = 0$$



$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 5$$

$$i.) \quad x^2 - 6x + 7 = \frac{2}{x-4} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 - \frac{2}{x-4} = 0$$



$$x_1 = 2; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 5$$

IV.9. Feladat: Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományának azon legbővebb részhalmazát, melyen létezik inverze. Adja meg az inverz függvényt!

$$a.) \quad y = 2x + 3$$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$\frac{y-3}{2} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$Ell.: f^{-1}(f(x)) = \frac{(2x+3)-3}{2} = \frac{2x+3-3}{2} = x$$

$$b.) \quad y = \frac{5}{x}$$

$$f(x) = \frac{5}{x}$$

$$x = \frac{5}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5}{x}$$

$$Ell.: f^{-1}(f(x)) = \frac{5}{\frac{5}{x}} = 5 \cdot \frac{x}{5} = x$$

$$c.) y = \frac{x+2}{3}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{3}$$

$$3y-2=x \Rightarrow f^{-1}(x)=3x-2$$

$$Ell.: f^{-1}(f(x))=3\frac{x+2}{3}-2=x+2-2=x$$

$$d.) y = \frac{3x-1}{2}$$

$$f(x) = \frac{3x-1}{2}$$

$$\frac{2y+1}{3}=x \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3}$$

$$Ell.: f^{-1}(f(x))=\frac{2\frac{3x-1}{2}+1}{3}=\frac{3x-1+1}{3}=x$$

$$e.) y = x^2$$

$$f(x) = x^2$$

$$\sqrt{y}=x \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}, \text{ ha } x \geq 0$$

$$Ell.: f^{-1}(f(x))=\sqrt{x^2}=x$$

$$f.) y = \frac{1-x}{1+x}$$

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

$$y(1+x)=1-x$$

$$y+yx=1-x$$

$$yx+x=1-y$$

$$x(y+1)=1-y$$

$$x=\frac{1-y}{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1-x}{1+x}$$

Ell.:

$$f^{-1}(x)=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=\frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}}=\frac{1+x-1+x}{1+x} \cdot \frac{1+x}{1+x+1-x}=\frac{2x}{2}=x$$

$$g.) y = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad 1-x^2 \geq 0 \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$y^2 = 1-x^2$$

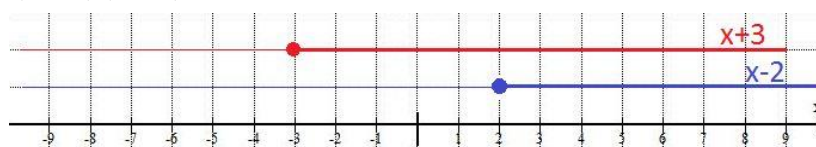
$$x^2 = 1-y^2, \text{ ha } 1-y^2 \geq 0$$

$$x = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ ha } x \geq 0$$

$$\text{Ell.: } f^{-1}(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}^2} = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{1-1+x^2} = \sqrt{x^2} = x$$

IV.10. Feladat: Oldja meg lineáris függvények segítségével az alábbi másodfokú egyenlőtlenségeket:

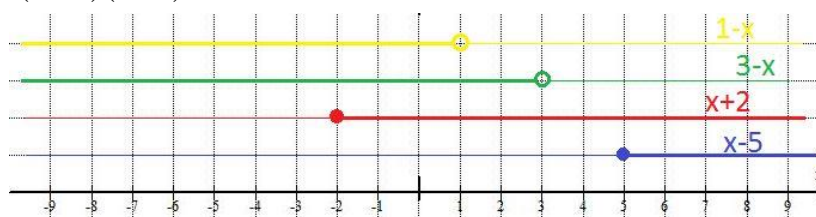
$$a.) (x-2)(x+3) \leq 0$$



$$-3 \leq x \leq 2$$

$$\text{Mo.: } x \in [-3; 2]$$

$$b.) \frac{(x-5)(x+2)}{(3-x)(1-x)} \leq 0$$



$$-2 \leq x < 1 \text{ vagy } 3 < x \leq 5$$

$$\text{Mo.: } x \in [-2; 1[\cup]3; 5]$$

IV.11. Feladat: Ábrázolja Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben azon pontok halmazát, amelyeknek koordinátáira teljesül:

$$a.) y \leq \sqrt{x} + 3$$

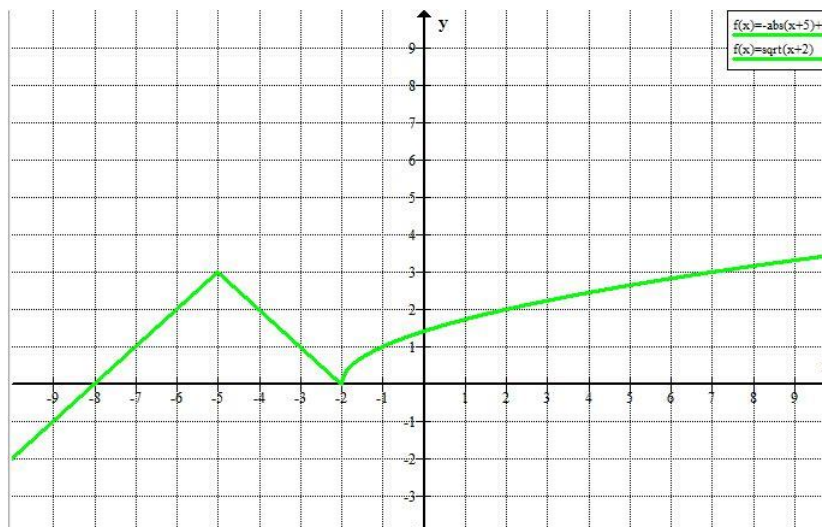
$$b.) y - 3 \geq \sqrt{1-x^2}$$

$$c.) y + \frac{1}{2} > |x^2 - 4x|$$

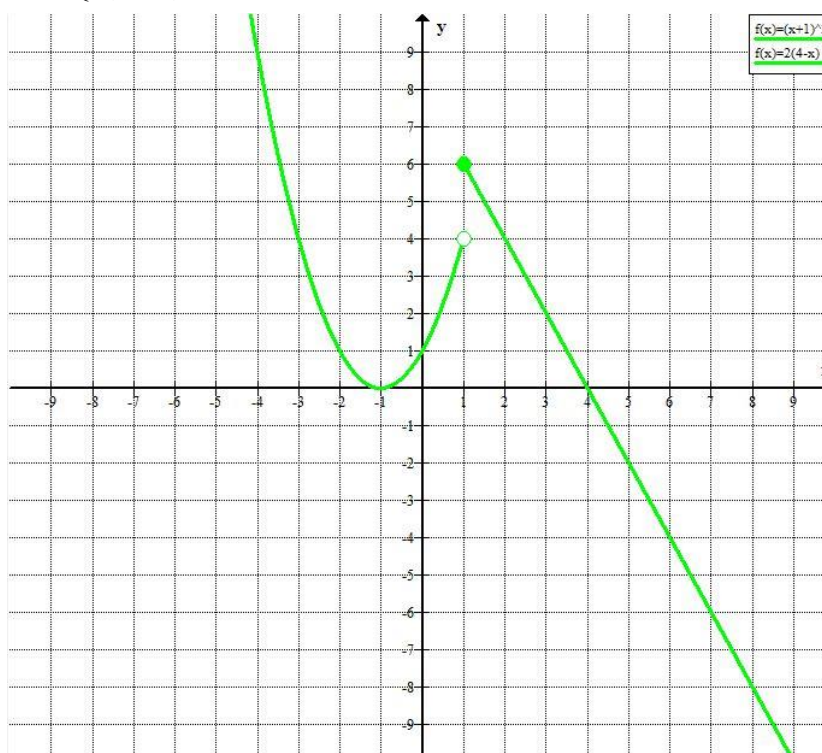
$$d.) y < 2 - |x-2|$$

IV.12. Feladat: Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja a következő függvényeket!

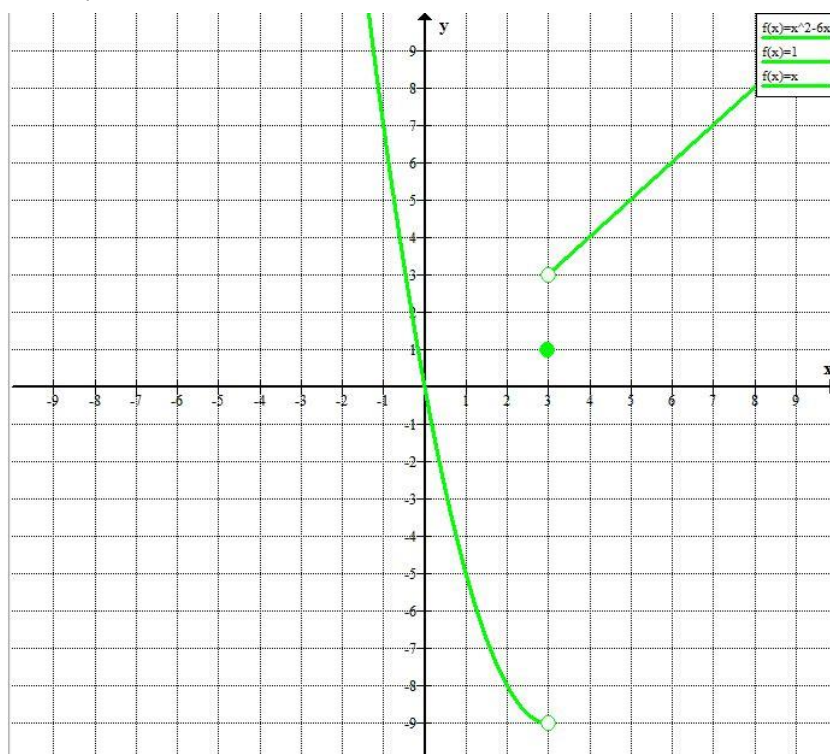
a.) $x \mapsto \begin{cases} -|x+5|+3, & \text{ha } x \leq -2 \\ \sqrt{x+2}, & \text{ha } x > -2 \end{cases}$



b.) $x \mapsto \begin{cases} 2 \cdot (4-x), & \text{ha } x \geq 1 \\ (x+1)^2, & \text{ha } x < 1 \end{cases}$



c.) $x \mapsto \begin{cases} x^2 - 6x, & \text{ha } x < 3 \\ 1, & \text{ha } x = 3 \\ x, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$



XXXI. Megoldás (V. fejezet)

V.1. Feladat: Feladat: Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát!

$$a.) f(x) = \frac{9^x - 1}{3^x - 1}$$

$$f(x) = \frac{9^x - 1}{3^x - 1} = \frac{(3^2)^x - 1}{3^x - 1} = \frac{(3^x)^2 - 1}{3^x - 1} = \frac{(3^x - 1)(3^x + 1)}{3^x - 1} = 3^x + 1$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$b.) f(x) = \ln \frac{x+3}{x-1}$$

$$f(x) = \ln \frac{x+3}{x-1}$$

$$\frac{x+3}{x-1} > 0$$

I. eset:

$$\left. \begin{array}{l} x+3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x > -3 \\ x > 1 \end{array} \right\}$$

$$1 < x$$

$$ET.: x \in]-\infty; -3[\cup]1; \infty[$$

II. eset:

$$\left. \begin{array}{l} x+3 < 0 \\ x-1 < 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x < -3 \\ x < 1 \end{array} \right\}$$

$$x < -3$$

$$c.) f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{x-2}{x+3}}$$

$$\log_3 \frac{x-2}{x+3} \geq 0$$

$$\log_3 \frac{x-2}{x+3} \geq \log_3 1$$

$\Updownarrow$ log fgv. szig.mon.növ. miatt

$$\frac{x-2}{x+3} \geq 1 \Rightarrow \frac{x-2-x-3}{x+3} \geq 0$$

$$\frac{-5}{x+3} \geq 0$$

$$x+3 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{x < -3}}$$

$$\frac{x-2}{x+3} > 0$$

I. eset:

$$\left. \begin{array}{l} x-2 > 0 \\ x+3 > 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 2 \\ x > -3 \end{array} \right\}$$

$$\underline{\underline{2 < x}}$$

$$ÉT.: x \in]-\infty; -3[$$

II.eset:

$$\left. \begin{array}{l} x-2 < 0 \\ x+3 < 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x < 2 \\ x < -3 \end{array} \right\}$$

$$\underline{\underline{x < -3}}$$

$$d.) f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-3)}$$

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-3)} = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-3}}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-3} \geq 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-3} \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$$

 $\Updownarrow \log$ fgv. szig.mon.csökk. miatt

$$\frac{x+1}{x-3} \leq 1 \Rightarrow \frac{x-2-x+3}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{1}{x-3} \geq 0$$

$$x-3 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{x > 3}}$$

$$\frac{x+1}{x-3} > 0$$

I. eset:

$$\left. \begin{array}{l} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x > -1 \\ x > 3 \end{array} \right\}$$

$$\underline{\underline{3 < x}}$$

$$ÉT.: x \in]3; \infty[$$

II.eset:

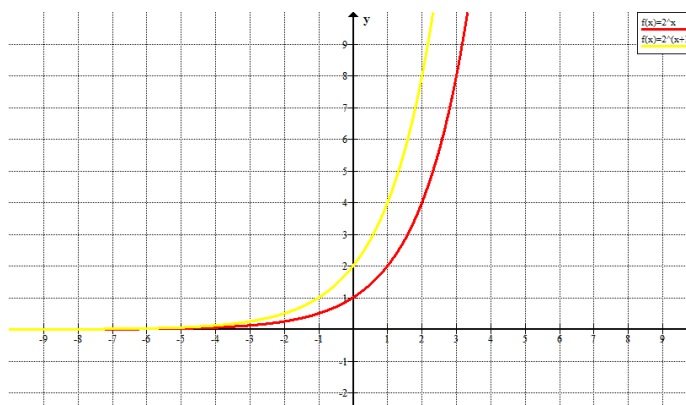
$$\left. \begin{array}{l} x+1 < 0 \\ x-3 < 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x < -1 \\ x < 3 \end{array} \right\}$$

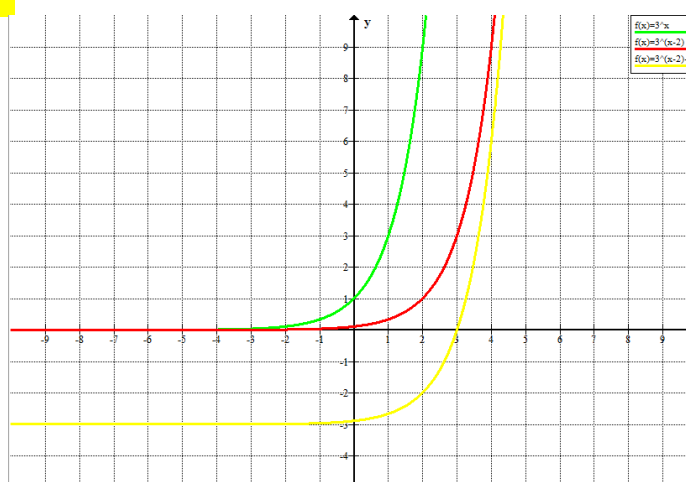
$$\underline{\underline{x < -1}}$$

V.2. Feladat: Feladat: Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja a következő függvényeket!

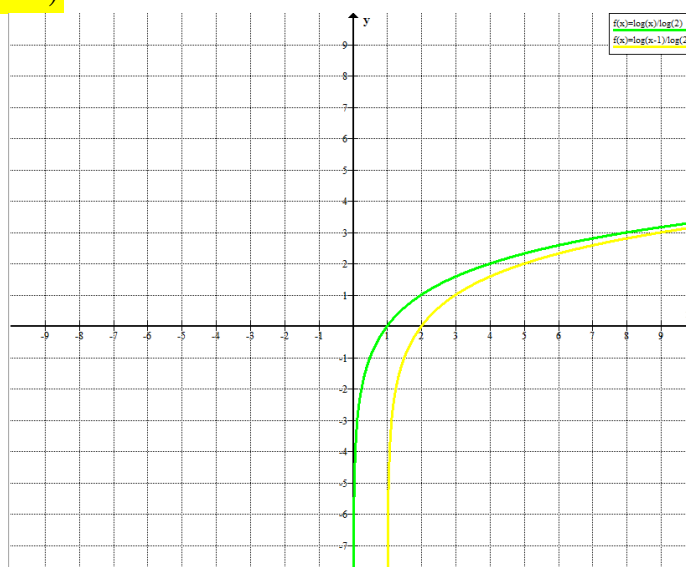
a.) $f(x) = 2^{x+1}$



b.) $f(x) = 3^{x-2} - 3$



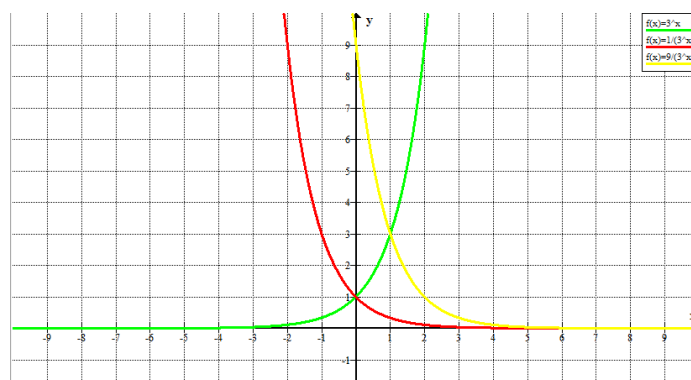
c.) $f(x) = \log_2(x-1)$



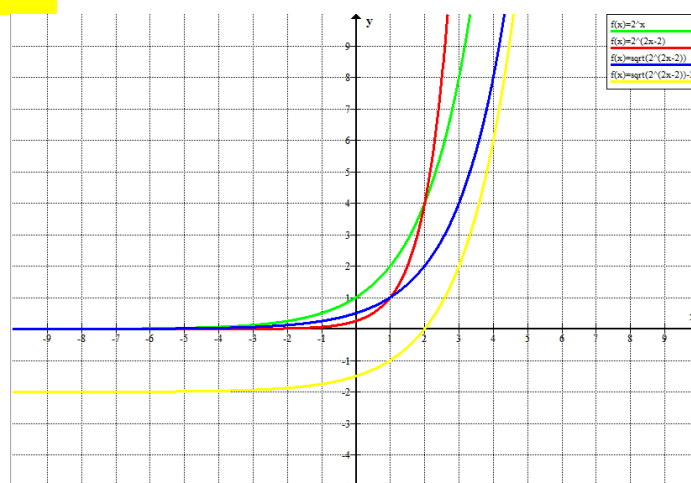
d.) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) - 3$



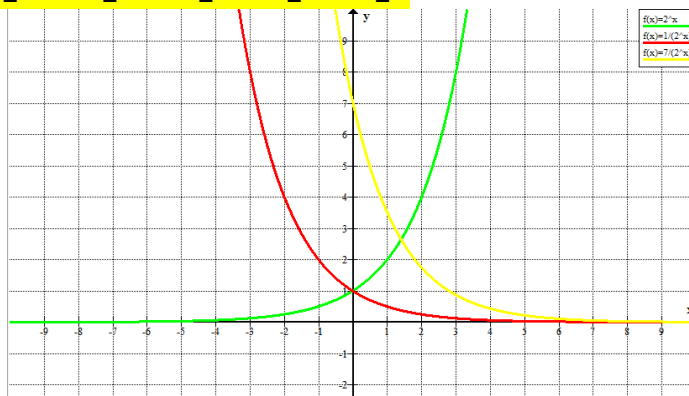
e.) $f(x) = \frac{3^2}{3^x}$



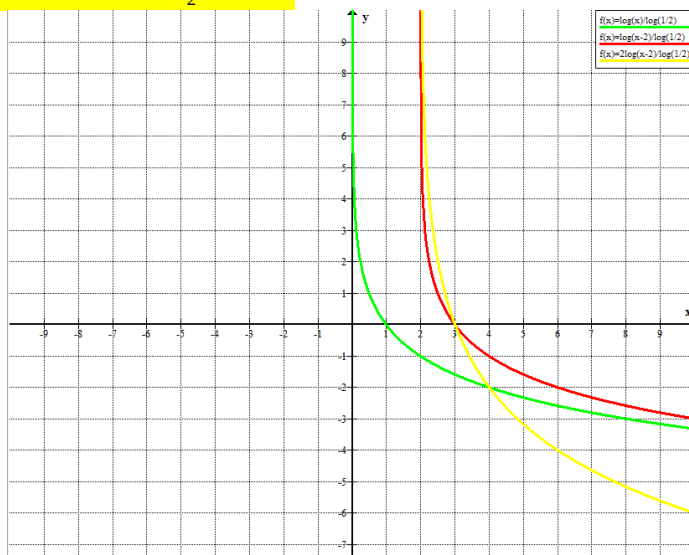
f.) $f(x) = \sqrt{2^{2x-2}} - 2$



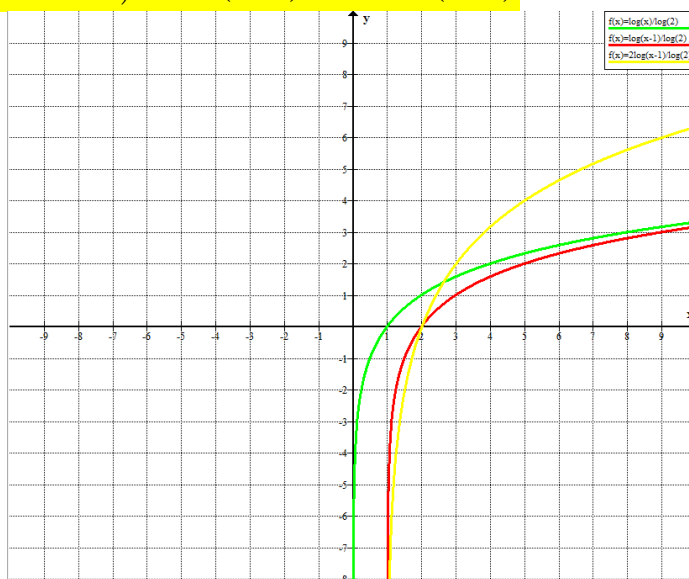
g.)
$$f(x) = 2^{2-x} + \frac{3}{2^x} = \frac{2^x \cdot 2^{2-x}}{2^x} + \frac{3}{2^x} = \frac{2^2 + 3}{2^x} = \frac{7}{2^x}$$



h.)
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2 = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$$

