Algoritmikus geometria

Fodor Ferenc

2012. november 8.

Előadás a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0012 projekt keretében
„Az SZTE Kutatóegyetemi Kiválósági Központ tudásbázisának kiszélesítése és hosszú távú szakmai fenntarthatóságának megalapozása a kiváló tudományos utánpótlás biztosításával"

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638
MAGYARORSZÁG MEGÚJUL
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.
ÚJ SZÉCHENYI TERV
informatika műhely

Az előadás során a Dirichlet-Voronoi cellákkal megoldott problémákkal foglalkoztunk. Mi is a DV cella-felbontás?

- Adott $\underline{p} = \{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq E^d$ pont a d dimenziós Euklidészi térben
- A p_i pontot tartalmazó DV cella azon pontok halmaza a térben, ami a p_i ponthoz közelebb van, mint bármelyik másikhoz, azaz

$$DV(p_i) = \left\{ x \in E^d \mid |x - p_i| \leqq |x - p_j|,\ \forall i \neq j \right\}$$

A DV felbontás 2 pontra két félsíkot ad, általános esetben poliédert, ami véges sok zárt féltér metszete.

Poliéder véges sok zárt féltér metszete

Politóp véges sok pont konvex burka

A korlátos poliéderek a fenti értelemben vett politópokkal egyeznek meg.

A Voronoi csúcsok (a Voronoi cellák találkozási pontjait) az adott alakzatba beírható maximális gömbök középpontját adják meg. Nem szerencsés azonban olyan Voronoi csúcs, ahol 3 (d dimenzióban $d+1$) cellánál több találkozik, ezért a kezdeti $\underline{p}$ halmazra ki szokták kötni, hogy szuperáltalános ponthalmaz.

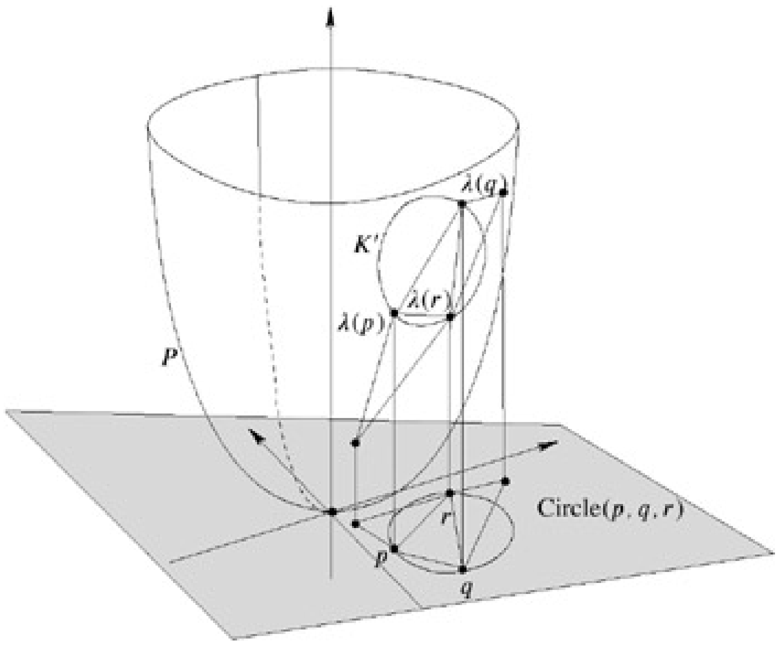
Szuperáltalános az a ponthalmaz, melyben bármely négy csúcs nem esik egy körre / gömbre.

Delaunay (Delone) cellafelbontás: egy adott ponthalmaz Delaunay-háromszögelése egy olyan egyenes szakaszokból álló vonalhálózat, aminek sokszögtartományai köré írt gömbjei csak határukon tartalmazzák a ponthalmaz pontjait

Tétel 1 *Szuperáltalános ponthalmaz esetén a Delaunay felbontás összefüggő síkgráfot ad, a korlátos részek pedig háromszögeket alkotnak.*

Delaunay felbontásban annyi korlátos tartomány lesz, ahány DV csúcs van $\Rightarrow$ a struktúra bonyolultsága nem nagy!

A háromszögelés elkészítésének egy módja, hogy kilépünk eggyel magasabb dimenzióba. Jelölje $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a megadott ponthalmaz pontjait. Felvetítjük ezeket a egyenletű $x^2 + y^2 = z$ paraboloidra, és meghatázzuk az így kapott $(x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2)$ pontok konvex burkát. Ha a felfele mutató lapokat eldobjuk és visszavetítjük a síkra, megkapjuk a pontok Delaunay-háromszögelését



A fenti módszer $\mathcal{O}(n \log n)$ lépésben megadja a Voronoi-cellákat, hiszen a konvex burok meghatározható ennyi lépésben, a többi művelet közel lineáris időigényű.

A Delaunay-triangularizáció számos gyakorlati problémában használható

- gyorsan megadható vele a legközelebbi szomszéd
- az utazóügynök problémát (TSP) szuboptimálisan megoldja, legfeljebb 2xSUBOPT

Egységgömb pakolás a térben

Sűrű gömbfelosztás esetén (ha már nem lehet több gömböt lerakni), a középpontok által meghatározott DV cellák mind politópok.

Tétel 2 (Dodekahedrális sejtés (már tétel)) *3D-s gömbelehlyezésben a középpontok Voronoi celláinak térfogata $\geq$ egységsugarú gömb köré írt szabályos dodekaéder térfogata.*

1998-ban Thomas C. Hales és MacLaughlin megoldották Fejes Tóth László fenti sejtését. Leredukálták a problémát lineáris egyenlőtlenségrendszerekre, amiről meg kellett mutatni, hogy nincs megoldásuk. Intervallum módszert alkalmazva számítógéppel megoldották.

