Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

# Matematikai alapismeretek

## Egyetemi példatár

*Készítette: Dr. Máder Attila és Bogya Norbert*

2020. augusztus 11.

SZÉCHENYI 2020

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Lektorálta: Dr. Fülöp Vanda és Dr. Kosztolányi József

Jelen tananyag a Szegedi Tudományegyetemen készült az Európai Unió támogatásával. Projekt azonosító: EFOP-3.4.3-16-2016-00014.

# Tartalomjegyzék

# Előszó

Ez a példatár a Szegedi Tudományegyetem elsőéves matematika alapszakos hallgatóinak tartott *Matematikai alapismeretek* című kurzushoz készült. A kurzus és jelen feladatgyűjtemény célja, hogy a sikeres matematikai tanulmányok folytatásához elengedhetetlenül szükséges középiskolai ismereteket felelevenítse; az esetleges hiányokat pótolja. A feladatsorokat ezzel a céllal, a teljesség igényét szem előtt tartva állítottuk össze. Ennek megfelelően a feladatgyűjtemény használata a középiskolai középszintű érettségi követelményekben foglaltakon kívül nincs szükség egyéb előzetes ismeretre.

A példatár tizenhárom fejezetre osztva lefedi a középiskolás tananyag továbbiakban szükséges részét. A bőséges feladatanyag megoldásához szükséges eszközök a lehető legkevesebb helyen lépnek túl a középszintű matematika érettségi követelményrendszerében foglaltakon; ott ahol szükséges, elméleti kiegészítéseket tettünk. A valamilyen szempont alapján nehezebbnek ítélt feladatokat csillaggal jelöltük. A jelölés szubjektív, általában a közvetlenül nem elvárható ötletet, szokatlanabb megoldási módot, összetettebb gondolatokat igénylő feladatokat jelöltük így. Általában jellemző, hogy az azonos kérdéskörhöz tartozó feladatok nehezednek a fejezeten belül, s ahol több részfeladat van, ott a részfeladatok is nehezednek egy feladaton belül is (az utolsók lehetnének csillagosak, egy nem csillagos feladatban is); így ha valaki könnyűnek érez egy-egy részfeladatot, érdemes ugyanannak a pontnak egy későbbi eleméhez ugorni. S ugyanígy fordítva is, ha elakadunk egy-egy feladat, vagy részfeladat megoldása kapcsán, lépjünk néhány feladattal visszább, s találni fogunk az adott problémára vonatkozó egyszerűbb feladatot is, melynek sikeres megoldása segít problémánk megoldásában. A legtöbb esetben csak végeredményt közlünk, részletes megoldások csak néhány helyen állnak. Ennek oka, hogy az órák látogatását, az ott elhangzó részletes megoldások közös megalkotását, az órai aktív részvételt, szükség esetén az esetleges konzultációkat tartjuk a tananyaghoz kapcsolódó tudásszerzés leghatékonyabb módjának. Az olvasó azonban részletes megoldásokat (pontozással együtt) is talál, a kidolgozott zh feladatok formájában.

A feladatanyag összeállítása során nagy figyelemmel használtuk a kurzus tartása során korábban szerzett tapasztalatainkat, s azokat a területeket domborítottuk ki leginkább, amely a korábbi tapasztalatok szerint a legnagyobb problémát okozzák. A feladatok száma, nehézsége, az egyszerűbbtől a nehezebb felé haladás lépcsőinek száma, a megoldások részletezettségi foka, mind ezen tapasztalatokon nyugszik. A feladatanyag bőségessége lehetővé teszi az órai feldolgozást, az órai differenciálást, a házi feladatok kitűzését, az önálló otthoni munkát, a zárthelyi dolgozatokra való eredményes felkészülést; mentesítve a hallgatókat és az oktatókat a kapcsolódó szinte végtelen mennyiségű szakirodalomban való böngészés, és a célnak leginkább megfelelő feladatok megtalálásának időrabló nehézségétől.

Biztosak vagyunk abban, hogy a gyakorlaton való aktív részvétel és ezen jegyzet feladatainak megoldása során, jelen feladatgyűjtemény célmeghatározásának megfelelően, a hallgató megismeri és megtanulja az egyes feladattípusokat, megoldási módszereket, matematikai jellegű tanulmányai folytatásához szükséges (alap)ismereteit eszközszintűen birtokolni fogja, azokat akár összetett problémák megoldásában is alkotó jelleggel használni is tudja. Képessé válik matematikai problémák azonosítására, a megoldásukhoz szükséges eszközök felismerésére, és a szükséges eszközök helyes és magabiztos használatára, a kapott eredmények eredeti szituációba történő visszahelyezésére és értelmezésére. Kapcsolódó kompetenciái és képességei oly mértékben fejlődnek, mely lehetővé teszi az egyetemi tanulmányai sikeres elvégzését.

*A szerzők*

# Tárgyleírás

| |
|---|
| **A tantárgy neve:** Matematikai alapismeretek |
| **Kreditértéke:** 5 |
| **A tanóra típusa:** gyakorlat |
| **Óraszáma:** 70 |
| **A tantárgy tantervi helye:** 1. félév |
| **Előtanulmányi feltétel:** nincs |
| **A tantárgy képzési karaktere:** Az ismeretek átadása elsősorban a hallgatók aktív részvételére épül, az oktató hathatós, alkotó jellegű irányításával, tantermi gyakorlat formájában. |
| **A számonkérés módja:** gyakorlati jegy. A félév során három alkalommal a hallgató zárthelyi dolgozat formájában számot ad az előző gyakorlatokon elsajátított témakörökben való jártasságáról. |
| **Értékelés:** A gyakorlaton a hallgatók összesen 300 pontot szerezhetnek. A jegyek a szerzett pontszám függvényében: *0-150 elégtelen, 151-175 elégséges, 176-200 közepes, 201-240 jó, 241-300 jeles.* |
| **Az ismeretek ellenőrzésében alkalmazandó további sajátos módok:** A hallgatók a félév elején egy kiugró dolgozatot írhatnak, melyben a félév során elsajátítandó tananyaghoz kapcsolódó összetett problémákat kell megoldaniuk. Ezen dolgozaton nyújtott legalább 80%-os teljesítmény esetén a kurzust félév végi jeles (5) értékelés mellett nem kell tovább látogatniuk. A sikeres kiugró dolgozatot író hallgatókat egy másik, a tehetséggondozást inkább szolgáló kurzusba irányítjuk.<br><br>A kurzust ténylegesen elvégző hallgatóknak esetleges igény esetén egyetlen zh anyagából javító dolgozatot lehet írni, ekkor a javított dolgozat helyett, a javító eredménye számít a félév végi értékelés során.<br><br>Aki elégtelen minősítést szerez, a félév végén, a vizsgaidőszak első hetében, egyetlen alkalommal a félév teljes anyagából egy dolgozatot írhat. Itt legalább 60%-os teljesítménnyel elégséges osztályzat szerezhető. |

**Ismeretanyag, tematika**

1. Halmazok, a halmazalgebra műveletei. Véges halmaz részhalmazainak száma. Logikai szita. Végtelen számosságok.
2. A valós számkör felépítése, műveletek, műveleti tulajdonságok. Racionális számok, irracionális számok.
3. Számelmélet alaptétele, prímtényezős felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös. Oszthatóság fogalma.
4. Elemi algebrai azonosságok. Binomiális tétel. Szorzattá alakítás. Műveletek polinomokkal és algebrai törtekkel. A racionális kitevős hatvány fogalma, permanencia elv, azonosságok. Az $n$-edik gyök fogalma, azonosságok. A logaritmus fogalma, azonosságai.
5. Elsőfokú, aszolútértékes, másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek algebrai és grafikus megoldása. Szélsőérték-feladatok. Magasabb fokú egyenletek. Gyökös, exponenciális, logaritmusos és trigonometrikus egyenletek és egyenlőtlenségek. Egyenletrendszerek.
6. A függvény fogalma, elemi függvények ábrázolása, jellemzése. Műveletek függvényekkel. Függvénytranszformációk. Alkalmazás.
7. Számsorozat fogalma, számtani sorozat, mértani sorozat, rekurzív sorozatok. Kamatos kamatra, törlesztőrészletre, és gyűjtőjáradékra és százalékszámításra vonatkozó feladatok.
8. Az elemi geometria fontosabb fogalmai, tételei és ezek alkalmazásai. Egyenes szakaszokkal határolt síkidomok, kör és körcikk területe, kerülete. A szög ívmértéke. Síkbeli vektorok. Koordinátageometria.
9. Összeszámlálási alapfeladatok. Egyszerű gráfok. Eseményalgebra. A valószínűség fogalma. Klasszikus valószínűségi mező. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel; binomiális és hipergeometriai eloszlás. Feltételes valószínűség. Geometriai modell.
10. Az ítéletkalkulus alapjai, logikai műveletek és alkalmazásuk. Szükséges feltétel, elegendő feltétel. Állítások tagadása. Tétel megfordítása. Példák különböző bizonyítási módszerekre.

**Kötelező irodalom:**

- Bogya Norbert, Máder Attila: Matematikai alapismeretek, elektronikus példatár

**Ajánlott irodalom:**

- Gerőcs L., Orosz Gy., Paróczay J., Szászné Simon J.: Matematika – Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006, Budapest
- Gerőcs L., Orosz Gy., Paróczay J., Szászné Simon J.: Matematika – Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006, Budapest

- Czapáry Endre, Czapáry Endréné, Csete Lajos, Hegyi Györgyné, Iványiné Harró Ágota, Morvai Éva, Reiman István: Matematika – Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006, Budapest
- Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 9., 10., 11., 12., Mozaik Kiadó, 2010, Szeged

**A szakmai kompetenciák, kompetencia-elemek, amelyek kialakításához a tantárgy jellemzően, érdemben hozzájárul:**

a) Tudás
- Ismeri a matematikai tanulmányok folytatásához szükséges fogalmakat.
- Megérti a problémákat, képes azok absztrakt tárgyalására.
- Ismeri az elsajátítandó elméleti és gyakorlati matematikai módszereket.
- Birtokolja a kapcsolódó problémák megoldásához szükséges eszközöket.
- Felismeri az egyes problémák megoldásához szükséges eszközöket, módszereket.

b) Képesség
- Képes a matematika tudományterületén a fogalmak, elméletek és tények közötti összefüggések megteremtésére, közvetítésére.
- Képes az elsajátított elméleti ismeretek gyakorlati alkalmazására.
- Képes a matematika témakörében szakszerűen kifejezni magát.
- Képes a megszerzett új ismereteit korábbi ismeretei hálójába építeni.
- Képes az önálló, alkotó jellegű problémamegoldásra.

c) Attitűd
- Törekszik az absztrakt fogalmak pontos használatára.
- Érzékennyé válik a matematikai problémák felismerésére, felvetésére.
- Szükségesnek érzi ismeretei további bővítését.
- Kritikusan szemléli az elsajátítandó elméleti és gyakorlati módszereket.

d) Autonómia és felelősség
- Önállóan kiválasztja egy feladat megoldásához tartozó megfelelő módszereket.
- Képes feladatok megalkotására, megoldásaik elemzésére, hibák önálló javítására.
- Önállóan megteremti a matematika tudományterületén a fogalmak, elméletek és tények közötti összefüggéseket.
- Kreatívan alkalmazza az elsajátított ismereteket további tanulmányai során.

| A tantárggyal kialakítandó konkrét tanulási eredmények: | | | |
|---|---|---|---|
| **Tudás** | **Képesség** | **Attitűd** | **Autonómia-felelősség** |
| Ismeri a halmazműveleteket. Tisztában van a logikai szita alkalmazási lehetőségeivel. Ismeri a véges és végtelen halmaz fogalmát. | Igazol egyszerűbb halmazelméleti azonosságokat. Szemlélteti halmazműveletek eredményét. Halmazt részhalmazokra bont, illetve részhalmazok segítségével előállít. | Belátja, hogy alaphalmaz nélkül nincs komplementer. Hajlandó egyszerre több feltétel figyelembevételére. | Önállóan felismeri egy adott halmaz számosságát. Önállóan kiválasztja a halmazelméleti feladathoz tartozó megfelelő megoldási módszert. |
| Felismeri a racionális és irracionális számokat. Ismeri a racionális számok különböző alakjait. Azonosítja a különböző alakban felírt racionális számokat. | Különbséget tesz racionális és irracionális szám között. Meghatározza racionális számok redukált tört alakját. | Elfogadja a $0{,}\dot{9} = 1$ jellegű összefüggéseket. | |
| Ismeri a prím és az összetett számok közötti különbséget. Felidézi az oszthatóság tulajdonságait. | Meghatározza a legnagyobb közös osztót és a legkisebb közös többszöröst. | Szem előtt tartja, hogy a prímhatványtényezős alak lényegében egyértelmű. | Önállóan alkalmazza a számelmélet alaptételét. Önállóan old meg oszthatósággal kapcsolatos feladatokat. |
| Felsorolja a szorzattá alakítás különböző metódusait. Ismeri a nevezetes azonosságokat. Tudja a hatványozás, gyökvonás, logaritmus azonosságait. | Bizonyítja különböző alakban adott összetett algebrai kifejezések egyenlőségét. Kiszámítja algebrai kifejezések helyettesítési értékét. | Törekszik az algebrai kifejezések különböző ekvivalens alakjainak a megismerésére. | Önállóan műveleteket végez algebrai törtkifejezésekkel. |
| Ismeri a egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek különböző megoldási módszereit. Felismeri az egyes egyenlettípusok egymással való kapcsolatát. | Használja a másodfokú egyenlet megoldóképletét és a Viète-formulákat. Részletesen kifejti az egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldását. | Figyelembe veszi az egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer típusát a megoldási módszerek megválasztása során. | Önállóan megold első-, illetve másodfokú, gyökös, exponenciális, logaritmusos, trigonometrikus egyenletre vezető problémákat. |

| **Tudás** | **Képesség** | **Attitűd** | **Autonómia-felelősség** |
|---|---|---|---|
| Ismeri az elemi függvények grafikonjait és tulajdonságait. Ismeri az inverzfüggvény fogalmát. Tudja a függvény és inverze grafikonja közötti kapcsolatot. | Kiszámolja függvények helyettesítési értékét. Műveleteket végez függvényekkel. Meghatározza függvények inverzét. | Törekszik a függvényszemlélet elsajátítására. | Önállóan felismeri az elemi függvényeket grafikonjukról. Önállóan képes elemi függvényekből összetett függvények képzésére. |
| Ismeri a sorozat fogalmát. Felidézi a sorozat és a függvény fogalmának kapcsolatát. Tisztában van az egyszerűbb kamatozással, törlesztéssel kapcsolatos problémákkal. | Meghatározza explicit alakban adott sorozatok egy, vagy több rekurzív alakját. Megold egyszerűbb rekurziókat. Kiszámol több sorozattulajdonság vegyes alkalmazását igénylő feladatot. | | Önállóan alkalmazza ismereteit más tudományterületekhez kapcsolódó feladatok megoldásában. Önállóan felismeri a feladathoz tartozó megfelelő sorozattípust. |
| Felsorolja az elemi szintetikus geometria legfontosabb tételeit. Ismeri a háromszög nevezetes vonalait, köreit. Ismeri a szögfüggvények fogalmát. Ismeri a kapcsolatot az egyenes irányjellemzői között. | Meghatározza háromszögek hiányzó adatait. Bizonyítja ponthalmazok kölcsönös helyzetére vonatkozó állításait. Bemutatja a hasonló alakzatokat. | Törekszik a megfelelő modellalkotásra. | Kreatívan nyúl a különböző geometriai szemléletek nyújtotta lehetőségekhez. |
| Felsorolja az összeszámlálási módszereket. Ismeri a klasszikus valószínűségi mezőt. Tisztában van a feltételes valószínűség fogalmával. | Használja az adott valószínűségi modellt. Különbséget tesz nulla valószínűségű és lehetetlen esemény között. Bemutatja a visszatevéses, illetve visszatevés nélküli modellt. | | Önállóan old meg összetett összeszámlálási problémákat. Önállóan választ klasszikus és geometriai modell között. |

| **Tudás** | **Képesség** | **Attitűd** | **Autonómia-felelősség** |
|---|---|---|---|
| Felidézi a logikai műveleteket és azok tulajdonságait. Ismer bizonyítási módszereket. | Részletesen kifejti egy állítás tagadását. Különbséget tesz alapfogalom, axióma, definíció, sejtés, tétel és bizonyítás között. | Igényli a precíz bizonyítást. | Önállóan választ bizonyítási módszert. |
| **Tantárgy felelőse:** Dr. Kosztolányi József, egyetemi docens | | | |
| **Tantárgy oktatásába bevont oktatók:**<br>Dr. Máder Attila, tudományos munkatárs | | | |

# Kiugró dolgozat

A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos! Válaszait minden esetben részletesen indokolja, indoklás nélküli megoldásra nem jár pont. A „kiugráshoz” legalább 80%-os teljesítmény szükséges. A dolgozat megírásához 100 perc áll rendelkezésre.

# Matematikai alapismeretek — Kiugró dolgozat

Név: ______________________________

| Feladat: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max pont: | 15 | 15 | 20 | 20 | 15 | 15 | 100 |
| Elért pont: | | | | | | | |

1. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán. [15]

$$2x + 1 = \log_2(9 \cdot 2^x - 4)$$

2. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. [15]

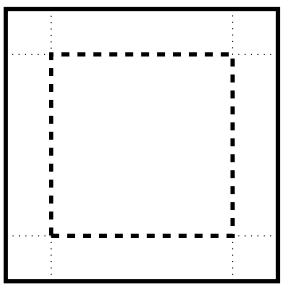
$$\cos(x - \pi) - \sqrt{3} \cdot \sin(\pi - x) < \sqrt{2}$$

3. Az $f(x) = \sqrt{-x^2 + 16x - 39}$ függvény a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán van értelmezve.
   (a) Határozza meg az $f$ függvény értelmezési tartományát. [6]
   (b) Az értelmezési tartomány egész számai közül egyet véletlenszerűen kiválasztva mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám prím, vagy négyzetszám? [4]
   (c) Határozza meg az $\dfrac{1}{f(x)}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény érékkészletét. [10]

4. A `PARALELOGRAMMA` szó betűinek hány olyan sorrendje van
   (a) amely nem `P`-vel kezdődik? [4]
   (b) amelyben a négy `A` nem áll közvetlenül egymás mellett? [6]
   (c) amelyre egyszerre teljesül az (a) és (b) feltétel? [6]
   (d) amelyben a mássalhangzók közvetlenül egymás mellett állnak? [4]

5. Az $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ egyenletű körrel koncentrikus, az origót a belsejében tartalmazó kör a koordináta tengelyeket olyan pontokban metszi, amelyek által kifeszített négyszög területe $6 \cdot \sqrt{6}$ területegység. Határozzuk meg a kör egyenletét. [15]

6. Egy gyárban a gyártási folyamat során egy $a$ oldalhosszúságú négyzet alakú fémlemez minden sarkából eltávolítanak egy-egy, egymással egybevágó négyzet alakú részt, az ábra szerint. Ezek után a szaggatott vonalak mentén a lapokat felhajtják, s élük mentén összeforrasztják őket, így egy felül nyitott, téglatest alakú dobozt képezve. Mekkora az $a$ értéke, ha az ezen eljárással készíthető maximális térfogatú doboz térfogata 1024 $\text{cm}^3$? Mekkora az eltávolított részek összterülete? [15]



# Matematikai alapismeretek — Kiugró dolgozat

Név: ______________________________

| Feladat: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max pont: | 15 | 15 | 20 | 20 | 15 | 15 | 100 |
| Elért pont: | | | | | | | |

1. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán. [15]

$$2x + 1 = \log_2(9 \cdot 2^x - 4)$$

**Megoldás.** Az egyenletben szereplő kifejezések értelmezési tartományát nem vizsgáljuk, az adódó megoldásokat a feladatmegoldás végén visszahelyettesítéssel ellenőrizzük.

- Felírjuk az egyenlet bal oldalát kettes alapú logaritmus segítségével, így a következő egyenlethez jutunk. 2 pont

$$\log_2(2^{2x+1}) = \log_2(9 \cdot 2^x - 4)$$

- Mivel a kettes alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton (nő), 1 pont
- ezért a megoldandó egyenlet ekvivalens a

$$2^{2x+1} = 9 \cdot 2^x - 4$$

  egyenlettel. 2 pont
- Mivel $2^{2x+1} = 2^{2x} \cdot 2 = 2 \cdot (2^x)^2$, 2 pont
- ezért az $2^x = y$ helyettesítéssel 1 pont
- a $2y^2 = 9 \cdot y - 4$ másodfokú egyenlethez jutunk. 1 pont
- Ennek megoldásai $y_1 = 4$ és $y_2 = 0{,}5$. 2 pont
- Ekkor $y_1 = 4 = 2^2$ és $y_2 = 0{,}5 = 2^{-1}$. 1 pont
- Innen az exponenciális függvény szigorú monoton tulajdonsága miatt $x_1 = 2;\ x_2 = -1$. 2 pont
- Ellenőrzéssel mindkét érték megfelelőnek adódik. 1 pont

2. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. [15]

$$\cos(x - \pi) - \sqrt{3} \cdot \sin(\pi - x) < \sqrt{2}$$

**Megoldás.**

- Kihasználva, hogy a szinuszfüggvény páratlan, a $\sin(\pi - x) = -\sin(x - \pi)$ átalakítással élve egyenlőtlenségünk 2 pont
- $\cos(x - \pi) + \sqrt{3} \cdot \sin(x - \pi) < \sqrt{2}$ alakba írható. 1 pont

# Matematikai alapismeretek — Kiugró dolgozat

- Az egyenlőtlenséget 2-vel osztva az

$$\frac{1}{2}\cos(x-\pi)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin(x-\pi)<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. 2 pont

- Ekkor az $\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ észrevétellel 2 pont
- és a $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ addíciós tétellel élve, 1 pont
- egyenlőtlenségünk a

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x-\pi\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

alakban írható. 2 pont

- Így megoldandó a

$$\sin\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

egyenlőtlenség. 1 pont

- Ennek megoldáshalmaza, például az egységkör segítségével egyszerűen meghatározható, például a következő alakban

$$2k\pi+\frac{3\pi}{4}<x-\frac{5\pi}{6}<2k\pi+\frac{9\pi}{4},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

2 pont

- Ezt átrendezve

$$2k\pi+\frac{19\pi}{12}<x<2k\pi+\frac{37\pi}{12},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

adódik. 2 pont

3. Az $f(x)=\sqrt{-x^2+16x-39}$ függvény a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán van értelmezve.
   (a) Határozza meg az $f$ függvény értelmezési tartományát. [6]
   (b) Az értelmezési tartomány egész számai közül egyet véletlenszerűen kiválasztva mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám prím, vagy négyzetszám? [4]
   (c) Határozza meg az $\frac{1}{f(x)}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény érékkészletét. [10]

**Megoldás.**

(a)
- Az értelmezési tartomány a $-x^2+16x-39\geq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza. 1 pont
- A $-x^2+16x-39=0$ egyenlet megoldásai $x_1=3$ és $x_2=13$. 2 pont
- Innen a másodfokú kifejezéshez tartozó parabolát felrajzolva a derékszögű koordináta rendszerben adódik, hogy 1 pont
- az értelmezési tartomány $3\leq x\leq 13$. 2 pont

(b)
- Az értelmezési tartomány 11 egész elemet tartalmaz. 1 pont
- Ezek közül a prím, illetve négyzetszámok: 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13. 1 pont
- A keresett valószínűség a kedvező esetek és az összes eset számának hányadosaként 2 pont

$$p=\frac{7}{11}.$$

(c)
- A $-x^2+16x-39$ kifejezést teljes négyzetté kiegészítve $-x^2+16x-39=-(x-8)^2+25$ adódik. 4 pont
- Innen az értékkészletre vonatkozóan a következő megállapítások tehetők:
  - ⋆ $-x^2+16x-39=-(x-8)^2+25\leq 25$ 2 pont
  - ⋆ $0\leq\sqrt{-x^2+16x-39}\leq 5$ 2 pont
  - ⋆ $\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+16x-39}}\geq\dfrac{1}{5}$. 2 pont

4. A `PARALELOGRAMMA` szó betűinek hány olyan sorrendje van
   (a) amely nem `P`-vel kezdődik? [4]
   (b) amelyben a négy `A` nem áll közvetlenül egymás mellett? [6]
   (c) amelyre egyszerre teljesül az (a) és (b) feltétel? [6]
   (d) amelyben a mássalhangzók közvetlenül egymás mellett állnak? [4]

**Megoldás.**

(a)
- Az összes sorrendek száma $\dfrac{14!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}$. 1 pont
- Ezek közül a `P`-vel kezdődő sorrendek száma $\dfrac{13!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}$. 2 pont
- Így a nem `P`-vel kezdődő sorrendek száma 1 pont

$$\frac{14!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}-\frac{13!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}.$$

(b)
- Az összes sorrendek száma $\dfrac{14!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}$. 1 pont
- Ezek közül azon sorrendek száma melyekben mind a négy `A` szomszédos $\dfrac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$. 4 pont
- Így azon sorrendek száma melyekben nem mind a négy `A` szomszédos 1 pont

$$\frac{14!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}-\frac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}.$$