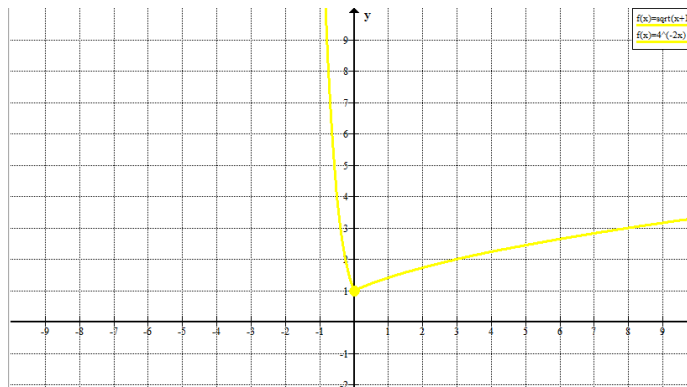


i.)
$$f(x) = \log_2(x^2 - 2x + 1) = \log_2(x-1)^2 = 2 \cdot \log_2(x-1)$$

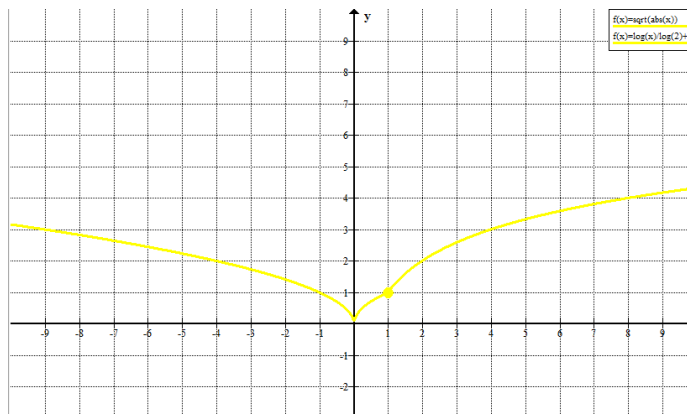


V.3. Feladat: Feladat: Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja a következő függvényeket!

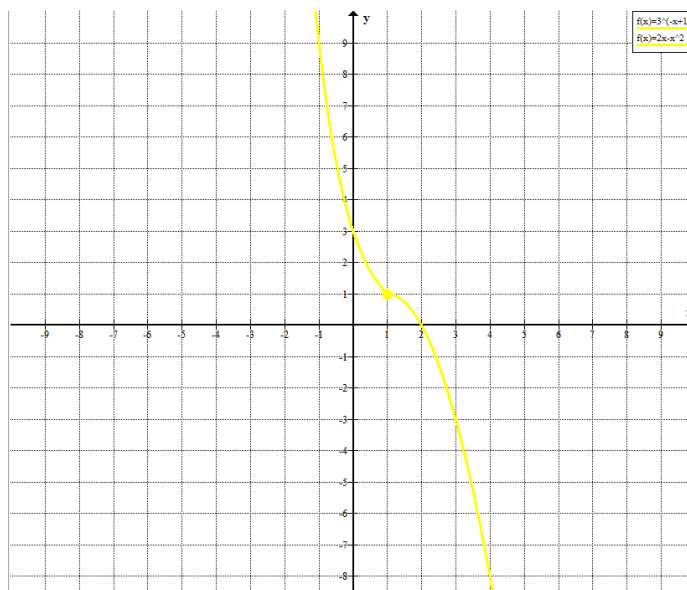
$$a.) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 4^{-2x}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



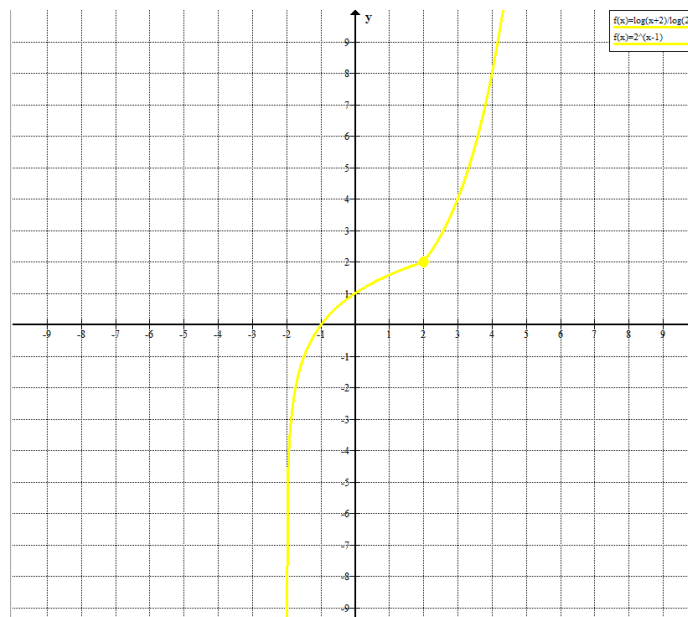
$$b.) f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & \text{ha } x \leq 1 \\ \log_2 x + 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$



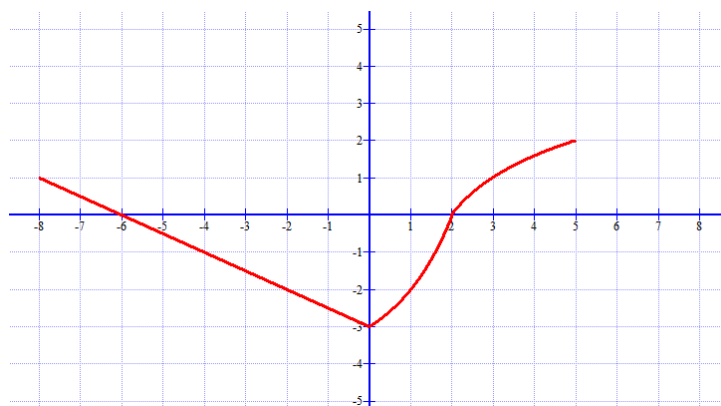
$$c.) f(x) = \begin{cases} 3^{-x+1}, & \text{ha } x \leq 1 \\ 2x - x^2, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$



$$d.) f(x) = \begin{cases} \log_2(x+2), & \text{ha } -2 \leq x \leq 2 \\ 2^{x-1}, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$



V.4. Feladat: Feladat: Az alábbi ábrán a $[-8;5]$ -on értelmezett függvény egy egyenes, egy exponenciális és egy logaritmusos függvény íveiből tevődik össze (balról jobbra haladva).



a.) Adja meg a függvény hozzárendelési szabályát!

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 3, & \text{ha } x \leq -2 \\ 2^x - 4, & \text{ha } -2 < x \leq 2 \\ \log_2(x-1), & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

b.) Határozza meg a függvény értékkészletét!

$$y \in [-3; 2]$$

c.) Adja meg a függvény zérushelyét!

$$x_1 = -6; \quad x_2 = 2$$

d.) Határozza meg a függvény minimumát és maximumát!

Minimum:

helye: $x = 0$

értéke: $y = -3$

Maximum:

helye: $x = 5$

értéke: $y = 2$

e.) Adjon meg olyan intervallumot, ahol a függvény szigorú monoton növekvő!

$\forall A$ intervallum, ahol $A \subseteq [0; 5]$

f.) Határozza meg, hol negatív, illetve hol pozitív a függvény!

$f(x) > 0$, ha $[-8; -6[\cup]2; 5]$

$f(x) < 0$, ha $] -6; 2[$

XXXII. Megoldás (VI. fejezet)

VI.1. Feladat: Adottak az $\underline{a}(-3;2)$ és $\underline{b}(-1;5)$ vektorok. Adjuk meg az alábbi vektorok koordinátáit:

a.) $\underline{a} + \underline{b}(-4;7)$

b.) $\underline{a} - \underline{b}(-2;-3)$

c.) $3\underline{a}(-9;6)$

d.) $-2\underline{b}(6;-4)$

e.) $3\underline{a} - 2\underline{b}$

$$3\underline{a}(-9;6)$$

$$2\underline{b}(-2;10)$$

$$3\underline{a} - 2\underline{b}(-7;-4)$$

f.) $-\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{3}{2}\underline{b}$

$$-\frac{1}{2}\underline{a}\left(-\frac{3}{2};-1\right)$$

$$\frac{3}{2}\underline{b}\left(-\frac{3}{2};\frac{15}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{3}{2}\underline{b}(-3;7)$$

g.) $(\underline{a} - 3\underline{b}) - (3\underline{a} - 2\underline{b})$

$$\underline{a} - 3\underline{b}(0;-13)$$

$$3\underline{a} - 2\underline{b}(-7;-4)$$

$$(\underline{a} - 3\underline{b}) - (3\underline{a} - 2\underline{b})(7;-9)$$

h.) $2\left(\frac{5}{2}\underline{a} - \frac{1}{2}\underline{b}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{3}{2}\underline{b}\right)$

$$2\left(\frac{5}{2}\underline{a} - \frac{1}{2}\underline{b}\right)(-14;5)$$

$$3\left(\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{3}{2}\underline{b}\right)\left(-9;\frac{51}{2}\right)$$

$$2\left(\frac{5}{2}\underline{a} - \frac{1}{2}\underline{b}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\underline{a} + \frac{3}{2}\underline{b}\right)\left(-23;\frac{61}{2}\right)$$

VI.2. Feladat: Adja meg a következő vektorok abszolútértékét!

a.) $\underline{a}(-13;12)$

$$|\underline{a}| = \sqrt{(-13)^2 + 12^2} = \sqrt{313}$$

b.) $\underline{b}(-12;7)$

$$|\underline{b}| = \sqrt{(-12)^2 + 7^2} = \sqrt{193}$$

c.) $\underline{c}(-9;-5)$

$$|\underline{c}| = \sqrt{(-9)^2 + (-5)^2} = \sqrt{106}$$

d.) $\underline{d}\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

$$|\underline{d}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$

e.) $\underline{e}\left(-\frac{12}{10}; \frac{5}{10}\right)$

$$|\underline{e}| = \sqrt{\left(-\frac{12}{10}\right)^2 + \left(\frac{5}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{100} + \frac{25}{100}} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10}$$

f.) $\underline{f}\left(\frac{7}{4}; \frac{5}{3}\right)$

$$|\underline{f}| = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{441}{144} + \frac{400}{144}} = \sqrt{\frac{841}{144}} = \frac{29}{12}$$

VI.3. Feladat: Fejezze ki az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ vektorok segítségével a $\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b}$ vektort, ha

$$\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j} \text{ és } \underline{b} = \underline{i} + 5\underline{j}!$$

$$\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b} = 2(3\underline{i} - 2\underline{j}) - (\underline{i} + 5\underline{j}) = 6\underline{i} - 4\underline{j} - \underline{i} - 5\underline{j} = 5\underline{i} - 9\underline{j}$$

VI.4. Feladat: Adottak az $\underline{a}(-2;3)$ és $\underline{b}(-1;7)$ vektorok. Számítsa ki az alábbi vektorok skaláris szorzatát:

a.) $\underline{a}$ és $\underline{b}$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 7 = 2 + 21 = 23$$

b.) $\underline{a}$ és $-\underline{b}$

$$\underline{a}(-2;3) \text{ és } -\underline{b}(1;-7)$$

$$\underline{a} \cdot (-\underline{b}) = -2 + (-21) = -23$$

c.) $3\underline{a}$ és $-2\underline{b}$

$$3\underline{a}(-6;9) \text{ és } -2\underline{b}(2;-14)$$

$$3\underline{a} \cdot (-2\underline{b}) = -12 + (-126) = -138$$

- d.) $\underline{a} + \underline{b}$ és $\underline{a} - \underline{b}$
 $\underline{a} + \underline{b}(-3;10)$ és $\underline{a} - \underline{b}(-1;-4)$
 $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = 3 + (-40) = -37$
- e.) $3\underline{a} - 2\underline{b}$ és $2\underline{a} + 3\underline{b}$
 $3\underline{a} - 2\underline{b}(-4;-5)$ és $2\underline{a} + 3\underline{b}(-7;30)$
 $(3\underline{a} - 2\underline{b})(2\underline{a} + 3\underline{b}) = 28 + (-150) = -122$

VI.5. Feladat: Adott az $\underline{a}(4;3)$ vektor. Számítsa ki a $\underline{b}$ vektor koordinátáit, ha:

- a.) $\underline{a} - \underline{b}(10;3)$
 $4 - b_1 = 10 \Rightarrow b_1 = -6$
 $3 - b_2 = 3 \Rightarrow b_2 = 0$
 $\underline{b}(-6;0)$
- b.) $\underline{a} + \underline{b}(-4;6)$
 $4 + b_1 = -4 \Rightarrow b_1 = -8$
 $3 + b_2 = 6 \Rightarrow b_2 = 3$
 $\underline{b}(-8;3)$
- c.) $\underline{a} - 2\underline{b}(10;20)$
 $4 - 2b_1 = 10 \Rightarrow b_1 = -3$
 $3 - 2b_2 = 20 \Rightarrow b_2 = -\frac{17}{2}$
 $\underline{b}\left(-3; -\frac{17}{2}\right)$
- d.) $2\underline{a} + 3\underline{b}(-12;-4)$
 $2\underline{a} + 3\underline{b}(-12;-4)$
 $8 + 3b_1 = -12 \Rightarrow b_1 = -\frac{20}{3}$
 $6 + 3b_2 = -4 \Rightarrow b_2 = -\frac{10}{3}$
 $\underline{b}\left(-\frac{20}{3}; -\frac{10}{3}\right)$

VI.6. Feladat: Számítsa ki a következő vektorok által bezárt szög nagyságát két tizedes pontossággal!

- e.) $\underline{a}(1;4)$ és $\underline{b}(-2;7)$
 $\underline{a} \cdot \underline{b} = -2 + 28 = 26$

$$|\underline{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$26 = \sqrt{17} \cdot \sqrt{53} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{26}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{53}} \Rightarrow \alpha = 29,9816^\circ$$

f.) $\underline{a}(2; -5)$ és $\underline{b}\left(15; \frac{13}{2}\right)$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 30 + \left(-\frac{65}{2}\right) = -\frac{5}{2}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{15^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1069}{4}}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$-\frac{5}{2} = \sqrt{29} \cdot \sqrt{\frac{1069}{4}} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{\frac{1069}{4}}} \Rightarrow \alpha = 91,6272^\circ$$

g.) $\underline{a}\left(2; \frac{3}{2}\right)$ és $\underline{b}\left(\frac{15}{2}; -10\right)$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 15 + (-15) = 0$$

A két vektor merőleges egymásra.

h.) $\underline{a}\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$ és $\underline{b}\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{3}\right)$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \frac{5}{3} + \left(-\frac{7}{2}\right) = -1$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\underline{b}| = \sqrt{15^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1069}{4}}$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$-\frac{5}{2} = \sqrt{29} \cdot \sqrt{\frac{1069}{4}} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{\frac{1069}{4}}} \Rightarrow \alpha = 91,6272^\circ$$

VI.7. Feladat: Számítsa ki a következő pontok origótól való távolságát!

a.) $A(0;2)$

$$d(O, A) = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

b.) $B(-8;0)$

$$d(O, B) = \sqrt{(-8)^2 + 0^2} = 8$$

c.) $C(-3;-4)$

$$d(O, C) = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

d.) $E\left(\frac{3}{4}; \frac{2}{3}\right)$

$$d(O, E) = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{81}{144} + \frac{64}{144}} = \sqrt{\frac{145}{144}} = \frac{\sqrt{145}}{12}$$

e.) $F\left(\frac{\sqrt{7}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

$$d(O, F) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{9} + \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$$

VI.8. Feladat: Számítsa ki az A és B pontok távolságát!

a.) $A(5;3)$ és $B(-6;3)$

$$d(A, B) = \sqrt{(5 - (-6))^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{11^2} = 11$$

b.) $A(-4;2)$ és $B(1;5)$

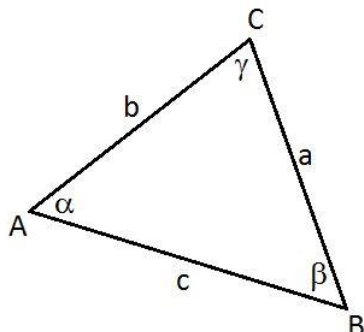
$$d(A, B) = \sqrt{((-4) - 1)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

c.) $A\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$ és $B\left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{3}\right)$

$$d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{7}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{6}\right)^2 + \left(\frac{23}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{36} + \frac{529}{36}} = \sqrt{\frac{650}{36}} = \frac{\sqrt{650}}{6}$$

VI.9. Feladat: Adott az ABC háromszög. Számítsa ki az oldalainak hosszát, területét és a belső szögeit két tizedes pontossággal!

a.) $A(-2;-4)$, $B(5;-3)$, $C(-1;3)$



$$a = d(B, C) = \sqrt{(5 - (-1))^2 + ((-3) - 3)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

$$b = d(A, C) = \sqrt{((-2) - (-1))^2 + ((-4) - 3)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$$

$$c = d(A, B) = \sqrt{((-2) - 5)^2 + ((-4) - (-3))^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

Cosinus-tétel:

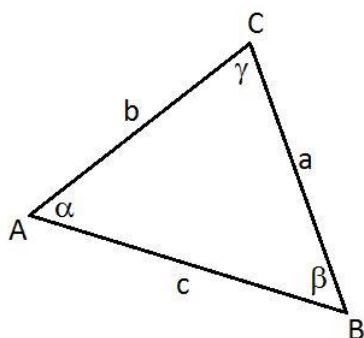
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$\sqrt{72}^2 = \sqrt{50}^2 + \sqrt{50}^2 - 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{72 - 50 - 50}{-2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} \Rightarrow \alpha = 73,74^\circ$$

$$ABC \text{ háromszög egyenlő szárú} \Rightarrow \beta = \gamma = \frac{180^\circ - 73,74^\circ}{2} = 53,13^\circ$$

b.) $A(12;13)$, $B(1;-8)$, $C(-2;5)$



$$a = d(B, C) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + ((-8) - 5)^2} = \sqrt{9 + 169} = \sqrt{178}$$

$$b = d(A, C) = \sqrt{(12 - (-2))^2 + (13 - 5)^2} = \sqrt{196 + 64} = \sqrt{260}$$

$$c = d(A, B) = \sqrt{(12 - 1)^2 + (13 - (-8))^2} = \sqrt{121 + 441} = \sqrt{562}$$

Cosinus-tétel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$\sqrt{178}^2 = \sqrt{260}^2 + \sqrt{562}^2 - 2 \cdot \sqrt{260} \cdot \sqrt{562} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{178 - 260 - 562}{-2 \cdot \sqrt{260} \cdot \sqrt{562}} \Rightarrow \alpha = 32,61^\circ$$

Sinus-tétel:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin 32,61^\circ} = \frac{\sqrt{260}}{\sqrt{178}} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{260}}{\sqrt{178}} \cdot \sin 32,61^\circ$$

$\Downarrow$

$$\beta = 40,64^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 32,61^\circ - 40,64^\circ = 106,75^\circ$$

VI.10. Feladat: Adja meg az AB szakasz felezőpontjának, illetve harmadolópontjainak koordinátáit!