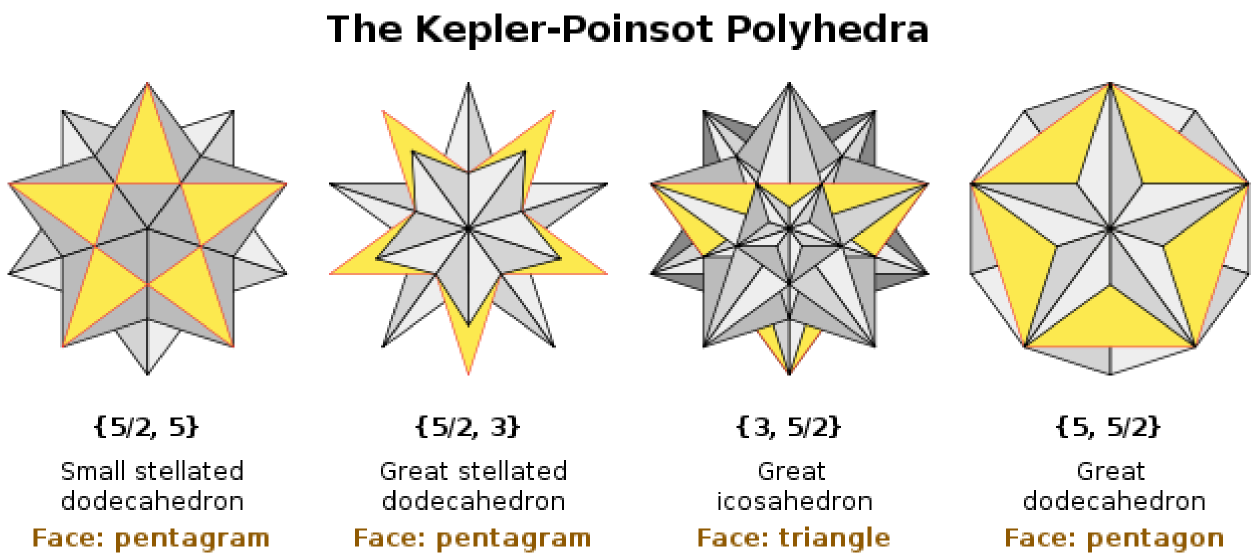
Kepler sejtése

1611 hatszögalakú, hópihék geometriájáról írt

Térkitöltések tulajdonságai, lapcentrált kockarács (fcc) mentén.
Hézagmentes kitöltést többféleképp megadhatunk

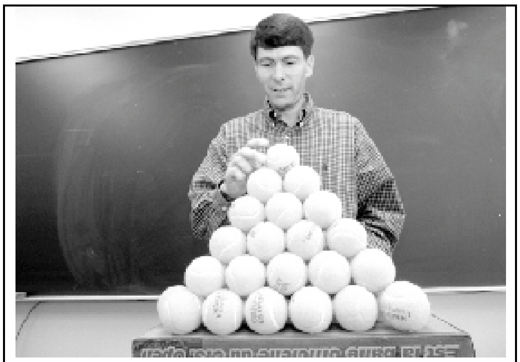
1. Vegyünk egy kockát, és a csúcsait illetve a lapközéppontokat. Ezek határozzák meg a térbeli pontokat, amikre az egységgömböket illesztjük
2. vegyük a rombikus dodekaédert, ez is kitölti

Van még más térkitöltő test is, a Kepler-Poinsot testek (csillagpoliéderek) is ilyenek:



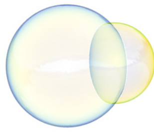
1998-ban Hales és Ferguson igazolták a Kepler sejtést. Munkájukat egy cikksorozatban jelentették meg, ami 282 oldalt tett ki. A cikksorozatban redukciót vezettek be és az eredeti problémát néhány ezer egyenletrendszer megoldhatatlanságára vezették vissza.

Az ennek alapján készült algoritmus implementációját kb másfél évig futtatták. 99%-ban helyesnek tartják, de ténylegesen még senki nem ellenőrizte végig a teljes bizonyítást (túl bonyolult).



Thomas Hales, associate professor of mathematics, demonstrates his solution to the Kepler conjecture, a problem that mathematicians have been wrestling with since 1611. Tennis balls courtesy of the Varsity Tennis Club. Photo by Bob Kalmbach

Dupla-buborék sejtés



Adott V_1, V_2 térfogat, keressük a legkisebb felület, ami egy V_1 és V_2 térfogatú testet ad.

2000-ben oldották meg számítógépek segítségével, de később analitikusan is igazolták.

QED projekt

Célja: matematikai álítások bizonyítását algoritmikusan ellenőrizni konzisztencia-vizsgálattal
Flyspeck alprojekt célja a Kepler-sejtés bizonyításának ellenőrzése.

Források és kapcsolódó linkek

- Paraboloid `http://flylib.com/books/en/2.587.1.38/1/`
- A Kepler-Poinsot testek
  `http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler%E2%80%93Poinsot_polyhedron`
- `http://www.ur.umich.edu/9899/Sep16_98/hales.htm`
- `http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_conjecture`
- PostGazette
  `http://www.post-gazette.com/stories/news/science/pitt-math-professor-took-best-shot-at-c`
- `http://www-bcf.usc.edu/~breichar`
- QED project `http://mizar.org/qed/`
- Interjú Fodor Ferenccel
  `http://www.u-szeged.hu/szegedi-egyetem/katedra/matematika-diszkret`