(c)
- Vegyük el a P-t ideiglenesen a sorba rendezendő betűk közül. 1 pont
- Ekkor a b) részben látottak alapján, ezek közül azon sorrendek száma melyekben nem mind a négy `A` szomszédos

$$\frac{13!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}-\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}.$$

3 pont

- Most a P-t minden fenti sorrend esetében 13 helyre tehetjük, hiszen nem tehetjük előre, de tehetjük bármely két szomszédos betű közé, és az utolsó után. A sorrendek száma 2 pont

$$13\cdot\left(\frac{13!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}-\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}\right)$$

(d)
- A mássalhangzók: `P, R, L, L, G, R, M, M`. Sorrendjeik száma: $\dfrac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$. 1 pont
- A magánhangzók: `A, A, A, A, E, O` halmaza kiegészül a mássalhangzók (egyetlen) csoportjával. 1 pont
- Így a kereset sorrendek száma 2 pont

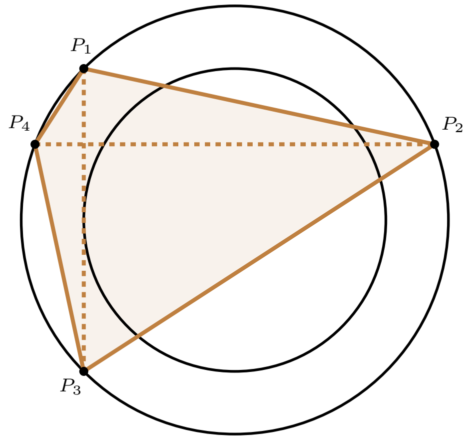
$$\frac{7!}{4!}\cdot\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}.$$

## Matematikai alapismeretek — Kiugró dolgozat

5. Az $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ egyenletű körrel koncentrikus, az origót a belsejében tartalmazó kör a koordináta tengelyeket olyan pontokban metszi, amelyek által kifeszített négyszög területe $6 \cdot \sqrt{6}$ területegység. Határozzuk meg a kör egyenletét. [15]

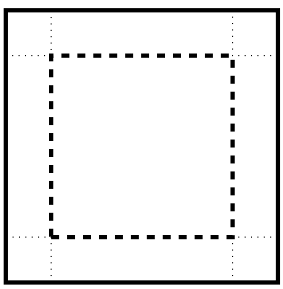
**Megoldás.**

- Az $x^2+y^2-4x+2y+1 = 0$ egyenletű körrel koncentrikus körök egyenlete a $k$ paraméter megfelelő választása esetén $x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$. 2 pont
- Ezen körök $x$ tengellyel vett metszéspontjainak abszcisszáit az $y = 0,\ x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$ egyenletrendszer megoldásai adják. 1 pont
- A fenti egyenletrendszer megoldásai: $x_{1;2} = 2 \pm \sqrt{4-k}$. 1 pont
- Ezen körök $y$ tengellyel vett metszéspontjainak abszcisszáit az $x = 0,\ x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$ egyenletrendszer megoldásai adják. 1 pont
- A fenti egyenletrendszer megoldásai $y_{1;2} = -1 \pm \sqrt{1-k}$. 1 pont
- Ezen pontok által kifeszített négyszög területe könnyen számolható az átlók (hossza) szorzatának feleként. 1 pont




- A kérdéses terület. $t = 2 \cdot \sqrt{4-k} \cdot 2 \cdot \sqrt{1-k}$. 2 pont
- A feladat feltételi alapján $2 \cdot \sqrt{4-k} \cdot 2 \cdot \sqrt{1-k} = 6 \cdot \sqrt{6}$. 1 pont
- Innen négyzetre emeléssel és átrendezve a $k^2 - 5k - 50 = 0$ másodfokú egyenlet adódik. 2 pont
- Ennek két megoldása $k_1 = 10$ és $k_2 = -5$. 1 pont
- A fentiekből világos, hogy $k \leq 1$, így csak $k = -5$ ad megoldást. 1 pont
- Ebben az esetben a keresett kör egyenlete $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 13$. (A $k = 10$ értéket vissza helyettesítve $(x-2)^2 + (y+2)^2 = -2$ adódik, ami nem kör egyenlet.) 1 pont

6. Egy gyárban a gyártási folyamat során egy $a$ oldalhosszúságú négyzet alakú fémlemez minden sarkából eltávolítanak egy-egy, egymással egybevágó négyzet alakú részt, az ábra szerint. Ezek után a szaggatott vonalak mentén a lapokat felhajtják, s élük mentén összeforrasztják őket, így egy felül nyitott, téglatest alakú dobozt képezve. Mekkora az $a$ értéke, ha az ezen eljárással készíthető maximális térfogatú doboz térfogata 1024 $\mathrm{cm}^3$? Mekkora az eltávolított részek összterülete? [15]



## Matematikai alapismeretek — Kiugró dolgozat

**Megoldás.**

- Ha a kivágott négyzetek oldalait $x$-szel jelöljük, a kapott test alapélei $a-2x$, magassága $x$ hosszúságú. 2 pont
- A kapott test térfogata $V(x) = (a-2x)^2 \cdot x$. 1 pont
- Ezen (térfogat)függvény maximumát keressük az $0 < x < \frac{a}{2}$ halmazon. 1 pont
- A maximum meghatározható például a számtan-mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával. 3 pont

  $$V(x) = 16 \cdot \frac{a-2x}{4}\frac{a-2x}{4} \cdot x = 16\left(\frac{a}{4}-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{a}{4}-\frac{x}{2}\right)x \leq 16\left(\frac{\frac{a}{4}-\frac{x}{2}+\frac{a}{4}-\frac{x}{2}+x}{3}\right)^3 = 16\left(\frac{a}{6}\right)^3$$

- A becslésben a számtan-mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmaztuk az $\frac{a}{4}-\frac{x}{2}$; $\frac{a}{4}-\frac{x}{2}$; $x$ tagokra. 2 pont
- A kifejezés pontosan akkor maximális, ha a fenti becslésben egyenlőség áll fenn, vagyis ha

  $$\frac{a}{4}-\frac{x}{2} = \frac{a}{4}-\frac{x}{2} = x,$$

  azaz $x = \frac{a}{6}$. 2 pont
- Mivel a térfogat maximuma $1024 = 16 \cdot \left(\frac{a}{6}\right)^3$, ezért $a = 24$ (cm). 2 pont
- Ekkor $x = 4$, vagyis a kivágott részek összterülete $4 \cdot 4^2 = 64$ cm$^2$. 2 pont

# 1 | Halmazelmélet

## Halmazalgebra

**1. Feladat.** Az alábbi halmazok közül válassza ki az egyenlőeket, illetve azokat, melyek közül az egyik valódi részhalmaza a másiknak.

$$A = \emptyset, \qquad B = \{1;2;-1\}, \qquad C = \{c \in \mathbb{Z} \colon |c| < 3\}, \qquad D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\right\},$$
$$E = \{1;2\}, \qquad F = \{\text{egyjegyű prímek}\}, \qquad G = \left\{g \in \mathbb{Z}^+ \colon g \mid 2\right\},$$
$$H = \{[-1;3[ \text{ nemnulla egész elmei}\}, \qquad I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ és } \lg x \text{ értelmezett}\}$$

**2.* Feladat.** Adjon meg olyan $A, B, C$ halmazokat melyekre teljesülnek az alábbi feltételek.

(a) $C \subset B$, $B \subseteq A$

(b) $C \subset B$, $B \subseteq A$, $C \cup B = A$

(c) $C \subset A$, $B \subseteq A$, $C \cup B = A$

(d) $C \subset A$, $B \subseteq A$, $C \cup B = A$, $C \cap A = \emptyset$

(e) $C \subset A$, $B \subseteq A$, $C \cup B = A$, $A \setminus C = \emptyset$

**3. Feladat.** Legyen $A = \{1;2;3;B\}$ és $B = \{0;1;2\}$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) $1 \in A$

(b) $0 \notin B$

(c) $1 \subset A$

(d) $2 \subseteq B$

(e) $A \supset \{1\}$

(f) $\{1;2\} \subseteq A \cap B$

(g) $\{1;2\} \subseteq \{1;2\}$

(h) $\emptyset \in A$

(i) $\{\} \subset B$

(j) $\emptyset \subseteq A$

(k) $\{\emptyset\} \in B$

(l) $\{1;2\} \subset \{1;2\}$

(m) $B \in A$

(n) $B \subset A$

(o) $\{B\} \in A$

(p) $\{B\} \subseteq A$

**Elméleti kiegészítés.** Az $A$ és $B$ halmazok $A \triangle B$ szimmetrikus differenciája az a halmaz, melynek elemei az $A$ és $B$ halmazok közül pontosan az egyiknek elemei, azaz $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

**4. Feladat.** Legyen

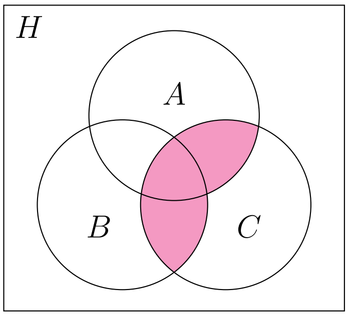
$$\begin{aligned} A &= \{\text{a 12 pozitív osztói}\}, \\ B &= \{\text{egyjegyű prímek}\} \text{ és} \\ C &= \{|c| - 1 \leq 2 \text{ nemnegatív egész megoldásai}\} \end{aligned}$$

három részhalmaza az $U = \{0; 1; 2; \ldots; 12; 13\}$ alaphalmaznak. Fejezzük ki az üreshalmazt a fenti halmazokkal végzett halmazműveletek segítségével legalább három különböző módon. Továbbá határozzuk meg az alábbi halmazműveletek eredményét.

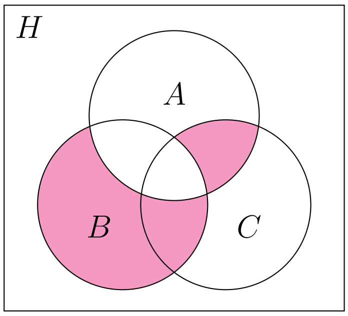
(a) $\overline{A}$
(b) $\overline{\overline{B}}$
(c) $B \cup C$
(d) $C \cup B$
(e) $\overline{A \cup B}$
(f) $\overline{A} \cap \overline{B}$
(g) $\overline{A \cap B}$
(h) $\overline{A} \cup \overline{B}$
(i) $C \setminus B$
(j) $C \cap \overline{B}$
(k) $(A \cup B) \cap C$
(l) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
(m) $(A \cap B) \cup C$
(n) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$
(o) $A \triangle C$
(p) $C \triangle A$
(q) $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$
(r) $\overline{A \setminus B}$
(s) $\overline{A} \setminus \overline{B}$
(t) $\overline{A} \cup B$
(u) $B \triangle B$
(v) $\overline{A} \cup (B \cap C)$
(w) $A \cup (\overline{B \cap C})$
(x) $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$
(y) $\overline{A} \cup (\overline{B \cap C})$
(z) $\overline{A \cup (B \cap C)}$

**5. Feladat.** Határozzuk meg, hogy mely halmazműveletek eredményét jelöltük az alábbi ábrákon.

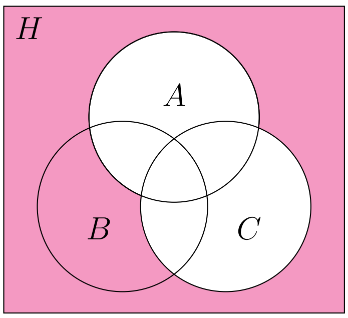
(a)



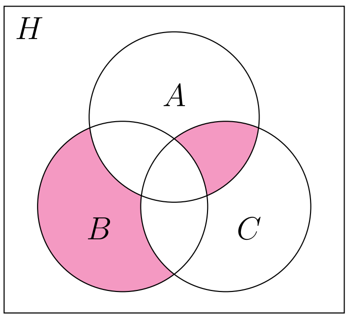

(c)




(b)




(d)



**6. Feladat.** Határozzuk meg az $A$ és $B$ halmazokat, ha

(a) $A \setminus B = \{2;3;4\}$, $A \triangle B = \{1;2;3;4;5\}$, $A \cap B = \{6;7\}$;

(b) $A \setminus B = \{2;3;4\}$, $A \cap B = \{6;7;8\}$, $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$;

(c) $B \setminus A = \{1;2\}$, $A \triangle B = \{1;2;3;4;5\}$, $|A \cap B| = 0$;

(d) $A \setminus B = \{2;3;4\}$, $A \cap B = \{1;2\}$, $A \cup B = \{1;2;3;4\}$.

**7. Feladat.** Készítsünk megfelelő halmazábrát és jelöljük rajta az alábbi halmazműveletek eredményeit.

(a) $B \cup A$

(b) $\overline{A \cup B}$

(c) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(d) $A \setminus B$

(e) $A \cap \overline{B}$

(f) $A \triangle B$

(g) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(h) $\overline{A \setminus B}$

(i) $\overline{A} \setminus \overline{B}$

(j) $(A \cup B) \cap C$

(k) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

(l) $\overline{A} \cup (B \cap C)$

(m) $A \cup (\overline{B \cap C})$

(n) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{C}$

(o) $\overline{A \cap (B \cap C)}$

**8. Feladat.** Határozzuk meg az $A$, $B$ és $C$ halmazokat, ha $A \cap B = \{1;5;7\}$, $C \cap B = \{1;5;8;10\}$, $A \cap C = \{1;5;0\}$, $A \setminus B = \{0;4\}$, $B \setminus A = \{6;8;9;10\}$, $C \setminus (A \cup B) = \{3\}$.

**9. Feladat.** Hány megoldása van az alábbi feladatnak? Határozzuk meg az $A, B, C$ halmazokat, ha tudjuk, hogy $\overline{A \cup B \cup C} = \{5\}$, $A \cap B = \{1;0;7\}$, $C \cap \overline{A} = \{6;9\}$, $B \cup C = U \setminus \{4;5\}$, $C \triangle B = \{1;2;3;8;6\}$, $U = \{0;1;2;\ldots 8;9\}$ és $|A| = |C| < |B|$. Az $U$ halmaz egyben az alaphalmazt is jelöli.

**Elméleti kiegészítés.** Az $A$ és $B$ halmazok $A \times B$ Descartes-szorzatán azt a halmazt értjük, mely rendezett elempárokat tartalmaz, amelyeknek első komponense $A$-nak, míg a második komponense $B$-nek eleme, azaz $A \times B = \{(a;b) | a \in A; B \in B\}$.

**10. Feladat.** Legyen $A = \{1;2\}$, $B = \{2;3;4\}$. Határozzuk meg a következő halmazokat.

(a) $A \times B$

(b) $B \times A$

(c) $A \times A$

(d) $(A \cap B) \times B$

(e) $(A \cap B) \times (B \cup A)$

**11. Feladat.** Legyen $A = ]-5;5]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4\}$ és $C = [2;9[$. Határozzuk meg az alábbi intervallumokat, és ábrázoljuk őket számegyenesen.

(a) $A \cap B$

(b) $C \cup B$

(c) $C \setminus B$

(d) $A \setminus B$

(e) $B \setminus A$

(f) $(B \cup C) \cap A$

(g) $A \cap B \cap C$

(h) $(C \setminus B) \cup A$

(i) $A \setminus (C \cup B)$

Adjunk olyan halmazműveleteket a fenti $A$, $B$ és $C$ halmazok segítségével, melyek eredménye

(1) $\emptyset$,

(2) $[2;4]$,

(3) $]-5;9[$,

(4) $]5;9[$.

**12. Feladat.** Legyen

$A$: az $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza;
$B$: az $f(x) = \ln\sqrt{2^x - 0{,}125}$ függvény értelmezési tartománya;
$C$: a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2^{x-3} + 4$ függvény értékkészlete.

Határozzuk meg az alábbi intervallumokat, és ábrázoljuk őket számegyenesen.

(a) $A \cap B$
(b) $C \cup B$
(c) $A \setminus B$
(d) $(B \setminus A) \cup C$
(e) $(B \cup C) \cap A$
(f) $A \cap B \cap C$
(g) $C \setminus (B \cup A)$
(h) $A \setminus (C \cup B)$

Adjunk meg olyan halmazműveleteket a fenti $A$, $B$ és $C$ halmazokkal, melyek eredménye

(1) $\emptyset$,
(2) $\mathbb{R}$,
(3) $]-3; 4[$,
(4) $]-\infty; -1[ \cup ]5; \infty[$.

**13. Feladat.** Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az alábbi halmazokat.

(a) $A = \{(x; y) \mid y \leq 3 - |x|\}$
(b) $B = \{(x; y) \mid (x + 3)^2 < 2 + y\}$
(c) $A \cap B$
(d) $A \setminus B$

**14. Feladat.** Mivel egyenlő az $A$ halmaz komplementere az adott $U$ alaphalmazra nézve?

(a) $A = \{\text{páros számok}\}$, $U = \mathbb{Z}$
(b) $A = \{\text{néggyel osztható számok}\}$, $U = \{\text{páros számok}\}$
(c) $A = \{\text{véges tizedes törtek}\}$, $U = \mathbb{Q}$
(d) $A = \{$azon közönséges törtek melyek számlálója egész, nevezője pedig olyan egész, amelynek legfeljebb két prím osztója van, és az a 2 és/vagy az 5 $\}$, $U = \mathbb{Q}$

(e) $A = \mathbb{R}^+$, $U = \mathbb{R}$
(f) $A = \mathbb{R}_0^+$, $U = \mathbb{R}$
(g) $A = \mathbb{R}^+$, $U = \mathbb{R}_0^+$
(h) $A = \mathbb{Q}$, $U = \mathbb{R}$
(i) $A = \emptyset$, $U = \mathbb{R}$
(j) $A = [1; \infty[$, $U = \mathbb{R}$
(k) $A = [1; 3]$, $U = [1; 4]$
(l) $A = ]1; 3]$, $U = [0; 2]$

**15. Feladat.** Adjon meg három olyan

(a) véges,
(b) végtelen

halmazt, melyek páronként vett metszete nem üres, de a három halmaz közös része üreshalmaz.

**16. Feladat.** Hány eleműek az alábbi halmazok?

(a) $A = \{\text{páros prímszámok}\}$

(b) $B_1 = \{2x^3 = x^2 + x \text{ pozitív egész megoldásai}\}$

(c) $B_2 = \{\text{az } x^4 + x^2 + 1 = 0 \text{ egyenlet valós megoldásai}\}$

(d) $C_1 = \{120 \text{ pozitív osztói}\}$

(e) $C_2 = \{a \mid a^3 = k,\ k < 100,\ k \in \mathbb{N}\}$

(f) $D_1 = \{2 \text{ azon nemnegatív egész kitevős hatványai, melyek páratlanok}\}$

(g) $D_2 = \{3^n \text{ utolsó számjegyei, ahol } n \in \mathbb{N}\}$

(h) $E = \{\text{a } 2x + 4y = 17 \text{ egyenlet egész megoldásai}\}$

(i) $F = \left\{\text{az } f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x} \text{ függvény grafikonjának egész koordinátájú pontjai}\right\}$

(j) $\overline{A}$, ahol $A = \{1; 2\}$ és az alaphalmaz $U = \{1; 2; 3; 4\}$

(k) $\overline{A}$, ahol $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 7k + 5,\ 2 \leq k \leq 7,\ k \in \mathbb{Z}\}$ és az alaphalmaz a $[10; 60]$ intervallumba eső egész számok halmaza

(l) $\overline{\overline{A}}$, ahol $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 7k + 5,\ 2 \leq k \leq 7,\ k \in \mathbb{Z}\}$ és az alaphalmaz $\mathbb{Z}$

(m) $\mathbb{N}$

(n) $\mathbb{N} \cup \{-1\}$

(o) $\overline{A}$, ahol $A = \{\text{páros számok}\}$ és az alaphalmaz $U = \mathbb{Z}$

(p) $\mathbb{Q}$

(q) $\mathbb{Q}^*$

(r) $G = ]1; 2]$

(s) $H = [-1; 9[ \cap \mathbb{Z}$

(t) $\mathbb{R}$

(u) $\mathbb{R}^+$

(v) $\mathbb{R}_0^+$

(w) $H_1 = \{\text{a koordinátasík abszcissza tengelyére megőleges egyenesei}\}$

(x) $H_2 = \{\text{a tér egyenesei}\}$

**17. Feladat.** Hány részhalmaza van egy öt elemű halmaznak?

**18. Feladat.** Adott az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz.

(a) Hány részhalmaza van $A$-nak?

(b) Hány valódi részhalmaz van $A$-nak?

(c) Hány három elemű részhalmaza van $A$-nak?

(d) Miből van több, négy elemű, vagy öt elemű részhalmazából?

(e) Hány olyan részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata páros?

(f) Hány olyan három elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata páros?

(g) Hány olyan hat elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata páros?

(h) Hány olyan részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata 35-tel osztható?

**19.* Feladat.** Adott az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz.

(a) Hány olyan három elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata 10-zel osztható?

(b) Hány olyan öt elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata 10-zel osztható?

(c) Hány olyan részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata nem osztható 3-mal?

(d) Hány olyan részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata 91-gyel osztható?

(e) Hány olyan két elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata prím?

(f) Hány olyan három elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata prím?

(g) Hány olyan két elemű részhalmaza van $A$-nak amelyben az elemek összege páratlan?

(h) Hány olyan részhalmaza van $A$-nak amelyben az elemek összege 45-tel osztható?

**20. Feladat.** Hány eleműek lehetnek az $A$ és $B$ halmazok, ha teljesülnek rájuk a következők?

(a) $|A \setminus B| = 3$, $|B \setminus A| = 2$, $|A \cup B| = 7$

(b) $|A \setminus B| = 3$, $|A \triangle B| = 5$, $|A \cap B| = 2$

(c) $|A \cup B| = 7$, $|A \cap B| = 5$

(d) $|A \cup B| = 7$, $|A \cap B| = 5$ és $B \subset A$

(e) $|A \setminus B| = 3$, $|A \triangle B| = 5$ és $A \cap B = \emptyset$

(f) $|A \setminus B| = 3$, $|A \triangle B| = 2$

(g) $|A \cup B| = 7$, $|B \triangle A| = 2$

**21. Feladat.** Az $A, B, C$ halmazokra teljesül, hogy $A, B \subseteq C$ és $A \cap B = \emptyset$. Melyek igazak az alábbiak közül?

(a) $|A| < |C|$ (b) $|A| + |B| < |C|$ (c) $|A \cup B| \leq |C|$ (d) $|A \cap B| < |B|$

**22.* Feladat.** Legyen $|A| = a$ és $|B| = b$ két véges halmaz, ahol $a < b$. Hány eleműek lehetnek az alábbi halmazok?

(a) $A \setminus B$

(b) $A \cup B$

(c) $A \cap B$

(d) $A \triangle B$

(e) $A \triangle A$

(f) $A \triangle \emptyset$

(g) $A \setminus (A \triangle B)$

(h) $A \times B$

(i) $A \times A$

(j) $A \times \emptyset$

(k) $A \times (A \cup B)$

**23. Feladat.** Tudjuk, hogy $|A \times B| = 24$. Mekkora lehet az

(a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \setminus B$

halmazok elemszáma?

# Számhalmazok. A valós számkör felépítése

**24. Feladat.** Válasszuk ki az alábbi számok közül azokat, amelyek elemei

(i) az egész számok halmazának,

(ii) a pozitív racionális számok halmazának.

(a) $\frac{1}{3}$
(b) $\frac{-2{,}1}{0{,}1}$
(c) $\frac{1{,}5}{1{,}2}$
(d) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$
(e) $4{,}12$
(f) $4{,}1\dot{2}$
(g) $0!$
(h) $1{,}\dot{9}$
(i) $3{,}4\overline{19}$
(j) $7-\sqrt{5}$
(k) $\pi$
(l) $e$
(m) $\sqrt{4}$
(n) $\sqrt{3}$
(o) $\sqrt[3]{-64}$
(p) $\sqrt[4]{8}$
(q) $7^{\frac{1}{3}}$
(r) $16^{\frac{5}{4}}$
(s) $\log_2 \frac{3}{96}$
(t) $\log_9 27$
(u) $\log_3 4$
(v) $\log_\pi 1$
(w) $5^{\log_5 4}$
(x) $\sin \pi$
(y) $\cos 840°$

**25. Feladat.** Válassza ki az alábbi állítások közül azokat, amelyek igazak.

(a) Ha $a$ és $b$ is nemnegatív egész szám, akkor $a+b$ is nemnegatív egész szám.

(b) Ha $a$ és $b$ is nemnegatív egész szám, akkor $a-b$ is nemnegatív egész szám.

(c) Ha $a$ és $b$ is nemnegatív egész szám, akkor $a\cdot b$ is nemnegatív egész szám.

(d) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a+b$ is nemnegatív egész szám.

(e) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a+b$ pozitív egész szám.

(f) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a+b$ nempozitív egész szám.

(g) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész, szám, melyekre $a+b$ negatív egész szám.