a.) $A(3;4), B(5;2)$

$$F\left(\frac{3+5}{2}; \frac{4+2}{2}\right) = (4;3)$$

$$H_1\left(\frac{2 \cdot 3 + 5}{3}; \frac{2 \cdot 4 + 2}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}; \frac{10}{3}\right)$$

$$H_2\left(\frac{3 + 2 \cdot 5}{3}; \frac{4 + 2 \cdot 2}{3}\right) = \left(\frac{13}{3}; \frac{8}{3}\right)$$

b.) $A(-1;2), B(-3;2)$

$$F\left(\frac{-1+(-3)}{2}; \frac{2+2}{2}\right) = (-2;2)$$

$$H_1\left(\frac{2 \cdot (-1) + (-3)}{3}; \frac{2 \cdot 2 + 2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}; 2\right)$$

$$H_2\left(\frac{(-1) + 2 \cdot (-3)}{3}; \frac{2 + 2 \cdot 2}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3}; 2\right)$$

c.) $A\left(\frac{3}{2}; 1\right), B\left(\frac{5}{2}; -3\right)$

$$F\left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{2}; \frac{1+(-3)}{2}\right) = (2; -2)$$

$$H_1 \left(\frac{2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{3}; \frac{2 \cdot 1 + (-3)}{3} \right) = \left(\frac{11}{6}; -\frac{1}{3} \right)$$

$$H_2 \left(\frac{\frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{5}{2}}{3}; \frac{1 + 2 \cdot (-3)}{3} \right) = \left(\frac{13}{6}; -\frac{5}{3} \right)$$

d.) $A \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{3} \right), B \left(\frac{7}{4}; -\frac{4}{3} \right)$

$$F \left(\frac{-\frac{3}{4} + \frac{7}{4}}{2}; \frac{\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{3} \right)}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

$$H_1 \left(\frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) + \frac{7}{4}}{3}; \frac{2 \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{3} \right)}{3} \right) = \left(\frac{1}{12}; -\frac{2}{9} \right)$$

$$H_2 \left(\frac{\left(-\frac{3}{4} \right) + 2 \cdot \frac{7}{4}}{3}; \frac{\frac{1}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{3} \right)}{3} \right) = \left(\frac{11}{12}; -\frac{7}{9} \right)$$

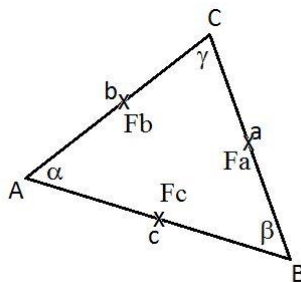
e.) $A \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{5} \right), B \left(-\frac{5}{6}; -\frac{1}{3} \right)$

$$F \left(\frac{-\frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{6} \right)}{2}; \frac{\frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{3} \right)}{2} \right) = \left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{15} \right)$$

$$H_1 \left(\frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{5}{6} \right)}{3}; \frac{2 \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{3} \right)}{3} \right) = \left(-\frac{11}{18}; \frac{13}{15} \right)$$

$$H_2 \left(\frac{\left(-\frac{1}{2} \right) + 2 \cdot \left(-\frac{5}{6} \right)}{3}; \frac{\frac{3}{5} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)}{3} \right) = \left(-\frac{13}{18}; -\frac{1}{15} \right)$$

VI.11. Feladat: Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(-1;-1)$, $B(1;3)$, $C(2;-2)$



a.) Számítsa ki a háromszög oldalfelező pontjainak koordinátáit!

$$F_a \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

$$F_b \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right)$$

$$F_c (0;1)$$

b.) Adja meg a háromszög oldalvektorainak, valamint középvonal-vektorainak koordinátáit!

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} (2;4) \quad \overrightarrow{F_a F_b} = \underline{f_b} - \underline{f_a} (-1;-2) \quad \overrightarrow{AB} = -2 \cdot \overrightarrow{F_a F_b} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{F_a F_b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a} (3;-1) \quad \overrightarrow{F_a F_c} = \underline{f_c} - \underline{f_a} \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right) \quad \overrightarrow{AC} = -2 \cdot \overrightarrow{F_a F_c} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{F_a F_c}$$

$$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b} (1;-5) \quad \overrightarrow{F_b F_c} = \underline{f_c} - \underline{f_b} \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right) \quad \overrightarrow{BC} = -2 \cdot \overrightarrow{F_b F_c} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{F_b F_c}$$

c.) Igazolja, hogy a háromszög bármely oldala párhuzamos a másik két oldal felezőpontját összekötő középvektorral!

$$\overrightarrow{AB} = -2 \cdot \overrightarrow{F_a F_b} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{F_a F_b}$$

$$\overrightarrow{AC} = -2 \cdot \overrightarrow{F_a F_c} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{F_a F_c}$$

$$\overrightarrow{BC} = -2 \cdot \overrightarrow{F_b F_c} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{F_b F_c}$$

VI.12. Feladat: Az ABC háromszög súlypontja: S. Adja meg a hiányzó pont koordinátáit!

a.) $A(-4;-2)$, $B(7;1)$, $C(3;10)$ S = ?

$$S \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right)$$

$$S \left(\frac{-4 + 7 + 3}{3}; \frac{-2 + 1 + 10}{3} \right) = (2;3)$$

$$b.) A(-2;5), B(8;5), S(2;4) \quad C=?$$

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \quad 2 = \frac{-2 + 8 + c_1}{3} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$s_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \quad 4 = \frac{5 + 5 + c_2}{3} \Rightarrow c_2 = 2$$

$$C(0;2)$$

$$c.) B(-3;-4), C(1;2), S\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right) \quad A=?$$

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \quad 2 = \frac{a_1 + (-3) + 1}{3} \Rightarrow a_1 = 8$$

$$s_2 = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \quad 4 = \frac{a_2 + (-4) + 2}{3} \Rightarrow a_2 = 14$$

$$A(8;12)$$

VI.13. Feladat: Adott az e egyenes továbbá két pontja A és B . Adjuk meg az egyenes egy irányvektorát, egy normálvektorát, irányszögét, és iránytangensét (amennyiben létezik)!

$$a.) A(3;2), B(-3;2)$$

$$\underline{v} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}(-6;0)$$

$$\underline{n} = \underline{v}_{+90^\circ}(0;-6)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{0}{-6} = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$b.) A(-1;2), B(2;4)$$

$$\underline{v} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}(3;2)$$

$$\underline{n} = \underline{v}_{+90^\circ}(-2;3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = 33,69^\circ$$

$$c.) A\left(\frac{1}{2};1\right), B\left(\frac{3}{2};-2\right)$$

$$\underline{v} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}(1;-3)$$

$$\underline{n} = \underline{v}_{+90^\circ}(3;1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-3}{1}$$

$$\alpha = 108,43^\circ$$

$$d.) A\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right), B\left(\frac{3}{4}; -\frac{4}{3}\right)$$

$$\underline{v} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \left(\frac{5}{4}; -\frac{5}{3}\right)$$

$$\underline{n} = \underline{v}_{+90^\circ} = \left(\frac{5}{3}; \frac{4}{5}\right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{4}{5}} = -\frac{25}{12}$$

$$\alpha = 126,87^\circ$$

VI.14. Feladat: Írja fel az egyenes egyenletét, ha adott az egyenes egy pontja (P), továbbá irányvektora, vagy normálvektora, vagy irányszöge, vagy iránytangense ($\underline{v}$, $\underline{n}$, α , m)!

$$a.) \underline{v}(-3; 2), P(2; -5)$$

$$a: -2x - 3y = -2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-5) \\ -2x - 3y = 11$$

$$b.) \underline{v}\left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right), P(-2; -2)$$

$$b: -\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-2) + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-2) \\ -\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y = \frac{13}{2}$$

$$c.) \underline{n}(-2; -4), P(-4; -2)$$

$$c: -2x - 4y = (-2) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) \\ -2x - 4y = 16$$

$$d.) \underline{n}(-\sqrt{3}; \sqrt{8}), P(2; 3)$$

$$d: -\sqrt{3}x + \sqrt{8}y = -\sqrt{3} \cdot 2 + \sqrt{8} \cdot 3$$

$$e.) \underline{n}\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right), P(2; 4)$$

$$e: \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y = \frac{2}{3} \cdot 2 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 4 \\ \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y = -\frac{10}{3}$$

$$f.) \alpha = -30^\circ, P(4; -1)$$

$$\operatorname{tg}(-30^\circ)(x - 4) = y + 1$$

- g.) $\alpha = 60^\circ$, $P(7;2)$
 $tg(60^\circ)(x-7) = y-2$
- h.) $\alpha = 45^\circ$, $P(-3;-2)$
 $tg(45^\circ)(x+3) = y+2$
- i.) $m = -2$, $P(0;0)$
 $-2x = y$
- j.) $m = \frac{1}{3}$, $P(4;5)$
 $\frac{1}{3}(x-4) = y-5$
- k.) $m = -\frac{2}{7}$, $P\left(\frac{1}{3}; -\frac{3}{5}\right)$
 $-\frac{2}{7}\left(x - \frac{1}{3}\right) = y + \frac{3}{5}$

VI.15. Feladat: Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3,5)$ ponton és párhuzamos a $4x + 5y = 0$ egyenletű egyenessel!

$$\underline{n}(4;5) \quad P(3,5)$$

$$e: 4x + 5y = 37$$

VI.16. Feladat: Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2,2)$ ponton és merőleges a $-2x + 3y = 7$ egyenletű egyenesre!

$$e: -2x + 3y = 7 \quad \underline{n}_e(-2;3) = \underline{v}_f$$

$$\underline{n}_f(-3;-2) \quad P(-2;2)$$

$$f: -3x - 2y = 2$$

VI.17. Feladat: Az ABC háromszög csúspontjainak koordinátái: $A(1;1)$, $B(-2;4)$, $C(4;5)$

a.) Írja fel az AB oldal egyenesének egyenletét!

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}(-3;3) \quad \underline{n}_c(-3;-3) \quad A(1;1)$$

$$AB: -3x - 3y = -6$$

b.) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! Válaszát tized fokra kerekítve adja meg!

$$a = d(B, C) = \sqrt{((-2) - 4)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$$

$$b = d(A, C) = \sqrt{(1 - 4)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$c = d(A, B) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

Cosinus-tétel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$\sqrt{37}^2 = \sqrt{25}^2 + \sqrt{18}^2 - 2 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{18} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{37 - 25 - 18}{-2 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{18}} \Rightarrow \alpha = 81,9^\circ$$

c.) Számítsa ki az ABC háromszög területét!

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$T = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{18} \cdot \sin 81,9^\circ}{2} = 10,5$$

d.) Írja fel a BC oldalhoz tartozó magasságvonal egyenletét!

$$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b} (6;1)$$

$$\underline{n}_{m_a} = \overrightarrow{BC} (6;1) \quad A(1;1)$$

$$m_a : 6x + y = 7$$

e.) Írja fel a háromszög C csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét!

$$\underline{F}_c = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{CF_c} = \underline{f}_c - \underline{c} \left(-\frac{9}{2}; -\frac{5}{2} \right) \quad \underline{n}_{s_c} \left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{2} \right)$$

$$C(4;5)$$

$$s_c : \frac{5}{2}x - \frac{9}{2}y = -\frac{25}{2}$$

$$5x - 9y = -25$$

VI.18. Feladat: Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: A(6;9), B(-5;4), C(-2;1)

a.) Írja fel az AB oldal egyenesének egyenletét!

b.) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! Válaszát tized fokra kerekítve adja meg!

c.) Számítsa ki az ABC háromszög területét!

d.) Írja fel a BC oldalhoz tartozó magasságvonal egyenletét!

e.) Írja fel a háromszög C csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét!

Megoldás a VI.17. feladat alapján!

VI.19. Feladat: Az PQR háromszög csúcspontjainak koordinátái: P(-2;-1), Q(9;-3), R(-3;6)

a.) Írja fel az QR oldal egyenesének egyenletét!

b.) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! Válaszát tized fokra kerekítve adja meg!

- c.) Írja fel a PQ oldallal párhuzamos középvonal egyenletét!
d.) Írja fel az R csúcson áthaladó súlyvonal egyenesének egyenletét!
e.) Írja fel a háromszög Q csúcsához tartozó magasságvonal egyenesének egyenletét!
Megoldás a VI.17. feladat alapján!

VI.20. Feladat: Írja fel az O középpontú r sugarú kör egyenletét!

- a.) $O(0;0) \quad r=2$

$$x^2 + y^2 = 4$$

b.) $O(3;0) \quad r=1$

$$(x-3)^2 + y^2 = 1$$

c.) $O(-4;2) \quad r=3$

$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$$

d.) $O(\sqrt{2};4) \quad r=\sqrt{3}$

$$(x-\sqrt{2})^2 + (y-4)^2 = 3$$

e.) $O(1-\sqrt{3};\sqrt{5}) \quad r=\sqrt{11}$

$$(x-(1-\sqrt{3}))^2 + (y-\sqrt{5})^2 = 11$$

f.) $O(\log_2 3;-3) \quad r=7$

$$(x-\log_2 3)^2 + (y+3)^2 = 49$$

VI.21. Feladat: Írja fel az O középpontú P ponton áthaladó kör egyenletét!

- a.) $O(0;0) \quad P(4,0)$

$$r = d(O, P) = \sqrt{(0-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

b.) $O(-2;-3) \quad P(-5,-2)$

$$r = d(O, P) = \sqrt{(-2-(-5))^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 10$$

c.) $O(1;-4) \quad P(2,5)$

$$r = d(O, P) = \sqrt{(1-2)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$$

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 82$$

d.) $O(5;-4) \quad P(-3,2)$

$$r = d(O, P) = \sqrt{(5-(-3))^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{64+36} = 10$$

$$(x-5)^2 + (y+4)^2 = 100$$

VI.22. Feladat: Határozzuk meg az egyenletével megadott kör középpontjának koordinátáit, valamint sugarát!

a.) $x^2 + y^2 = 20$

$$O(0;0) \quad r = \sqrt{20}$$

b.) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$

$$O(2;-2) \quad r = 4$$

c.) $x^2 + y^2 + 4x - 2y = -5$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = -5$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$O(-2;1) \quad r = 0, \text{ azaz nem kör!}$$

d.) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+4)^2 - 16 - 16 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$$

$$O(2;-4) \quad r = 6$$

e.) $x^2 + y^2 - 3x - 5y = 25$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 25$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{134}{4}$$

$$O\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right) \quad r = \frac{\sqrt{134}}{2}$$

f.) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 20 = 0 \quad / : 2$

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 10 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 10 = 0$$

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{53}{4}$$

$$O\left(1; -\frac{3}{2}\right) \quad r = \frac{\sqrt{53}}{2}$$

VI.23. Feladat: Számítsa ki az egyenleteikkel megadott alakzatok metszéspontjának koordinátáit!

a.) $4x + 3y = 7$ és $3x - 2y = 1$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} / \cdot 2 \Rightarrow 8x + 6y = 14 \\ / \cdot 3 \Rightarrow 9x - 6y = 3 \end{array} \quad I. + II.$$

$$\underline{17x = 17}$$

$$x = 1$$

$$4 \cdot 1 + 3y = 7 \Rightarrow y = 1$$

$$M(1; 1)$$

b.) $7x + 13y = 50$ és $-7x + 11y = -15$

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 13y = 50 \\ -7x + 11y = -15 \end{array} \right\} \quad I. + II.$$

$$24y = 35$$

$$y = \frac{35}{24}$$

$$7x + 13 \cdot \frac{35}{24} = 50$$

$$168x + 455 = 1200$$

$$168x = 745$$

$$x = \frac{745}{168}$$

$$M\left(\frac{745}{168}; \frac{35}{24}\right)$$

c.) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$ és $x - 2y = -5$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0 \\ x - 2y = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2y - 5$$

$$(2y - 5)^2 + y^2 - 2(2y - 5) + 2y - 8 = 0$$

$$4y^2 - 20y + 25 + y^2 - 4y + 10 + 2y - 8 = 0$$

$$5y^2 - 22y + 27 = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 540}}{10} \quad D < 0 \Rightarrow \text{Az alakzatok nem metszik egymást!}$$

d.) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ és $x + 2y + 1 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -2y - 1$$

$$\begin{aligned}(-2y-1+2)^2 + (y+2)^2 &= 4 \\(1-2y)^2 + (y+2)^2 &= 4 \\1-4y+4y^2 + y^2 + 4y + 4 &= 4 \\5y^2 &= -1 \\y^2 &= -\frac{1}{5} \text{ Ellentmondás, nincs metszéspont!}\end{aligned}$$

VI.24. Feladat: Határozza meg a háromszög csúspontjainak koordinátáit, ha oldalegyeneseik egyenlete:

a.) $2x+7y=31$, $-5x+6y=-7$ és $7x+y=-9$

$$\begin{aligned}\left. \begin{array}{l} 2x+7y=31 \\ -5x+6y=-7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} / \cdot 5 \Rightarrow 10x+35y=155 \\ / \cdot 2 \Rightarrow -10x+12y=-14 \end{array} \quad I. + II. \\ \hline 47y=141 \\ y=3\end{aligned}$$

$$2x+7 \cdot 3=31$$

$$x=5$$

$$A(5;3)$$

$$\begin{aligned}\left. \begin{array}{l} 2x+7y=31 \\ 7x+y=-9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x+7y=31 \\ 49x+7y=-63 \end{array} \right\} II. - I. \\ \hline 47x=-94 \\ x=-2\end{aligned}$$

$$7 \cdot (-2) + y = -9$$

$$y=5$$

$$B(-2;5)$$

$$\begin{aligned}\left. \begin{array}{l} -5x+6y=-7 \\ 7x+y=-9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -5x+6y=-7 \\ 42x+6y=-54 \end{array} \right\} II. - I. \\ \hline 47x=-47 \\ x=-1\end{aligned}$$

$$7 \cdot (-1) + y = -9$$

$$y=-2$$

$$C(-1;-2)$$

b.) $x-12y=-28$, $-8x+9y=-37$ és $7x+3y=-22$

Megoldás a VI.24./ a. feladat alapján!

VI.25. Feladat: Írja fel a háromszög köré írható kör egyenletét, ha csúcsai:

a.) $A(1;1)$, $B(-2;4)$, $C(4;5)$

$$F_c \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right) \quad \underline{n}_{f_c} = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}(-3;3)$$

$$f_c: -3x + 3y = 9$$

$$F_b \left(\frac{5}{2}; 3 \right) \quad \underline{n}_{f_b} = \overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}(3;4)$$

$$f_b: -3x + 4y = \frac{39}{2}$$

$$-6x + 8y = 39$$

$$f_c \cap f_b = O$$

$$\left. \begin{array}{l} -3x + 3y = 9 \\ -6x + 8y = 39 \end{array} \right\} \begin{array}{l} / \cdot 2 \Rightarrow -6x + 6y = 18 \\ \Rightarrow -6x + 8y = 39 \end{array} \quad \text{II.} - \text{I.}$$

$$2y = 21$$

$$y = \frac{21}{2}$$

$$-3x + 3 \cdot \frac{21}{2} = 9$$

$$-6x + 63 = 18$$

$$-6x = -45$$

$$x = \frac{15}{2}$$

$$O \left(\frac{15}{2}; \frac{21}{2} \right) A(1;1)$$

$$r = d(A, O) = \sqrt{\left(\frac{15}{2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{21}{2} - 1 \right)^2} = \sqrt{\frac{169}{4} + \frac{361}{4}} = \sqrt{\frac{530}{4}}$$

$$k: \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{21}{2} \right)^2 = \frac{530}{4}$$

b.) $A(6;9)$, $B(-5;4)$, $C(-2;1)$

Megoldás a VI.25./ a. feladat alapján!

c.) $P(-2;-1)$, $Q(9;-3)$, $R(-3;6)$

Megoldás a VI.25./ a. feladat alapján!

VI.26. Feladat: Adott a koordináta-rendszerben az $A(9;-8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör. Írja fel a kör $P(1;-2)$ pontjába húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek a meredekségét!

$$\underline{n}_e = \overrightarrow{PA} = \underline{a} - \underline{p}(8;-6)$$

$$e: 8x - 6y = 20$$

VI.27. Feladat: Adott az $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0$ egyenletű kör és az $x - 8,4 = 0$ egyenletű egyenes.

a.) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit!

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0 \\ x - 8,4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 8,4$$

$$8,4^2 + y^2 - 6 \cdot 8,4 + 8y - 56 = 0$$

$$70,56 + y^2 - 50,4 + 8y - 56 = 0$$

$$y^2 + 8y - 35,84 = 0$$

$$100y^2 + 800y - 3584 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-800 \pm \sqrt{640000 + 1433600}}{200} = \frac{-800 \pm 1440}{200} \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 3,2 \\ y_2 = 11,2 \end{array} \right.$$

$$M_1(8,4;3,2)$$

$$M_2(8,4;11,2)$$

b.) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől?