(h) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a\cdot b$ is nemnegatív egész szám.

(i) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a\cdot b$ pozitív egész szám.

(j) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a\cdot b$ nempozitív egész szám.

(k) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész, szám, melyekre $a\cdot b$ negatív egész szám.

(l) Ha $a+b$ nempozitív egész szám, akkor $a$ és $b$ is nempozitív egész szám.

(m) Ha $a+b$ nempozitív egész szám, akkor $a$ vagy $b$ nempozitív egész szám.

(n) Ha $a+b$ nempozitív egész szám, akkor vagy $a$ vagy $b$ nempozitív egész szám.

(o) Ha $a+b$ pozitív egész szám, és $a$ nemnegatív egész szám, akkor $b$ pozitív egész szám.

(p) Ha $a\cdot b$ pozitív egész szám, és $a$ nemnegatív egész szám, akkor $b$ pozitív egész szám.

(q) Ha $a\cdot b$ pozitív egész szám, és $a$ nemnegatív egész szám, akkor $b$ pozitív szám.

## Logikai szita

**26. Feladat.** Hány olyan 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely

(a) osztható 2-vel és 3-mal;

(b) osztható 2-vel vagy 3-mal;

(c) osztható vagy 2-vel vagy 3-mal;

(d) ha osztható 2-vel, akkor 3-mal is;

(e) nem osztható 2-vel, de 3-mal igen;

(f) nem osztható 3-mal, de 2-vel igen;

(g) a 2, 3, 4 számok közül pontosan kettővel osztható;

(h) a 2, 3, 5 számok közül pontosan kettővel osztható;

(i) a 2, 3, 6 számok közül pontosan kettővel osztható.

**27. Feladat.** Egy 30 fős osztályban mindenki tanulja a német vagy az angol nyelv valamelyikét. Tudjuk, hogy háromszor annyian tanulják mindkét nyelvet, mint ahányan csak angolul tanulnak. Csak németül feleannyian tanulnak, mint ahányan angolul tanulnak. Hányan tanulnak az osztályból

(a) angolul,

(b) csak angolul,

(c) csak németül,

(d) egyik nyelven sem,

(e) valamelyik nyelven,

(f) pontosan az egyik nyelven?

**28. Feladat.** Egy munkahelyen 62-en dolgoznak. Közülük 20-an sportolnak, 14-en dohányoznak és 23-an barna hajúak. Továbbá 7 barna hajú dohányos, 8 barna hajú sportoló és 3 dohányos sportoló van a dolgozók között. Hárman vannak a barna hajú dohányos sportolók is.

(a) Hány nem dohányzó barna hajú ember dolgozik ezen a munkahelyen?

(b) Hány olyan dolgozó van aki sportol és nem dohányzik?

(c) Hányan vannak a nem barna hajú sportolók?

Tegyünk fel olyan kérdéseket amelyekre a válasz

(i) 20,

(ii) 12,

(iii) 22,

(iv) 32.

**29.* Feladat.** Egy gyorsétteremben hamburger, gofri és hot dog kapható. A tulajdonos egy pénteki napon a rendeléseket összesítve a következőket tapasztalta. Hamburgert 32-en, gofrit 17-en, hot dogot szintén 32-en rendeltek. Hamburgert és gofrit 9-en, gofrit és hot dogot 12-en rendeltek. Pontosan kétféle ételt háromszor annyian rendeltek, mint háromfélét.

(a) Hány olyan megrendelő volt, aki hamburgert rendelt, de goofrit nem?

(b) Hánnyal vannak többen azok, akik nem rendeltek hotdogot, mint azok, akik csak hotdogot rendeltek?

(c) Hányan rendeltek gofrit vagy hamburgert?

(d) Lehet-e a rendelést leadók száma öttel osztható?

# Megoldások

## Halmazalgebra

**1. Feladat.** Az alábbi halmazok közül válassza ki az egyenlőeket, illetve azokat, melyek közül az egyik valódi részhalmaza a másiknak.

$$A = \emptyset, \qquad B = \{1; 2; -1\}, \qquad C = \{c \in \mathbb{Z} \colon |c| < 3\}, \qquad D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\right\},$$
$$E = \{1; 2\}, \qquad F = \{\text{egyjegyű prímek}\}, \qquad G = \left\{g \in \mathbb{Z}^+ \colon g \mid 2\right\},$$
$$H = \{[-1; 3[\ \text{nemnulla egész elmei}\}, \qquad I = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ és } \lg x \text{ értelmezett}\}$$

**Megoldás.** A fenti halmazokat könnyen megadhatjuk az elemeiknek felsorolásával.

$$A = \emptyset \qquad B = \{1; 2; -1\} \qquad C = \{-2; -1; 0; 1; 2\} \qquad D = \{1; 2\} \qquad E = \{1; 2\}$$
$$F = \{2; 3; 5; 7\} \qquad G = \{1; 2\} \qquad H = \{-1; 1; 2\} \qquad I = \emptyset$$

A keresett összefüggések a következők.

- $A = I$
- $B = H$
- $D = E = G$
- $A, I \subset B, C, D, E, F, G, H$
- $B \subset C$
- $E, G, D \subset B, C, H$
- $H \subset C$

**2.* Feladat.** Adjon meg olyan $A, B, C$ halmazokat melyekre teljesülnek az alábbi feltételek.

(a) $C \subset B$, $B \subseteq A$

(b) $C \subset B$, $B \subseteq A$, $C \cup B = A$

(c) $C \subset A$, $B \subseteq A$, $C \cup B = A$

(d) $C \subset A$, $B \subseteq A$, $C \cup B = A$, $C \cap A = \emptyset$

(e) $C \subset A$, $B \subseteq A$, $C \cup B = A$, $A \setminus C = \emptyset$

**Megoldás.**

(a) $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{1\}$

(b) $A = \{1; 2\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{1\}$

(c) $A = \{1; 2\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{1\}$

(d) $A = \{1; 2\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \emptyset$

(e) Nincsenek ilyen halmazok. Ha $C \subset A$, akkor a valódi részhalmaz definíciója alapján $A \setminus C$ nem lehet üres.

**3. Feladat.** Legyen $A = \{1; 2; 3; B\}$ és $B = \{0; 1; 2\}$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) $1 \in A$

(b) $0 \notin B$

(c) $1 \subset A$

(d) $2 \subseteq B$

(e) $A \supset \{1\}$

(f) $\{1; 2\} \subseteq A \cap B$

(g) $\{1; 2\} \subseteq \{1; 2\}$

(h) $\emptyset \in A$

(i) $\{\} \subset B$

(j) $\emptyset \subseteq A$

(k) $\{\emptyset\} \in B$

(l) $\{1; 2\} \subset \{1; 2\}$

(m) $B \in A$

(n) $B \subset A$

(o) $\{B\} \in A$

(p) $\{B\} \subseteq A$

**Megoldás.**

(a) igaz

(b) hamis

(c) hamis

(d) hamis

(e) igaz

(f) igaz

(g) igaz

(h) hamis

(i) igaz

(j) igaz

(k) hamis

(l) hamis

(m) igaz

(n) hamis

(o) hamis

(p) igaz

**4. Feladat.** Legyen

$$\begin{aligned} A &= \{\text{a 12 pozitív osztói}\}, \\ B &= \{\text{egyjegyű prímek}\} \text{ és} \\ C &= \{|c| - 1 \leq 2 \text{ nemnegatív egész megoldásai}\} \end{aligned}$$

három részhalmaza az $U = \{0; 1; 2; \ldots; 12; 13\}$ alaphalmaznak. Fejezzük ki az üreshalmazt a fenti halmazokkal végzett halmazműveletek segítségével legalább három különböző módon. Továbbá határozzuk meg az alábbi halmazműveletek eredményét.

(a) $\overline{A}$
(b) $\overline{\overline{B}}$
(c) $B \cup C$
(d) $C \cup B$
(e) $\overline{A \cup B}$
(f) $\overline{A} \cap \overline{B}$
(g) $\overline{A \cap B}$
(h) $\overline{A} \cup \overline{B}$
(i) $C \setminus B$
(j) $C \cap \overline{B}$
(k) $(A \cup B) \cap C$
(l) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
(m) $(A \cap B) \cup C$
(n) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$
(o) $A \triangle C$
(p) $C \triangle A$
(q) $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$
(r) $\overline{A \setminus B}$
(s) $\overline{A} \setminus \overline{B}$
(t) $\overline{A} \cup B$
(u) $B \triangle B$
(v) $\overline{A} \cup (B \cap C)$
(w) $A \cup (\overline{B \cap C})$
(x) $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$
(y) $\overline{A} \cup (\overline{B \cap C})$
(z) $\overline{A \cup (B \cap C)}$

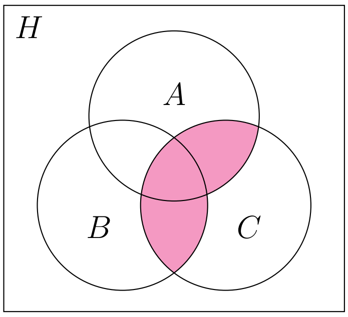
**Megoldás.** Mivel $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $B = \{2; 3; 5; 7\}$ és $C = \{0; 1; 2; 3\}$, ezért például

$$A \setminus A = (A \cap B) \setminus C = B \triangle B = \emptyset.$$

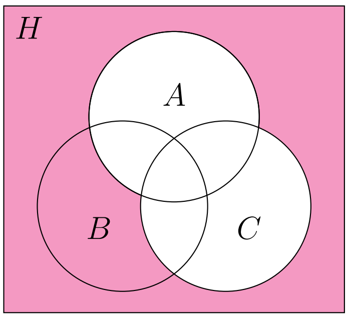
(a) $\overline{A} = \{0; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 13\}$
(b) $\overline{\overline{B}} = B = \{2; 3; 5; 7\}$
(c) $B \cup C = \{2; 3; 5; 7; 0; 1\}$
(d) $C \cup B = \{0; 1; 2; 3; 5; 7\}$
(e) $\overline{A \cup B} = \{0; 8; 9; 10; 11; 13\}$
(f) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{0; 8; 9; 10; 11; 13\}$
(g) $\overline{A \cap B} = \{0; 1; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$
(h) $\overline{A} \cup \overline{B} = \{0; 1; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$
(i) $C \setminus B = \{0; 1\}$
(j) $C \cap \overline{B} = \{0; 1\}$
(k) $(A \cup B) \cap C = \{1; 2; 3\}$
(l) $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{1; 2; 3\}$
(m) $(A \cap B) \cup C = \{0; 1; 2; 3\}$
(n) $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{0; 1; 2; 3\}$
(o) $A \triangle C = \{0; 4; 6; 12\}$
(p) $C \triangle A = \{0; 4; 6; 12\}$
(q) $(A \setminus C) \cup (C \setminus A) = \{0; 4; 6; 12\}$
(r) $\overline{A \setminus B} = \{0; 2; 3; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 13\}$
(s) $\overline{A} \setminus \overline{B} = \{5; 7\}$
(t) $\overline{A} \cup B = \{0; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 13; 2; 3\}$
(u) $B \triangle B = \emptyset$
(v) $\overline{A} \cup (B \cap C) = \{0; 2; 3; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 13\}$
(w) $A \cup (\overline{B \cap C}) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$
(x) $\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) = \{0; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$
(y) $\overline{A} \cup (\overline{B \cap C}) = \{0; 1; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$
(z) $\overline{A \cup (B \cap C)} = \{0; 5; 7; 8; 9; 10; 11; 13\}$

**5. Feladat.** Határozzuk meg, hogy mely halmazműveletek eredményét jelöltük az alábbi ábrákon.

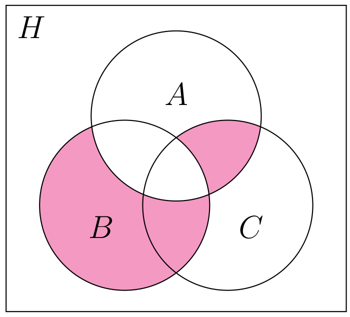
(a)



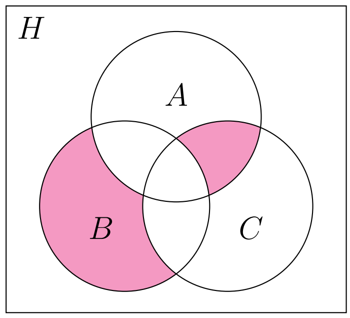

(b)




(c)




(d)




**Megoldás.** A halmazműveletek tulajdonságai, illetve a különböző halmazelméleti azonosságok okán több más helyes megoldás is lehetséges.

(a) $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

(b) $\overline{A \cup C} = \overline{A} \cap \overline{C}$

(c) $(B \setminus A) \cup ((A \cap C) \setminus B)$

(d) $(B \setminus (A \cup C)) \cup ((A \cap C) \setminus B)$

**6. Feladat.** Határozzuk meg az $A$ és $B$ halmazokat, ha

(a) $A \setminus B = \{2; 3; 4\}$, $A \triangle B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $A \cap B = \{6; 7\}$;

(b) $A \setminus B = \{2; 3; 4\}$, $A \cap B = \{6; 7; 8\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;

(c) $B \setminus A = \{1; 2\}$, $A \triangle B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $|A \cap B| = 0$;

(d) $A \setminus B = \{2; 3; 4\}$, $A \cap B = \{1; 2\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$.

**Megoldás.** A megoldás könnyen megkapható a megfelelő Venn-diagrammok kitöltésével.

(a) $A = \{2; 3; 4; 6; 7\}$, $B = \{1; 5; 6; 7\}$

(b) $A = \{2; 3; 4; 6; 7; 8\}$, $B = \{1; 5; 6; 7; 8; 9\}$

(c) $A = \{3; 4; 5\}$, $B = \{1; 2\}$

(d) Az $A \setminus B$ és $A \cap B$ halmazoknak nem lehet közös elemük. Az első két feltétel ellentmond egymásnak, így nincs megoldás.

**7. Feladat.** Készítsünk megfelelő halmazábrát és jelöljük rajta az alábbi halmazműveletek eredményeit.

(a) $B \cup A$

(b) $\overline{A \cup B}$

(c) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(d) $A \setminus B$

(e) $A \cap \overline{B}$

(f) $A \triangle B$

(g) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(h) $\overline{A \setminus B}$

(i) $\overline{A} \setminus \overline{B}$

(j) $(A \cup B) \cap C$

(k) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

(l) $\overline{A} \cup (B \cap C)$

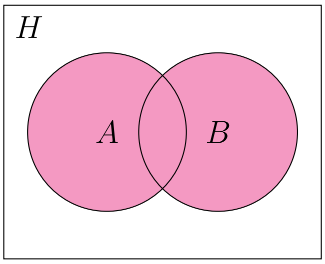
(m) $A \cup (\overline{B \cap C})$

(n) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{C}$

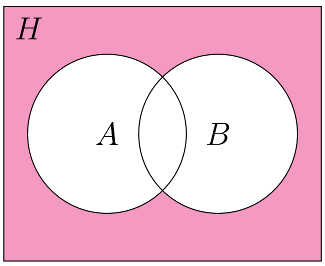
(o) $\overline{A \cap (B \cap C)}$

**Megoldás.**

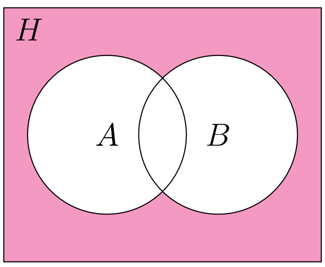
(a)



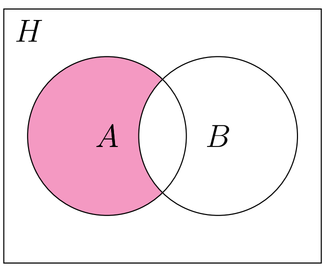

(b)



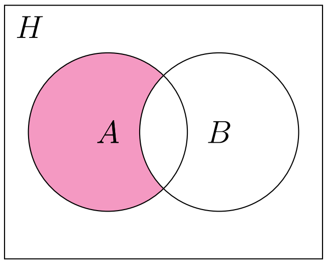

(c)



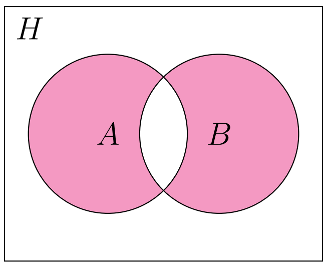

(d)



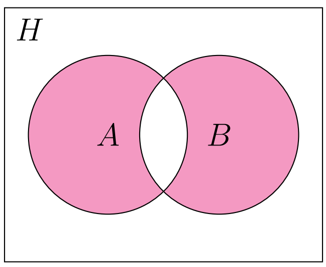

(e)



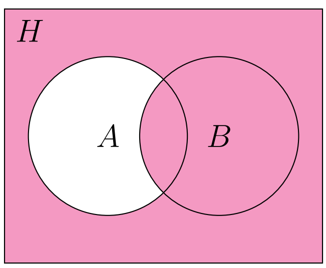

(f)



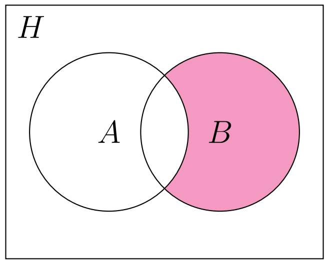

(g)



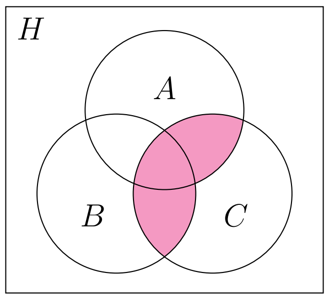

(h)



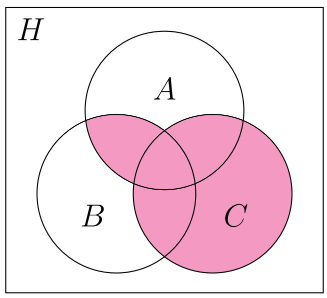

(i)



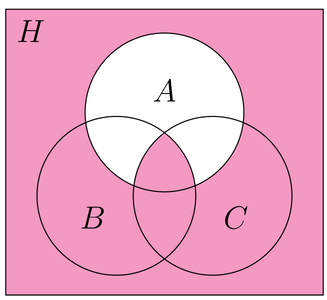

(j)



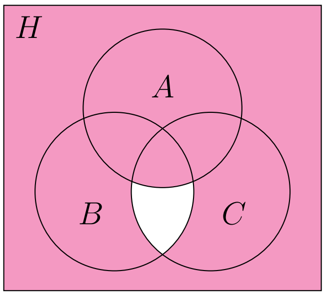

(k)



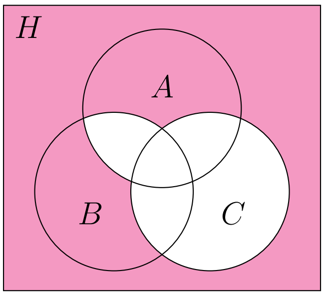

(l)



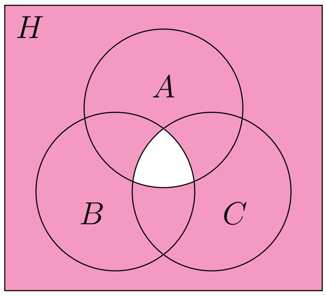
(m)




(n)




(o)

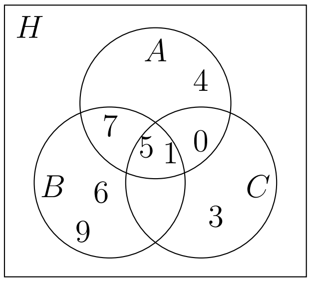



**8. Feladat.** Határozzuk meg az $A$, $B$ és $C$ halmazokat, ha $A\cap B=\{1;5;7\}$, $C\cap B=\{1;5;8;10\}$, $A\cap C=\{1;5;0\}$, $A\setminus B=\{0;4\}$, $B\setminus A=\{6;8;9;10\}$, $C\setminus(A\cup B)=\{3\}$.

**Megoldás.**

A legegyszerűbb, ha Venn-diagramot készítünk, és a keletkező tartományokat kitöltjük a megfelelő elemekkel.

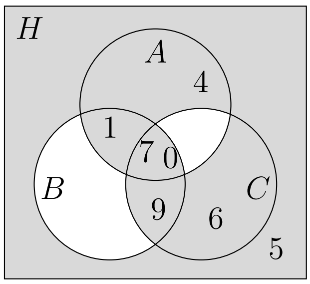
$$\begin{aligned} A &= \{0;1;4;5;7\} \\ B &= \{1;5;6;7;8;9;10\} \\ C &= \{0;1;3;5;8;10\} \end{aligned}$$




**9. Feladat.** Hány megoldása van az alábbi feladatnak? Határozzuk meg az $A, B, C$ halmazokat, ha tudjuk, hogy $\overline{A\cup B\cup C}=\{5\}$, $A\cap B=\{1;0;7\}$, $C\cap\overline{A}=\{6;9\}$, $B\cup C=U\setminus\{4;5\}$, $C\triangle B=\{1;2;3;8;6\}$, $U=\{0;1;2;\ldots 8;9\}$ és $|A|=|C|<|B|$. Az $U$ halmaz egyben az alaphalmazt is jelöli.

**Megoldás.**

A megadott információk alapján a Venn-diagramot nem tudjuk teljesen kitölteni. Viszont azt is megfigyelhetjük, hogy oda, ahova már írtunk számot, oda nem írhatunk többet. Figyelembe véve az elemszámra vonatkozó feltételt, 4 különböző módon fejezhetjük be a Venn-diagramot.



**10. Feladat.** Legyen $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3; 4\}$. Határozzuk meg a következő halmazokat.

(a) $A \times B$

(b) $B \times A$

(c) $A \times A$

(d) $(A \cap B) \times B$

(e) $(A \cap B) \times (B \cup A)$

**Megoldás.**

(a) $A \times B = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4)\}$

(b) $B \times A = \{(2, 1); (3, 1); (4, 1); (2, 2); (3, 2); (4, 2)\}$

(c) $A \times A = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2)\}$

(d) $(A \cap B) \times B = \{(2, 2); (2, 3); (2, 4)\}$

(e) $(A \cap B) \times (B \cup A) = \{(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4)\}$

**11. Feladat.** Legyen $A = ]-5; 5]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4\}$ és $C = [2; 9[$. Határozzuk meg az alábbi intervallumokat, és ábrázoljuk őket számegyenesen.

(a) $A \cap B$

(b) $C \cup B$

(c) $C \setminus B$

(d) $A \setminus B$

(e) $B \setminus A$

(f) $(B \cup C) \cap A$

(g) $A \cap B \cap C$

(h) $(C \setminus B) \cup A$

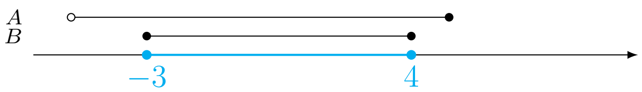
(i) $A \setminus (C \cup B)$

Adjunk olyan halmazműveleteket a fenti $A$, $B$ és $C$ halmazok segítségével, melyek eredménye

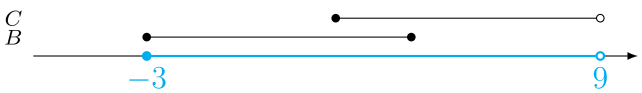
(1) $\emptyset$, (2) $[2; 4]$, (3) $]-5; 9[$, (4) $]5; 9[$.

**Megoldás.**

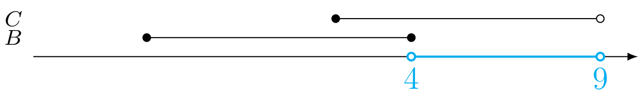
(a) $A \cap B = [-3; 4]$



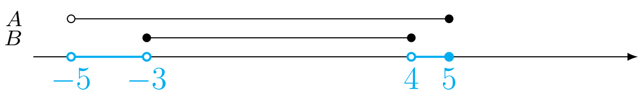

(b) $C \cup B = [-3; 9[$



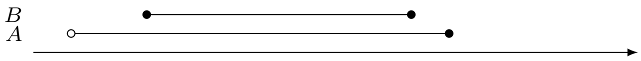

(c) $C \setminus B = ]4; 9[$



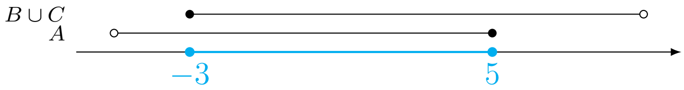

(d) $A \setminus B = ]-5; -3[ \cup ]4; 5]$



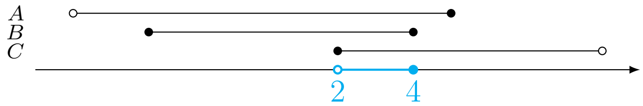
(e) $B \setminus A = \emptyset$




(f) $(B \cup C) \cap A = [-3; 5]$

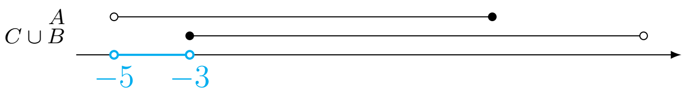



(g) $A \cap B \cap C = [2; 4]$




(h) $(C \setminus B) \cup A = ]-5; 9[$


(i) $A \setminus (C \cup B) = ]-5; -3[$




(1) $A \setminus A$ (2) $A \cap B \cap C$ (3) $(C \setminus B) \cup A$ (4) $C \setminus A$

**12. Feladat.** Legyen

$A:$ az $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza;
$B:$ az $f(x) = \ln \sqrt{2^x - 0{,}125}$ függvény értelmezési tartománya;
$C:$ a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -2^{x-3} + 4$ függvény értékkészlete.

Határozzuk meg az alábbi intervallumokat, és ábrázoljuk őket számegyenesen.

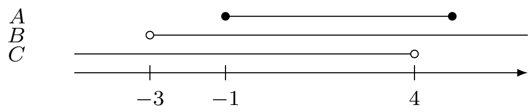
(a) $A \cap B$ (c) $A \setminus B$ (e) $(B \cup C) \cap A$ (g) $C \setminus (B \cup A)$
(b) $C \cup B$ (d) $(B \setminus A) \cup C$ (f) $A \cap B \cap C$ (h) $A \setminus (C \cup B)$

Adjunk meg olyan halmazműveleteket a fenti $A$, $B$ és $C$ halmazokkal, melyek eredménye

(1) $\emptyset$, (3) $]-3; 4[$,
(2) $\mathbb{R}$, (4) $]-\infty; -1[ \cup ]5; \infty[$.

**Megoldás.** Először határozzuk meg az $A, B, C$ halmazokat intervallum formájában:

$$A = [-1; 5]\,, \qquad B = ]-3; \infty[\,, \qquad C = ]-\infty; 4[\,.$$




(a) $A \cap B = A = [-1; 5]$


(b) $C \cup B = \,]-\infty, \infty[$



(c) $A \setminus B = \emptyset$



(d) $(B \setminus A) \cup C = \,]-\infty; 4[\, \cup \,]5; \infty[$


(e) $(B \cup C) \cap A = A = [-1; 5]$


(f) $A \cap B \cap C = [-1; 4[$


(g) $C \setminus (B \cup A) = \,]-\infty; 3]$


(h) $A \setminus (C \cup B) = \emptyset$



(1) $\emptyset = A \setminus A$

(2) $\mathbb{R} = B \cup C$

(3) $]-3; 4[\, = B \cap C$

(4) $]-\infty; -1[\, \cup \,]5; \infty[\, = (B \cup C) \setminus A$

**13. Feladat.** Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az alábbi halmazokat.

(a) $A = \{(x; y) \mid y \leq 3 - |x|\}$

(b) $B = \{(x; y) \mid (x + 3)^2 < 2 + y\}$

(c) $A \cap B$

(d) $A \setminus B$

**Megoldás.**

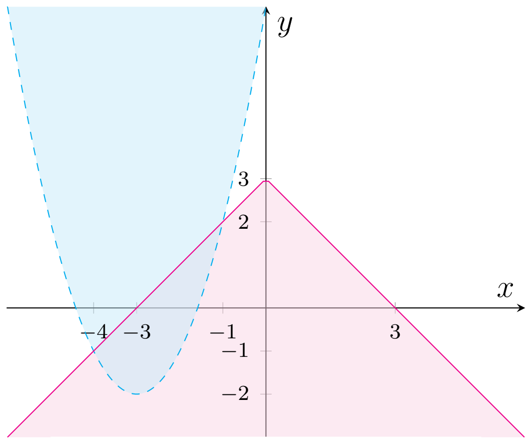
A színezés segít a megfelelő halmazok beazonosításához.

(a) $A$: **kékkel** jelölt pontok halmaza

(b) $B$: **rózsaszínnel** jelölt pontok halmaza

(c) $A \cap B$: a két színezés közös része

(d) $A \setminus B$: azon rózsaszín rész, ami nem kék




**14. Feladat.** Mivel egyenlő az $A$ halmaz komplementere az adott $U$ alaphalmazra nézve?

(a) $A = \{\text{páros számok}\}, \quad U = \mathbb{Z}$

(b) $A = \{\text{néggyel osztható számok}\}, \quad U = \{\text{páros számok}\}$

(c) $A = \{\text{véges tizedes törtek}\}, \quad U = \mathbb{Q}$

(d) $A = \{$azon közönséges törtek melyek számlálója egész, nevezője pedig olyan egész, amelynek legfeljebb két prím osztója van, és az a 2 és/vagy az 5 $\}, \quad U = \mathbb{Q}$

(e) $A = \mathbb{R}^+, \quad U = \mathbb{R}$

(f) $A = \mathbb{R}_0^+, \quad U = \mathbb{R}$

(g) $A = \mathbb{R}^+, \quad U = \mathbb{R}_0^+$

(h) $A = \mathbb{Q}, \quad U = \mathbb{R}$

(i) $A = \emptyset, \quad U = \mathbb{R}$

(j) $A = [1; \infty[, \quad U = \mathbb{R}$

(k) $A = [1; 3], \quad U = [1; 4]$

(l) $A = ]1; 3], \quad U = [0; 2]$

**Megoldás.**

(a) $\overline{A} = \{\text{páratlan számok}\}$

(b) $\overline{A} = \{\text{néggyel osztva 2 maradékot adó számok}\}$

(c) $\overline{A} = \{\text{végtelen szakaszos tizedes törtek}\}$

(d) $\overline{A} = \{\text{végtelen szakaszos tizedes törtek}\}$

(e) $\overline{A} = \mathbb{R}_0^-$

(f) $\overline{A} = \mathbb{R}^-$

(g) $\overline{A} = \{0\}$

(h) $\overline{A} = \mathbb{Q}^*$

(i) $\overline{A} = \mathbb{R}$

(j) $\overline{A} = ]-\infty; 1[$

(k) $\overline{A} = ]3; 4]$

(l) Nem értelmezhető, mert $A \not\subseteq U$.

**15. Feladat.** Adjon meg három olyan

(a) véges,

(b) végtelen

halmazt, melyek páronként vett metszete nem üres, de a három halmaz közös része üreshalmaz.

**Megoldás.**

(a) Például: $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, $C = \{3; 1\}$.

(b) Például: $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}_0^-$, $\mathbb{Q}^*$.

**16. Feladat.** Hány eleműek az alábbi halmazok?

(a) $A = \{$páros prímszámok$\}$

(b) $B_1 = \{2x^3 = x^2 + x$ pozitív egész megoldásai$\}$

(c) $B_2 = \{$az $x^4 + x^2 + 1 = 0$ egyenlet valós megoldásai$\}$

(d) $C_1 = \{120$ pozitív osztói$\}$

(e) $C_2 = \{a \mid a^3 = k,\ k < 100,\ k \in \mathbb{N}\}$

(f) $D_1 = \{2$ azon nemnegatív egész kitevős hatványai, melyek páratlanok$\}$

(g) $D_2 = \{3^n$ utolsó számjegyei, ahol $n \in \mathbb{N}\}$

(h) $E = \{$a $2x + 4y = 17$ egyenlet egész megoldásai$\}$

(i) $F = \big\{$az $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ függvény grafikonjának egész koordinátájú pontjai$\big\}$

(j) $\overline{A}$, ahol $A = \{1; 2\}$ és az alaphalmaz $U = \{1; 2; 3; 4\}$

(k) $\overline{A}$, ahol $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 7k + 5,\ 2 \leq k \leq 7,\ k \in \mathbb{Z}\}$ és az alaphalmaz a $[10; 60]$ intervallumba eső egész számok halmaza

(l) $\overline{\overline{A}}$, ahol $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 7k + 5,\ 2 \leq k \leq 7,\ k \in \mathbb{Z}\}$ és az alaphalmaz $\mathbb{Z}$

(m) $\mathbb{N}$

(n) $\mathbb{N} \cup \{-1\}$

(o) $\overline{A}$, ahol $A = \{$páros számok$\}$ és az alaphalmaz $U = \mathbb{Z}$

(p) $\mathbb{Q}$

(q) $\mathbb{Q}^*$

(r) $G = ]1; 2]$

(s) $H = [-1; 9[ \cap \mathbb{Z}$

(t) $\mathbb{R}$

(u) $\mathbb{R}^+$

(v) $\mathbb{R}_0^+$

(w) $H_1 = \{$a koordinátasík abszcissza tengelyére megőleges egyenesei$\}$

(x) $H_2 = \{$a tér egyenesei$\}$

**Megoldás.**

(a) $|A| = 1$
(b) $|B_1| = 1$
(c) $|B_2| = 0$
(d) $|C_1| = 16$
(e) $|C_2| = 5$
(f) $|D_1| = 1$
(g) $|D_2| = 4$
(h) $|E| = 0$
(i) $|F| = 2$
(j) $|\overline{A}| = 2,$
(k) $|\overline{A}| = 45$
(l) $|\overline{\overline{A}}| = 6$
(m) $|\mathbb{N}| = \aleph_0$
(n) $|\mathbb{N} \cup \{-1\}\,| = \aleph_0$
(o) $|\overline{A}| = \aleph_0$
(p) $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$
(q) $|\mathbb{Q}^*| = c$
(r) $|G| = c$
(s) $|H| = 10$
(t) $|\mathbb{R}| = c$
(u) $|\mathbb{R}^+| = c$
(v) $|\mathbb{R}_0^+| = c$
(w) $|H_1| = c$
(x) $|H_2| = c$

**17. Feladat.** Hány részhalmaza van egy öt elemű halmaznak?

**Megoldás.** $2^5 = 32$

**18. Feladat.** Adott az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz.

(a) Hány részhalmaza van $A$-nak?
(b) Hány valódi részhalmaz van $A$-nak?
(c) Hány három elemű részhalmaza van $A$-nak?
(d) Miből van több, négy elemű, vagy öt elemű részhalmazából?
(e) Hány olyan részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata páros?
(f) Hány olyan három elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata páros?
(g) Hány olyan hat elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata páros?
(h) Hány olyan részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata 35-tel osztható?

**Megoldás.**

(a) $2^9$
(b) $2^9 - 1$
(c) $\binom{9}{3}$
(d) Ugyanannyi: $\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$
(e) $2^9 - 2^5 + 1$
(f) $\binom{9}{3} - \binom{5}{3} + 1$
(g) Mind ilyen: $\binom{9}{6}$
(h) $2^7$

**19.* Feladat.** Adott az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz.

(a) Hány olyan három elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata 10-zel osztható?

(b) Hány olyan öt elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata 10-zel osztható?

(c) Hány olyan részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata nem osztható 3-mal?

(d) Hány olyan részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata 91-gyel osztható?

(e) Hány olyan két elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata prím?

(f) Hány olyan három elemű részhalmaza van $A$-nak, amelyben az elemek szorzata prím?

(g) Hány olyan két elemű részhalmaza van $A$-nak amelyben az elemek összege páratlan?

(h) Hány olyan részhalmaza van $A$-nak amelyben az elemek összege 45-tel osztható?

**Megoldás.**

(a) 22

(b) 69

(c) $2^6$

(d) 0

(e) 4

(f) 0

(g) 20

(h) 1

**20. Feladat.** Hány eleműek lehetnek az $A$ és $B$ halmazok, ha teljesülnek rájuk a következők?

(a) $|A \setminus B| = 3$, $|B \setminus A| = 2$, $|A \cup B| = 7$

(b) $|A \setminus B| = 3$, $|A \triangle B| = 5$, $|A \cap B| = 2$

(c) $|A \cup B| = 7$, $|A \cap B| = 5$

(d) $|A \cup B| = 7$, $|A \cap B| = 5$ és $B \subset A$

(e) $|A \setminus B| = 3$, $|A \triangle B| = 5$ és $A \cap B = \emptyset$

(f) $|A \setminus B| = 3$, $|A \triangle B| = 2$

(g) $|A \cup B| = 7$, $|B \triangle A| = 2$

**Megoldás.**

(a) $|A| = 5$, $|B| = 4$

(b) $|A| = 5$, $|B| = 4$

(c) $|A| = 7$, $|B| = 5$ vagy $|A| = 5$, $|B| = 7$ vagy $|A| = 6$, $|B| = 6$

(d) $|A| = 7$, $|B| = 5$

(e) $|A| = 3$, $|B| = 2$

(f) Nem léteznek ilyen halmazok.

(g) $|A| = 7$, $|B| = 5$ vagy $|A| = 5$, $|B| = 7$ vagy $|A| = 6$, $|B| = 6$

**21. Feladat.** Az $A, B, C$ halmazokra teljesül, hogy $A, B \subseteq C$ és $A \cap B = \emptyset$. Melyek igazak az alábbiak közül?

(a) $|A| < |C|$ (b) $|A| + |B| < |C|$ (c) $|A \cup B| \leq |C|$ (d) $|A \cap B| < |B|$

**Megoldás.**

(a) hamis (b) hamis (c) igaz (d) hamis

**22.* Feladat.** Legyen $|A| = a$ és $|B| = b$ két véges halmaz, ahol $a < b$. Hány eleműek lehetnek az alábbi halmazok?

(a) $A \setminus B$
(b) $A \cup B$
(c) $A \cap B$
(d) $A \triangle B$
(e) $A \triangle A$
(f) $A \triangle \emptyset$
(g) $A \setminus (A \triangle B)$
(h) $A \times B$
(i) $A \times A$
(j) $A \times \emptyset$
(k) $A \times (A \cup B)$

**Megoldás.**

(a) $0 \leq |A \setminus B| \leq a$
(b) $b \leq |A \cup B| \leq a + b$
(c) $0 \leq |A \cap B| \leq a$
(d) $b - a \leq |A \triangle B| \leq a + b$
(e) $|A \triangle A| = 0$
(f) $|A \triangle \emptyset| = a$
(g) $0 \leq |A \setminus (A \triangle B)| \leq a$
(h) $|A \times B| = a \cdot b$
(i) $|A \times A| = a^2$
(j) $|A \times \emptyset| = 0$
(k) $ab \leq |A \times (A \cup B)| \leq a(a + b)$

**23. Feladat.** Tudjuk, hogy $|A \times B| = 24$. Mekkora lehet az

(a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \setminus B$

halmazok elemszáma?

**Megoldás.**

(a) $6 \leq |A \cup B| \leq 25$ (b) $0 \leq |A \cap B| \leq 4$ (c) $0 \leq |A \setminus B| \leq 24$

# Számhalmazok. A valós számkör felépítése

**24. Feladat.** Válasszuk ki az alábbi számok közül azokat, amelyek elemei

(i) az egész számok halmazának,

(ii) a pozitív racionális számok halmazának.

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $\frac{-2{,}1}{0{,}1}$

(c) $\frac{1{,}5}{1{,}2}$

(d) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

(e) $4{,}12$

(f) $4{,}1\dot{2}$

(g) $0!$

(h) $1{,}\dot{9}$

(i) $3{,}4\overline{19}$

(j) $7-\sqrt{5}$

(k) $\pi$

(l) $e$

(m) $\sqrt{4}$

(n) $\sqrt{3}$

(o) $\sqrt[3]{-64}$

(p) $\sqrt[4]{8}$

(q) $7^{\frac{1}{3}}$

(r) $16^{\frac{5}{4}}$

(s) $\log_2 \frac{3}{96}$

(t) $\log_9 27$

(u) $\log_3 4$

(v) $\log_\pi 1$

(w) $5^{\log_5 4}$

(x) $\sin \pi$

(y) $\cos 840°$

**Megoldás.**

(i) Egészek: (b), (d), (g), (h), (m), (o), (r), (s), (v), (w), (x).

(ii) Pozitív racionálisok: (a), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i), (m), (r), (t), (w).

**25. Feladat.** Válassza ki az alábbi állítások közül azokat, amelyek igazak.

(a) Ha $a$ és $b$ is nemnegatív egész szám, akkor $a+b$ is nemnegatív egész szám.

(b) Ha $a$ és $b$ is nemnegatív egész szám, akkor $a-b$ is nemnegatív egész szám.

(c) Ha $a$ és $b$ is nemnegatív egész szám, akkor $a \cdot b$ is nemnegatív egész szám.

(d) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a+b$ is nemnegatív egész szám.

(e) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a+b$ pozitív egész szám.

(f) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a+b$ nempozitív egész szám.

(g) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész, szám, melyekre $a+b$ negatív egész szám.

(h) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a \cdot b$ is nemnegatív egész szám.

(i) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a \cdot b$ pozitív egész szám.

(j) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész szám, melyekre $a \cdot b$ nempozitív egész szám.

(k) Létezik olyan $a$ és $b$ nemnegatív egész, szám, melyekre $a \cdot b$ negatív egész szám.

(l) Ha $a+b$ nempozitív egész szám, akkor $a$ és $b$ is nempozitív egész szám.

(m) Ha $a+b$ nempozitív egész szám, akkor $a$ vagy $b$ nempozitív egész szám.

(n) Ha $a+b$ nempozitív egész szám, akkor vagy $a$ vagy $b$ nempozitív egész szám.

(o) Ha $a+b$ pozitív egész szám, és $a$ nemnegatív egész szám, akkor $b$ pozitív egész szám.

(p) Ha $a \cdot b$ pozitív egész szám, és $a$ nemnegatív egész szám, akkor $b$ pozitív egész szám.

(q) Ha $a \cdot b$ pozitív egész szám, és $a$ nemnegatív egész szám, akkor $b$ pozitív szám.

**Megoldás.**

(a) igaz
(b) hamis
(c) igaz
(d) igaz
(e) igaz
(f) igaz
(g) hamis
(h) igaz
(i) igaz
(j) igaz
(k) hamis
(l) hamis
(m) igaz
(n) hamis
(o) hamis
(p) hamis
(q) igaz

# Logikai szita

**26. Feladat.** Hány olyan 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám van, amely

(a) osztható 2-vel és 3-mal;
(b) osztható 2-vel vagy 3-mal;
(c) osztható vagy 2-vel vagy 3-mal;
(d) ha osztható 2-vel, akkor 3-mal is;
(e) nem osztható 2-vel, de 3-mal igen;
(f) nem osztható 3-mal, de 2-vel igen;
(g) a 2, 3, 4 számok közül pontosan kettővel osztható;
(h) a 2, 3, 5 számok közül pontosan kettővel osztható;
(i) a 2, 3, 6 számok közül pontosan kettővel osztható.

**Megoldás.**

(a) 16
(b) 67
(c) 51
(d) 66
(e) 17
(f) 34
(g) 16
(h) 23
(i) 0

**27. Feladat.** Egy 30 fős osztályban mindenki tanulja a német vagy az angol nyelv valamelyikét. Tudjuk, hogy háromszor annyian tanulják mindkét nyelvet, mint ahányan csak angolul tanulnak. Csak németül feleannyian tanulnak, mint ahányan angolul tanulnak. Hányan tanulnak az osztályból

(a) angolul,
(b) csak angolul,
(c) csak németül,
(d) egyik nyelven sem,
(e) valamelyik nyelven,
(f) pontosan az egyik nyelven?

**Megoldás.**

(a) 20
(b) 5
(c) 10
(d) 0
(e) 30
(f) 15

**28. Feladat.** Egy munkahelyen 62-en dolgoznak. Közülük 20-an sportolnak, 14-en dohányoznak és 23-an barna hajúak. Továbbá 7 barna hajú dohányos, 8 barna hajú sportoló és 3 dohányos sportoló van a dolgozók között. Hárman vannak a barna hajú dohányos sportolók is.

(a) Hány nem dohányzó barna hajú ember dolgozik ezen a munkahelyen?
(b) Hány olyan dolgozó van aki sportol és nem dohányzik?
(c) Hányan vannak a nem barna hajú sportolók?

Tegyünk fel olyan kérdéseket amelyekre a válasz

(i) 20,
(ii) 12,
(iii) 22,
(iv) 32.

**Megoldás.**

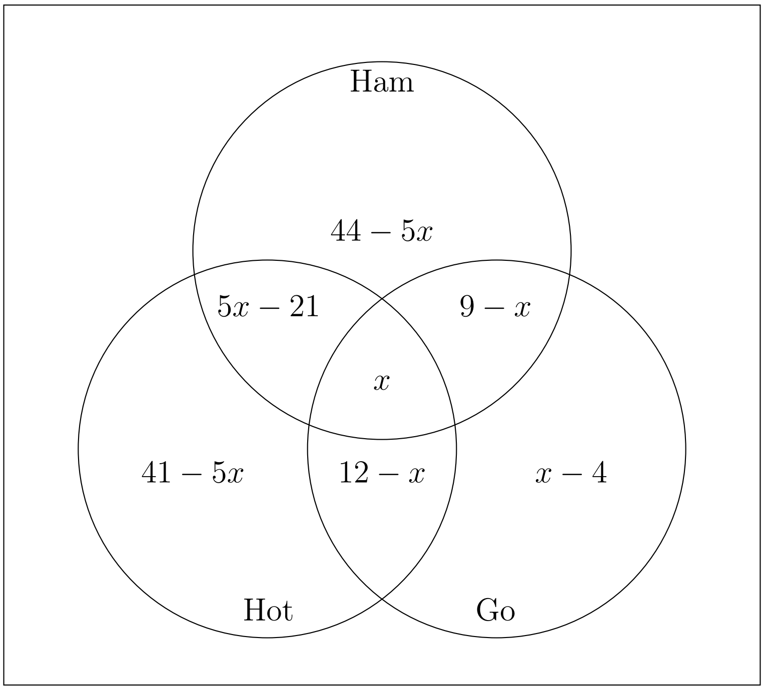
(a) 16
(b) 17
(c) 12

(i) Hány olyan dolgozó van, aki nem barna hajú, nem dohányzik és nem is sportol?
(ii) Hány nem dohányzó sportolónak nincs barna haja?
(iii) Hány olyan nem sportoló dolgozó van aki barna hajú vagy dohányzik?
(iv) Hány olyan dolgozó van, aki nem barna hajú és nem is dohányzik?

**29.* Feladat.** Egy gyorsétteremben hamburger, gofri és hot dog kapható. A tulajdonos egy pénteki napon a rendeléseket összesítve a következőket tapasztalta. Hamburgert 32-en, gofrit 17-en, hot dogot szintén 32-en rendeltek. Hamburgert és gofrit 9-en, gofrit és hot dogot 12-en rendeltek. Pontosan kétféle ételt háromszor annyian rendeltek, mint háromfélét.

(a) Hány olyan megrendelő volt, aki hamburgert rendelt, de goofrit nem?
(b) Hánnyal vannak többen azok, akik nem rendeltek hotdogot, mint azok, akik csak hotdogot rendeltek?
(c) Hányan rendeltek gofrit vagy hamburgert?
(d) Lehet-e a rendelést leadók száma öttel osztható?