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 - 56 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 81$$

$$r = 9 \Rightarrow d(A,e) = 9$$

VI.28. Feladat: Legyenek $A(7;7)$ és $B(0;0)$ egy egyenlőszárú háromszög alapjának végpontjai. A háromszög C csúcsa rajta van az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű körön. Számítsa ki a C csúcs koordinátáit!

$$\underline{n}_{fc} = \overrightarrow{BA} = \underline{a} - \underline{b}(7;7)$$

$$F_c\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$$

$$7x + 7y = 49$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 7 - x$$

$$x^2 + (7-x)^2 + 2x - 2(7-x) - 47 = 0$$

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 + 2x - 14 + 2x - 47 = 0$$

$$2x^2 - 10x - 12 = 0$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 & y_1 = 7-6=1 \\ x_2 = 1 & y_2 = 7-1=6 \end{cases}$$

$$C_1(6;1)$$

$$C_2(1;6)$$

VI.29. Feladat: Adott az $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz!

$$F(0;3)$$

$$r = d(A, F) = \sqrt{(-3-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$k: (x-0)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$x: y=0$$

$$x^2 + (-3)^2 = 25$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$M_1(4;0)$$

$$M_2(-4;0)$$

XXXIII. Megoldás (VII. fejezet)

VII.1. Feladat: Végezze el a kijelölt műveleteket, majd rendezze a tagokat fokszám szerint csökkenő sorrendbe!

$$a.) (3x^2 - 2x + 1) - (x^2 - x - 3) - (x^2 + 5x - 2) =$$

$$= 3x^2 - 2x + 1 - x^2 + x + 3 - x^2 - 5x + 2 = x^2 - 6x + 6$$

$$b.) 2(y^2 - y + 1) + 3(y^2 + y - 3) - 4(y^2 + 5y + 2) =$$

$$= 2y^2 - 2y + 2 + 3y^2 + 3y - 9 - 4y^2 - 20y - 8 = y^2 - 19y - 15$$

$$c.) (2x - 4)(5 - x) - (4x + 2)(3 + 3x) =$$

$$= 10x - 2x^2 - 20 + 4x - 12x - 12x^2 - 6 - 6x = -14x^2 - 4x - 26$$

$$d.) (5x + 1)(2x - 1) - 2\{2 - 3[2x - (-x - 3) + 3]\} - (6 + 5x)(2 - x) =$$

$$(5x + 1)(2x - 1) - 2\{2 - 3[2x - (-x - 3) + 3]\} - (6 + 5x)(2 - x)$$

$$= 10x^2 - 5x + 2x - 1 - 2\{2 - 3[2x + x + 3 + 3]\} - 12 + 6x - 10x + 5x^2 =$$

$$= 10x^2 - 5x + 2x - 1 - 2\{2 - 6x - 3x - 9 - 9\} - 12 + 6x - 10x + 5x^2 =$$

$$= 10x^2 - 5x + 2x - 1 - 4 + 12x + 6x + 18 + 18 - 12 + 6x - 10x + 5x^2 =$$

$$= 15x^2 + 11x + 19$$

$$e.) (2x - 4)^2 (5 - x) =$$

$$= (2x - 4)^2 (5 - x) = (4x^2 - 16x + 16)(5 - x) = 20x^2 - 4x^3 - 80x + 16x^2 + 80 - 16x =$$

$$= -4x^3 + 36x^2 - 96x + 80$$

$$f.) (x^2 - 2x + 1)(5 - x) =$$

$$= (x^2 - 2x + 1)(5 - x) = 5x^2 - x^3 - 10x + 2x^2 + 5 - x = -x^3 + 7x^2 - 11x + 5$$

$$g.) (x^2 - 3x)^2 + 2(3 - 2x^2)(3 + 2x^2) - (4x + 1)^2 =$$

$$= (x^2 - 3x)^2 + 2(3 - 2x^2)(3 + 2x^2) - (4x + 1)^2 =$$

$$= x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 2(9 - 4x^2) - 16x^2 - 8x - 1 =$$

$$= x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 18 - 8x^2 - 16x^2 - 8x - 1 =$$

$$= x^4 - 6x^3 - 15x^2 - 8x + 17$$

VII.2. Feladat: Oldja meg a következő egyenleteket

$$a.) (3x + 1)(2 - 6x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$3x + 1 = 0 \quad \vee \quad 2 - 6x = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$$

$$b.) (3+x)(2-2x)+(2-2x)=0$$

$$(2-2x)(3+x+1)=0$$

$$(2-2x)(4+x)=0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2-2x=0 \quad \vee. \quad 4+x=0$$

$$x=1 \quad \vee. \quad x=-4$$

$$c.) \left(\frac{4}{9}-x^2\right)(x^2-4)=0$$

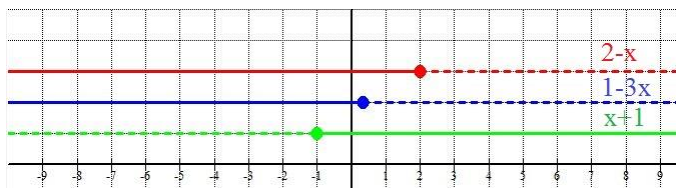
$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{9}-x^2=0 \quad \vee. \quad x^2-4=0$$

$$x=\pm\frac{2}{3} \quad \vee. \quad x=\pm 2$$

VII.3. Feladat: Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket!

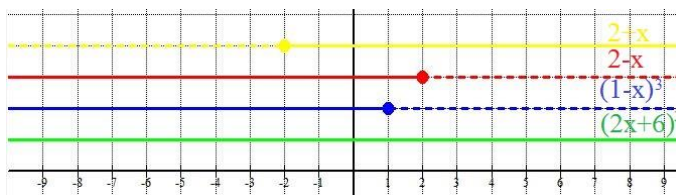
$$a.) (x+1)(1-3x)(2-x) \geq 0$$



$$\text{Mo.: } \left[-1; \frac{1}{3}\right] \cup [2; \infty]$$

$$b.) (2x+6)^2(1-x)^3(4-x^2) \leq 0$$

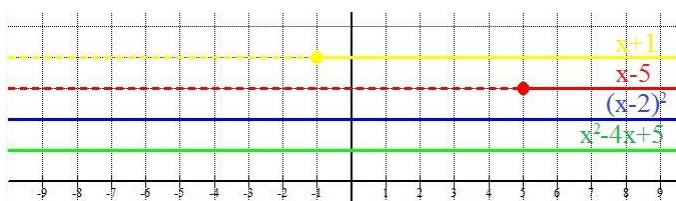
$$(2x+6)^2(1-x)^3(2-x)(2+x) \leq 0$$



$$\text{Mo.: } (-\infty; -2] \cup [1; 2]$$

$$c.) (x^2-4x+5)(x^2-4x+4)(x^2-4x-5) \geq 0$$

$$(x^2-4x+5)(x-2)^2(x-5)(x+1) \geq 0$$



$$\text{Mo.: } (-\infty; -1] \cup [5; \infty]$$

VII.4. Feladat: Alakítsa szorzattá az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket, majd oldja meg az egyenleteket!

a.) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

$$2x^3 + 2 - 3x^2 - 3x = 0$$

$$2(x^3 + 1) - 3x(x + 1) = 0$$

$$2(x + 1)(x^2 - x + 1) - 3x(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(2(x^2 - x + 1) - 3x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x + 1 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = -1 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b.) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

$$(x + 1)^3 = 0$$

$$x = -1$$

c.) $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$

$$x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4) - (x - 2) = 0$$

$$x^2(x - 2)(x + 2) - (x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(x^2(x + 2) - 1) = 0$$

$$(x - 2)(x^3 + 2x^2 - 1) = 0 \quad (x^3 + 2x^2 - 1)\text{-nek } x = -1 \text{ gyöke} \Rightarrow (x + 1)\text{-gyel osztható}$$

$$(x - 2)((x + 1)(x^2 + x - 1)) = 0$$

$$(x - 2)(x + 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = 2 \quad x = -1 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$d.) \quad x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4x + 3) + 4(x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$x^2(x - 3)(x - 1) + 4(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2(x - 3) + 4) = 0$$

$$(x - 1)(x^3 - 3x^2 + 4) = 0 \quad (x^3 - 3x^2 + 4) \text{-nek } x = 2 \text{ gyöke} \Rightarrow (x - 2) \text{-vel osztható}$$

$$(x - 1)((x - 2)(x^2 - x - 2)) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0 \quad \vee \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = 1 \quad x = 2 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

VII.5. Feladat: Végezze el a két polinom osztását!

$$a.) \quad (x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2) : (x^2 - 3x + 2)$$

$$(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2) : (x^2 - 3x + 2) = x^2 - 5x - 1$$

$$-(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$$

$$-5x^3 + 14x^2 - 7x$$

$$-(-5x^3 + 15x^2 - 10x)$$

$$-x^2 + 3x - 2$$

$$-(-x^2 + 3x - 2)$$

$$0$$

Ell.:

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x - 1) =$$

$$x^4 - 5x^3 - x^2 - 3x^3 + 15x^2 + 3x + 2x^2 - 10x - 2 =$$

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 7x - 2$$

$$b.) (-8x^3 - 27) : (2x + 3)$$

$$\begin{array}{r} (-8x^3 + 0x^2 + 0x - 27) : (2x + 3) = -4x^2 + 6x - 9 \\ \underline{-(-8x^3 - 12x^2)} \\ 12x^2 + 0x \\ \underline{-(12x^2 + 18x)} \\ -18x - 27 \\ \underline{-(-18x - 27)} \\ 0 \end{array}$$

$$c.) (11x^3 - 32 + 19x^2 + 3x^4 - 28x) : (-4 + 3x)$$

$$\begin{array}{r} (3x^4 + 11x^3 + 19x^2 - 28x - 32) : (3x - 4) = x^3 + 5x^2 + 13x + 8 \\ \underline{-(3x^4 - 4x^3)} \\ 15x^3 + 19x^2 \\ \underline{-(15x^3 - 20x^2)} \\ 39x^2 - 28x \\ \underline{-(39x^2 - 52x)} \\ 24x - 32 \\ \underline{-(24x - 32)} \\ 0 \end{array}$$

XXXIV. Megoldás (VIII. fejezet)

VIII.1. Feladat: Határozza meg az $2a_n = 3 - 2(-1)^n$ sorozat 2018. tagját és az első 2018 tag összegét!

$$2a_n = 3 - 2(-1)^n$$

$$a_n = \frac{3 - 2(-1)^n}{2}$$

$$a_{2018} = \frac{3 - 2(-1)^{2018}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{2n} = \frac{3 - 2(-1)^{2n}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{2n+1} = \frac{3 - 2(-1)^{2n+1}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$a_{2n} + a_{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=1}^{1009} (a_{2i} + a_{2i-1}) = 1009 \cdot 3 = 3027$$

VIII.2. Feladat: Hányadik tagja az alábbi sorozatnak a 30?

g.) $a_n = 8n - 18$

$$8n - 18 = 30$$

$$8n = 48$$

$$n = 6$$

h.) $b_n = \frac{10n + 20}{3n - 26}$

$$\frac{10n + 20}{3n - 26} = 30$$

$$10n + 20 = 90n - 780$$

$$800 = 80n$$

$$n = 10$$

i.) $c_n = |47 - 7n|$

$$|51 - 7n| = 30$$

$$51 - 7n = 30 \quad \vee \quad 51 - 7n = -30$$

$$21 = 7n$$

$$81 = 7n$$

$$n = 3$$

$$n = \frac{81}{7} \text{ ellentmondás}$$

$$j.) d_n = n^2 - 11n + 18$$

$$n^2 - 11n + 18 = 30$$

$$n^2 - 11n - 12 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{2} = \begin{cases} n_1 = \frac{11+13}{2} = \frac{24}{2} = 12 \\ n_2 = \frac{11-13}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ ellentmondás} \end{cases}$$

$$k.) e_n = \log_2 n$$

$$\log_2 n = 30$$

$$\log_2 n = \log_2 2^{30}$$

$$\Updownarrow$$

$$n = 2^{30}$$

$$l.) f_n = 60 \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{6}$$

$$60 \cdot \sin \frac{n \cdot \pi}{6} = 30$$

$$\sin \frac{n \cdot \pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{n \cdot \pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad \frac{n \cdot \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$n = 1 \quad \vee \quad n = 5$$

Megjegyzés: A forgásszögekkel nem foglalkozunk π többszörösei miatt.

VIII.3. Feladat: Egy számsorozat első eleme 2. Adja meg a sorozat első öt tagját, ha a második tagtól kezdve igaz, hogy:

$$c.) a_n = 5a_{n-1} + 2$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 5 \cdot 2 + 2 = 12$$

$$a_3 = 5 \cdot 12 + 2 = 62$$

$$a_4 = 5 \cdot 62 + 2 = 312$$

$$a_5 = 5 \cdot 312 + 2 = 1562$$

$$d.) b_n = \frac{3}{2}b_{n-1} - 2$$

$$b_1 = 2$$

$$b_2 = \frac{3}{2} \cdot 2 - 2 = 1$$

$$b_3 = \frac{3}{2} \cdot 1 - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$b_4 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = -\frac{11}{4}$$

$$b_5 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) - 2 = -\frac{49}{8}$$

VIII.4. Feladat: Egy számsorozatra teljesül, hogy $a_1 = a_2 = 1$, továbbá $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, ahol $n \geq 3$. Adja meg a sorozat 2018. elemét, és az első 2018 tag összegét!

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$a_4 = 2a_3 - a_2 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\vdots$$

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{2018} a_i = 2018 \cdot 1 = 2018$$

VIII.5. Feladat: Egy számtani sorozat differenciája -7 , első tagja 5 . Adja meg a sorozat következő tagjait:

a.) a_{20}

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{20} = 5 + (20-1)(-7) = 5 - 133 = -128$$

b.) a_{51}

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{51} = 5 + (51-1)(-7) = 5 - 345 = -345$$

c.) a_{321}

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{321} = 5 + (321-1)(-7) = 5 - 2235 = -2235$$

d.) a_{2018}

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{2018} = 5 + (2018-1)(-7) = 5 - 14114 = -14114$$

VIII.6. Feladat: Egy számtani sorozat differenciája $\frac{3}{4}$, első tagja 20. Hányadik tagja a sorozatnak a következő szám:

a.) 95

$$95 = 20 + (n-1)\frac{3}{4}$$

$$380 = 80 + 3(n-1)$$

$$300 = 3(n-1)$$

$$100 = n-1$$

$$n = 101$$

b.) 191

$$191 = 20 + (n-1)\frac{3}{4}$$

$$764 = 80 + 3(n-1)$$

$$684 = 3(n-1)$$

$$228 = n-1$$

$$n = 229$$

c.) 935

$$935 = 20 + (n-1)\frac{3}{4}$$

$$3740 = 80 + 3(n-1)$$

$$3660 = 3(n-1)$$

$$1220 = n-1$$

$$n = 1221$$

d.) 3353

Az előző feladat alapján:

$$n = 4445$$

VIII.7. Feladat: Egy számtani sorozat 42. tagja -74 , 57. tagja -104 . Határozza meg a sorozatot, azaz adja meg a sorozat első elemét, differenciáját és általános tagját!

$$\left. \begin{array}{l} a_{42} = -74 \\ a_{57} = -104 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_1 + 41d = -74 \\ a_1 + 56d = -104 \end{array} \right\} II. - I.$$

$$15d = -30$$

$$d = -2$$

$$a_1 + 41 \cdot (-2) = -74$$

$$a_1 = 8$$

VIII.8. Feladat: Egy számtani sorozat harmadik és nyolcadik tagjának összege 34, a második és a tizenegyedik tag összege 46.

a.) Adja meg a sorozat első tagját!

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + a_8 = 34 \\ a_2 + a_{11} = 46 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_1 + 2d + a_1 + 7d = 34 \\ a_1 + d + a_1 + 10d = 46 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2a_1 + 9d = 34 \\ 2a_1 + 11d = 46 \end{array} \right\} II. - I.$$

$$2d = 12$$

$$d = 6$$

$$2a_1 + 9 \cdot 6 = 34$$

$$a_1 = -10$$

b.) Adja meg a sorozat differenciáját!

$$d = 6$$

c.) Adja meg a sorozat 111. tagját!

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{111} = -10 + 110 \cdot 6$$

$$a_{111} = 650$$

d.) Adja meg a sorozat első 41 tagjának az összegét!

$$s_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n}{2}$$

$$s_{41} = \frac{[2(-10) + 40 \cdot 6] \cdot 41}{2} = 4510$$

VIII.9. Feladat: Egy számtani sorozat első és negyedik tagjának összege 38, a hetedik és a harmadik tag különbsége 16.

a.) Adja meg a sorozat 73. tagját!

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + a_4 = 38 \\ a_7 - a_3 = 16 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_1 + a_1 + 3d = 38 \\ a_1 + 6d - a_1 - 2d = 16 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2a_1 + 3d = 38 \\ 4d = 16 \end{array} \right\}$$

$$d = 4$$

$$2a_1 + 3 \cdot 4 = 38$$

$$a_1 = 13$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{73} = 13 + 72 \cdot 4$$

$$a_{73} = 301$$

b.) Adja meg a sorozat 51. és 29. tagjának a különbségét!

$$a_{73} - a_{29} = a_1 + 50d - a_1 - 28d = 22d = 88$$

c.) Adja meg a sorozat első 999 tagjának az összegét!

$$s_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n}{2}$$

$$s_{999} = \frac{[2 \cdot 13 + 998 \cdot 4] \cdot 999}{2} = 2006991$$

VIII.10. Feladat: Egy számtani sorozat esetén ismertek a következő összefüggések:

$$a_5 \cdot a_{10} = -25 \text{ és } a_2 + a_8 = 10$$

Határozza meg a sorozatot, azaz adja meg a sorozat első elemét, differenciáját és általános tagját!

$$\left. \begin{array}{l} a_5 \cdot a_{10} = -25 \\ a_2 + a_8 = 10 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} (a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 9d) = -25 \\ a_1 + d + a_1 + 7d = 10 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 9d) = -25 \\ 2a_1 + 8d = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 = \frac{10 - 8d}{2}$$

$$\left(\frac{10 - 8d}{2} + 4d \right) \cdot \left(\frac{10 - 8d}{2} + 9d \right) = -25$$

$$\left(\frac{10 - 8d + 8d}{2} \right) \cdot \left(\frac{10 - 8d + 18d}{2} \right) = -25$$

$$5 \cdot \frac{10 + 10d}{2} = -25$$

$$10 + 10d = -10$$

$$10d = -20$$

$$d = -2$$

$$a_1 = \frac{10 - 8(-2)}{2} = 13$$

$$a_n = 13 + (n - 1) \cdot (-2)$$

VIII.11. Feladat: Adott két egész szám 6 és az 1623.

a.) Iktasson be a megadott számok közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos elemei legyenek!

$$a_1 = 6; a_2; a_3; a_4 = 1623$$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \\ a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a_2 = \frac{6 + a_3}{2} \\ a_3 = \frac{a_2 + 1623}{2} \end{array} \right\}$$

$$a_3 = \frac{\frac{6 + a_3}{2} + 1623}{2}$$

$$a_3 = \frac{3252 + a_3}{4}$$

$$3a_3 = 3252$$

$$a_3 = 1084$$

$$d = a_4 - a_3 = 1623 - 1084 = 539$$

$$a_2 = a_3 - d = 545$$

b.) Számítsa ki az adott számok által meghatározott zárt intervallumba eső néggyel osztható számok összegét!

$$[6;1623]$$

$$a_1 = 8$$

$$a_n = 1620$$

$$d = 4$$

$$n = 1620 : 4 - 1 = 404$$

$$s_{404} = \frac{(a_1 + a_{404}) \cdot 404}{2} = \frac{(8 + 1620) \cdot 404}{2} = 328856$$

VIII.12. Feladat: Egy számtani sorozat első tagja 56, differenciája -4 . Számítsa ki n értékét, és a sorozat n -edik tagját, ha az első n tag összege 408.

$$a_1 = 56; \quad d = -4; \quad s_n = 408$$

$$s_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d] \cdot n}{2}$$

$$408 = \frac{[2 \cdot 56 + (n-1) \cdot (-4)] \cdot n}{2}$$

$$816 = 119n - 4n^2 \quad / : 4$$

$$204 = 29n - n^2$$

$$n^2 - 29n + 204 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 816}}{2} = \frac{29 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} n_1 = \frac{29+5}{2} = 17 \\ n_2 = \frac{29-5}{2} = 12 \end{cases}$$

$$\text{I. eset } (n=17): a_{17} = a_1 + 16d \Rightarrow a_{17} = 56 + 16(-4) = -8$$

$$\text{II. eset } (n=12): a_{12} = a_1 + 11d \Rightarrow a_{12} = 56 + 11(-4) = 12$$

VIII.13. Feladat: Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egy számtani sorozat szomszédos elemei. Mekkora a háromszög szögei?

$$a = b - d; \quad b; \quad c = b + d$$

$$(b+d)^2 = (b-d)^2 - b^2$$

$$b^2 + 2bd + d^2 = b^2 - 2bd + d^2 - b^2$$

$$2bd = -2bd - b^2$$

$$4bd + b^2 = 0$$

$$b(4d + b) = 0$$

$$b = 0 \quad \vee \quad 4d + b = 0$$

$$\text{ellentmondás} \quad \vee \quad 4d = -b \Rightarrow b = -4d \Rightarrow d < 0$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{a} = \frac{-4d + d}{-4d - d} = \frac{3}{5}$$

$$\gamma = 36,87^\circ \Rightarrow \beta = 53,13^\circ$$

VIII.14. Feladat: Egy mértani sorozat hányadosa -2 , első tagja 10 . Adja meg a sorozat következő tagjait:

a.) a_5

$$a_5 = a_1 q^4 = 10(-2)^4 = 160$$

b.) a_{47}

$$a_{47} = a_1 q^{46} = 10(-2)^{46}$$

c.) a_{100}

$$a_{100} = a_1 q^{99} = 10(-2)^{99}$$

d.) a_{2018}

$$a_{2018} = a_1 q^{2017} = 10(-2)^{2017}$$

VIII.15. Feladat: Egy mértani sorozat hányadosa $\frac{1}{2}$, első tagja 4 . Hányadik tagja a sorozatnak a következő szám:

a.) 1

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$2 = n - 1$$

$$n = 3$$

b.) $0,25$

$$0,25 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$4 = n - 1$$

$$n = 5$$

c.) $0,0625$

$$0,0625 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$6 = n - 1$$

$$n = 7$$

VIII.16. Feladat: Adottak a következő számok: $1,8,22$. A számokhoz ugyanazt a valós számot hozzáadva egy mértani sorozat három egymást követő elemét kapjuk. Határozza meg a sorozatot, azaz adja meg a sorozat első elemét, hányadosát és általános tagját!

$$a_1 = 1 + x$$

$$a_2 = 8 + x$$

$$a_3 = 22 + x$$

Mértani sorozat:

$$8 + x = \sqrt{(1+x)(22+x)}$$

$$64 + 16x + x^2 = 22 + 23x + x^2$$

$$42 = 7x$$

$$x = 6$$

$$a_1 = 7; a_2 = 14; a_3 = 28$$

VIII.17. Feladat: Egy mértani sorozat harmadik és negyedik tagjának összege 80, az ötödik és a harmadik tag különbsége 240. Határozza meg a sorozatot, azaz adja meg a sorozat első elemét, differenciáját és általános tagját!