**Megoldás.** Tekintsük az alábbi halmazábrát, ahol $x$ jelöli a mindhárom ételt rendelők számát.




(a) 23 (b) 8-cal (c) 40 (d) Nem

# 2 | Számelméleti alapok. Elemi algebrai azonosságok

## Elemi algebrai azonosságok

**1. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $2a + 4b + 6c$

(b) $2a^3 + 3a^2 + 4a$

(c) $6x^2yz + 4xy^2z + 10xyz^2$

(d) $a(x + y) + b(x + y)$

(e) $4(2a + b) - c(b + 2a)$

(f) $ab(2x - 3y) + c(3y - 2x)$

(g) $2x(3 - a) - 3y(a - 3)$

(h) $a(5 - 2b) + b(10 - 4b)$

(i) $x(2b - 4c) + y(3b - 6c)$

(j) $a(x + y) + 2x + 2y$

(k) $x(5a - b) + 10a - 2b$

(l) $xa + xb + ya + yb$

(m) $4ax + bx + 8ay + 2by$

(n) $2x^3 - 10x^2 - 15y + 3xy$

(o) $y^3 + 9 + 3y^2 + 3y$

**2. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $x^2 + 6x + 8$

(b) $x^2 + 8x + 7$

(c) $x^2 + x - 12$

(d) $x^2 - x - 12$

(e) $2x^2 - 4x - 30$

(f) $x^4 + 4x^2 + 3$

(g) $x^3 + 2x - 3x$

(h) $x^2 + 4x + 10$

(i) $-x^8 + 2x^4 + 35$

**3. Feladat.** Alakítsuk teljes négyzetté az alábbi kifejezéseket.

(a) $x^2 + 6x + 8$

(b) $x^2 + 4x + 9$

(c) $x^2 + x + 3$

(d) $x^2 - x$

(e) $x^2 - 2x - 12$

(f) $x^2 - 10x + 6$

(g) $2x^2 - 8x + 30$

(h) $-x^2 + 3x - 5$

(i) $x^4 + 4x^2 + 3$

**4. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^2 - b^2$
(b) $x^2 - 16$
(c) $9 - y^2$
(d) $4x^2 - 1$
(e) $16x^2 - 81y^2$
(f) $1 - x^2y^2$
(g) $a^2b^2 - b^2c^2$
(h) $x^2y^4z^6 - x^6y^2z^4$
(i) $y^6 - c^{10}$
(j) $4a^{2k} - 36b^{4k-2}$
(k) $100x^2 - 16y^4$
(l) $\frac{16}{25}x^2 - \frac{100}{81}y^{10}$
(m) $0{,}01x^2 - 0{,}25y^6$
(n) $\frac{4}{49a^2} - \frac{16b^2}{121}$
(o) $2x^2 - 2$
(p) $7a^2 - 63b^2$
(q) $c^2a - a^3$
(r) $300 \cdot \frac{1}{a^{10}} - 27b^4$
(s) $1 - x^{16}$
(t) $(a+b)^2 - x^2$
(u) $(a-3b)^2 - (c-2a)^2$
(v) $4(3a-2b)^2 - 9(2a-3b)^2$

**5. Feladat.** Végezzük el a kijelölt műveleteket.

(a) $(a+b)^2$
(b) $(a-b)^2$
(c) $(2a-3)^2$
(d) $(4x+5y)^2$
(e) $(-3a-5c)^2$
(f) $(3x^2-10y^3)^2$
(g) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$
(h) $\left(\frac{b}{3}-\frac{2a}{4}\right)^2$
(i) $(a^2+2b^3)^2$
(j) $(12xy^2+5x^2y^3)^2$
(k) $\left(0{,}1a+\frac{1}{2}b\right)^2$
(l) $(a+b+c)^2$
(m) $(a-b+c)^2$
(n) $(a-b-c)^2$
(o) $(2x-3y+5z)^2$
(p) $(2a^2+10b^2-3c^3)^2$
(q) $(a+2b-3c+5z)^2$

**6. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^2+2ab+b^2$
(b) $a^2-2ab+b^2$
(c) $a^2-4a+4$
(d) $x^2+6x+9$
(e) $4x^2+4x+1$
(f) $9a^2-30ab+25b^2$
(g) $a^4-30a^2+225$
(h) $x^{10}+20x^5+100$
(i) $a^2c^2+2ac+1$
(j) $16x^4y^6-48x^3y^5+36x^2y^4$
(k) $9a^4b^2+12a^3b^3+4a^2b^4$
(l) $5x^2+10x+5$
(m) $-x^2-24x-144$
(n) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
(o) $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$
(p) $a^2+4+x^4+4a+4x^2+2ax^2$

**Elméleti kiegészítés.**

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

**7. Feladat.** Végezzük el az alábbi műveleteket.

(a) $(a+b)^3$
(b) $(a-b)^3$
(c) $(2a-3)^3$
(d) $(4x+5y)^3$
(e) $(-3a-5c)^3$
(f) $(3x^2-10y^3)^3$
(g) $(a^2+b^3)^3$
(h) $(2ac-3ab)^3$
(i) $(3a^4+b^6)^3$

**Elméleti kiegészítés.**

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

**8. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^3-b^3$
(b) $a^3+b^3$
(c) $a^3-8$
(d) $27+a^6$
(e) $a^6-64b^3$
(f) $8a^3-1$
(g) $27a^6-125b^9$
(h) $1000a^{12}+0{,}125b^{30}$
(i) $40a^3-625$
(j) $3ac^6+3000a$
(k) $\dfrac{1}{8}a^3-\dfrac{64}{125}b^3$

**9. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^6-1$
(b) $a^5+1$
(c) $a^7+1$
(d) $a^5-32$
(e) $a^6-64$
(f) $4a^9+4$

**10. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
(b) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
(c) $a^3-6a^2+12a-8$
(d) $8a^3+12a^2+6a+1$
(e) $27a^6-108a^4+144a^2-64$
(f) $a^9+3a^6b^2+3a^3b^4+b^6$

**Elméleti kiegészítés.**

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b^2-\ldots-ab^{2k-1}+b^{2k})$$

$$a^{2k}-b^{2k}=(a+b)(a^{2k-1}-a^{2k-2}b+a^{2k-3}b^2-\ldots+ab^{2k-1}-b^{2k})$$

**11. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

(b) $x^2 + 6x + 9 - a^2$

(c) $1 - x^2 + 10xy - 25y^2$

(d) $9a^2 - 30ab + 25b^2 - 100$

(e) $y^6 - a^4 - 30a^2 - 225$

(f) $x^{10} + 20x^5 + 100 - 9a^4$

(g) $a^2c^2 + 2ac + 1 - 81a^4c^6$

(h) $a^2 - b^2 - a + b$

(i) $a^2 - b^2 + a + b$

**12.* Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $x^4 + x^2 + 1$

(b) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

(c) $x^6 - x^4 + 4x^3 + 4x^2$

(d) $x^4 + x^3 + x + 1$

(e) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$

(f) $a^2 + 10ab - 70b - 49$

**13. Feladat.** Egyszerűsítsük az alábbi törteket, a változók lehetséges értékei mellett.

(a) $\dfrac{12x^2y^2z^4}{18x^3y^2z^3}$

(b) $\dfrac{25a^6b^4c}{5(ab)^3}$

(c) $\dfrac{40a^2b^{10}c^5}{200a^{12}(b^4c^3)^4}$

(d) $\dfrac{a-b}{b-a}$

(e) $\dfrac{2x+2y}{-3y-3x}$

(f) $\dfrac{(x+5)^2}{2x+10}$

**14. Feladat.** Egyszerűsítsük az alábbi törteket, a változók lehetséges értékei mellett.

(a) $\dfrac{ax+bx+ay+by}{2a+2b}$

(b) $\dfrac{ab+a+bc+c}{ab+a+b+1}$

(c) $\dfrac{(x+4)^2}{x^2+6x+8}$

(d) $\dfrac{a^2+7a+10}{a^2+4a-5}$

(e) $\dfrac{2x^2-2x-4}{5x^2+25x+20}$

(f) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(g) $\dfrac{y^2-1}{y-y^2}$

(h) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

(i) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$

(j) $\dfrac{2a^2-162}{10a+90}$

(k) $\dfrac{a^2-4a+4}{a-2}$

(l) $\dfrac{a^2-6a+9}{a^2-9}$

(m) $\dfrac{a^2-6a+9}{a^2-3b+ab-3a}$

(n) $\dfrac{x^4-1}{x^2+2x+1}$

(o) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(p) $\dfrac{x^4-y^4}{x^3+y^3}$

(q) $\dfrac{x^3+y^3}{2x^2-2xy+2y^2}$

(r) $\dfrac{a^2+2a+4}{8-a^3}$

(s) $\dfrac{x^3-27}{x^3-6x^2+9x}$

(t) $\dfrac{a^4-b^4}{a^3+ab^2}$

(u) $\dfrac{x^2y+y+2xy}{x^3-x}$

(v) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}$

(w) $\dfrac{4x^2-36}{8x^3-216}$

(x) $\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

(y) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-x-y^2-y}$

**15. Feladat.** Végezzük el kijelölt műveleteket, a változók lehetséges értékei mellett és hozzuk az eredményt a lehető legegyszerűbb alakra.

(a) $\frac{x}{4} \cdot \frac{6}{x^2}$

(b) $\frac{12x^2y}{15x^3} : \frac{30x^4}{10y^2}$

(c) $\frac{2x}{3y} \cdot \frac{4x^2}{5y^2} \cdot \frac{y^3}{x^4}$

(d) $\frac{3x+3y}{5x-5y} \cdot \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$

(e) $\frac{x^2-x}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{2x-2}$

(f) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} : \frac{x-2}{x^2-4x+4}$

(g) $\frac{x^2-25}{2x+10} \cdot \frac{10-2x}{x^2-10x+25}$

(h) $\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-2} \cdot \frac{x^2-3x-10}{x^2-6x-7}$

(i) $\frac{x^4-1}{x^3+1} : \frac{x^2-1}{x^3-1}$

(j) $\frac{x^3-8}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+2x}{x^2+2x+4}$

**16. Feladat.** Végezzük el kijelölt műveleteket, a változók lehetséges értékei mellett és hozzuk az eredményt a lehető legegyszerűbb alakra.

(a) $\frac{2a}{15} + \frac{5a}{6}$

(b) $\frac{2}{a^2b} - \frac{5}{2ab^2}$

(c) $\frac{2ab-5a}{b}$

(d) $\frac{a-b}{6a^2b} + \frac{5b+c}{4b^2c} - \frac{7a-c}{10c^2a}$

(e) $\frac{a}{2a-2} - \frac{a+2}{3a-3}$

(f) $\frac{2x}{1-a} + \frac{2x-7}{a-1}$

(g) $\frac{3b}{ax+ay} - \frac{4a}{by+bx}$

(h) $\frac{2(a+1)}{a-2} + \frac{5-3a}{a+2} - \frac{-a+5}{a^2-4}$

(i) $\frac{a}{a^2-4a+4} - \frac{a-1}{a^2+4a+4} - \frac{2}{4-a^2}$

(j) $\frac{a+3}{a^2+3a+2} + \frac{2a-1}{a^2+4a+4}$

(k) $\frac{2a^2+4a-2}{a^3-1} - \frac{a+2}{a^2+a+1}$

(l) $\dfrac{a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}}$

(m) $\dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{ab}}$

(n) $\dfrac{\frac{a}{a-1}-\frac{a-1}{a}}{\frac{a+1}{a}+\frac{a}{a+1}}$

**17. Feladat.** Végezzük el kijelölt műveleteket, a változók lehetséges értékei mellett és hozzuk az eredményt a lehető legegyszerűbb alakra.

(a) $\left(1+\frac{x}{1+x}\right) : \left(1+\frac{3x^2}{x^2-1}\right)$

(b) $\left(1+x+\frac{1}{x}\right) \cdot \left(x+\frac{1}{x}-1\right)$

(c) $\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right) : \left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)$

(d) $\left(\frac{2x}{1-2x}+\frac{2x}{2x+1}\right) : \frac{4x+8x^2}{(1+2x)^2}$

**18.* Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\frac{27}{34} = \frac{2727}{3434} = \frac{272727}{343434} = \dots.$$

**19. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$, $(y \neq z)$, akkor $\frac{x^2 - y^2}{y^2 - z^2} = \frac{x}{z}$.

**20.* Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbb{Z}^+$, akkor

$$\left(\frac{4}{x^2} + \frac{x}{2}\right) : \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)$$

pozitív egész szám.

# Számelméleti alapok

## Oszthatósági feladatok

**21. Feladat.** Mennyit kapunk maradékul ha az alábbi számokat elosztjuk 5-tel $(a, b \in \mathbb{Z}^+)$?

(a) $5a + 15$

(b) $20a + 17$

(c) $15a^2 - 10a + 3$

(d) $(5a - b)^2 - b(b + 10)$

(e) $(2a + 5b)^2 + a(6a - 5)$

**22. Feladat.** Keressük meg a hiányzó számjegyeket, hogy $\overline{987x6}$ osztható legyen

(a) 3-mal,

(b) 4-gyel,

(c) 5-tel,

(d) 6-tal,

(e) 7-tel,

(f) 8-cal,

(g) 9-cel,

(h) 11-gyel,

(i) 12-vel,

(j) 24-gyel,

(k) 36-tal,

(l) 72-vel.

**23. Feladat.** Hány olyan természetes szám van, melyből elvéve a számjegyei összegét 2019-et kapunk?

**24. Feladat.** Keressük meg a hiányzó számjegyeket ha

(a) $18 \mid \overline{3438x}$,

(b) $36 \mid \overline{35x1y}$,

(c) $36 \mid \overline{351xx}$,

(d) $45 \mid \overline{15x67y}$,

(e) $56 \mid \overline{1xy358}$,

(f) $72 \mid \overline{x554y}$.

**25. Feladat.** Igazoljuk, a következő oszthatósági összefüggéseket.

(a) $9 \mid 10^{2019} - 1$

(b) $9 \mid 10^{2019} + 224$

(c) $6 \mid 10^{2019} + 224$

(d) $18 \mid 10^{2019} + 224$

(e) $36 \mid 10^{2019} + 224$

(f) $72 \mid 10^{2019} + 224$

**26. Feladat.** Tudjuk, hogy

$$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = \overline{3603xy}.$$

Határozzuk meg a hiányzó számjegyek értékét, lehetőleg a szorzás elvégzése nélkül.

**27.* Feladat.** Igazoljuk, hogy az $1, 11, 111, \ldots$ sorozatban pontosan egy négyzetszám van.

**28.* Feladat.** Igazoljuk a következő összefüggéseket.

(a) $5 \mid 1^1 + 11^{11} + 111^{111} + \ldots + 11..1^{11..1}$ (Az összeg 2010 tagú.)

(b) $10 \mid 11^{2018} - 1$

(c) $2018 \mid 2019^{2019} + 2017^{2017}$

(d) $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$

**29. Feladat.** Igazoljuk, hogy három egymást követő egész szám szorzata osztható 6-tal.

**30. Feladat.** Igazoljuk, hogy négy egymást követő egész szám szorzata osztható 24-gyel.

**31. Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $n$ természetes számra fennállnak az alábbi összefüggések.

(a) $3 \mid n^3 - n$ (b) $6 \mid n^3 - n$ (c) $5 \mid n^5 - n$

**32.* Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $n$ természetes számra fennállnak az alábbi összefüggések.

(a) $30 \mid n^5 - n$ (b) $7 \mid n^7 - n$ (c) $11 \mid n^{11} - n$

**33. Feladat.** Négy pozitív egész szám szorzata osztható 4-gyel. Melyik lehetséges az alábbi állítások közül, és melyik nem?

(a) Van köztük páros.

(b) Pontosan egy páros van közöttük.

(c) Nincs köztük páratlan.

(d) Nincs köztük 4-gyel osztható.

(e) Összegük páratlan.

**34. Feladat.** Három pozitív egész szám összege osztható 3-mal. Melyik lehetséges az alábbi állítások közül, és melyik nem?

(a) Nincs köztük 3-mal osztható.

(b) Pontosan egy hárommal osztható van közöttük.

(c) Pontosan két hárommal osztható van közöttük.

(d) Pontosan egy hárommal nem osztható van közöttük.

(e) Mindegyik osztható hárommal.

(f) A szorzatuk nem osztható hárommal.

(g) Van köztük páros.

**35. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha

(a) $11 \mid 3a + 4b$, akkor $11 \mid a + 5b$;

(b) $19 \mid a - 5b$, akkor $19 \mid 10a + 7b$;

(c) $17 \mid a - 5b$, akkor $17 \mid 2a + 7b$;

(d) $17 \mid 5a + 2b$, akkor $17 \mid 9a + 7b$;

(e) $16 \mid 12a - 7b$, akkor $16 \mid 4a + 23b$;

(f) $13 \mid 2a+b$ és $13 \mid 5a-4b$ akkor $13 \mid a-6b$;

(g) $7 \mid 10a + b$, akkor $7 \mid 10b + 2a$;

(h) $7 \mid 10b + 2a$, akkor $7 \mid 10a + b$;

(i) $13 \mid 10a + b$, akkor $13 \mid a + 4b$;

(j) $a + c \mid ab + cd$, akkor $a + c \mid ad + bc$;

(k) $a - c \mid ab + cd$, akkor $a - c \mid ad + bc$.

**36. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha az $n$ egész szám nem osztható 5-tel, akkor $n^4 - 1$ igen.

## Osztók száma

**37. Feladat.** Adjuk meg a legkisebb pozitív egész számot, melynek

(a) 1,

(b) 2,

(c) 3,

(d) 4,

(e) 5,

(f) 6,

(g) 8,

(h) 10,

(i) 12

pozitív osztója van.

**38.* Feladat.** Határozzuk meg az $n$ pozitív egész szám értékét úgy, hogy a következő számoknak pontosan 8 pozitív osztója legyen.

(a) $n^3 + n^2 - 2n$

(b) $n^4 - 1$

(c) $n^4 - 5n^2 + 4$

**39.* Feladat.** A szultán börtönében száz cella van, 1-től 100-ig számozva, mindegyikben egy rab. A cellák zárján minden kulcsfordítás változtat a zár „állapotán”, ha nyitva volt bezárja, ha zárva volt kinyitja. A szultán lánya esküvője alkalmából amnesztiát hirdet. Száz fogdaőrt indít útnak. Az első minden zárban fordít egyet a kulcson. A második már csak minden másodikban, tehát a 2, 4, 6,..., 100-as cellákéban. A harmadik minden harmadikban (3, 6,...). És így tovább, a 100. fogdaőrt már csak a 100-as celláéban. Akinek az ajtaja nyitva maradt, az szabadul. Mely cellák lakói távozhatnak? (A cellák kezdetben zárva voltak.)

## Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Az alábbi feladatokban $(a;b)$ az $a$ és $b$ egész számok legnagyobb közös osztóját, míg $[a;b]$ az $a$ és $b$ egész számok legkisebb közös többszörösét jelöli.

**40. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét.

(a) $(120;160)$

(b) $[120;160]$

(c) $(2400;17)$

(d) $[17;2400]$

(e) $(32;36;40)$

(f) $[32;36;40]$

(g) $(2^2\cdot 3^4;2^3\cdot 3)$

(h) $[2^2\cdot 3^4;2^3\cdot 3]$

(i) $(2^2\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7;2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11)$

(j) $[2^2\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7;2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11]$

(k) $(2^2\cdot 6^4\cdot 25^2;4^1\cdot 21\cdot 10^2)$

(l) $[2^2\cdot 6^4\cdot 25^2;4^1\cdot 21\cdot 10^2]$

(m) $(2^2\cdot p^3;2\cdot p^2)$, ahol $p\neq 2$ prím

(n) $[2^2\cdot p^3;2\cdot p^2]$, ahol $p\neq 2$ prím

(o) $(2^2\cdot 3\cdot p\cdot q^2;3^2\cdot p^2\cdot q)$, ahol $p,q\neq 2,3,p\neq q$ prímek

(p) $[2^2\cdot 3\cdot p\cdot q^2;3^2\cdot p^2\cdot q]$, ahol $p,q\neq 2,3,p\neq q$ prímek

**41. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét. A feladatokban $a$ és $b$ tetszőleges pozitív egész számokat jelölnek.

(a) $(a;1)$

(b) $[a;1]$

(c) $(a;a)$

(d) $[a;a]$

(e) $(a;2a)$

(f) $[a;2a]$

(g) $(a;a^2)$

(h) $[a;a^2]$

(i) $(a;b^2)$, ahol $a$ és $b$ relatív prímek

(j) $[a;b^2]$ ahol $a$ és $b$ relatív prímek

(k) $(a^3b^2;ab^2)$, ahol $a$ és $b$ relatív prímek

(l) $[a^3b^2;ab^2]$ , ahol $a$ és $b$ relatív prímek

**42. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét.

(a) $(12;(2^3\cdot 3;2^2\cdot 3^5))$

(b) $[18,(40;66)]$

(c) $[(24;46);[12;38]]$

(d) $[([24;36];[28;42]);([60;25];[35;30])]$

(e) $[2^4\cdot p^2,(24\cdot p;162\cdot p^3)]$, ahol $p\neq 2,3$ prím

(f) $(2^4\cdot p^2,(24\cdot p;162\cdot p^3))$, ahol $p\neq 2,3$ prím

(g) $(2^4\cdot p^2,[24\cdot p;162\cdot p^3])$, ahol $p\neq 2,3$ prím

(h) $[2^4\cdot p^2,[24\cdot p;162\cdot p^3]]$, ahol $p\neq 2,3$ prím

**43. Feladat.** Mely $a$ pozitív egész számokra áll fenn, hogy

(a) $(a;80)=8$,

(b) $(a;8)=80$,

(c) $(a;60)=15$,

(d) $[a;16]=48$,

(e) $(a;120)=[a;24]$?

**44. Feladat.** Mely $n, k$ pozitív egészre teljesül, hogy

(a) $(n;k) = 7$ és $[n;k] = 63$;
(b) $(n;k) = 6$ és $[n;k] = 90$;
(c) $(n;k) = 26$ és $[n;k] = 120$;
(d) $(n;k) = p$ és $[n;k] = pq^2$, ($p, q$ prímek);
(e) $n + k = 11$ és $[n;k] = 30$;
(f) $n + k = 1323$ és $[n;k] = 147$;
(g) $(n;k) = 7$ és $n + k = 100$;
(h) $n + k = 36(n;k)$ és $[n;k] = 3850$;
(i) $n + k = 370$, és $[n;k] = 270(n;k)$;
(j) $n + k = 667$, és $\dfrac{[n;k]}{(n;k)} = 120$.

**45. Feladat.** Adjunk meg három pozitív egész számot melyek legnagyobb közös osztója egy, de közülük semelyik kettő sem relatív prím.

**46. Feladat.** Az alábbi, pozitív egész számokra vonatkozó állítások közül válasszuk ki, hogy melyik igaz, melyik hamis. Ha $a$ és $b$ relatív prímek, akkor ...

(a) $a^2$ és $b$ is;
(b) $2a$ és $b$ is;
(c) $2a$ és $2b$ is;
(d) $a^2$ és $1$ is.

**47.* Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $a$ és $b$ relatív prímek, akkor

(a) $(a; a + b) = 1$, (b) $(a; b^2) = 1$, (c) $(b^2; a + b) = 1$, (d) $(a^2; a - b^2) = 1$.

**48. Feladat.** Mely $n$ egész számok esetén lesz egész az alábbi törtek értéke?

(a) $\dfrac{n-1}{n+2}$
(b) $\dfrac{n+1}{n}$
(c) $\dfrac{2n+2n^2}{n+1}$
(d) $\dfrac{2^n}{n^2+n+1}$, $(n > 0)$

**49. Feladat.** Mely $n$ egész számok esetén egyszerűsíthetők az alábbi törtek?

(a) $\dfrac{n-1}{n+2}$
(b) $\dfrac{n+1}{n}$
(c) $\dfrac{2n+3}{n-1}$
(d) $\dfrac{2n+2n^2}{n+1}$
(e) $\dfrac{n^2+2n+1}{n^2-1}$

**50. Feladat.** Igazoljuk, hogy az alábbi törtek egyetlen $n$ pozitív egész szám esetén sem egyszerűsíthetők.

(a) $\dfrac{n+1}{n}$ (b) $\dfrac{n^2+2n+1}{n}$ (c) $\dfrac{2^n}{n^2+n+1}$ (d) $\dfrac{n^3-n+2}{3^n}$

## Prímszámok

**51.* Feladat.** Hogyan segít az *Eratoszthenészi szita* a prímek „kiszitálásában”?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. |

**52.* Feladat.** Bizonyítsa be, hogy $2007 + n!$ egyetlen $n$ pozitív szám esetén sem lehet

(a) prímszám,

(b) négyzetszám.

**53. Feladat.** Három prímszám összege 2018. Lehet-e a szorzatuk 2031887?

**54. Feladat.** Készítsünk az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyek egyszeri felhasználásával hatjegyű prímet.

**55. Feladat.** Van-e olyan $n$ természetes szám, melyre $2018^n - 1$ és $2018^n + 1$ is prím?

**56. Feladat.** Az $n$ mely legkisebb pozitív értékére teljesülnek az alábbi összefüggések?

(a) $2^{10} \mid n!$

(b) $3^{10} \mid n!$

(c) $12^{10} \mid n!$

(d) $2^{100} \mid n!$

**57. Feladat.** Határozzuk meg a 15! prím(hatvány)tényezős alakját.

**58. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromnál nagyobb prímszám négyzeténél 1-gyel kisebb szám mindig osztható 24-gyel.

**59. Feladat.** Melyik az a legkisebb pozitív egész szám amellyel a 189000-et

(a) elosztva

(b) megszorozva

négyzetszámot kapunk?

**60. Feladat.** Keressük meg az összes olyan $p$ prímet melyre $8p^2 + 1$ prím.

**61. Feladat.** Keressük meg az összes olyan $p$ prímet melyre a következő számok egyszerre prímek.

(a) $p + 10$, $p + 110$, $p + 1110$

(b) $p + 10$, $p + 14$

(c) $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$, $p + 14$

(d) $10p - 1$, $10p + 1$

**62. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $p$ és $p^2 + 8$ prím, akkor $p^2 + p + 1$ és $p^2 + 3p + 1$ is az.

**63. Feladat.** Oldjuk meg a prímek halmazán a $p^q + 1 = r$ egyenletet.

**64. Feladat.** Oldjuk meg a prímek halmazán a következő egyenleteket.

(a) $2p + 3q + 6r = 78$

(b) $2p + 7q + 14r = 252$

**65.* Feladat.** Három prím szorzata az összegük

(a) ötszöröse,

(b) tizenkétszerese.

Határozzuk meg ezeket.

**66.* Feladat.** Két prímről tudjuk, hogy az összegük is prím, valamint, hogy az összegük és a szorzatuk szorzata osztható 10-zel. Határozzuk meg ezeket a prímeket. (Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1987., 10.osztály, 5. feladat)

# Megoldások

## Elemi algebrai azonosságok

**1. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $2a + 4b + 6c$

(b) $2a^3 + 3a^2 + 4a$

(c) $6x^2yz + 4xy^2z + 10xyz^2$

(d) $a(x + y) + b(x + y)$

(e) $4(2a + b) - c(b + 2a)$

(f) $ab(2x - 3y) + c(3y - 2x)$

(g) $2x(3 - a) - 3y(a - 3)$

(h) $a(5 - 2b) + b(10 - 4b)$

(i) $x(2b - 4c) + y(3b - 6c)$

(j) $a(x + y) + 2x + 2y$

(k) $x(5a - b) + 10a - 2b$

(l) $xa + xb + ya + yb$

(m) $4ax + bx + 8ay + 2by$

(n) $2x^3 - 10x^2 - 15y + 3xy$

(o) $y^3 + 9 + 3y^2 + 3y$

**Megoldás.**

(a) $2(a + 2b + 3c)$

(b) $a(2a^2 + 3a + 4)$

(c) $2xyz(3x + 2y + 5z)$

(d) $(a + b)(x + y)$

(e) $(4 - c)(2a + b)$

(f) $(ab - c)(2x - 3y)$

(g) $(3 - a)(2x + 3y)$

(h) $(5 - 2b)(a + 2b)$

(i) $(b - 2c)(2x + 3y)$

(j) $(2 + a)(x + y)$

(k) $(5a - b)(2 + x)$

(l) $(a + b)(x + y)$

(m) $(4a + b)(x + 2y)$

(n) $(x - 5)(2x^2 + 3y)$

(o) $(y + 3)(y^2 + 3)$

**2. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $x^2 + 6x + 8$

(b) $x^2 + 8x + 7$

(c) $x^2 + x - 12$

(d) $x^2 - x - 12$

(e) $2x^2 - 4x - 30$

(f) $x^4 + 4x^2 + 3$

(g) $x^3 + 2x - 3x$

(h) $x^2 + 4x + 10$

(i) $-x^8 + 2x^4 + 35$

**Megoldás.**

(a) $(x+2)(x+4)$
(b) $(x+1)(x+7)$
(c) $(x-3)(x+4)$
(d) $(x-4)(x+3)$
(e) $2(x-5)(x+3)$
(f) $\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)$
(g) $(x-1)x(x+1)$
(h) Nincs szorzat alak.
(i) $-\left(x^4-7\right)\left(x^4+5\right)$

**3. Feladat.** Alakítsuk teljes négyzetté az alábbi kifejezéseket.

(a) $x^2+6x+8$
(b) $x^2+4x+9$
(c) $x^2+x+3$
(d) $x^2-x$
(e) $x^2-2x-12$
(f) $x^2-10x+6$
(g) $2x^2-8x+30$
(h) $-x^2+3x-5$
(i) $x^4+4x^2+3$

**Megoldás.**

(a) $(x+3)^2-1$
(b) $(x+2)^2+5$
(c) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$
(d) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$
(e) $(x-1)^2-13$
(f) $(x-5)^2-19$
(g) $2(x-2)^2+22$
(h) $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{11}{4}$
(i) $\left(x^2+2\right)^2-1$

**4. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^2-b^2$
(b) $x^2-16$
(c) $9-y^2$
(d) $4x^2-1$
(e) $16x^2-81y^2$
(f) $1-x^2y^2$
(g) $a^2b^2-b^2c^2$
(h) $x^2y^4z^6-x^6y^2z^4$
(i) $y^6-c^{10}$
(j) $4a^{2k}-36b^{4k-2}$
(k) $100x^2-16y^4$
(l) $\frac{16}{25}x^2-\frac{100}{81}y^{10}$
(m) $0{,}01x^2-0{,}25y^6$
(n) $\frac{4}{49a^2}-\frac{16b^2}{121}$
(o) $2x^2-2$
(p) $7a^2-63b^2$
(q) $c^2a-a^3$
(r) $300\cdot\frac{1}{a^{10}}-27b^4$
(s) $1-x^{16}$
(t) $(a+b)^2-x^2$
(u) $(a-3b)^2-(c-2a)^2$
(v) $4(3a-2b)^2-9(2a-3b)^2$

**Megoldás.**

(a) $(a-b)(a+b)$

(b) $(x-4)(x+4)$

(c) $(3-y)(3+y)$

(d) $(2x-1)(2x+1)$

(e) $(4x-9y)(4x+9y)$

(f) $(1-xy)(1+xy)$

(g) $b^2(a-c)(a+c)$

(h) $x^2y^2z^4\left(yz-x^2\right)\left(yz+x^2\right)$

(i) $\left(y^3-c^5\right)\left(y^3+c^5\right)$

(j) $\left(2a^k-6b^{2k-1}\right)\left(2a^k+6b^{2k-1}\right)$

(k) $4\left(5x-2y^2\right)\left(5x+2y^2\right)$

(l) $\left(\frac{4}{5}x-\frac{10}{9}y^5\right)\left(\frac{4}{5}x+\frac{10}{9}y^5\right)$

(m) $\left(0{,}1x-0{,}5y^3\right)\left(0{,}1x+0{,}5y^3\right)$

(n) $\left(\frac{2}{7a}-\frac{4b}{11}\right)\left(\frac{2}{7a}+\frac{4b}{11}\right)$

(o) $2(x-1)(x+1)$

(p) $7(a-3b)(a+3b)$

(q) $a(c-a)(c+a)$

(r) $3\left(10\cdot\frac{1}{a^5}-3b^2\right)\left(10\cdot\frac{1}{a^5}+3b^2\right)$

(s) $(1-x)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)\left(x^8+1\right)$

(t) $(a+b-x)(a+b+x)$

(u) $(3a-3b-c)(-a-3b+c)$

(v) $5b(12a-13b)$

**5. Feladat.** Végezzük el a kijelölt műveleteket.

(a) $(a+b)^2$

(b) $(a-b)^2$

(c) $(2a-3)^2$

(d) $(4x+5y)^2$

(e) $(-3a-5c)^2$

(f) $(3x^2-10y^3)^2$

(g) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$

(h) $\left(\frac{b}{3}-\frac{2a}{4}\right)^2$

(i) $(a^2+2b^3)^2$

(j) $(12xy^2+5x^2y^3)^2$

(k) $\left(0{,}1a+\frac{1}{2}b\right)^2$

(l) $(a+b+c)^2$

(m) $(a-b+c)^2$

(n) $(a-b-c)^2$

(o) $(2x-3y+5z)^2$

(p) $(2a^2+10b^2-3c^3)^2$

(q) $(a+2b-3c+5z)^2$

**Megoldás.**

(a) $a^2+2ab+b^2$

(b) $a^2-2ab+b^2$

(c) $4a^2-12a+9$

(d) $16x^2+40xy+25y^2$

(e) $9a^2+30ac+25c^2$

(f) $9x^4-60x^2y^3+100y^6$

(g) $a^2+\frac{1}{a^2}+2$

(h) $\frac{a^2}{4}-\frac{ab}{3}+\frac{b^2}{9}$

(i) $a^4+4a^2b^3+4b^6$

(j) $25x^4y^6+120x^3y^5+144x^2y^4$

(k) $0{,}01a^2+0{,}1ab+\frac{b^2}{4}$

(l) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

(m) $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$

(n) $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

(o) $4x^2+9y^2+25z^2-12xy+20xz-30yz$

(p) $4a^4+100b^4+9c^6+40a^2b^2-12a^2c^3-60b^2c^3$

(q) $a^2+4b^2+9c^2+25z^2+4ab-6ac+10az-12bc+20bz-30cz$

**6. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^2 + 2ab + b^2$

(b) $a^2 - 2ab + b^2$

(c) $a^2 - 4a + 4$

(d) $x^2 + 6x + 9$

(e) $4x^2 + 4x + 1$

(f) $9a^2 - 30ab + 25b^2$

(g) $a^4 - 30a^2 + 225$

(h) $x^{10} + 20x^5 + 100$

(i) $a^2c^2 + 2ac + 1$

(j) $16x^4y^6 - 48x^3y^5 + 36x^2y^4$

(k) $9a^4b^2 + 12a^3b^3 + 4a^2b^4$

(l) $5x^2 + 10x + 5$

(m) $-x^2 - 24x - 144$

(n) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

(o) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

(p) $a^2 + 4 + x^4 + 4a + 4x^2 + 2ax^2$

**Megoldás.**

(a) $(a + b)^2$

(b) $(a - b)^2$

(c) $(a - 2)^2$

(d) $(x + 3)^2$

(e) $(2x + 1)^2$

(f) $(3a - 5b)^2$

(g) $\left(a^2 - 15\right)^2$

(h) $\left(x^5 + 10\right)^2$

(i) $(ac + 1)^2$

(j) $4x^2y^4(2xy - 3)^2$

(k) $a^2b^2(3a + 2b)^2$

(l) $5(x + 1)^2$

(m) $-(x + 12)^2$

(n) $(a + b + c)^2$

(o) $(a + b - c)^2$

(p) $\left(a + x^2 + 2\right)^2$

**7. Feladat.** Végezzük el az alábbi műveleteket.

(a) $(a + b)^3$

(b) $(a - b)^3$

(c) $(2a - 3)^3$

(d) $(4x + 5y)^3$

(e) $(-3a - 5c)^3$

(f) $(3x^2 - 10y^3)^3$

(g) $(a^2 + b^3)^3$

(h) $(2ac - 3ab)^3$

(i) $(3a^4 + b^6)^3$

**Megoldás.**

(a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(b) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(c) $8a^3 - 36a^2 + 54a - 27$

(d) $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$

(e) $-27a^3 - 135a^2c - 225ac^2 - 125c^3$

(f) $27x^6 - 270x^4y^3 + 900x^2y^6 - 1000y^9$

(g) $a^6 + 3a^4b^3 + 3a^2b^6 + b^9$

(h) $-27a^3b^3 + 54a^3b^2c - 36a^3bc^2 + 8a^3c^3$

(i) $27a^{12} + 27a^8b^6 + 9a^4b^{12} + b^{18}$

**8. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^3 - b^3$
(b) $a^3 + b^3$
(c) $a^3 - 8$
(d) $27 + a^6$
(e) $a^6 - 64b^3$
(f) $8a^3 - 1$
(g) $27a^6 - 125b^9$
(h) $1000a^{12} + 0{,}125b^{30}$
(i) $40a^3 - 625$
(j) $3ac^6 + 3000a$
(k) $\frac{1}{8}a^3 - \frac{64}{125}b^3$

**Megoldás.**

(a) $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$
(b) $(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$
(c) $(a-2)\left(a^2+2a+4\right)$
(d) $\left(a^2+3\right)\left(a^2-3a+3\right)\left(a^2+3a+3\right)$
(e) $\left(a^2-4b\right)\left(a^4+4a^2b+16b^2\right)$
(f) $(2a-1)\left(4a^2+2a+1\right)$
(g) $\left(3a^2-5b^3\right)\left(9a^4+15a^2b^3+25b^6\right)$
(h) $\left(10a^4+0{,}5b^{10}\right)\left(100a^8-5a^4b^{10}+0{,}25b^{20}\right)$
(i) $5(2a-5)\left(4a^2+10a+25\right)$
(j) $3a\left(c^2+10\right)\left(c^4-10c^2+100\right)$
(k) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{4}{5}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{2}{5}ab+\frac{16}{25}b^2\right)$

**9. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^6 - 1$
(b) $a^5 + 1$
(c) $a^7 + 1$
(d) $a^5 - 32$
(e) $a^6 - 64$
(f) $4a^9 + 4$

**Megoldás.**

(a) $(a-1)(a+1)\left(a^2-a+1\right)\left(a^2+a+1\right)$
(b) $(a+1)\left(a^4-a^3+a^2-a+1\right)$
(c) $(a+1)\left(a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1\right)$
(d) $(a-2)\left(a^4+2a^3+4a^2+8a+16\right)$
(e) $(a-2)(a+2)\left(a^2-2a+4\right)\left(a^2+2a+4\right)$
(f) $4(a+1)\left(a^2-a+1\right)\left(a^6-a^3+1\right)$

**10. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
(b) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
(c) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$
(d) $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$
(e) $27a^6 - 108a^4 + 144a^2 - 64$
(f) $a^9 + 3a^6b^2 + 3a^3b^4 + b^6$

**Megoldás.**

(a) $(a+b)^3$
(b) $(a-b)^3$
(c) $(a-2)^3$
(d) $(2a+1)^3$
(e) $\left(3a^2-4\right)^3$
(f) $\left(a^3+b^2\right)^3$

**11. Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $a^2 + 2ab + b^2 - 1$
(b) $x^2 + 6x + 9 - a^2$
(c) $1 - x^2 + 10xy - 25y^2$
(d) $9a^2 - 30ab + 25b^2 - 100$
(e) $y^6 - a^4 - 30a^2 - 225$
(f) $x^{10} + 20x^5 + 100 - 9a^4$
(g) $a^2c^2 + 2ac + 1 - 81a^4c^6$
(h) $a^2 - b^2 - a + b$
(i) $a^2 - b^2 + a + b$

**Megoldás.**

(a) $(a + b - 1)(a + b + 1)$
(b) $(x + 3 - a)(x + 3 + a)$
(c) $(1 - x + 5y)(1 + x - 5y)$
(d) $(3a - 5b - 10)(3a - 5b + 10)$
(e) $(y^3 - a^2 - 15)(y^3 + a^2 + 15)$
(f) $(x^5 + 10 - 3a^2)(x^5 + 10 + 3a^2)$
(g) $(ac + 1 - 9a^2c^3)(ac + 1 + 9a^2c^3)$
(h) $(a - b)(a + b - 1)$
(i) $(a - b + 1)(a + b)$

**12.* Feladat.** Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket.

(a) $x^4 + x^2 + 1$
(b) $x^4 + x^2y^2 + y^4$
(c) $x^6 - x^4 + 4x^3 + 4x^2$
(d) $x^4 + x^3 + x + 1$
(e) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$
(f) $a^2 + 10ab - 70b - 49$

**Megoldás.**

(a) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
(b) $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$
(c) $x^2(x + 1)(x^3 - x^2 + 4)$
(d) $(x + 1)^2(x^2 - x + 1)$
(e) $(x - 1)(x + 1)^2(x^2 - x + 1)$
(f) $(a - 7)(a + 10b + 7)$

**13. Feladat.** Egyszerűsítsük az alábbi törteket, a változók lehetséges értékei mellett.

(a) $\dfrac{12x^2y^2z^4}{18x^3y^2z^3}$
(b) $\dfrac{25a^6b^4c}{5(ab)^3}$
(c) $\dfrac{40a^2b^{10}c^5}{200a^{12}(b^4c^3)^4}$
(d) $\dfrac{a - b}{b - a}$
(e) $\dfrac{2x + 2y}{-3y - 3x}$
(f) $\dfrac{(x + 5)^2}{2x + 10}$

**Megoldás.**

(a) $\dfrac{2z}{3x}$
(b) $5a^3bc$
(c) $\dfrac{1}{5a^{10}b^6c^7}$
(d) $-1$
(e) $-\dfrac{2}{3}$
(f) $\dfrac{x + 5}{2}$

**14. Feladat.** Egyszerűsítsük az alábbi törteket, a változók lehetséges értékei mellett.

(a) $\dfrac{ax+bx+ay+by}{2a+2b}$

(b) $\dfrac{ab+a+bc+c}{ab+a+b+1}$

(c) $\dfrac{(x+4)^2}{x^2+6x+8}$

(d) $\dfrac{a^2+7a+10}{a^2+4a-5}$

(e) $\dfrac{2x^2-2x-4}{5x^2+25x+20}$

(f) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(g) $\dfrac{y^2-1}{y-y^2}$

(h) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

(i) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$

(j) $\dfrac{2a^2-162}{10a+90}$

(k) $\dfrac{a^2-4a+4}{a-2}$

(l) $\dfrac{a^2-6a+9}{a^2-9}$

(m) $\dfrac{a^2-6a+9}{a^2-3b+ab-3a}$

(n) $\dfrac{x^4-1}{x^2+2x+1}$

(o) $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

(p) $\dfrac{x^4-y^4}{x^3+y^3}$

(q) $\dfrac{x^3+y^3}{2x^2-2xy+2y^2}$

(r) $\dfrac{a^2+2a+4}{8-a^3}$

(s) $\dfrac{x^3-27}{x^3-6x^2+9x}$

(t) $\dfrac{a^4-b^4}{a^3+ab^2}$

(u) $\dfrac{x^2y+y+2xy}{x^3-x}$

(v) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}$

(w) $\dfrac{4x^2-36}{8x^3-216}$

(x) $\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$

(y) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-x-y^2-y}$

**Megoldás.**

(a) $\dfrac{x+y}{2}$

(b) $\dfrac{a+c}{a+1}$

(c) $\dfrac{x+4}{x+2}$

(d) $\dfrac{a+2}{a-1}$

(e) $\dfrac{2(x-2)}{5(x+4)}$

(f) $x+1$

(g) $-\dfrac{y+1}{y}$

(h) $\dfrac{a+b}{a-b}$

(i) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$

(j) $\dfrac{a-9}{5}$

(k) $a-2$

(l) $\dfrac{a-3}{a+3}$

(m) $\dfrac{a-3}{a+b}$

(n) $\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x+1}$

(o) $x^2-y^2$

(p) $\dfrac{(x-y)(x^2+y^2)}{x^2-xy+y^2}$

(q) $\dfrac{x+y}{2}$

(r) $\dfrac{1}{2-a}$

(s) $\dfrac{x^2+3x+9}{x(x-3)}$

(t) $\dfrac{a^2-b^2}{a}$

(u) $\dfrac{(x+1)y}{(x-1)x}$

(v) $x+2$

(w) $\dfrac{x+3}{2x^2+6x+18)}$

(x) $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$

(y) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y-1}$

**15. Feladat.** Végezzük el kijelölt műveleteket, a változók lehetséges értékei mellett és hozzuk az eredményt a lehető legegyszerűbb alakra.

(a) $\frac{x}{4} \cdot \frac{6}{x^2}$

(b) $\frac{12x^2y}{15x^3} : \frac{30x^4}{10y^2}$

(c) $\frac{2x}{3y} \cdot \frac{4x^2}{5y^2} \cdot \frac{y^3}{x^4}$

(d) $\frac{3x+3y}{5x-5y} \cdot \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$

(e) $\frac{x^2-x}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{2x-2}$

(f) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} : \frac{x-2}{x^2-4x+4}$

(g) $\frac{x^2-25}{2x+10} \cdot \frac{10-2x}{x^2-10x+25}$

(h) $\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-2} \cdot \frac{x^2-3x-10}{x^2-6x-7}$

(i) $\frac{x^4-1}{x^3+1} : \frac{x^2-1}{x^3-1}$

(j) $\frac{x^3-8}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+2x}{x^2+2x+4}$

**Megoldás.**

(a) $\frac{3}{2x}$

(b) $\frac{4y^3}{15x^5}$

(c) $\frac{8}{15x}$

(d) $\frac{3}{5}$

(e) $\frac{1}{2}(x-2)x$

(f) $x+2$

(g) $-1$

(h) $\frac{(x-5)(x+3)}{(x-7)(x-1)}$

(i) $\frac{(x^2+1)(x-1)(x^2+x+1)}{x^3+1}$

(j) $x$

**16. Feladat.** Végezzük el kijelölt műveleteket, a változók lehetséges értékei mellett és hozzuk az eredményt a lehető legegyszerűbb alakra.

(a) $\frac{2a}{15} + \frac{5a}{6}$

(b) $\frac{2}{a^2b} - \frac{5}{2ab^2}$

(c) $\frac{2ab-5a}{b}$

(d) $\frac{a-b}{6a^2b} + \frac{5b+c}{4b^2c} - \frac{7a-c}{10c^2a}$

(e) $\frac{a}{2a-2} - \frac{a+2}{3a-3}$

(f) $\frac{2x}{1-a} + \frac{2x-7}{a-1}$

(g) $\frac{3b}{ax+ay} - \frac{4a}{by+bx}$

(h) $\frac{2(a+1)}{a-2} + \frac{5-3a}{a+2} - \frac{-a+5}{a^2-4}$

(i) $\frac{a}{a^2-4a+4} - \frac{a-1}{a^2+4a+4} - \frac{2}{4-a^2}$

(j) $\frac{a+3}{a^2+3a+2} + \frac{2a-1}{a^2+4a+4}$

(k) $\frac{2a^2+4a-2}{a^3-1} - \frac{a+2}{a^2+a+1}$

(l) $\frac{a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}}$

(m) $\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}{1+\dfrac{1}{ab}}$

(n) $\dfrac{\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a-1}{a}}{\dfrac{a+1}{a}+\dfrac{a}{a+1}}$

**Megoldás.**

(a) $\dfrac{29a}{30}$

(b) $\dfrac{4b-5a}{2a^2b^2}$

(c) $a\left(2-\dfrac{5}{b}\right)$

(d) $\dfrac{10abc^2-10b^2c^2+75a^2bc+15a^2c^2-42a^2b^2+6ab^2c}{60a^2b^2c^2}$

(e) $\dfrac{a-4}{6(a-1)}$

(f) $\dfrac{-7}{a-1}$

(g) $\dfrac{3b^2-4a^2}{abx+aby}$

(h) $\dfrac{a^2-18a+11}{4-a^2}$

(i) $\dfrac{11a^2-4a-4}{\left(a^2-4\right)^2}$

(j) $\dfrac{3a^2+6a+5}{(a+1)(a+2)^2}$

(k) $\dfrac{a^2+3a}{a^3-1}$

(l) $1-\dfrac{2}{a^2+1}$

(m) $\dfrac{a-b}{ab+1}$

(n) $\dfrac{-2a^2-a+1}{-2a^3+a+1}$

**17. Feladat.** Végezzük el kijelölt műveleteket, a változók lehetséges értékei mellett és hozzuk az eredményt a lehető legegyszerűbb alakra.

(a) $\left(1+\dfrac{x}{1+x}\right):\left(1+\dfrac{3x^2}{x^2-1}\right)$

(b) $\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}-1\right)$

(c) $\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right):\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}\right)$

(d) $\left(\dfrac{2x}{1-2x}+\dfrac{2x}{2x+1}\right):\dfrac{4x+8x^2}{(1+2x)^2}$

**Megoldás.**

(a) $\dfrac{x-1}{2x-1}$

(b) $x^2+\dfrac{1}{x^2}+1$

(c) $\dfrac{2}{x}$

(d) $\dfrac{1}{1-2x}$

**18.* Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\frac{27}{34}=\frac{2727}{3434}=\frac{272727}{343434}=\dots.$$

**Megoldás.** Mivel $\underbrace{272727\dots2727}_{k \text{ db } 27\text{-es}}=27\cdot 1\underbrace{0101\dots01}_{k-1 \text{ db } 01\text{-es}}$, ezért értelemszerűen

$$\frac{2727\dots2727}{3434\dots3434}=\frac{27}{34}\cdot\frac{10101\dots01}{10101\dots01}=\frac{27}{34}.$$

**19. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$, $(y \neq z)$, akkor $\frac{x^2 - y^2}{y^2 - z^2} = \frac{x}{z}$.

**Megoldás.** Ha $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$, akkor $y^2 = xz$, amiből

$$\frac{x^2 - y^2}{y^2 - z^2} = \frac{x^2 - xz}{xz - z^2} = \frac{x(x-z)}{z(x-z)} = \frac{x}{z}.$$

**20.* Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $x \in \mathbb{Z}^+$, akkor

$$\left(\frac{4}{x^2} + \frac{x}{2}\right) : \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)$$

pozitív egész szám.

**Megoldás.** Egyszerűsítések sorozatával azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{4}{x^2} + \frac{x}{2}\right) : \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x^3 + 8}{2x^2} \cdot \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 4} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x^2 - 2x + 4} = x + 2.$$

Ha $x$ pozitív egész, akkor $x + 2$ is az.

# Számelméleti alapok

## Oszthatósági feladatok

**21. Feladat.** Mennyit kapunk maradékul ha az alábbi számokat elosztjuk 5-tel $(a, b \in \mathbb{Z}^+)$?

(a) $5a + 15$

(b) $20a + 17$

(c) $15a^2 - 10a + 3$

(d) $(5a - b)^2 - b(b + 10)$

(e) $(2a + 5b)^2 + a(6a - 5)$

**Megoldás.** Algebrai átalakítások és maradékvizsgálat után a következőket kapjuk.

(a) A maradék 0, mivel $5a + 15 = 5(a + 3)$.

(b) A maradék 2, mert $20a + 17 = 5(4a + 3) + 2$.

(c) Mivel $15a^2 - 10a + 3 = 5(3a^2 - 2a) + 3$, ezért a maradék 3.

(d) A maradék 0, hiszen

$$(5a - b)^2 - b(b + 10) = 25a^2 - 10ab + b^2 - b^2 + 10b = 5(5a^2 - 2ab + 2b).$$

(e) Mivel

$$(2a + 5b)^2 + a(6a - 5) = 4a^2 + 20ab + 25b^2 + 6a^2 - 5a = 5(2a^2 4ab + 5b^2 - a),$$

a maradék 0.

**22. Feladat.** Keressük meg a hiányzó számjegyeket, hogy $\overline{987x6}$ osztható legyen

(a) 3-mal,
(b) 4-gyel,
(c) 5-tel,
(d) 6-tal,
(e) 7-tel,
(f) 8-cal,
(g) 9-cel,
(h) 11-gyel,
(i) 12-vel,
(j) 24-gyel,
(k) 36-tal,
(l) 72-vel.