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + a_4 = 80 \\ a_5 - a_3 = 240 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_1 q^2 + a_1 q^3 = 80 \\ a_1 q^4 - a_1 q^2 = 240 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_1 q^2 (1+q) = 80 \\ a_1 q^2 (q^2 - 1) = 240 \end{array} \right\} \frac{II}{I}.$$

$$\frac{q^2 - 1}{1+q} = 3$$

$$\frac{(q-1)(q+1)}{1+q} = 3$$

$$q - 1 = 3$$

$$q = 4$$

VIII.18. Feladat: Egy mértani sorozat első tagja 5, második és harmadik tagjának összege 10. Adja meg a sorozat első 7 tagjának összegét!

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 5 \\ a_2 + a_3 = 10 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_1 = 5 \\ a_1 q + a_1 q^2 = 10 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} a_1 = 5 \\ a_1 (q + q^2) = 10 \end{array} \right\} \frac{II}{I}.$$

$$q^2 + q = 2$$

$$q^2 + q - 2 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} q_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ q_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

I. eset $q = 1$

$$S_7 = 5 \cdot 7 = 35$$

II. eset $q = -2$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}; \Rightarrow S_7 = \frac{5 \cdot ((-2)^7 - 1)}{-2 - 1} = \frac{-645}{-3} = 215$$

VIII.19. Feladat: Egy-egy mértani sorozat tagjaira teljesülnek a következő összefüggések. Határozza meg a sorozatot, azaz adja meg a sorozat első elemét, hányadosát és általános tagját!

$$\text{a.) } \begin{cases} a_1 + a_2 = 15 \\ a_3 + a_4 = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q = 15 \\ a_1 q^2 + a_1 q^3 = 60 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1(1+q) = 15 \\ a_1 q^2(1+q) = 60 \end{cases} \quad \begin{matrix} II. \\ I. \end{matrix}$$

$$q^2 = 4$$

$$q = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

I. eset $q = 2$

$$a_1 + a_1 \cdot 2 = 15$$

$$a_1 = 3$$

II. eset $q = -2$

$$a_1 + a_1 \cdot (-2) = 15$$

$$a_1 = -15$$

$$\text{b.) } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 57 \\ a_1 + a_3 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 57 \\ a_1 + a_1 q^2 = 60 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1(1+q+q^2) = 57 \\ a_1(1+q^2) = 60 \end{cases} \quad \begin{matrix} II. \\ I. \end{matrix}$$

$$\frac{1+q^2}{1+q+q^2} = \frac{60}{57}$$

$$57 + 57q^2 = 60 + 60q + 60q^2$$

$$3q^2 + 60q + 3 = 0$$

$$q^2 + 20q + 1 = 0$$

$\vdots$

$$\text{c.) } \begin{cases} a_1 + a_2 = 160 \\ a_6 + a_7 = 1215 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q = 160 \\ a_1 q^5 + a_1 q^6 = 1215 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1(1+q) = 160 \\ a_1 q^5(1+q) = 1215 \end{cases} \quad \begin{matrix} II. \\ I. \end{matrix}$$

$$q^5 = \frac{1215}{160} = \frac{243}{32}$$

$$q^5 = \frac{243}{32} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$q = \frac{3}{2}$$

VIII.20. Feladat: Igaz-e, hogy a következő számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai?

a.) 32; 24; 18

$$24 = \sqrt[?]{{32 \cdot 18}}$$

$$24 = \sqrt[?]{{576}}$$

$$24 = 24$$

b.) 16; 40; 100

$$40 = \sqrt[?]{{16 \cdot 100}}$$

$$40 = \sqrt[?]{{1600}}$$

$$40 = 40$$

VIII.21. Feladat: Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai egy mértani sorozat szomszédos elemei. Mekkora a háromszög szögei?

$$a = \frac{b}{q}; \quad b; \quad c = bq$$

$$b^2 q^2 = \frac{b^2}{q^2} + b^2$$

$$q^2 = \frac{1}{q^2} + 1$$

$$q^4 = 1 + q^2$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0$$

$$q^2_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} q^2_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ q^2_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ellentmondás } q^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{I. eset } q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{b}{q}}{bq} = \frac{1}{q^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \alpha = 38,17^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha = 51,83^\circ$$

VIII.22. Feladat: Egy számtani sorozat első három tagjának összege 6. Ha az első taghoz 5-öt, a másodikhoz 2-t, a harmadikhoz 1-et adunk, egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Határozza meg a sorozatokat, azaz adja meg a sorozat első elemét, differenciáját vagy hányadosát és általános tagját!

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 6 \\ a_2 + 2 &= \sqrt{(a_1 + 5)(a_3 + 1)} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d &= 6 \\ a_1 + d + 2 &= \sqrt{(a_1 + 5)(a_1 + 2d + 1)} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 3a_1 + 3d &= 6 \\ a_1 + d + 2 &= \sqrt{(a_1 + 5)(a_1 + 2d + 1)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_1 + d = 2 \Rightarrow d = 2 - a_1$$

$$a_1 + 2 - a_1 + 2 = \sqrt{(a_1 + 5)(a_1 + 2(2 - a_1) + 1)}$$

$$4 = \sqrt{(a_1 + 5)(5 - a_1)}$$

$$16 = 25 - a_1^2$$

$$a_1^2 = 9$$

$$a_1 = \pm 3$$

I. eset $a_1 = 3$

$$d = 2 - a_1 = -1$$

$$A_1 = a_1 + 5 = 8$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 = a_2 + 2 &= 4 \\ A_3 = a_3 + 1 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow q = \frac{A_3}{A_2} = \frac{1}{2}$$

II. eset $a_1 = -3$

$$d = 2 - a_1 = 5$$

$$A_1 = a_1 + 5 = 2$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 = a_2 + 2 &= 4 \\ A_3 = a_3 + 1 &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow q = \frac{A_3}{A_2} = 2$$

VIII.23. Feladat: Egy mértani sorozat második tagja 12. Ha a sorozat első tagjához 4-et, a másodikhoz 3-at, a harmadikhoz pedig 1-et adunk, egy számtani sorozat egymást követő elemeit kapjuk. Határozza meg a sorozatokat, azaz adja meg a sorozat első elemét, differenciáját vagy hányadosát és általános tagját!

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= 12 \\ A_2 + 3 &= \frac{A_1 + 4 + A_3 + 1}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= 12 \\ A_2 + 3 &= \frac{\frac{A_2}{q} + 4 + A_2 q + 1}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$12 + 3 = \frac{\frac{12}{q} + 4 + 12q + 1}{2}$$

$$30 = \frac{12}{q} + 12q + 5$$

$$30q = 12 + 12q^2 + 5q$$

$$0 = 12q^2 - 25q + 12$$

$$q_{1;2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{24} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{24} = \begin{cases} q_1 = \frac{32}{24} = \frac{4}{3} \\ q_2 = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{I. eset } q = \frac{4}{3}$$

$$A_1 = \frac{A_2}{q} = \frac{12}{\frac{4}{3}} = 9$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= A_1 + 4 = 13 \\ a_2 &= A_2 + 3 = 15 \\ a_3 &= A_3 + 1 = 17 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 2$$

$$\text{II. eset } q = \frac{3}{4}$$

$$A_1 = \frac{A_2}{q} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = 16$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= A_1 + 4 = 20 \\ a_2 &= A_2 + 3 = 15 \\ a_3 &= A_3 + 1 = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = -5$$

VIII.24. Feladat: Ha elhelyezünk a bankba 200000Ft-ot évi 6%-os kamatra, és a kamat is kamatozik 10 éven át, akkor a 10. év végén mekkora összeget vehetünk ki a bankból?

Képlettel:

$$T_n = T_0 \left(\frac{100 + p}{100} \right)^{10} = 200000 \cdot \left(\frac{100 + 6}{100} \right)^{10} = 358169,53 \text{ Ft}$$

Levezetve:

Év	Év eleje	Év vége
1.	200000	$1,06 \cdot 200000$
2.	$1,06 \cdot 200000$	$1,06 \cdot 1,06 \cdot 200000 = 1,06^2 \cdot 200000$
3.	$1,06^2 \cdot 200000$	$1,06 \cdot 1,06^2 \cdot 200000 = 1,06^3 \cdot 200000$
⋮		
10.	$1,06^9 \cdot 200000$	$1,06 \cdot 1,06^9 \cdot 200000 = 1,06^{10} \cdot 200000$
$T_n = 1,06^{10} \cdot 200000 = 358169,53 Ft$		

VIII.25. Feladat: Egy család a megtakarított 800000 Ft-ját két évre bankba szeretné helyezni kamatos kamatra. Hány százalékos volt a kamatláb az első év folyamán, ha a bank ezt a kamatlábat 3%-kal növelte a második évben, és így a második év végén 907200 Ft-ot vehetett fel a család?

Levezetve:

Év	Év eleje	Év vége
1.	800000	$\frac{100+x}{100} \cdot 800000$
2.	$\frac{100+x}{100} \cdot 800000$	$\frac{100+(x+3)}{100} \cdot \frac{100+x}{100} \cdot 800000 = (103+x) \cdot (100+x) \cdot 80$

$$(103+x) \cdot (100+x) \cdot 80 = 907200$$

$$(103+x) \cdot (100+x) = 11340$$

$$10300 + 103x + 100x + x^2 = 11340$$

$$x^2 + 203x - 1040 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-203 \pm \sqrt{41209 + 4160}}{2} = \frac{-203 \pm \sqrt{45369}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-203 + 213}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{-203 - 213}{2} = -108 \text{ ellentmondás} \end{cases}$$

VIII.26. Feladat: Hány év alatt növekszik háromszorosára egy bankban elhelyezett betétünk, ha az éves kamat 6,4% és az évek alatt nem változik!

Képlettel:

$$3T_0 = T_0 \left(\frac{100+6,4}{100} \right)^n \Rightarrow 3 = \left(\frac{100+6,4}{100} \right)^n$$

$$\lg 3 = \lg \left(\frac{100+6,4}{100} \right)^n \Rightarrow \lg 3 = n \cdot \lg \left(\frac{100+6,4}{100} \right)$$

$$n = \frac{\lg 3}{\lg \left(\frac{100+6,4}{100} \right)} \approx 17,7 \text{ azaz 18 év alatt}$$

XXXV. Megoldás (IX. fejezet)

IX.2. Feladat: Igazolja, hogy egy 25 fős társaságban mindig van legalább három olyan ember, aki ugyanabban a hónapban ünnepli a születésnapját?

Skatulyaelv alapján:

12 hónap mindegyikbe 2-2fő $\Rightarrow$ összesen 24fő, de 25-en vannak

$\Downarrow$

Valamelyik hónaphoz 3 fő.

IX.3. Feladat: Egy iskola 470 tanulója 16 osztályban tanul. Bizonyítsa be, hogy van legalább egy osztály, amelynek létszáma eléri a 30-at!

Skatulyaelv alapján:

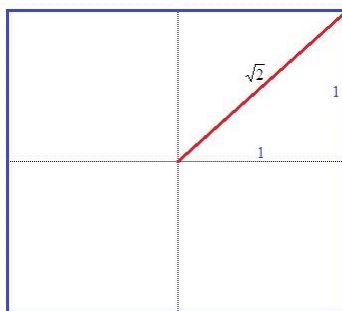
16 osztály mindegyikbe 29-29fő $\Rightarrow$ összesen 464fő, de 470-en vannak

$\Downarrow$

Valamelyik osztályba legalább 30 fő.

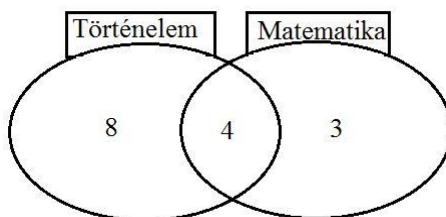
IX.4. Feladat: Igazolja, hogy a 2 egység oldalú négyzetben bárhol is helyezzünk el öt pontot, lesz közöttük legalább két olyan, melynek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$!

Skatulyaelv alapján:



Négy pontot el tudunk úgy helyezni az ábrán, hogy bármely két pont különböző egységoldalú négyzetbe essen, de öt pontunk van $\Rightarrow$ szükségképpen lesz egy négyzet, amelyben két pont van, melyeknek a távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$.

IX.5. Feladat: Egy 32-es létszámú osztályban év végén hét tanulónak volt jelese matematikából, 12 tanulónak pedig történelemből. Négyen mindkét tárgyból jelest kaptak. Hány olyan tanuló van ebben az osztályban, akinek matematikából és történelemből sem volt jelese?



$$\left. \begin{array}{l} |U| = 32 \\ |\text{Történelem} \cup \text{Matematika}| = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow 32 - 15 = 17$$

IX.6. Feladat: Hány darab kétjegyű pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 3-mal, sem 5-tel, sem 7-tel?

$$U = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge 10 \leq x \leq 99\}$$

$$|U| = 90$$

$$A = \{x : x \in U \wedge 3 \mid x\}$$

$$B = \{x : x \in U \wedge 5 \mid x\}$$

$$C = \{x : x \in U \wedge 7 \mid x\}$$

$$|A| = 30$$

$$|B| = 18$$

$$|C| = 13$$

$$|A \cap B| = 6$$

$$|A \cap C| = 4$$

$$|B \cap C| = 2$$

$$|A \cap B \cap C| = 0$$

Logikai szita-formula:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = 30 + 18 + 13 - 6 - 4 - 2 + 0 = 49$$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |U| - |A \cup B \cup C| = 90 - 49 = 41$$

IX.7. Feladat: Hány elemű lehet egy 20 és egy 15 elemű halmaz uniója?

$$|A| = 20$$

$$|B| = 15$$

$$20 \leq |A \cup B| \leq 35$$

IX.8. Feladat: Egy futóverseny nyolc indulója hányféle sorrendben érhet be a célba?

$$P_8 = 8!$$

IX.9. Feladat: Van 3 piros, 2 fehér, 5 zöld golyónk. Hányféle módon tudjuk őket sorba rendezni?

$$P_{10}^{2,3,5} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = 2520$$

IX.10. Feladat: Egy sakkversenyen egy versenyzőnek az 5. forduló után 3,5 pontja van. Hányféleképpen érhetette el az eredményét, ha azt is figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben szerezte pontjait?

Nyertes parti: 1pont

Döntetlen: 0,5pont

$$3,5 = 0,5 + 0,5 + 0,5 + 1 + 1$$

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

IX.11. Feladat: Az alábbi elrendezésből hányféleképpen olvasható ki a BUDAPEST szó, ha csak jobbra és lefele léphetünk?

B	U	D	A	P
U	D	A	P	E
D	A	P	E	S
A	P	E	S	T

Négy lépés jobbra, három lépés lefele. Összesen 7 lépés

Egy lehetséges kiolvasás lépései:

$j; j; l; l; j; l; j$

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

Második megoldás (Pascal háromszög)

$$\begin{matrix} B^1 & U^1 & D^1 & A^1 & P^1 \\ U^1 & D^2 & A^3 & P^4 & E^5 \\ D^1 & A^3 & P^6 & E^{10} & S^{15} \\ A^1 & P^4 & E^{10} & S^{20} & T^{35} \end{matrix}$$

IX.12. Feladat: Egy futóverseny nyolc indulója között hányféle módon osztható ki az arany-, ezüst- és bronzérem?

$$V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

IX.13. Feladat: Hány 13-tippes totószelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatunk?

$$V_3^{13(i)} = 3^{13}$$

IX.14. Feladat: Szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Az eredményeket egymás mellé írva hány kétjegyű számot kaphatunk?

$$V_6^{2(i)} = 6^2 = 36$$

IX.15. Feladat: Hány olyan háromjegyű szám van, amelynek minden jegye páratlan (páros)?

Minden jegye páratlan:

$$\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$V_5^{3(i)} = 5^3 = 125$$

Minden jegye páros:

$$\{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$10^2 \quad 10^1 \quad 10^0$$

$$4db \quad 5db \quad 5db$$

$$4 \cdot V_5^{2(i)} = 4 \cdot 5^2 = 100$$

IX.16. Feladat: Hány rendszám tábla készíthető 24 betű és 10 számjegy felhasználásával, ha a rendszám 3 betűből és 3 számjegyből áll?

$$V_{24}^{3(i)} \cdot V_{10}^{3(i)} = 24^3 \cdot 10^3 = 13824000$$

IX.17. Feladat: Hány pozitív osztója van a 210-nek?

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$210 = 2^{1+1/2} \cdot 3^{1+1/2} \cdot 5^{1+1/2} \cdot 7^{1+1/2}$$

$$\text{Osztók száma: } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

IX.18. Feladat: Hány húzási eredmény lehetséges a hagyományos lottóban?

$$C_{90}^5 = \frac{90!}{5!85!} = 43949268$$

IX.19. Feladat: Hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak? Összesen hány részhalmaza van a kérdéses n elemű halmaznak?

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

IX.20. Feladat: Bizonyítsd be a binomiális tételt!

Bizonyítás a XXII. fejezet alapján!

IX.21. Feladat: Bizonyítsd be, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$! Rajzold fel a Pascal-háromszöget!

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)! \cdot k!(n-1-k)!}{k!(k-1)!(n-k)!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)! \cdot (k-1)!(n-k)!}{k!(k-1)!(n-k)!(n-1-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)! \cdot k!(n-1-k)! + (n-1)! \cdot (k-1)!(n-k)!}{k!(k-1)!(n-k)!(n-1-k)!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{(n-1)! \left(\overbrace{k(k-1)! \cdots (n-k-1)!}^{k!} + (k-1)! \overbrace{(n-k)(n-k-1)!}^{(n-k)!} \right)}{k!(k-1)!(n-k)!(n-1-k)!} = \\
 & = \frac{(n-1)!(k-1)!(n-k-1)!(k+(n-k))}{k!(k-1)!(n-k)!(n-1-k)!} = \\
 & = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

Pascal háromszög:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0. \text{ szint} & & & & & & 1 \\
 1. \text{ szint} & & & & 1 & & 1 \\
 2. \text{ szint} & & & 1 & 2 & 1 & \\
 3. \text{ szint} & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 4. \text{ szint} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & & & \vdots & & & \\
 n. \text{ szint} & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n}
 \end{array}$$

IX.22. Feladat: Ha n adott egész szám, akkor $\binom{n}{k}$ mely k értékre lesz maximális?