**Megoldás.** Alkalmazzuk a megfelelő oszthatósági szabályokat.

(a) 0, 3, 6, 9
(b) 1, 3, 5, 7, 9
(c) nincs megoldás
(d) 0, 3, 6, 9
(e) 5
(f) 3, 7
(g) 6
(h) 3
(i) 3, 9
(j) 3
(k) nincs megoldás
(l) nincs megoldás

**23. Feladat.** Hány olyan természetes szám van, melyből elvéve a számjegyei összegét 2019-et kapunk?

**Megoldás.** Egy természetes szám kilences maradéka megegyezik a számjegyei összegének kilences maradékával. Tehát egy számnak és a jegyeinek összegének különbsége osztható 9-cel, viszont 2019 nem az. Tehát nincs a feltételeknek megfelelő szám.

**24. Feladat.** Keressük meg a hiányzó számjegyeket ha

(a) $18 \mid \overline{3438x}$,
(b) $36 \mid \overline{35x1y}$,
(c) $36 \mid \overline{351xx}$,
(d) $45 \mid \overline{15x67y}$,
(e) $56 \mid \overline{1xy358}$,
(f) $72 \mid \overline{x554y}$.

**Megoldás.** A megfelelő oszthatósági szabályok összetett alkalmazásával kapjuk a következő $(x, y)$ megoldásokat.

(a) 0
(b) $(7;2), (3;6)$
(c) 0
(d) $(8;0), (3;5)$
(e) nincs megoldás
(f) $(9;4)$

**25. Feladat.** Igazoljuk, a következő oszthatósági összefüggéseket.

(a) $9 \mid 10^{2019} - 1$
(b) $9 \mid 10^{2019} + 224$
(c) $6 \mid 10^{2019} + 224$
(d) $18 \mid 10^{2019} + 224$
(e) $36 \mid 10^{2019} + 224$
(f) $72 \mid 10^{2019} + 224$

**Megoldás.**

(a) A $10^{2019} - 1$ szám 2019 darab 9-es számjegyből áll. Ez a szám osztható 9-cel.
(b) A $10^{2019} + 224$ szám számjegyeinek összege $1 + 2 + 2 + 4 = 9$, tehát osztható 9-cel.
(c) Mivel $10^{2019} + 224$ az előző feladat alapján a szám osztható 3-mal, és páros is, így osztható 6-tal.

(d) Az előző két feladat alapján $10^{2019} + 224$ osztható 9-cel és 2-vel is, tehát 18-cal is.

(e) Mivel a 24 osztható 4-gyel, ezért $10^{2019} + 224$ is. Viszont így osztható $9 \cdot 4$-gyel is.

(f) A 224 osztható 8-cal, ezért $10^{2019} + 224$ is, tehát osztható $9 \cdot 8$-cal is.

**26. Feladat.** Tudjuk, hogy

$$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = \overline{3603xy}.$$

Határozzuk meg a hiányzó számjegyek értékét, lehetőleg a szorzás elvégzése nélkül.

**Megoldás.** Osztható tízzel, így 0-ra végződik, illetve kilenccel is, így a tízesek helyén álló számjegy 6-os.

**27.* Feladat.** Igazoljuk, hogy az $1, 11, 111, \ldots$ sorozatban pontosan egy négyzetszám van.

**Megoldás.** A négyzetszámok négyes maradéka 0 vagy 1. Egy legalább kétjegyű pozitív egész szám négyes maradéka az utolsó két számjegyéből képzett szám négyes maradéka, ami a sorozat második tagjától kezdve három, tehát innen kezdve egyetlen tag sem lehet négyzetszám, így a sorozatnak egyetlen négyzetszám tagja van, az 1.

**28.* Feladat.** Igazoljuk a következő összefüggéseket.

(a) $5 \mid 1^1 + 11^{11} + 111^{111} + \ldots + 11..1^{11..1}$ (Az összeg 2010 tagú.)

(b) $10 \mid 11^{2018} - 1$

(c) $2018 \mid 2019^{2019} + 2017^{2017}$

(d) $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$

**Megoldás.**

(a) Az összegben az egyesek helyén álló számjegy 2010 darab 1-es összeadásával adódik, tehát az utolsó számjegy nulla, az összeg osztható 5-tel.

(b) A különbség 0-ra végződik.

(c) A szám páros, mert két páratlan összege, tehát csak azt kell megnézni osztható-e 1009-cel. Mivel $2019 = 2 \cdot 1009 + 1$ és $2017 = 2 \cdot 1009 - 1$, ezért $+1$-et és $-1$-et adnak maradékul 1009-cel osztva. Így $2019^{2019}$ is 1-et maradékul 1009-cel osztva, $2017^{2017}$ pedig $-1$-et. A két szám összege 0-t ad maradékul 1009-cel osztva.

(d) $2^{70} + 3^{70} = (2^2)^{35} + (3^2)^{35} = 4^{35} + 9^{35} = (4+9)(4^{34} - 4^{33} \cdot 9 + \ldots - 4 \cdot 9^{33} + 9^{34}) = 13(4^{34} - 4^{33} \cdot 9 + \ldots - 4 \cdot 9^{33} + 9^{34})$.

**29. Feladat.** Igazoljuk, hogy három egymást követő egész szám szorzata osztható 6-tal.

**Megoldás.** Három egymást követő szám között van páros, tehát a szorzat osztható 2-vel. Továbbá közülük pontosan egy darab osztható 3-mal is, tehát a szorzat is osztható 3-mal.

**30. Feladat.** Igazoljuk, hogy négy egymást követő egész szám szorzata osztható 24-gyel.

**Megoldás.** Négy egymást követő szám közül pontosan az egyik osztható 4-gyel, viszont a nála 2-vel kisebb vagy nagyobb szám (attól függően melyik szerepel az egymást követő számok között) osztható 2-vel. Tehát a szorzatuk biztos osztható 8-cal. Már három egymást követő szám között is van 3-mal osztható, így itt is van, tehát a szorzat osztható $8 \cdot 3 = 24$-gyel.

**31. Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $n$ természetes számra fennállnak az alábbi összefüggések.

(a) $3 \mid n^3 - n$ (b) $6 \mid n^3 - n$ (c) $5 \mid n^5 - n$

**Megoldás.** Az alábbi szorzattá bontások után az oszthatóság ténye könnyen végiggondolható.

(a) $3 \mid n^3 - n = n(n-1)(n+1)$
(b) $6 \mid n^3 - n = n(n-1)(n+1)$
(c) $5 \mid n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

**32.* Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $n$ természetes számra fennállnak az alábbi összefüggések.

(a) $30 \mid n^5 - n$ (b) $7 \mid n^7 - n$ (c) $11 \mid n^{11} - n$

**Megoldás.** Az alábbi szorzattá bontások után az oszthatóság ténye könnyen végiggondolható.

(a) $30 \mid n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$
(b) $7 \mid n^7 - n = n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$
(c) $11 \mid n^{11} - n = n(n-1)(n+1)(n^8+n^6+n^4+n^2+1)$

**33. Feladat.** Négy pozitív egész szám szorzata osztható 4-gyel. Melyik lehetséges az alábbi állítások közül, és melyik nem?

(a) Van köztük páros.
(b) Pontosan egy páros van közöttük.
(c) Nincs köztük páratlan.
(d) Nincs köztük 4-gyel osztható.
(e) Összegük páratlan.

**Megoldás.** Mindegyik lehetséges.

(a) Például 1, 2, 3, 4.
(b) Például 1, 3, 5, 4.
(c) Például 2, 4, 6, 8.
(d) Például 1, 2, 3, 6.
(e) Például 1, 3, 5, 4.

**34. Feladat.** Három pozitív egész szám összege osztható 3-mal. Melyik lehetséges az alábbi állítások közül, és melyik nem?

(a) Nincs köztük 3-mal osztható.
(b) Pontosan egy hárommal osztható van közöttük.
(c) Pontosan két hárommal osztható van közöttük.
(d) Pontosan egy hárommal nem osztható van közöttük.
(e) Mindegyik osztható hárommal.
(f) A szorzatuk nem osztható hárommal.
(g) Van köztük páros.

**Megoldás.**

(a) Lehetséges. Például: 1, 1, 1.
(b) Lehetséges. Például: 1, 2, 3.
(c) Nem lehetséges. Ha két darab osztható 3-mal, akkor a harmadiknak is olyannak kell lennie.
(d) Nem lehetséges. Ez ugyanaz, mint az előző kérdés.
(e) Lehetséges. Például: 3, 3, 3.
(f) Lehetséges. Például: 1, 1, 1.
(g) Lehetséges. Például: 1, 2, 3.

**35. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha

(a) $11 \mid 3a + 4b$, akkor $11 \mid a + 5b$;
(b) $19 \mid a - 5b$, akkor $19 \mid 10a + 7b$;
(c) $17 \mid a - 5b$, akkor $17 \mid 2a + 7b$;
(d) $17 \mid 5a + 2b$, akkor $17 \mid 9a + 7b$;
(e) $16 \mid 12a - 7b$, akkor $16 \mid 4a + 23b$;
(f) $13 \mid 2a+b$ és $13 \mid 5a-4b$ akkor $13 \mid a-6b$;
(g) $7 \mid 10a + b$, akkor $7 \mid 10b + 2a$;
(h) $7 \mid 10b + 2a$, akkor $7 \mid 10a + b$;
(i) $13 \mid 10a + b$, akkor $13 \mid a + 4b$;
(j) $a + c \mid ab + cd$, akkor $a + c \mid ad + bc$;
(k) $a - c \mid ab + cd$, akkor $a - c \mid ad + bc$.

**Megoldás.** Az összefüggések jobb oldalán álló kifejezéseket kialakítjuk a baloldaliakból, és az oszthatóságok ebből öröklődnek.

(a) $3(a + 5b) = 3a + 15b = (3a + 4b) + 11b$
(b) $10a + 7b = 10(a - 5b) + 57b$
(c) $2a + 7b = 2(a - 5b) + 17b$
(d) $9(5a+2b) = 45a+18b = 5(9a+7b) - 17b$
(e) $3(4a+23b) = 12a+69b = (12a-7b)+76b$
(f) $a - 6b = (5a - 4b) - 2(2a + b)$
(g) $5(2a+10b) = 10a+50b = (10a+b)+49b$
(h) $10a + b = 5 = (2a + 10b) - 49b$
(i) $10(a + 4b) = 10a + 40b = (10a + b) + 39b$
(j) $(a + c)(b + d) = (ab + cd) + (ad + bc)$
(k) $(a - c)(b - d) = (ab + cd) - (ad + bc)$

**36. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha az $n$ egész szám nem osztható 5-tel, akkor $n^4 - 1$ igen.

**Megoldás.** Felhasználjuk az $n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)$ összefüggést, és az $n$-et 5-tel adott maradéka szerint vizsgáljuk.

- Ha $n = 5k + 1$ alakú, akkor $5 \mid n - 1$.
- Ha $n = 5k + 4$ alakú, akkor $5 \mid n + 1$.
- Ha $n = 5k + 2$ alakú, akkor $5 \mid n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5$.
- Ha $n = 5k + 3$ alakú, akkor $5 \mid n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10$.

## Osztók száma

**37. Feladat.** Adjuk meg a legkisebb pozitív egész számot, melynek

(a) 1,
(b) 2,
(c) 3,
(d) 4,
(e) 5,
(f) 6,
(g) 8,
(h) 10,
(i) 12

pozitív osztója van.

**Megoldás.**

(a) 1
(b) 2
(c) 4
(d) 6
(e) 16
(f) 12
(g) 24
(h) 48
(i) 30

**38.* Feladat.** Határozzuk meg az $n$ pozitív egész szám értékét úgy, hogy a következő számoknak pontosan 8 pozitív osztója legyen.

(a) $n^3 + n^2 - 2n$
(b) $n^4 - 1$
(c) $n^4 - 5n^2 + 4$

**Megoldás.**

(a) 3
(b) 2
(c) nincs megoldás

**39.* Feladat.** A szultán börtönében száz cella van, 1-től 100-ig számozva, mindegyikben egy rab. A cellák zárján minden kulcsfordítás változtat a zár „állapotán”, ha nyitva volt bezárja, ha zárva volt kinyitja. A szultán lánya esküvője alkalmából amnesztiát hirdet. Száz fogdaőrt indít útnak. Az első minden zárban fordít egyet a kulcson. A második már csak minden másodikban, tehát a 2, 4, 6,..., 100-as celláékban. A harmadik minden harmadikban (3, 6,...). És így tovább, a 100. fogdaőrt már csak a 100-as celláéban. Akinek az ajtaja nyitva maradt, az szabadul. Mely cellák lakói távozhatnak? (A cellák kezdetben zárva voltak.)

**Megoldás.** Azt kell megszámolnunk, hogy hány ajtón volt páratlan számú fordítás. Az $i$-edik őr pontosan akkor fordít a záron, ha a cella száma osztható $i$-vel. Tehát azon számokat keressük, melyeknek páratlan sok osztója van. Ezek pontosan a négyzetszámok: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

## Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Az alábbi feladatokban $(a;b)$ az $a$ és $b$ egész számok legnagyobb közös osztóját, míg $[a;b]$ az $a$ és $b$ egész számok legkisebb közös többszörösét jelöli.

**40. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét.

(a) $(120;160)$
(b) $[120;160]$
(c) $(2400;17)$
(d) $[17;2400]$
(e) $(32;36;40)$
(f) $[32;36;40]$
(g) $(2^2 \cdot 3^4; 2^3 \cdot 3)$
(h) $[2^2 \cdot 3^4; 2^3 \cdot 3]$
(i) $(2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7; 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11)$
(j) $[2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7; 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11]$
(k) $(2^2 \cdot 6^4 \cdot 25^2; 4^1 \cdot 21 \cdot 10^2)$
(l) $[2^2 \cdot 6^4 \cdot 25^2; 4^1 \cdot 21 \cdot 10^2]$
(m) $(2^2 \cdot p^3; 2 \cdot p^2)$, ahol $p \neq 2$ prím
(n) $[2^2 \cdot p^3; 2 \cdot p^2]$, ahol $p \neq 2$ prím
(o) $(2^2 \cdot 3 \cdot p \cdot q^2; 3^2 \cdot p^2 \cdot q)$, ahol $p, q \neq 2, 3, p \neq q$ prímek
(p) $[2^2 \cdot 3 \cdot p \cdot q^2; 3^2 \cdot p^2 \cdot q]$, ahol $p, q \neq 2, 3, p \neq q$ prímek

**Megoldás.**

(a) 40
(b) 480
(c) 1
(d) 40800
(e) 4
(f) 1440
(g) 12
(h) 648
(i) $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$
(j) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$
(k) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$
(l) $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7$
(m) $2p^2$
(n) $4p^3$
(o) $3pq$
(p) $2^2 \cdot 3^2 \cdot p^2 \cdot q^2$

**41. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét. A feladatokban $a$ és $b$ tetszőleges pozitív egész számokat jelölnek.

(a) $(a;1)$

(b) $[a;1]$

(c) $(a;a)$

(d) $[a;a]$

(e) $(a;2a)$

(f) $[a;2a]$

(g) $(a;a^2)$

(h) $[a;a^2]$

(i) $(a;b^2)$, ahol $a$ és $b$ relatív prímek

(j) $[a;b^2]$ ahol $a$ és $b$ relatív prímek

(k) $(a^3b^2;ab^2)$, ahol $a$ és $b$ relatív prímek

(l) $[a^3b^2;ab^2]$ , ahol $a$ és $b$ relatív prímek

**Megoldás.**

(a) 1

(b) $a$

(c) $a$

(d) $a$

(e) $a$

(f) $2a$

(g) $a$

(h) $a^2$

(i) 1

(j) $ab^2$

(k) $ab^2$

(l) $a^3b^2$

**42. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét.

(a) $(12;(2^3\cdot 3;2^2\cdot 3^5))$

(b) $[18,(40;66)]$

(c) $[(24;46);[12;38]]$

(d) $[([24;36];[28;42]);([60;25];[35;30])]$

(e) $[2^4\cdot p^2,(24\cdot p;162\cdot p^3)]$, ahol $p\neq 2,3$ prím

(f) $(2^4\cdot p^2,(24\cdot p;162\cdot p^3))$, ahol $p\neq 2,3$ prím

(g) $(2^4\cdot p^2,[24\cdot p;162\cdot p^3])$, ahol $p\neq 2,3$ prím

(h) $[2^4\cdot p^2,[24\cdot p;162\cdot p^3]]$, ahol $p\neq 2,3$ prím

**Megoldás.**

(a) 12

(b) 18

(c) 228

(d) 60

(e) $2^4\cdot 3\cdot p^2$

(f) $2p$

(g) $2^3\cdot p^2$

(h) $2^4\cdot 3^4\cdot p^3$

**43. Feladat.** Mely $a$ pozitív egész számokra áll fenn, hogy

(a) $(a;80)=8$,

(b) $(a;8)=80$,

(c) $(a;60)=15$,

(d) $[a;16]=48$,

(e) $(a;120)=[a;24]$?

**Megoldás.**

(a) $a = 2^3 \cdot k$, ahol $k$ öttel nem osztható páratlan szám

(b) Nincs ilyen $a$, mivel $80 \nmid 8$.

(c) $a = 15k$, ahol $k$ páratlan

(d) $a = 3, 6, 12, 24, 48$

(e) $a = 24, 48, 72, 9$

**44. Feladat.** Mely $n, k$ pozitív egészre teljesül, hogy

(a) $(n; k) = 7$ és $[n; k] = 63$;

(b) $(n; k) = 6$ és $[n; k] = 90$;

(c) $(n; k) = 26$ és $[n; k] = 120$;

(d) $(n; k) = p$ és $[n; k] = pq^2$, $(p, q$ prímek);

(e) $n + k = 11$ és $[n; k] = 30$;

(f) $n + k = 1323$ és $[n; k] = 147$;

(g) $(n; k) = 7$ és $n + k = 100$;

(h) $n + k = 36(n; k)$ és $[n; k] = 3850$;

(i) $n + k = 370$, és $[n; k] = 270(n; k)$;

(j) $n + k = 667$, és $\dfrac{[n; k]}{(n; k)} = 120$.

**Megoldás.** A megfelelő $(n; k)$ párok a következők ($n$ és $k$ szerepe felcserélhető):

(a) $(7; 63)$.

(b) $(6; 90), (30; 18)$.

(c) Nincs megoldás.

(d) $(p; pq^2)$

(e) $(6; 5)$.

(f) Vegyük észre, hogy $n + k = 1323 = 9 \cdot 147$, és $n = 147a, k = 147b$, ahol már $(a; b) = 1$. Így $a, b$ relatív prímek, melyek összege 9. Vagyis az $1 + 8 = 2 + 7 = 4 + 5$ lehetőségekből adódnak a megoldások: $n = 147; k = 1176, n = 294; k = 1029, n = 588; k = 735$ (és persze a fordított párok).

(g) Nincs megoldás.

(h) $(154; 350)$ és $(110; 3850)$

(i) $(270; 100)$

(j) $(552; 115)$ és $(435; 352)$

**45. Feladat.** Adjunk meg három pozitív egész számot melyek legnagyobb közös osztója egy, de közülük semelyik kettő sem relatív prím.

**Megoldás.** Például $2 \cdot 3$, $3 \cdot 5$, $5 \cdot 2$.

**46. Feladat.** Az alábbi, pozitív egész számokra vonatkozó állítások közül válasszuk ki, hogy melyik igaz, melyik hamis. Ha $a$ és $b$ relatív prímek, akkor ...

(a) $a^2$ és $b$ is;

(b) $2a$ és $b$ is;

(c) $2a$ és $2b$ is;

(d) $a^2$ és 1 is.

**Megoldás.**

(a) igaz (b) hamis (c) hamis (d) igaz

**47.* Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $a$ és $b$ relatív prímek, akkor

(a) $(a; a+b) = 1$, (b) $(a; b^2) = 1$, (c) $(b^2; a+b) = 1$, (d) $(a^2; a-b^2) = 1$.

**Megoldás.** A megoldások indirekt módon elvégezhetők. A feltevés, hogy a vizsgált két számnak van valami közös $p$ prímtényezője ellentmondásra vezet.

(a) Ha $(a; a+b) = p$, akkor $p \mid a$ és $p \mid a+b$ maga után vonja, hogy $p \mid (a+b) - a = b$, azaz $a$ és $b$ mégsem relatív prímek.

(b) Ha $(a; b^2) = p$, akkor rögtön $p \mid a$ és $p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b$, ellentmondás.

(c) Ha $(b^2; a+b) = p$, akkor $p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b$, és $p \mid a+b$ maga után vonja, hogy $p \mid (a+b)-b = a$, azaz $a$ és $b$ mégsem relatív prímek.

(d) Ha $(a^2; a-b^2) = p$, akkor $p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a$, és $p \mid a-b^2$ maga után vonja, hogy $p \mid (a-b^2) - a = -b^2$, amiből $p \mid b$, azaz $a$ és $b$ mégsem relatív prímek.

**48. Feladat.** Mely $n$ egész számok esetén lesz egész az alábbi törtek értéke?

(a) $\dfrac{n-1}{n+2}$

(b) $\dfrac{n+1}{n}$

(c) $\dfrac{2n+2n^2}{n+1}$

(d) $\dfrac{2^n}{n^2+n+1}$, $(n > 0)$

**Megoldás.**

(a) Mivel
$$\frac{n-1}{n+2} = \frac{n+2-3}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2},$$
a kifejezés pontosan akkor egész, ha $\dfrac{3}{n+2}$ egész, ami pontosan akkor áll fenn, ha 3 osztható $(n+2)$-vel. Ez $n+2 = -3, -1, 1, 3$ esetén lehetséges, vagyis, ha $n \in \{-5, -3, -1, 1\}$.

(b) Mivel
$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n},$$
a kifejezés pontosan akkor egész, ha $\dfrac{1}{n}$ egész, ami pontosan akkor áll fenn, ha $n \mid 1$. Ez csak $n = -1; 1$ esetén lehetséges.

(c) Mivel

$$\frac{2n+2n^2}{n+1} = \frac{2n(1+n)}{n+1} = 2n,$$

a kifejezés minden olyan $n$ egész értékre egész lesz, amelyikre értelmezett, vagyis ha $n \neq -1$.

(d) A vizsgált tört

$$\frac{2^n}{n^2+n+1} = \frac{2^n}{n(n+1)+1},$$

ahol a számló kettőnek pozitív egész kitevős hatványa, tehát (az egyen kívül) csak páros osztói vannak, míg a nevező $n^2+n+1 = n(n+1)+1$ páratlan, így páros osztója nincs, vagyis a tört csak akkor lehet egész ha a nevezője 1, ez viszont egyetlen pozitív egész $n$ esetén sem áll fenn.

**49. Feladat.** Mely $n$ egész számok esetén egyszerűsíthetők az alábbi törtek?

(a) $\frac{n-1}{n+2}$

(b) $\frac{n+1}{n}$

(c) $\frac{2n+3}{n-1}$

(d) $\frac{2n+2n^2}{n+1}$

(e) $\frac{n^2+2n+1}{n^2-1}$

**Megoldás.**

(a) Mivel $(n-1; n+2) = (n-1; n-1+3) = (n-1; 3)$, a tört pontosan akkor egyszerűsíthető, ha $n-1$ a 3 többszöröse, vagyis ha $n = 3k+1, k \in \mathbb{Z}$ alakú. (Ekkor egyszerűsíthető 3-mal.)

(b) Mivel $(n+1; n) = (1; n) = 1$, a tört nem egyszerűsíthető.

(c) Mivel $(2n+3; n-1) = (2(n-1)+5; n-1) = (5; n-1)$, a tört pontosan akkor egyszerűsíthető, ha $n-1$ az 5 többszöröse, vagyis ha $n = 5k+1, k \in \mathbb{Z}$ alakú. (Ekkor egyszerűsíthető 5-tel.)

(d) Mivel

$$\frac{2n+2n^2}{n+1} = \frac{2n(1+n)}{n+1},$$

a tört minden olyan esetben egyszerűsíthető amikor létezik, és $n+1 \neq 1$, vagyis ha $n$ egész és nem 0 vagy $-1$.

(e) Mivel

$$\frac{n^2+2n+1}{n^2-1} = \frac{(n+1)^2}{(n-1)(n+1)},$$

a tört minden olyan esetben egyszerűsíthető amikor létezik, és $n^2-1 \neq 0$, vagyis ha $n$ egész és $n \notin \{-1, 0, 1\}$.

**50. Feladat.** Igazoljuk, hogy az alábbi törtek egyetlen $n$ pozitív egész szám esetén sem egyszerűsíthetők.

(a) $\dfrac{n+1}{n}$ (b) $\dfrac{n^2+2n+1}{n}$ (c) $\dfrac{2^n}{n^2+n+1}$ (d) $\dfrac{n^3-n+2}{3^n}$

**Megoldás.**

(a) Az $n$ és $n+1$ szomszédos pozitív egész számok, melyek mindig relatív prímek.

(b) A számláló $n^2+2n+1=(n+1)^2$, továbbá $n$ és $n+1$ szomszédos pozitív egész számok, melyek mindig relatív prímek.