I. eset, ha $n = 2k$ alakú:

$$\max : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!k!}$$

II. eset, ha $n = 2k + 1$ alakú:

$$\max : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(k+1)!}$$

IX.23. Feladat: Hányféleképpen lehet 100 tanulót 25 fős osztályokba beosztani, ha az osztályok sorrendje nem számít?

$$\binom{100}{25} \cdot \binom{75}{25} \cdot \binom{50}{25} \cdot \binom{25}{25}$$

IX.24. Feladat: Az összes lehetséges módon kitöltött lottószelvények között hány négytalálatos van (és 3, és 2)?

$$\text{Négy találatos szelvények száma: } \binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1}$$

$$\text{Három találatos szelvények száma: } \binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}$$

$$\text{Két találatos szelvények száma: } \binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}$$

IX.25. Feladat: Ha a virágboltban hétféle virágot árulnak, hányféleképpen lehet ötszálás csokrot választani?

n : virágok száma

k : csokorban lévő virágok száma

$$n = 7$$

$$k = 5$$

$$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{11}{5} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = 462$$

XXXVI. Megoldás (X. fejezet)

X.1. Feladat: Oldja meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a.) $\sin x = \frac{1}{2}$

$$\sin x_0 = \frac{1}{2} \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

I. eset (első negyed)

$$x_1 = x_0 + k2\pi = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

II. eset (második negyed)

$$x_2 = \pi - x_0 + k2\pi = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + l2\pi$$

$k, l \in \mathbb{Z}$

b.) $\cos x = -1$

$$\cos x_0 = -1 \quad x_0 = \pi$$

$$x = x_0 + k2\pi = \pi + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

c.) $2\sin x = -\sqrt{2}$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

I. eset (harmadik negyed)

$$x_3 = \pi + x_0 + k2\pi = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$$

II. eset (negyedik negyed)

$$x_4 = 2\pi - x_0 + k2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi = \frac{7\pi}{4} + l2\pi$$

$k, l \in \mathbb{Z}$

d.) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad x_0 = \frac{\pi}{3}$$

I. eset (harmadik negyed)

$$2x_3 = \pi + x_0 + k2\pi = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{4\pi}{3} + k2\pi$$

$$x_3 = \frac{4\pi}{6} + k\pi = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

II. eset (negyedik negyed)

$$2x_4 = 2\pi - x_0 + k2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{5\pi}{3} + l2\pi$$

$$x_4 = \frac{5\pi}{6} + l\pi$$

$$k, l \in \mathbb{Z}$$

e.) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\sin x_0 = \frac{1}{2} \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

I. eset (első negyed)

$$2x_1 + \frac{\pi}{3} = x_0 + k2\pi = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$2x_1 = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{12} + k\pi$$

II. eset (második negyed)

$$2x_2 + \frac{\pi}{3} = \pi - x_0 + k2\pi = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + l2\pi$$

$$2x_2 = \frac{3\pi}{6} + l2\pi$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{12} + l\pi = \frac{\pi}{4} + l\pi$$

$$k, l \in \mathbb{Z}$$

f.) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

I. eset (első negyed)

$$x_1 + \frac{\pi}{3} = x_0 + k2\pi = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$$

II. eset (negyedik negyed)

$$x_4 + \frac{\pi}{3} = 2\pi - x_0 + k2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi = \frac{7\pi}{4} + l2\pi$$

$$x_4 = \frac{17\pi}{12} + l2\pi$$

$$k, l \in \mathbb{Z}$$

g.) $4\cos^2 x = 1$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

$$x_0 = \frac{\pi}{3}$$

Ha $\cos x = \frac{1}{2}$

I. eset (első negyed)

$$x_1 = x_0 + k2\pi = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

II. eset (negyedik negyed)

$$x_4 = 2\pi - x_0 + k2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{5\pi}{3} + l2\pi$$

$k, l \in \mathbb{Z}$

Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$

I. eset (második negyed)

$$x_2 = \pi - x_0 + m2\pi = \pi - \frac{\pi}{3} + m2\pi = \frac{2\pi}{3} + m2\pi$$

II. eset (harmadik negyed)

$$x_3 = \pi + x_0 + n2\pi = \pi + \frac{\pi}{3} + n2\pi = \frac{4\pi}{3} + n2\pi$$

$m, n \in \mathbb{Z}$

h.) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{6}$$

Ha $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

I. eset (első negyed)

$$x_1 - \frac{\pi}{6} = x_0 + k2\pi = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$x_1 = \frac{2\pi}{6} + k2\pi = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

II. eset (második negyed)

$$x_2 - \frac{\pi}{6} = \pi - x_0 + k2\pi = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + l2\pi$$

$$x_2 = \frac{6\pi}{6} + l2\pi = \pi + l2\pi$$

$k, l \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ha } \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

I. eset (harmadik negyed)

$$x_3 - \frac{\pi}{6} = \pi + x_0 + m2\pi = \pi + \frac{\pi}{6} + m2\pi = \frac{7\pi}{6} + m2\pi$$

$$x_3 = \frac{8\pi}{6} + m2\pi = \frac{4\pi}{3} + m2\pi$$

II. eset (negyedik negyed)

$$x_2 - \frac{\pi}{6} = 2\pi - x_0 + n2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi = \frac{11\pi}{6} + n2\pi$$

$$x_2 = \frac{12\pi}{6} + n2\pi = 2\pi + n2\pi$$

 $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{i.) } \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Ha } \cos x = \frac{1}{2}$$

I. eset (első negyed)

$$2x_1 + \frac{\pi}{3} = x_0 + k2\pi = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$2x_1 = 0 + k2\pi$$

$$x_1 = 0 + k\pi$$

II. eset (negyedik negyed)

$$2x_4 + \frac{\pi}{3} = 2\pi - x_0 + k2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{5\pi}{3} + l2\pi$$

$$2x_4 = \frac{4\pi}{3} + l2\pi$$

$$x_4 = \frac{4\pi}{6} + l\pi = \frac{2\pi}{3} + l\pi$$

 $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ha } \cos x = -\frac{1}{2}$$

I. eset (második negyed)

$$2x_2 + \frac{\pi}{3} = \pi - x_0 + m2\pi = \pi - \frac{\pi}{3} + m2\pi = \frac{2\pi}{3} + m2\pi$$

$$2x_2 = \frac{\pi}{3} + m2\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + m\pi$$

II. eset (harmadik negyed)

$$2x_3 + \frac{\pi}{3} = \pi + x_0 + n2\pi = \pi + \frac{\pi}{3} + n2\pi = \frac{4\pi}{3} + n2\pi$$

$$2x_3 = \frac{3\pi}{3} + n2\pi = \pi + n2\pi$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

 $m, n \in \mathbb{Z}$

j.) $\sin x = \sin y$

$$x_1 = y + 2k\pi$$

$$x_2 = \pi - y + 2l\pi$$

$$k, l \in \mathbb{Z}$$

k.) $\sin x = \cos x$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

⋮

l.) $\cos(3x - 4\pi) = \sin(\pi - x)$

$$\cos(3x - 4\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x + 4\pi\right)$$

$$\cos(3x - 4\pi) = \sin\left(\frac{9\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} - 3x\right) = \sin(\pi - x)$$

I. eset

$$\frac{9\pi}{2} - 3x_1 = \pi - x_1 + 2k\pi$$

$$-2x_1 = -\frac{7\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_1 = \frac{7\pi}{4} - k\pi$$

II. eset

$$\frac{9\pi}{2} - 3x_2 = \pi - \pi + x_2 + 2l\pi$$

$$-4x_2 = -\frac{9\pi}{2} + 2l\pi$$

$$x_2 = \frac{9\pi}{8} + \frac{l\pi}{2}$$

$$k, l \in \mathbb{Z}$$

m.) $\sin 2x - \cos x = 0$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$$



$$\cos x = 0 \quad \vee \quad 2 \sin x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x_0 = \frac{1}{2} \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

I. eset (első negyed)

$$x_1 = x_0 + k2\pi = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

II. eset (második negyed)

$$x_2 = \pi - x_0 + k2\pi = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + l2\pi$$

$m, k, l \in \mathbb{Z}$

n.) $4 \cos x = \frac{1}{\sin x} \quad \sin x \neq 0$

$$4 \cos x \sin x = 1$$

$$2 \cdot 2 \cos x \sin x = 1$$

$$2 \cos x \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x_0 = \frac{1}{2} \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$

I. eset (első negyed)

$$2x_1 = x_0 + k2\pi = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

II. eset (második negyed)

$$2x_2 = \pi - x_0 + k2\pi = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + l2\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{12} + l\pi$$

$k, l \in \mathbb{Z}$

o.) $\sin^2 x = 2\sin x + 3$

Legyen $a = \sin x$

$$a^2 = 2a + 3$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} a_1 = 3 & \text{ellentmondás} \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

$$\sin x = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

p.) $\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x + 4\cos x = 3(1 - \cos^2 x)$$

$$\cos^2 x + 4\cos x = 3 - 3\cos^2 x$$

Legyen $a = \cos x$

$$a^2 + 4a = 3 - 3a^2$$

$$4a^2 + 4a - 3 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{8} = \begin{cases} a_1 = \frac{10}{8} & \text{ellentmondás} \\ a_2 = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} \text{q.) } 2 \cos^2 x &= 4 - 5 \sin x \\ 2(1 - \sin^2 x) &= 4 - 5 \sin x \\ 2 - 2 \sin^2 x &= 4 - 5 \sin x \\ 0 &= 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 \\ \text{Legyen } a &= \sin x \\ &\vdots \end{aligned}$$

X.2. Feladat: Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség:

$$\begin{aligned} \text{a.) } \sin \alpha &= \frac{1}{2} \\ \sin \alpha_0 &= \frac{1}{2} \quad \alpha_0 = 30^\circ \\ \text{I. eset (első negyed)} \\ \alpha_1 &= \alpha_0 = 30^\circ \\ \text{II. eset (második negyed)} \\ \alpha_2 &= 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } \cos^2 \alpha &= \frac{1}{4} \\ \cos \alpha &= \pm \frac{1}{2} \\ \alpha_0 &= 60^\circ \\ \text{Ha } \cos \alpha &= \frac{1}{2} \\ \text{I. eset (első negyed)} \\ \alpha_1 &= 60^\circ \\ \text{II. eset (negyedik negyed)} \\ \alpha_4 &= 300^\circ \\ \text{Ha } \cos \alpha &= -\frac{1}{2} \\ \text{I. eset (második negyed)} \\ \alpha_2 &= 120^\circ \\ \text{II. eset (harmadik negyed)} \\ \alpha_3 &= 240^\circ \end{aligned}$$

c.) $\sin \alpha = 0$

$$\alpha_1 = 0^\circ; \alpha_2 = 180^\circ; \alpha_3 = 360^\circ$$

d.) $\cos^2 \alpha = 2 \cos \alpha + 3$

$$\cos^2 \alpha = 2 \cos \alpha + 3$$

Legyen $a = \cos \alpha$

$$a^2 = 2a + 3$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} a_1 = 3 \text{ ellentmondás} \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

$$\cos \alpha = -1$$

$$\alpha = 180^\circ$$

e.) $\cos 2\alpha = \sin \alpha$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin \alpha$$

$$1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin \alpha$$

$$0 = 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1$$

Legyen $a = \sin \alpha$

$$0 = 2a^2 + a - 1$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} a_1 = 2 \text{ ellentmondás} \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

$$\sin \alpha = -1$$

$$\alpha = 270^\circ$$

X.3. Feladat: Adja meg az összes olyan forgásszöget fokokban mérve, amelyre

$$f(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \text{ függvény nem értelmezhető! Válaszát indokolja!}$$

$$\cos^2 x \neq 0$$

$$\cos x \neq 0$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{ÉT.: } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

X.4. Feladat: Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

a.) Az $x \mapsto \sin x$ $x \in \mathbb{R}$ függvény periódusa 2π . IGAZ

b.) Az $x \mapsto \sin(2x)$ $x \in \mathbb{R}$ függvény periódusa 2π . HAMIS

c.) Van olyan derékszögű háromszög, amelyben az egyik szög szinusza $\frac{1}{2}$. IGAZ

d.) Ha egy háromszög egyik hegyesszögének szinusza $\frac{1}{2}$, akkor a háromszög derékszögű.

HAMIS

e.) A derékszögű háromszögnek van olyan szöge, amelynek nincs tangense. IGAZ

f.) A derékszögű háromszögnek bármelyik szögének értelmezzük a koszinuszát. IGAZ

g.) Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény. IGAZ

h.) A $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2; 2]$ zárt intervallum.

HAMIS

i.) A $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ zárt

intervallum. HAMIS

X.5. Feladat: Határozza meg a következő, valós számok halmazán értelmezett függvények értékkészletét!

a.) $x \mapsto 1 + \cos x$

ÉK.: $y \in [0; 2]$

b.) $x \mapsto \sin x - 2$

ÉK.: $y \in [-3; -1]$

c.) $x \mapsto 2 \cos x + 2$

ÉK.: $y \in [0; 4]$

d.) $x \mapsto -3 \sin(2x) - 1$

ÉK.: $y \in [-4; 2]$

e.) $x \mapsto \frac{1}{2}(\sin x - 1)$

ÉK.: $y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

f.) $x \mapsto \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

ÉK.: $y \in [1; 3]$

g.) $x \mapsto 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

ÉK.: $y \in [-1; 3]$

X.6. Feladat: Határozza meg a következő, valós számok halmazán értelmezett függvények értelmezési tartományát

$$a.) x \mapsto \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{2}$$

$$1 - \cos^2 x \geq 0$$

$$1 \geq \cos^2 x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$b.) x \mapsto \frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$$

$$x \mapsto \frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$$

$$\sin x \neq 0 \quad \text{és} \quad \cos x \neq 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x \neq 0$$

$$x_1 \neq k\pi \quad x_2 \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \quad \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x \neq 0$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0$$

$$1 \neq \operatorname{tg}^2 x$$

$$\pm 1 \neq \operatorname{tg} x$$

$$x_3 \neq \frac{\pi}{4} + m\pi$$

$$x_4 \neq -\frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$c.) x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$$

$$x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$$

$$\cos x \neq 0 \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} x - \sin x \neq 0$$

$$x_1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x \neq 0$$

$$\sin x - \sin x \cos x \neq 0$$

$$\sin x(1 - \cos x) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x \neq 0 \quad \vee \quad 1 - \cos x \neq 0$$

$$x_2 \neq l\pi \quad 1 \neq \cos x$$

$$x_3 \neq m\pi$$

$$k, l, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{d.) } x &\mapsto \frac{\cos 2x}{\sin x(1 - \operatorname{ctg} x)} \\ \sin x &\neq 0 \quad \vee \quad 1 - \operatorname{ctg} x \neq 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

X.7. Feladat: Számológép használata nélkül adja meg a következő kifejezések pontos értékét!

$$\text{a.) } 2 \cos 60^\circ - \sin 45^\circ + \cos 45^\circ + 2 \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\text{b.) } \sin 30^\circ + \sin 45^\circ + \sin 60^\circ + \sin 90^\circ + \cos 30^\circ + \cos 45^\circ + \cos 60^\circ + \cos 90^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\text{c.) } \frac{\cos 60^\circ - \sin 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} =$$

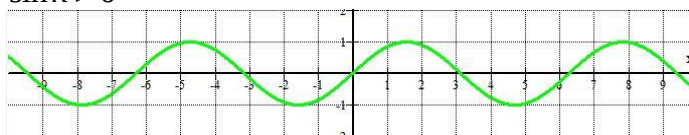
$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = -\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}$$

$$\text{d.) } \frac{\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ}{2 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ - 3} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \cdot 1 - 3} = \frac{\frac{2}{4}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

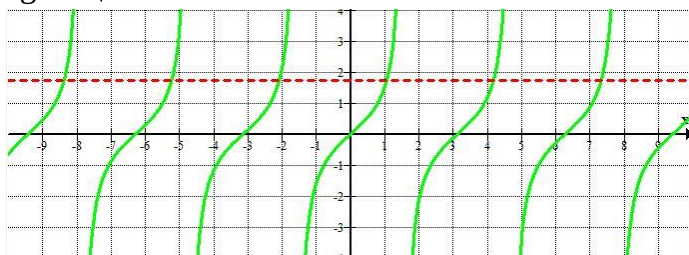
X.8. Feladat: Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket!

$$\text{a.) } \sin x > 0$$



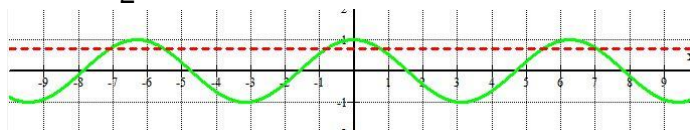
$$0 + k2\pi < x < \pi + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b.) } \operatorname{tg} x < \sqrt{3}$$



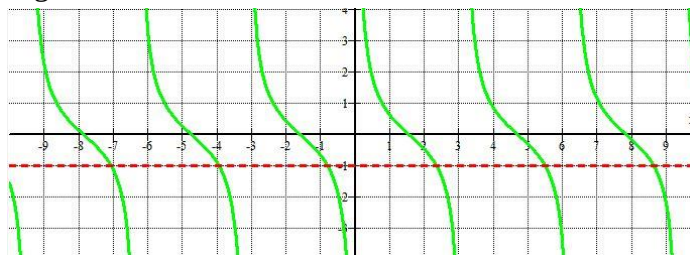
$$-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

c.) $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$



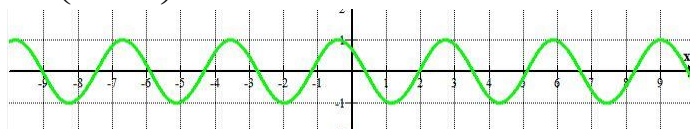
$$-\frac{\pi}{4} + k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

d.) $\operatorname{ctg} x \geq -1$



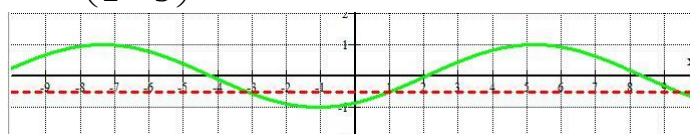
$$0 + k\pi < x \leq \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e.) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

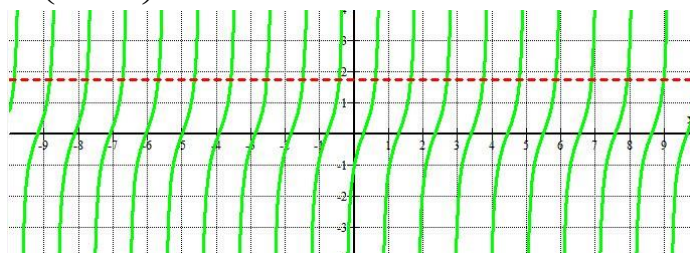


$$-\frac{3\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

f.) $2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \leq -1$



g.) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} \geq 0$



XXXVII. Megoldás (XI. fejezet)

XI.1. Feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a.) $2(2x-11)-5(2x+3)=7(4-x)$

$$2(2x-11)-5(2x+3)=7(4-x)$$

$$4x-22-10x-15=28-7x$$

$$-6x-37=28-7x$$

$$x-37=28$$

$$x=65$$

Ell.!

b.) $\frac{2}{3}(5x-3)=\frac{1}{2}(3x+5)$

$$\frac{4}{6}(5x-3)=\frac{3}{6}(3x+5)$$

$$4(5x-3)=3(3x+5)$$

$$20x-12=9x+15$$

$$11x-12=15$$

$$11x=27$$

$$x=\frac{27}{11}$$

Ell.!

c.) $3(4-x)=2[3-2(4+x)]$

$$12-3x=2[3-8-2x]$$

$$12-3x=-10-4x$$

$$12+x=-10$$

$$x=-22$$

Ell.!

d.) $1-x=\frac{1-2x}{2}+\frac{3-4x}{3}$

$$1-x=\frac{3(1-2x)}{6}+\frac{2(3-4x)}{6}$$

$$6-6x=3-6x+6-8x$$

$$6-6x=9-14x$$

$$4+8x=9$$

$$8x=5$$

$$x=\frac{5}{8}$$

Ell.!

$$\begin{aligned} \text{e.) } \frac{3x+5}{18} + \frac{1+4x}{12} - \frac{5x-2}{6} &= 0 \\ \frac{2(3x+5)}{36} + \frac{3(1+4x)}{36} - \frac{6(5x-2)}{36} &= 0 \\ 6x+10+3+12x-30x+12 &= 0 \\ -12x+25 &= 0 \\ 25 &= 12x \\ x &= \frac{25}{12} \end{aligned}$$

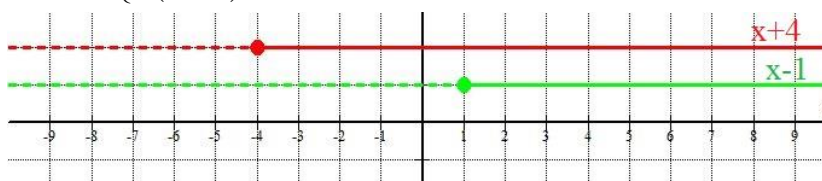
Ell.!

$$\begin{aligned} \text{f.) } 2x(x+1)(2-3x)(4-x) &= 0 \\ x=0 \quad \vee \quad x+1=0 \quad \vee \quad 2-3x=0 \quad \vee \quad 4-x=0 \\ x &= -1 \quad x = \frac{2}{3} \quad x = 4 \\ \text{g.) } x \cdot \frac{(15-x)(x+7)}{x-15} \cdot (2x-1) &= 0 \\ x=0 \quad \vee \quad 15-x=0 \quad \vee \quad x+7=0 \quad \vee \quad 2x-1=0 \quad \text{és} \quad x-15 \neq 0 \\ x &= 15 \quad x = -7 \quad x = \frac{1}{2} \quad x \neq 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h.) } |5x-13| &= 7 \\ 5x-13=7 \quad \vee \quad 5x-13=-7 \\ 5x &= 20 \quad 5x = 6 \\ x &= 4 \quad x = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i.) } |7-2x| &= 3x+4 \\ 7-2x=3x+4 \quad \vee \quad 7-2x=-(3x+4) \\ 3 &= 5x \quad 7-2x=-3x-4 \\ x &= \frac{3}{5} \quad x = -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j.) } 2 \cdot |x-1| - |x+4| &= x-6 \\ |x-1| &= \begin{cases} x-1, & \text{ha } x-1 \geq 0, \text{ azaz } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{ha } x-1 < 0, \text{ azaz } x < 1 \end{cases} \\ |x+4| &= \begin{cases} x+4, & \text{ha } x+4 \geq 0, \text{ azaz } x \geq -4 \\ -(x+4), & \text{ha } x+4 < 0, \text{ azaz } x < -4 \end{cases} \end{aligned}$$



I. eset $x < -4$

$$-2(x-1) + (x+4) = x-6$$

$$-2x+2+x+4 = x-6$$

$$-x+6 = x-6$$

$$2x=12$$

$x=6$ hamis gyök

II. eset $-4 \leq x < 1$

$$-2(x-1) - (x+4) = x-6$$

$$-2x+2-x-4 = x-6$$

$$-3x-2 = x-6$$

$$-4x = -4$$

$x=1$ hamis gyök

III. eset $1 \leq x$

$$2(x-1) - (x+4) = x-6$$

$$2x-2-x-4 = x-6$$

$$x-6 = x-6$$

azonosság $\forall x \in [1; \infty[$

$$k.) 14x^2 - 25x - 25 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 1400}}{28} = \frac{25 \pm \sqrt{2025}}{28} = \begin{cases} x_1 = \frac{25+45}{28} = \frac{70}{28} \\ x_2 = \frac{25-45}{28} = \frac{20}{28} \end{cases}$$

$$l.) (5x+1)(3x-5) = 2(1-19x)$$

$$15x^2 - 25x + 3x - 5 = 2 - 38x$$

$$15x^2 - 22x - 5 = 2 - 38x$$

$$15x^2 + 16x - 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 420}}{30} = \frac{-16 \pm \sqrt{676}}{30} = \begin{cases} x_1 = \frac{-16+26}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{-16-26}{30} = -\frac{42}{30} \end{cases}$$

$$m.) 2x-2 = \frac{x^2+6}{x+3}$$

$$(2x-2)(x+3) = x^2+6$$

$$2x^2+6x-2x-6 = x^2+6$$

$$2x^2+4x-6 = x^2+6$$

$$x^2+4x-12 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4+8}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-4-8}{2} = -\frac{12}{2} = -6 \end{cases}$$

n.) $(x+1)^2 - 3 = 6$

$$(x+1)^2 - 3 = 6$$

$$x^2 + 2x + 1 - 3 = 6$$

$$x^2 + 2x - 8 = 6$$

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-2-6}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \end{cases}$$

o.) $\frac{x^2 - 25}{x+5} = 0$

$$\frac{(x-5)(x+5)}{x+5} = 0$$

$$x-5 = 0$$

$$x = 5$$

p.) $\sqrt{5x-3} = 2$

$$\sqrt{5x-3} = 2$$

$$5x-3 = 4$$

$$5x = 7$$

$$x = \frac{7}{5}$$

$$K.: 5x-3 \geq 0$$

$$5x \geq 3$$

$$x \geq \frac{3}{5}$$

q.) $\sqrt{4x+21} = x+4$

$$K.: 4x+21 \geq 0 \quad \text{és} \quad x+4 \geq 0$$

$$\underbrace{x \geq -\frac{21}{4} \quad x \geq -4}_{\Downarrow}$$

$$x \geq -4$$

$$4x+21 = x^2 + 8x + 16$$

$$0 = x^2 + 4x - 5$$

$$x_{1;2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-4-6}{2} = -\frac{10}{2} = -5 \end{cases}$$

$$r.) \sqrt{2x - \frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$K.: 2x - \frac{3}{4} \geq 0$$

$$2x \geq \frac{3}{4}$$

$$x \geq \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{2x - \frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2x - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$8x - 3 = 2$$

$$8x = 5$$

$$x = \frac{5}{8}$$

$$s.) \sqrt{7x - 5} = \sqrt{4x + 7}$$

$$K.: 7x - 5 \geq 0 \quad \text{és} \quad 4x + 7 \geq 0$$

$$x \geq \frac{5}{7} \quad x \geq -\frac{7}{4}$$

$$x \geq \frac{5}{7}$$

$$7x - 5 = 4x + 7$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

$$t.) \sqrt{x - 7} - \sqrt{5 - x} = 2$$

$$K.: x - 7 \geq 0 \quad \text{és} \quad 5 - x \geq 0$$

$$x \geq 7 \quad 5 \geq x$$

$\emptyset$

Nincs megoldás!

$$u.) \sqrt{x - 4} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{x + 4}$$

$$K.: x - 4 \geq 0 \quad \text{és} \quad x - 1 \geq 0 \quad \text{és} \quad x + 4 \geq 0$$

$$x \geq 4 \quad x \geq 1 \quad x \geq -4$$

$$x \geq 4$$

$$x-4+2\sqrt{(x-4)(x-1)}+x-1=x+4$$

$$2\sqrt{(x-4)(x-1)}=9-x \quad 9-x \geq 0 \Rightarrow 9 \geq x$$

$$\text{ha } 4 \leq x \leq 9$$

$$\Downarrow$$

$$4(x-4)(x-1)=81-18x+x^2$$

$$4x^2-20x+4=81-18x+x^2$$

$$3x^2-2x-77=0$$

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+924}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{928}}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4 + \sqrt{928}}{6} \\ x_2 = \frac{-4 - \sqrt{928}}{6} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\text{v.) } 9^{2x-1} = 27^3$$

$$(3^2)^{2x-1} = (3^3)^3$$

$$3^{4x-2} = 3^9$$

$$\Updownarrow$$

$$4x-2=9$$

$$x = \frac{11}{4}$$

$$\text{w.) } 5^{5x-2} - 1 = 0$$

$$5^{5x-2} = 1$$

$$5^{5x-2} = 5^0$$

$$\Updownarrow$$

$$5x-2=0$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$\text{x.) } \sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{2401}$$

$$7^{\frac{x}{4}} = 2401^{\frac{1}{5}}$$

$$7^{\frac{x}{4}} = (7^4)^{\frac{1}{5}}$$

$$7^{\frac{x}{4}} = 7^{\frac{4}{5}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x}{4} = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{16}{5}$$

$$y.) \ 0,125^{2-x} = \frac{8}{2^{x-5}}$$

$$\left(\frac{1}{2^3}\right)^{2-x} = \frac{2^3}{2^{x-5}}$$

$$(2^{-3})^{2-x} = 2^{-2-x}$$

$$2^{x-6} = 2^{-2-x}$$

$$\Updownarrow$$

$$x-6 = -2-x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$z.) \ 15 \cdot 2^{x+3} - 7 \cdot 2^{x+1} + 2^x = 107$$

$$15 \cdot 2^x \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^x \cdot 2 + 2^x = 107$$

$$2^x \cdot \underbrace{(15 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2 + 1)}_{107} = 107$$

$$2^x = 1$$

$$2^x = 2^0$$

$$x = 0$$

$$aa.) \ 4^{x+2} - 6 \cdot 2^x + 2^2 = 0$$

$$(2^x)^2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2^x + 2^2 = 0$$

$$\text{Legyen: } a = 2^x$$

$$4a^2 - 6a + 4 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{8} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{8} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$bb.) \ \left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-11x+10} = \frac{25}{4}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-11x+10} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-11x+10} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 - 11x + 10 = -2$$

$$2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{6}{4} \end{cases}$$

$$\text{cc.) } 5^x = \frac{1}{5^x} + \frac{24}{5}$$

$$\text{Legyen: } a = 5^x$$

$$a = \frac{1}{a} + \frac{24}{5}$$

$$5a^2 = 5 + 24a$$

$$5a^2 - 24a - 5 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 100}}{10} = \frac{24 \pm \sqrt{676}}{10} = \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = -\frac{1}{5} \text{ ellenrmondás} \end{cases}$$

$$5 = 5^x$$

$$x = 1$$

$$\text{dd.) } 2^{x-3} \cdot 3^2 = 3^{x-1}$$

$$\frac{3^3}{2^3} = \frac{3^x}{2^x}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 3$$

$$\text{ee.) } \lg(8x - 15) = \lg(1 - x)$$

$$K.: 8x - 15 > 0 \quad \text{és} \quad 1 - x > 0$$

$$x > \frac{15}{8} \quad 1 > x$$

$$\Downarrow$$

$$\emptyset$$

Nincs megoldás!

$$\text{ff.) } \frac{\log_4(x+2)}{\log_4(2x-1)} = 1$$

$$K.: x + 2 > 0 \quad \text{és} \quad 2x - 1 > 0$$

$$x > -2 \quad x > \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x > \frac{1}{2}$$

$$\log_4(x+2) = \log_4(2x-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$x + 2 = 2x - 1$$

$$x = 3$$

$$\text{gg.) } 3 + \log_2 5 = \log_2 (7x - 2)$$

$$K.: 7x - 2 > 0$$

$$x > \frac{2}{7}$$

$$\log_2 2^3 + \log_2 5 = \log_2 (7x - 2)$$

$$\log_2 40 = \log_2 (7x - 2)$$

$$\Updownarrow$$

$$40 = 7x - 2$$

$$x = 6$$

$$\text{hh.) } \log_3 (5x - 7) - \log_3 (3x + 9) = 2$$

$$K.: 5x - 7 > 0 \quad \text{és} \quad 3x + 9 > 0$$

$$x > \frac{7}{5} \quad x > -3$$

$$x > \frac{7}{5}$$

$$\log_3 \frac{5x - 7}{3x + 9} = \log_3 3^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{5x - 7}{3x + 9} = 9$$

$$5x - 7 = 27x + 81$$

$$-88 = 22x$$

$$x = -4 \text{ hamis gyök}$$

$$\text{ii.) } 2\lg(2x + 3) = \lg(4x + 1) + \lg(2x - 3)$$

$$K.: 2x + 3 > 0 \quad \text{és} \quad 4x + 1 > 0 \quad \text{és} \quad x + 4 > 0$$

$$x > -\frac{3}{2} \quad x > -\frac{1}{4} \quad x > -4$$

$$x \geq -\frac{1}{4}$$

$$\lg(2x + 3)^2 = \lg(4x + 1)(2x - 3)$$

$$\Updownarrow$$

$$4x^2 + 12x + 9 = 8x^2 - 10x - 3$$

$$0 = 4x^2 - 22x - 12$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 + 192}}{8} = \frac{22 \pm \sqrt{676}}{8} = \begin{cases} x_1 = \frac{22 + 26}{8} = 6 \\ x_2 = \frac{22 - 26}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{jj.) } \log_3(\sqrt{x+1}+1)=2$$

$$K.: x+1 \geq 0 \quad \text{és} \quad \sqrt{x+1}+1 > 0$$

$$\underbrace{x \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}}_{\Downarrow}$$

$$x \geq -1$$

$$\log_3(\sqrt{x+1}+1)=\log_3 3^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{x+1}+1=9$$

$$\sqrt{x+1}=8$$

$$x+1=64$$

$$x=63$$

XI.2. Feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket!

$$\text{a.) } 7+x < -2 \cdot (x-2)$$

$$7+x < -2x+4$$

$$3x < -3$$

$$x < -1$$

$$x \in]-\infty; -1[$$

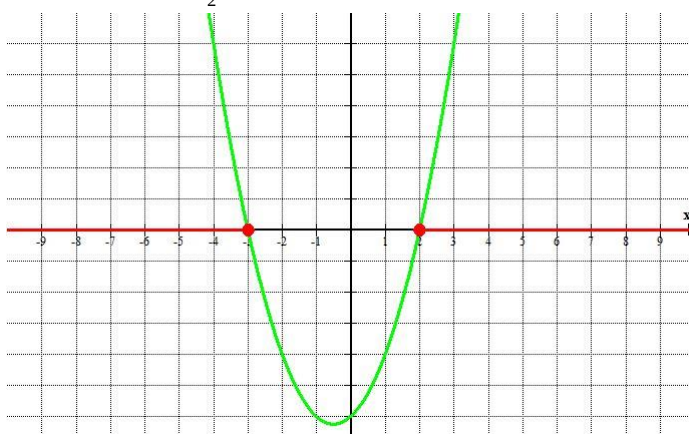
$$\text{b.) } x^2 \geq 6-x$$

$$x^2+x-6 \geq 0$$

$$s.: (x+3)(x-2)=0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 2$$



$$x \leq -3 \quad \text{vagy} \quad x \geq 2$$

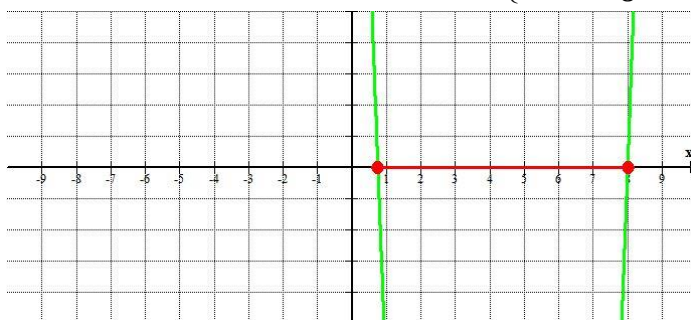
$$x \in]-\infty; -3] \cup [2; \infty[$$

$$c.) 4x^2 - 35x + 20 \leq -4$$

$$4x^2 - 35x + 24 \leq 0$$

$$s: 4x^2 - 35x + 24 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 384}}{8} = \frac{35 \pm \sqrt{841}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{35 + 29}{8} = 8 \\ x_2 = \frac{35 - 29}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{cases}$$



$$\frac{3}{4} \leq x \leq 8$$

$$x \in \left[\frac{3}{4}; 8 \right]$$

$$d.) \frac{2x+1}{3} - \frac{x+2}{5} \geq -1$$

$$\frac{5(2x+1)}{15} - \frac{3(x+2)}{15} \geq -1$$

$$5(2x+1) - 3(x+2) \geq -15$$

$$10x + 5 - 3x - 6 \geq -15$$

$$7x - 1 \geq -15$$

$$7x \geq -14$$

$$x \geq -2$$

$$x \in [-2; \infty[$$

$$e.) \frac{13x+7}{x^2+22} > 0$$

$$x^2 + 22 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$13x + 7 > 0$$

$$13x > -7$$

$$x > -\frac{7}{13}$$

$$x \in \left[-\frac{7}{13}; \infty \right[$$

$$\begin{aligned} \text{f.) } \frac{4x-3}{3-x} &\leq 2 \\ \frac{4x-3}{3-x} - \frac{2(3-x)}{3-x} &\leq 0 \\ \frac{4x-3-6+2x}{3-x} &\leq 0 \\ \frac{6x-9}{3-x} &\leq 0 \end{aligned}$$

I. eset:

$$\begin{cases} 6x-9 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 3 > x \end{cases}$$

$$\frac{3}{2} \leq x < 3$$

$$\text{ÉT.: } x \in \left[\frac{3}{2}; 3 \right[$$

$$\begin{aligned} \text{g.) } \frac{7-3x}{6x-2} - \frac{4x+1}{3x-1} &< -2 \\ \frac{7-3x}{2(3x-1)} - \frac{4x+1}{2(3x-1)} + \frac{4(3x-1)}{2(3x-1)} &< 0 \\ \frac{7-3x-4x-1+12x-4}{2(3x-1)} &< 0 \end{aligned}$$

$$\frac{5x+2}{2(3x-1)} < 0$$

I. eset:

$$\begin{cases} 5x+2 > 0 \\ 3x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -\frac{2}{5} \\ x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{2}{5} \leq x < \frac{1}{3}$$

$$\text{ÉT.: } x \in \left[-\frac{2}{5}; \frac{1}{3} \right[$$

II.eset:

$$\begin{cases} 6x-9 \leq 0 \\ 3-x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 3 < x \end{cases}$$

 $\emptyset$

II.eset:

$$\begin{cases} 5x+2 < 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases}$$

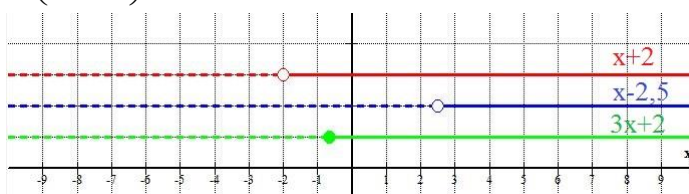
$$\begin{cases} x < -\frac{2}{5} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

 $\emptyset$

$$h.) \frac{3x+2}{2x^2-x-10} \geq 0$$

$$\frac{3x+2}{2x^2-x-10} \geq 0$$

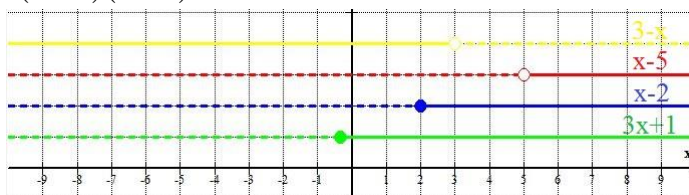
$$\frac{3x+2}{2\left(x-\frac{10}{4}\right)(x+2)} \geq 0$$



$$-2 < x \leq -\frac{2}{3} \text{ vagy } \frac{10}{4} < x$$

$$x \in \left]-2; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{10}{4}; \infty\right[$$

$$i.) \frac{(3x+1)(x-2)}{(x-5)(3-x)} \leq 0$$



$$-\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \text{ vagy } 3 < x < 5$$

$$x \in \left[-\frac{1}{3}; 2\right] \cup]3; 5[$$

$$j.) |x+2| - 1 \leq 2x$$

$$|x+2| \leq 2x+1$$

$$|x+2| \begin{cases} x+2, & \text{ha } x+2 \geq 0, \text{ azaz } x \geq -2 \\ -(x+2), & \text{ha } x+2 < 0, \text{ azaz } x < -2 \end{cases}$$

I. eset $x \geq -2$

$$x+2 \leq 2x+1$$

$$1 \leq x$$

II. eset $x < -2$

$$-(x+2) \leq 2x+1$$

$$-x-2 \leq 2x+1$$

$$-3x \leq 3$$

$$x \geq -1 \text{ ellentmondás}$$

$$x \in [1, \infty[$$

$$k.) \quad 7^{3x-4} \geq \frac{1}{49}$$

$$7^{3x-4} \geq 7^{-2}$$

$\Updownarrow$ exp.fgv.szig.mon.növ. miatt

$$3x-4 = -2$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$l.) \quad \left(\frac{5}{7}\right)^{x-3} < \frac{49}{25}$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-3} < \left(\frac{5}{7}\right)^{-2}$$

$\Updownarrow$ exp.fgv.szig.mon.csökk. miatt

$$x-3 > -2$$

$$x > 1$$

$$m.) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{4-x}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{8-2x}$$

$\Updownarrow$ exp.fgv.szig.mon.csökk. miatt

$$3x-1 \leq 8-2x$$

$$5x \leq 9$$

$$x \leq \frac{9}{5}$$

$$n.) \quad \log_5(x^2-25) \geq 0$$

$$K.: x^2-25 \geq 0$$

$$\log_5(x^2-25) \geq \log_5 1$$

$\Updownarrow$ log.fgv.szig.mon.növ. miatt

$$x^2-25 \geq 1$$

$$x^2-26 \geq 0$$

$$s: x_{1;2} = \pm\sqrt{26}$$

$$x \leq -\sqrt{26} \quad \text{vagy} \quad x \geq \sqrt{26}$$

$$o.) \log_{\frac{1}{3}}(5x-3) \leq -3$$

$$K.: 5x-3 > 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(5x-3) \leq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

$\Updownarrow$ log.fgv.szig.mon.csökk. miatt

$$5x-3 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

$$5x-3 \geq 27$$

$$5x \geq 30$$

$$x \geq 6$$

$$p.) \lg(8x+4) - \lg(3x+5) < \lg(2x-4)$$

$$K.: x > 2$$

$$\lg \frac{8x+4}{3x+5} < \lg(2x-4)$$

$\Updownarrow$ log.fgv.szig.mon.növ. miatt

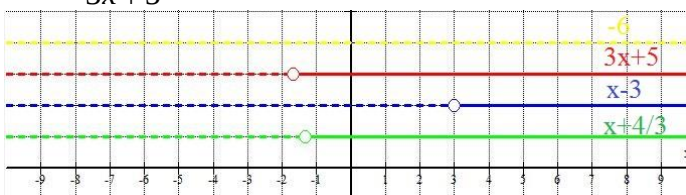
$$\frac{8x+4}{3x+5} < 2x-4$$

$$\frac{8x+4}{3x+5} - \frac{(3x+5)(2x-4)}{3x+5} < 0$$

$$\frac{8x+4-6x^2+2x+20}{3x+5} < 0$$

$$\frac{-6x^2+10x+24}{3x+5} < 0$$

$$\frac{-6\left(x+\frac{4}{3}\right)(x-3)}{3x+5} < 0$$



$$-\frac{5}{3} < x < -\frac{4}{3} \text{ vagy } 3 < x$$

$$x \in \left[-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right[\cup [3; \infty[$$

$$q.) \frac{\log_{\frac{2}{3}}(x+5)}{\log_{\frac{2}{3}}(x-4)} \geq 0$$

$$\frac{\log_{\frac{2}{3}}(x+5)}{\log_{\frac{2}{3}}(x-4)} \geq 0$$

I. eset:

$$\left. \begin{array}{l} \log_{\frac{2}{3}}(x+5) \geq 0 \\ \log_{\frac{2}{3}}(x-4) > 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_{\frac{2}{3}}(x+5) \geq \log_{\frac{2}{3}} 1 \\ \log_{\frac{2}{3}}(x-4) > \log_{\frac{2}{3}} 1 \end{array} \right\}$$

 $\Updownarrow$ log.fgv.szig.mon.csökk. miatt

$$\left. \begin{array}{l} x+5 \leq 1 \\ x-4 < 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq -4 \\ x < 5 \end{array} \right\}$$

$$x \leq -4$$

$$ET.: x \in]-\infty; -4] \cup [5; \infty[$$

II. eset:

$$\left. \begin{array}{l} \log_{\frac{2}{3}}(x+5) \leq 0 \\ \log_{\frac{2}{3}}(x-4) < 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_{\frac{2}{3}}(x+5) \leq \log_{\frac{2}{3}} 1 \\ \log_{\frac{2}{3}}(x-4) < \log_{\frac{2}{3}} 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x+5 \geq 1 \\ x-4 > 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq -4 \\ x > 5 \end{array} \right\}$$

$$x > 5$$

XI.3. Feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a.) $x^3 - 5 = 3$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

b.) $x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

$$x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x(x-4)(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x - 4 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0$$

$$x = 4$$

$$x = 2$$

c.) $x^4 - 81 = 0$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0$$

$$(x-3)(x+3)(x^2 + 9) = 0$$

$$x-3=0 \quad \vee \quad x+3=0$$

$$x=3$$

$$x=-3$$

$$d.) x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\text{Legyen: } a = x^2$$

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

I. eset

II. eset

$$x^2 = 4$$

$$x^2 = 1$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

$$x_{3,4} = \pm 1$$

$$e.) x^4 + 2x^3 - 15x^2 + 2x + 1 = 0$$

 $x = 0 \Rightarrow 1 = 0$ ellentmondás $x = 0$ nem megoldás

Legyen: $x \neq 0$

$$x^2 + 2x - 15 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{2}{x} - 15 = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 15 = 0$$

Vizsgáljuk :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

 $\Downarrow$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 15 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 17 = 0$$

$$\text{Legyen: } a = x + \frac{1}{x}$$

$$a^2 + 2a - 17 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+68}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{-2 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 3\sqrt{2} = \begin{cases} a_1 = -1 + 3\sqrt{2} \\ a_2 = -1 - 3\sqrt{2} \end{cases}$$

 $\vdots$

XXXVIII. Megoldás (XII. fejezet)

XII.1. Feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő kétismeretlenes egyenletrendszereket!

$$\begin{aligned} \text{a.) } & \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 7x + 2y = -5 \end{cases} \\ & \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 7x + 2y = -5 \end{cases} \begin{matrix} / \cdot 2 \\ / \cdot 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 10 \\ 21x + 6y = -15 \end{cases} \quad I. + II. \\ & \qquad \qquad \qquad 25x = -5 \\ & \qquad \qquad \qquad x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\left(-\frac{1}{5}\right) - 3y &= 5 \\ -\frac{12}{5} &= 3y \\ y &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } & \begin{cases} x + y = 12 \\ x \cdot y = 32 \end{cases} \\ & \begin{cases} x + y = 12 \\ x \cdot y = 32 \end{cases} \Rightarrow y = 12 - x \\ & \begin{cases} x + y = 12 \\ x \cdot y = 32 \end{cases} \\ & x \cdot (12 - x) = 32 \\ & 12x - x^2 = 32 \\ & 0 = x^2 - 12x + 32 \\ & x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 12 - x_1 = 4 \\ y_2 = 12 - x_2 = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c.) } & \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\ & \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 3 + 2y \\ & \begin{cases} x - 2y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\ & (3 + 2y)^2 + y^2 = 5 \\ & 9 + 12y + 4y^2 + y^2 = 5 \\ & 5y^2 + 12y + 4 = 0 \\ & y_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + 2y_1 = -1 \\ x_2 = 3 + 2y_2 = -17 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{d.) } \left. \begin{array}{l} \frac{y-4}{x+1} = 3 \\ (y-1)(x+1) = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y-4}{x+1} = 3 \Rightarrow y-4 = 3(x+1) \Rightarrow y-4 = 3x+3 \Rightarrow y = 3x+7$$

$$(3x+7-1)(x+1) = 12$$

$$(3x+6)(x+1) = 12$$

$$3x^2 + 9x + 6 = 12$$

$$x_{1;2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81-72}}{6} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{6} = \begin{cases} x_1 = -1 & \Rightarrow y_1 = 3x_1 + 7 = 4 \\ x_2 = -2 & \Rightarrow y_2 = 3x_2 + 7 = 1 \end{cases}$$

$$\text{e.) } \left. \begin{array}{l} x+3y = 5 \\ x+3y = x^2 + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x+3y = 5 \\ x+3y = x^2 + 5 \end{array} \quad \text{II.} - \text{I.}$$

$$0 = x^2$$

$$x = 0$$

$$3y = 5$$

$$y = \frac{5}{3}$$

$$x \geq 3 \text{ és } x \geq -\frac{y}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x+3y = -1 \\ x-3 = \sqrt{3x+y} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 3x + y \Rightarrow x^2 - 9x + 9 = y$$

$$\text{f.) } 2x+3(x^2-9x+9) = -1$$

$$2x+3x^2-27x+27 = -1$$

$$3x^2 - 25x + 28 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{25 \pm \sqrt{625-336}}{6} = \frac{25 \pm \sqrt{289}}{6} = \begin{cases} x_1 = 7 & \Rightarrow y_1 = x^2 - 9x + 9 = -5 \\ x_2 = \frac{8}{6} & \Rightarrow y_2 = x^2 - 9x + 9 = -\frac{157}{18} \end{cases}$$

$$\text{g.) } \left. \begin{array}{l} 4 \cdot 3^x + 2^y = 16 \\ 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 3 \end{array} \right\}$$

$$4 \cdot 3^x + 2^y = 16$$

$$5 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 3$$

$$\text{Legyen: } a = 3^x \text{ és } b = 2^y$$

$$\left. \begin{array}{l} 4a+b=16 \\ 5a-3b=3 \end{array} \right\} / \cdot 3 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 12a+3b=48 \\ 5a-3b=3 \end{array} \right\} I. + II.$$

$$17a=51$$

$$a=3$$

$$4a+b=16$$

$$12+b=16$$

$$b=4$$

$$3^x=3 \quad 2^y=4$$

$$\Updownarrow \quad 2^y=2^2$$

$$x=1 \quad \Updownarrow \quad y=2$$

$$h.) \left. \begin{array}{l} 5^{xy} = \frac{1}{25} \\ 9^x \cdot 3^y = 27 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5^{xy} = \frac{1}{25} \\ 9^x \cdot 3^y = 27 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5^{xy} = 5^{-2} \\ 3^{2x+y} = 3^3 \end{array} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} xy = -2 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 3 - 2x$$

$$x(3-2x) = -2$$

$$3x - 2x^2 = -2$$

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} & \Rightarrow y_1 = 3 - 2x_1 = 4 \\ x_2 = 2 & \Rightarrow y_2 = 3 - 2x_2 = -1 \end{cases}$$

$$i.) \left. \begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y = 1 \\ \log_2 x + \log_2 y = 5 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} y = 1 \\ \log_2 x + \log_2 y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{y} = 1 \\ \log_2 xy = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{y} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \\ \log_2 xy = \log_2 2^5 \end{array} \right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \\ xy = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{y}{2}$$

$$\frac{y}{2}y = 32$$

$$y^2 = 64$$

$$y = \pm 8$$

$$y_1 = 8 \quad x_1 = 4$$

$$y_2 = -8 \quad x_2 = -4$$

$$j.) \begin{cases} 5^{2x-y} + 2^{x+1} = 21 \\ 5^{2x-y+1} - 2^x = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5^{2x-y} + 2^{x+1} = 21 \\ 5^{2x-y+1} - 2^x = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{2x-y} + 2 \cdot 2^x = 21 \\ 5 \cdot 5^{2x-y} - 2^x = 17 \end{cases}$$

$$\text{Legyen: } a = 5^{2x-y} \quad b = 2^x$$

$$\begin{cases} a + 2 \cdot b = 21 \\ 5 \cdot a - b = 17 \end{cases} \cdot 5 \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot a + 10 \cdot b = 105 \\ 5 \cdot a - b = 17 \end{cases} \quad I. - II.$$

$$11b = 88$$

$$b = 8$$

$$a + 16 = 21$$

$$a = 5$$

$$2^x = 8 \quad 5^{2x-y} = 5$$

$$2^x = 2^3 \quad 5^{6-y} = 5$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$x = 3 \quad 6 - y = 1$$

$$y = 5$$

$$k.) \begin{cases} 7 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_2 y = -6 \\ 3 \cdot \log_3 x + 8 \cdot \log_2 y = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_2 y = -6 \\ 3 \cdot \log_3 x + 8 \cdot \log_2 y = 81 \end{cases}$$

$$\text{Legyen } a = \log_3 x \text{ és } b = \log_2 y$$

$$\begin{cases} 7 \cdot a - 3 \cdot b = -6 \\ 3 \cdot a + 8 \cdot b = 81 \end{cases} \cdot 3 \Rightarrow \begin{cases} 21 \cdot a - 9 \cdot b = -18 \\ 21 \cdot a + 56 \cdot b = 567 \end{cases} \quad II. - I$$

$$65 \cdot b = 585$$

$$b = 9$$

$$3 \cdot a + 8 \cdot 9 = 81$$

$$3 \cdot a = 9$$

$$a = 3$$

$$\begin{array}{ll} \log_3 x = 3 & \log_2 y = 9 \\ \log_3 x = \log_3 3^3 & \log_2 y = \log_2 2^9 \\ \Downarrow & \Downarrow \\ x = 27 & y = 512 \end{array}$$

XII.2. Feladat: Oldja meg a valós számok halmazán a következő háromismeretlenes egyenletrendszereket!

$$\begin{array}{l} \text{a.) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 3x - 4y + 4z = 4 \end{array} \right\} \\ \hline \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 3x - 4y + 4z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 3 - x - y \\ \hline \left. \begin{array}{l} 2x + 3y - (3 - x - y) = 1 \\ 3x - 4y + 4(3 - x - y) = 4 \end{array} \right\} \\ \hline \left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 3 + x + y = 1 \\ 3x - 4y + 12 - 4x - 4y = 4 \end{array} \right\} \\ \hline \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 4 \\ -x - 8y = -8 \end{array} \right\} \cdot 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x + 8y = 8 \\ -x - 8y = -8 \end{array} \right\} I. + II. \\ \hline 5x = 0 \\ x = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -8y = -8 \\ y = 1 \\ z = 3 - 0 - 1 = 2 \\ \text{b.) } \left. \begin{array}{l} 3x + y + 6z = 8 \\ 2x + 2y + 5z = 11 \\ x + y - 3z = 11 \end{array} \right\} \\ \hline \left. \begin{array}{l} 3x + y + 6z = 8 \\ 2x + 2y + 5z = 11 \\ x + y - 3z = 11 \end{array} \right\} y = 8 - 3x - 6z \\ \hline \left. \begin{array}{l} 2x + 2(8 - 3x - 6z) + 5z = 11 \\ x + (8 - 3x - 6z) - 3z = 11 \end{array} \right\} \\ \hline \left. \begin{array}{l} 2x + 16 - 6x - 12z + 5z = 11 \\ x + 8 - 3x - 6z - 3z = 11 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} -4x - 7z = -5 \\ -2x - 9z = 3 \end{array} \right\} / \cdot (-2) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -4x - 7z = -5 \\ 4x + 18z = -6 \end{array} \right\} I. + II.$$

$$11z = -11$$

$$z = -1$$

$$\begin{aligned} -2x - 9(-1) &= 3 \\ -2x &= -5 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$y = 8 - 3\left(\frac{5}{2}\right) - 6(-1) = \frac{133}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 4y + z = 3 \\ c.) \quad 8x - 2y + 4z = 7 \\ -4x + y - 2z = -14 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 3 - 2x + 4y$$

$$\left. \begin{array}{l} 8x - 2y + 4(3 - 2x + 4y) = 7 \\ -4x + y - 2(3 - 2x + 4y) = -14 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 8x - 2y + 12 - 8x + 16y = 7 \\ -4x + y - 6 + 4x - 8y = -14 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 14y = -5 \\ -7y = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -\frac{5}{14} \\ y = \frac{8}{7} \end{array} \text{Ellentmondás, nincs megoldás}$$

XXXIX. Megoldás (XIII. fejezet)

XIII.1. Feladat: Döntse el, hogy az alább felsoroltak közül melyik mondat a tagadása a következő állításnak! Minden érettségi feladat egyszerű.

- a.) Minden érettségi feladat bonyolult.
- b.) Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű.**
- c.) Sok érettségi feladat bonyolult.
- d.) Van olyan érettségi feladat, ami egyszerű

XIII.2. Feladat: Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja: Minden háztartásban van televízió. Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!

- a.) Semelyik háztartásban nincs televízió.
- b.) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
- c.) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.**
- d.) Nem minden háztartásban van televízió.**

XIII.3. Feladat: Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált.

Van olyan eltérés, amit Enikő nem talált meg.

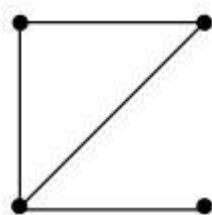
VAGY:

Enikő nem minden eltérést talált meg.

VAGY:

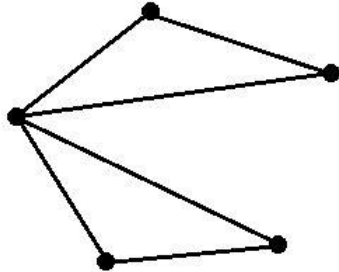
Enikő nem találta meg az összes eltérést.

XIII.4. Feladat: Egy gráfban 4 csúcs van. Az egyes csúcsok fokszáma 3;2;2;1. Hány éle van a gráfnak?

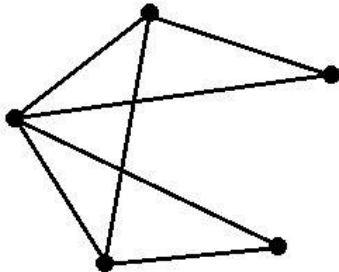


Azaz a gráfnak 5 éle van.

XIII.5. Feladat: Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek!

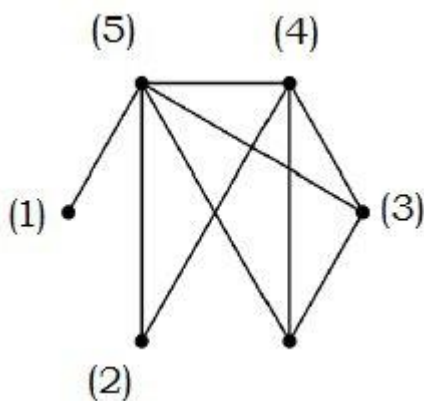


XIII.6. Feladat: Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2.



XIII.7. Feladat: Egy hatfős társaságban mindenkit megkérdeztek, hány ismerőse van a többiek között (az ismertségek kölcsönösek). Az első öt megkérdezett személy válasza: 5,4,3,2,1.

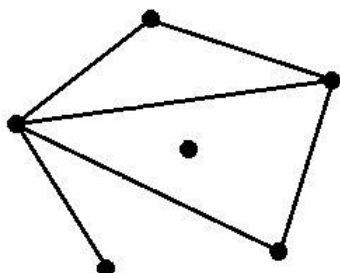
a.) Ábrázolja gráffal a hatfős társaság ismertségi viszonyait!



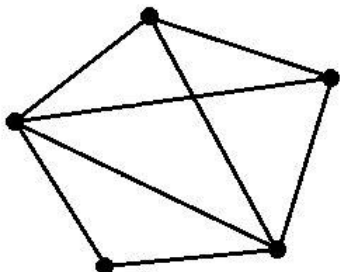
b.) Hány ismerőse van a hatodik személynek a társaságban?

Az ábráról leolvasható, hogy a 6. embernek 3 ismerőse van.

XIII.8. Feladat: Rajzoljon olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma: 0; 1; 2; 2; 3; 4.

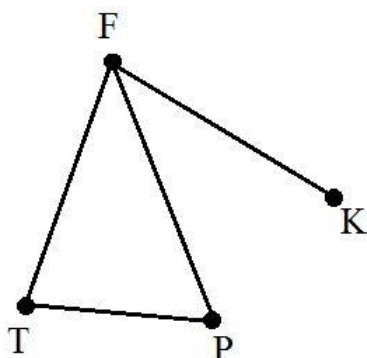


XIII.9. Feladat: Egy 5 fős társaságban 8 kézfogás történt. Adj meg egy olyan gráfot, amely ezt szemlélteti! (A gráf csúcsai legyenek a társaság tagjai, élei pedig a kézfogásoknak feleljenek meg.)

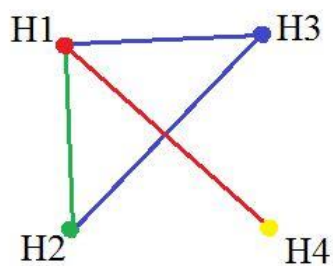


XIII.10. Feladat: Ábrázoljuk gráfokkal az alábbiakat!

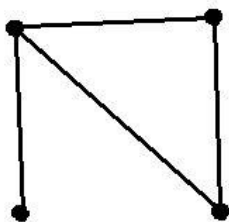
a.) Egy Bergengóc falucskában a Fótérről a Tóhoz, a Parkba és a Kilátóhoz vezet út. Ezen kívül még a Tó és a Park között tapostak ki járást a helyiek.



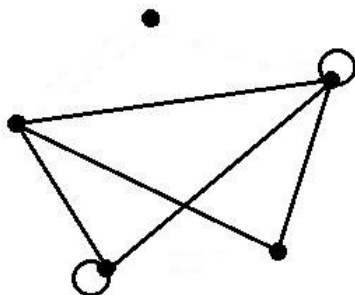
b.) Egy tengerészeti hadgyakorlaton négy hajó (H1, H2, H3, H4) vett részt és rendre piros, zöld, kék és sárga festékpatronnal lőtték egymást. A gyakorlat végén H1 oldalán zöld és kék, H2 oldalán kék, H4 oldalán piros foltok díszeltek, azonban H3 tiszta volt.



c.) Négy ember találkozásán a következő kézfogások történtek. Egyvalaki mindenkivel lekezelt, két másik illető pedig egymással.



XIII.11. Feladat: Rajzolj olyan ötpontú gráfot, melyben minden pont fokszáma különböző!



Felhasznált irodalom

- [1] http://www.unimiskolc.hu/evml/database/downloads/diszkret/segedletek/polinomok_es_egyenletek.pdf
- [2] <http://www.studiumgenerale.hu/hu-Hu/szekcio/matematika>
- [3] https://users.itk.ppke.hu/itk_dekani/files/matematika/pdfs/14.pdf
- [4] beee.uw.hu/suli/matek/letoltes.php?file=Trigonometria.doc
- [5] www.comgim.sk/wp-content/uploads/2009/09/17-A-binomiális-tétel.doc
- [6] <https://sites.google.com/site/koteteltanulas/home/matek/algebra/masodfokufueggvények-egyenletek-egyenlotlensegek-szoevegesfeladatok/alkalmazasok/masodfokura-vissza>
- [7] http://wm-iskola.hu/sites/all/files/prints/wm_j1j_matek_10_grafok.pdf
- [8] Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9.-10., Mozaik Kiadó, Szeged, 2009
- [9] Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11.-12., Mozaik Kiadó, Szeged, 2011
- [10] Gimes Györgyné: Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007
- [11] Galambos Gábor, Árgilán Viktor: Matematika I., Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kar, Szeged, 2011
(https://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop412A/2011-0013_galambos_matematika_i/1halmazok.html)
- [12] Galambos Gábor, Árgilán Viktor: Matematika II., Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kar, Szeged, 2011
(https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0013_galambos_matematika_ii/index.html)