(c) A számló kettőnek pozitív egész kitevős hatványa, tehát (az egyen kívül) csak páros osztói vannak, míg a nevező $n^2+n+1=n(n+1)+1$ páratlan, így páros osztója nincs.

(d) A nevező háromnak pozitív egész kitevős hatványa, tehát csak három hatványaival osztható, míg a nevező $n^3-n+2=(n-1)n(n+1)+2$ hárommal osztva kettő maradékot ad.

## Prímszámok

**51.* Feladat.** Hogyan segít az *Eratoszthenészi szita* a prímek „kiszitálásában”?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. |

**Megoldás.** A táblázatból kihúzzuk az összes 2-nél nagyobb 2-vel osztható számot. Ezután megnézzük melyik a legkisebb megmaradt 2-nél nagyobb szám. Ez a 3-as. Kitöröljük a táblázatból az összes 3-nál nagyobb 3-mal osztható számot. És így tovább. Egy véges táblázatban egy idő után csak a prímszámok maradnak meg. A módszer akkor használatos, mikor egy adott intervallumba eső összes prímszámot ki akarjuk listázni. Érezhetően nem túl hatékony algoritmus, de néhány ötlettel javítható.

**52.* Feladat.** Bizonyítsa be, hogy $2007+n!$ egyetlen $n$ pozitív szám esetén sem lehet

(a) prímszám, (b) négyzetszám.

**Megoldás.**

(a) Az első néhány eset kézzel végigellenőrizendő, majd ha $n \geq 4$, akkor a szám osztható hárommal (és nagyobb nála), tehát nem prím.

(b) Az első néhány eset kézzel végigellenőrizendő, majd ha $n \geq 4$, akkor a szám négyes maradéka három, vagyis nem lehet négyzetszám.

**53. Feladat.** Három prímszám összege 2018. Lehet-e a szorzatuk 2031887?

**Megoldás.** Nem. Három szám szorzata csak úgy lehet páratlan, ha mindhárom páratlan, ekkor viszont az összegük is az. (A 2, 997, 1019 prímekre különben: $2 + 997 + 1019 = 2018$ és a $2 \cdot 997 \cdot 1019 = 2031886$.)

**54. Feladat.** Készítsünk az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyek egyszeri felhasználásával hatjegyű prímet.

**Megoldás.** A szám mindig osztható lesz hárommal, nincs megoldás.

**55. Feladat.** Van-e olyan $n$ természetes szám, melyre $2018^n - 1$ és $2018^n + 1$ is prím?

**Megoldás.** Nincs. A $2018^n - 1, 2018^n, 2018^n + 1$ három egymást követő szám, így az egyik biztosan osztható 3-mal, és mivel $(2018; 3) = (2018^n; 3) = 1$, ez nem lehet a hárommal osztható tag. Így $2018^n - 1$ vagy $2018^n + 1$ osztható hárommal, és nagyobb nála, tehát nem lehet prím.

**56. Feladat.** Az $n$ mely legkisebb pozitív értékére teljesülnek az alábbi összefüggések?

(a) $2^{10} \mid n!$ (b) $3^{10} \mid n!$ (c) $12^{10} \mid n!$ (d) $2^{100} \mid n!$

**Megoldás.**

(a) 12 (b) 24 (c) 24 (d) 104

**57. Feladat.** Határozzuk meg a 15! prím(hatvány)tényezős alakját.

**Megoldás.** $15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$

**58. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromnál nagyobb prímszám négyzeténél 1-gyel kisebb szám mindig osztható 24-gyel.

**Megoldás.** Ha $p$ háromnál nagyobb prím, akkor $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Itt, mivel $3 \nmid p$, ezért egyik tényező osztható 3-mal. Illetve mivel $p$ páratlan, ezért az egyik osztható 2-vel, és a másik 4-gyel.

**59. Feladat.** Melyik az a legkisebb pozitív egész szám amellyel a 189000-et

(a) elosztva

(b) megszorozva

négyzetszámot kapunk?

**Megoldás.** Úgy kell alakítani a számot, hogy prímtényezős felbontásában minden prím páros hatványon legyen. Mivel $189000 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7$, ezért

(a) $3 \cdot 7 = 21$;

(b) $3 \cdot 7 = 21$.

**60. Feladat.** Keressük meg az összes olyan $p$ prímet melyre $8p^2 + 1$ prím.

**Megoldás.** Csak $p = 3$ lehet, különben osztható 3-mal, és az jó is.

**61. Feladat.** Keressük meg az összes olyan $p$ prímet melyre a következő számok egyszerre prímek.

(a) $p + 10$, $p + 110$, $p + 1110$

(b) $p + 10$, $p + 14$

(c) $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$, $p + 14$

(d) $10p - 1$, $10p + 1$

**Megoldás.**

(a) Nincs megoldás, valamelyik osztható 3-mal.

(b) Szintén a hárommal való oszthatóság miatt $p = 3$.

(c) Az öttel való oszthatóság miatt $p = 5$.

(d) Ha $p \neq 3$, akkor nincs megoldás, mert valamelyik osztható 3-mal. A $p = 3$ eset megoldás.

**62. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $p$ és $p^2 + 8$ prím, akkor $p^2 + p + 1$ és $p^2 + 3p + 1$ is az.

**Megoldás.** Az első két feltétel együtt csak $p = 3$-ra teljesül, és arra harmadik úgy van kitalálva, hogy prím.

**63. Feladat.** Oldjuk meg a prímek halmazán a $p^q + 1 = r$ egyenletet.

**Megoldás.** Paritások miatt $p = 2$. Ha $q$ páratlan, akkor a baloldal osztható 3-mal, így csak $q = 2$ lehet, és ez megoldás is.

**64. Feladat.** Oldjuk meg a prímek halmazán a következő egyenleteket.

(a) $2p + 3q + 6r = 78$

(b) $2p + 7q + 14r = 252$

**Megoldás.**

(a) Mivel a baloldal két tagja, és a jobboldal láthatóan páros, ezért $3q$ is az, vagyis $q = 2$. A hárommal való oszthatóságból pedig $p = 3$ adódik, amiből $r = 11$.

(b) Az előzőhöz hasonlóan gondolkodva $p = 7, q = 2, r = 16$ adódik, tehát nincs megoldás.

**65.* Feladat.** Három prím szorzata az összegük

(a) ötszöröse,

(b) tizenkétszerese.

Határozzuk meg ezeket.

**Megoldás.**

(a) Legyenek a prímek $p, q, r$. Ekkor $pqr = 5(p + q + r)$. Így valamelyik prím, pl. $p = 5$, és feltehető, hogy $q \leq r$. Behelyettesítve és átrendezve $qr = 5 + q + r$, $qr - q - r = 5$, $(q - 1)(r - 1) = 6$. Mivel $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$, csak két esetet kell végignéznünk, és az egyik ad csak megoldást: $2, 5, 7$.

(b) Legyenek a prímek $p, q, r$. Ekkor $pqr = 12(p + q + r)$. Így a jobboldal osztható 4-gyel, a baloldal pedig biztosan nem, tehát nincs megoldás.

**66.* Feladat.** Két prímről tudjuk, hogy az összegük is prím, valamint, hogy az összegük és a szorzatuk szorzata osztható 10-zel. Határozzuk meg ezeket a prímeket. (Középiskolások Hajdú-Bihar Megyei Matematika Versenye, 1987., 10.osztály, 5. feladat)

**Megoldás.** Legyenek a prímek $p$ és $q$. Ekkor $p + q = r$ is prím és $10 \mid pqr$. Ekkor $p, q, r$ valamelyik 2, illetve 5. Két prím összege nem lehet 2, így feltehető, hogy $p = 2$. Ekkor két eset van, $q = 3$, vagy $q = 5$. Azaz a megoldások: $2, 3$, valamint $2, 5$.

# 3 | Hatványozás, gyökvonás, logaritmus

**1. Feladat.** A hatványozás azonosságainak felhasználásával hozza egyszerűbb (az egyik lehető legegyszerűbb) alakra a következő kifejezéseket.

(a) $(a^{-2} \cdot b^4 \cdot c^2)^{-1} \cdot (a^2 b)^2 \cdot (c^{-2})^3$

(b) $\dfrac{x^2}{y^3} \cdot \dfrac{(xy)^{-2}}{x^{-1}y^1}$

(c) $\dfrac{32^9 \cdot (8^{-5})^4}{(4^{-1} \cdot 16^3)^2 \cdot (2 \cdot 64^3)^{-3}}$

(d) $\dfrac{12^4 \cdot 27^{-3}}{18^4 \cdot 8^5} \cdot \dfrac{9^7 \cdot 24^3}{48^2 \cdot (6^{-3})^2}$

(e) $\dfrac{xy}{x^{-1}y^{-1}} - \dfrac{y}{xy^{-2}} + \dfrac{x}{x^{-2}y}$

**2. Feladat.** Melyik szám nagyobb?

(a) $A = 3^9$ vagy $B = 9^3$

(b) $A = (-10)^{11}$ vagy $B = 11^{-10}$

(c) $A = 10^{20}$ vagy $B = 20^{10}$

(d) $A = \dfrac{1}{2^7}$ vagy $B = \dfrac{1}{2^5} - \dfrac{1}{2^6}$

(e) $A = \dfrac{5^{-1} + 3^{-1}}{3^{-1} - 5^{-1}}$ vagy $B = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

(f) $A = \dfrac{15}{2^{13} \cdot 5^6}$ vagy $B = \dfrac{11}{2^{11} \cdot 5^7}$

**3. Feladat.** Hozzuk az egyik lehető legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

(a) $\sqrt{\dfrac{16x^4y^5z^9}{9x^2yz^2}}$

(b) $\sqrt{(x^2y^3z^4) \cdot (xy^2z^2)}$

**4. Feladat.** Határozzuk meg a következő kifejezések értékét. (Mely egész számmal egyenlők a következők?)

(a) $(\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{50})\sqrt{32}$

(b) $(\sqrt{50} + \sqrt{27}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{72} + \sqrt{2})$

(c) $\sqrt{7 - \sqrt{13}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{13}}$

(d) $\sqrt{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \cdot \sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{8}}$

(e) $\dfrac{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (8 - \sqrt{60})}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

(f) $\sqrt{9 + 2\sqrt{14}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$

(g) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}}$

(h) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}\right) \cdot (\sqrt{5} - 5 \cdot \sqrt{3})$

**5. Feladat.** Melyik szám nagyobb?

(a) $A = 2 \cdot \sqrt{3}$ vagy $B = 3 \cdot \sqrt{2}$

(b) $A = \dfrac{14}{\sqrt{7}}$ vagy $B = \sqrt{28}$

(c) $A = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ vagy $B = \sqrt{8}$

**6.* Feladat.** Hozzuk egyszerűbb (az egyik lehető legegyszerűbb) alakra a következő kifejezéseket.

(a) $$\left(\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}\right):\frac{b^{-1}}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad (a, b > 0, a \neq b)$$

(b) $$\frac{\sqrt{x^2-y^2}+x}{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}} \qquad (x > y)$$

(c) $$\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+4}\cdot\frac{\sqrt{x^3}-8}{x-4}-1 \qquad (x > 0)$$

(d) $$\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^2 : \left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)$$

**7. Feladat.** Határozzuk meg a következő kifejezések értékét. (Mely egész számmal egyenlők a következők?)

(a) $\sqrt[3]{6-\sqrt{28}} \cdot \sqrt[3]{6+\sqrt{28}}$

(b) $\sqrt[4]{\sqrt{90}+3} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{90}-3}$

(c) $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{375}$

(d) $\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{32}$

(e) $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10})(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})$

(f) $(\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{5})$

**8. Feladat.** Hozzuk az egyik lehető legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

(a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

(b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}}$

(c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2}$

**9. Feladat.** Írjuk fel 2 egyetlen hatványaként a következő kifejezéseket.

(a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

(b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}}$

(c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2}$

**10. Feladat.** Határozzuk meg a következő kifejezések értékét (logaritmusmentes alakban).

(a) $\log_2 16$

(b) $\log_4 16$

(c) $\log_{16} 16$

(d) $\log_9 3$

(e) $\log_3 \dfrac{1}{3}$

(f) $\log_8 \dfrac{1}{4}$

(g) $\lg 0{,}01$

(h) $\ln \sqrt{e}$

(i) $2^{\log_2 7}$

(j) $4^{\log_2 7}$

(k) $2^{\log_4 7}$

(l) $0,5^{\log_2 7}$

(m) $\log_2(\log_2(\log_2 256)))$

(n) $\log_{\frac{1}{\sqrt{a}}} \sqrt[3]{a^2}$

(o) $\log_{\sqrt[4]{a}} a^{-\frac{3}{5}}$

(p) $10^{1+\lg 2}$

(q) $2^{3-\log_4 9}$

**11. Feladat.** Számoljuk ki a következő kifejezéseket. (Mely racionális számmal egyenlők a következők?)

(a) $\log_2 48 + \log_2 9 - \log_2 6 - \log_2 36$

(b) $\log_{\sqrt{6}} 81 + \log_{\sqrt{6}} 4 + \log_{\sqrt{6}} 64 + \log_{\sqrt{6}} 2 - \log_{\sqrt{6}} 144 - 3 \cdot \log_{\sqrt{6}} 12$

(c) $\log_4 \sqrt{1100} + \log_4 \sqrt{40} - \log_4 \sqrt{110} - \log_4 10$

(d) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$

(e) $\log_2 \sin 30° \cdot \log_3 \cos 60° \cdot \log_4 \operatorname{tg} 45°$

**12. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\sqrt[3]{1 - 12 \cdot \sqrt[3]{7} + 6 \cdot \sqrt[3]{49}} + \sqrt[3]{7} = 2.$$

**13. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\sqrt[3]{20 - 14 \cdot \sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14 \cdot \sqrt{2}}$$

páros.

# Megoldások

**1. Feladat.** A hatványozás azonosságainak felhasználásával hozza egyszerűbb (az egyik lehető legegyszerűbb) alakra a következő kifejezéseket.

(a) $(a^{-2} \cdot b^4 \cdot c^2)^{-1} \cdot (a^2 b)^2 \cdot (c^{-2})^3$

(b) $\dfrac{x^2}{y^3} \cdot \dfrac{(xy)^{-2}}{x^{-1}y^1}$

(c) $\dfrac{32^9 \cdot (8^{-5})^4}{(4^{-1} \cdot 16^3)^2 \cdot (2 \cdot 64^3)^{-3}}$

(d) $\dfrac{12^4 \cdot 27^{-3}}{18^4 \cdot 8^5} \cdot \dfrac{9^7 \cdot 24^3}{48^2 \cdot (6^{-3})^2}$

(e) $\dfrac{xy}{x^{-1}y^{-1}} - \dfrac{y}{xy^{-2}} + \dfrac{x}{x^{-2}y}$

**Megoldás.**

(a) $a^6 b^{-2} c^{-8}$

(b) $x \cdot y^{-6}$

(c) $2^{22}$

(d) $2^{-4} \cdot 3^8$

(e) $\dfrac{x^3}{y} + x^2y^2 - \dfrac{y^3}{x}$

**2. Feladat.** Melyik szám nagyobb?

(a) $A = 3^9$ vagy $B = 9^3$

(b) $A = (-10)^{11}$ vagy $B = 11^{-10}$

(c) $A = 10^{20}$ vagy $B = 20^{10}$

(d) $A = \dfrac{1}{2^7}$ vagy $B = \dfrac{1}{2^5} - \dfrac{1}{2^6}$

(e) $A = \dfrac{5^{-1} + 3^{-1}}{3^{-1} - 5^{-1}}$ vagy $B = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

(f) $A = \dfrac{15}{2^{13} \cdot 5^6}$ vagy $B = \dfrac{11}{2^{11} \cdot 5^7}$

**Megoldás.**

(a) $A$

(b) $B$

(c) $A$

(d) $B$

(e) $A = B$

(f) $A$

**3. Feladat.** Hozzuk az egyik lehető legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

(a) $\sqrt{\dfrac{16x^4y^5z^9}{9x^2yz^2}}$

(b) $\sqrt{(x^2y^3z^4) \cdot (xy^2z^2)}$

**Megoldás.**

(a) $\frac{3}{4} \cdot |x| \cdot y^2 \cdot |z^3| \cdot \sqrt{z}$

(b) $xy^2|z^3|\sqrt{xy}$

**4. Feladat.** Határozzuk meg a következő kifejezések értékét. (Mely egész számmal egyenlők a következők?)

(a) $(\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{50})\sqrt{32}$

(b) $(\sqrt{50} + \sqrt{27}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{72} + \sqrt{2})$

(c) $\sqrt{7 - \sqrt{13}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{13}}$

(d) $\sqrt{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \cdot \sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{8}}$

(e) $\dfrac{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (8 - \sqrt{60})}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

(f) $\sqrt{9 + 2\sqrt{14}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$

(g) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}}$

(h) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}\right) \cdot (\sqrt{5} - 5 \cdot \sqrt{3})$

**Megoldás.**

(a) $-16$

(b) $-23$

(c) $6$

(d) $2$

(e) $2$

(f) $2\sqrt{2}$

(g) $2$

(h) $-35$

**5. Feladat.** Melyik szám nagyobb?

(a) $A = 2 \cdot \sqrt{3}$ vagy $B = 3 \cdot \sqrt{2}$

(b) $A = \dfrac{14}{\sqrt{7}}$ vagy $B = \sqrt{28}$

(c) $A = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ vagy $B = \sqrt{8}$

**Megoldás.**

(a) $B$

(b) $A = B$

(c) $A$

**6.* Feladat.** Hozzuk egyszerűbb (az egyik lehető legegyszerűbb) alakra a következő kifejezéseket.

(a) $$\left(\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b} - \sqrt{a+b}} + \frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}\right) : \frac{b^{-1}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \qquad (a, b > 0, a \neq b)$$

(b) $$\frac{\sqrt{x^2 - y^2} + x}{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}} \qquad (x > y)$$

(c) $$\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+4}\cdot\frac{\sqrt{x^3}-8}{x-4}-1 \qquad (x>0)$$

(d) $$\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^2:\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)$$

**Megoldás.**

(a) $-2(a^2-b^2)$ (b) $\sqrt{x^2-y^2}$ (c) $0$ (d) $1$

**7. Feladat.** Határozzuk meg a következő kifejezések értékét. (Mely egész számmal egyenlők a következők?)

(a) $\sqrt[3]{6-\sqrt{28}}\cdot\sqrt[3]{6+\sqrt{28}}$

(b) $\sqrt[4]{\sqrt{90}+3}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{90}-3}$

(c) $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{375}$

(d) $\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{32}$

(e) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10})(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})$

(f) $(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5})$

**Megoldás.**

(a) 2 (c) 0 (e) 3

(b) 3 (d) 0 (f) 12

**8. Feladat.** Hozzuk az egyik lehető legegyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

(a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ (b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}}$ (c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}$

**Megoldás.**

(a) $\sqrt[8]{2^7}$ (b) $\sqrt[24]{2^{11}}$ (c) $2\sqrt[12]{2}$

**9. Feladat.** Írjuk fel 2 egyetlen hatványaként a következő kifejezéseket.

(a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ (b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt{2}}}$ (c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}$

**Megoldás.**

(a) $2^{\frac{7}{8}}$ (b) $2^{\frac{11}{24}}$ (c) $2^{\frac{13}{12}}$

**10. Feladat.** Határozzuk meg a következő kifejezések értékét (logaritmusmentes alakban).

(a) $\log_2 16$
(b) $\log_4 16$
(c) $\log_{16} 16$
(d) $\log_9 3$
(e) $\log_3 \frac{1}{3}$
(f) $\log_8 \frac{1}{4}$
(g) $\lg 0{,}01$
(h) $\ln \sqrt{e}$
(i) $2^{\log_2 7}$
(j) $4^{\log_2 7}$
(k) $2^{\log_4 7}$
(l) $0,5^{\log_2 7}$
(m) $\log_2(\log_2(\log_2 256)))$
(n) $\log_{\frac{1}{\sqrt{a}}} \sqrt[3]{a^2}$
(o) $\log_{\sqrt[4]{a}} a^{-\frac{3}{5}}$
(p) $10^{1+\lg 2}$
(q) $2^{3-\log_4 9}$

**Megoldás.**

(a) $4$
(b) $2$
(c) $1$
(d) $\frac{1}{2}$
(e) $-1$
(f) $-\frac{2}{3}$
(g) $-2$
(h) $\frac{1}{2}$
(i) $7$
(j) $49$
(k) $\sqrt{7}$
(l) $\frac{1}{7}$
(m) $\log_2 3$
(n) $-\frac{4}{3}$
(o) $-\frac{12}{5}$
(p) $20$
(q) $\frac{8}{3}$

**11. Feladat.** Számoljuk ki a következő kifejezéseket. (Mely racionális számmal egyenlők a következők?)

(a) $\log_2 48 + \log_2 9 - \log_2 6 - \log_2 36$
(b) $\log_{\sqrt{6}} 81 + \log_{\sqrt{6}} 4 + \log_{\sqrt{6}} 64 + \log_{\sqrt{6}} 2 - \log_{\sqrt{6}} 144 - 3 \cdot \log_{\sqrt{6}} 12$
(c) $\log_4 \sqrt{1100} + \log_4 \sqrt{40} - \log_4 \sqrt{110} - \log_4 10$
(d) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$
(e) $\log_2 \sin 30° \cdot \log_3 \cos 60° \cdot \log_4 \operatorname{tg} 45°$

**Megoldás.**

(a) $1$
(b) $-2$
(c) $0{,}5$
(d) $1$
(e) $0$

**12. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\sqrt[3]{1 - 12 \cdot \sqrt[3]{7} + 6 \cdot \sqrt[3]{49}} + \sqrt[3]{7} = 2.$$

**Megoldás.** Átrendezve és köbre emelve adódik az egyenlőség.

**13. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\sqrt[3]{20-14\cdot\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20+14\cdot\sqrt{2}}$$

páros.

**Megoldás.** Megfelelő átalakításokkal látható, hogy a kifejezés értéke 4, és az páros.

# 4 | Első- és másodfokú függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

## Lineáris függvények

**1. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonjait.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2$

(b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ g(x) = 4$

(c) $h\colon\ [-3;6[\ \to \mathbb{R},\ h(x) = -\dfrac{2}{3}x + 1$

(d) $i\colon \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ i(x) = x + 5$

**2. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán.

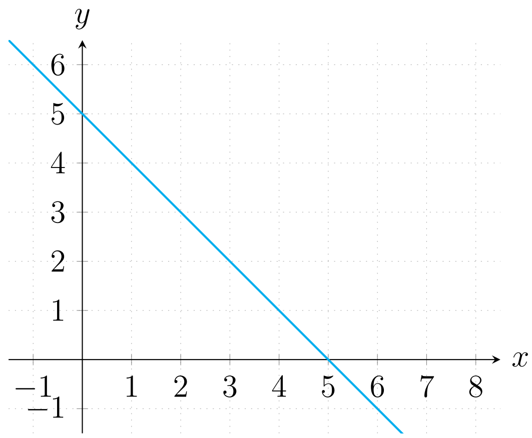
(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $g(x) = \dfrac{2(x-1)(x+2)}{x^2 + x - 2}$

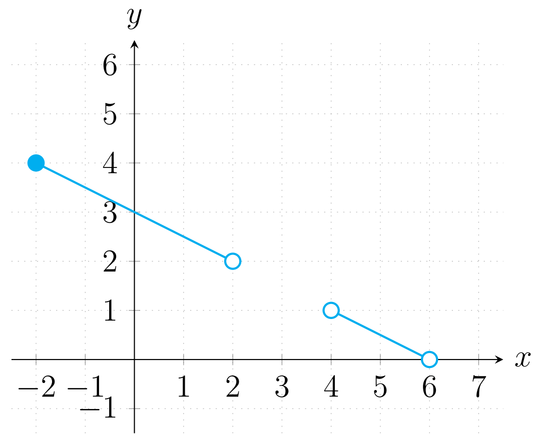
(c) $h(x) = \dfrac{x^3 - x}{(1-x)(x+1)}$

(d) $i(x) = \dfrac{2x - 1}{(1-x)(x+1) + x^2 - 1}$

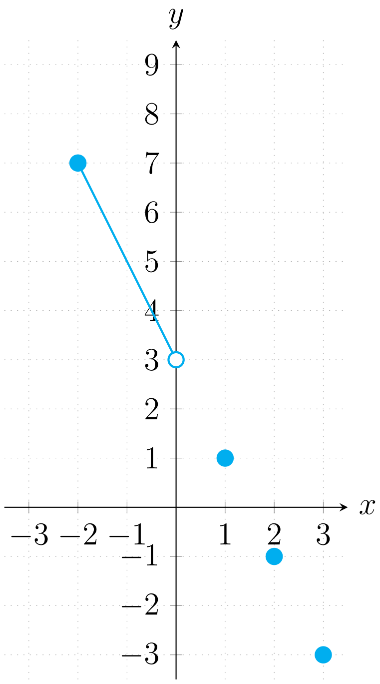
**3. Feladat.** Mely függvények grafikonjai láthatók az alábbi ábrákon? (Adjuk meg az értelmezési tartományt és a hozzárendelési szabályt is.)

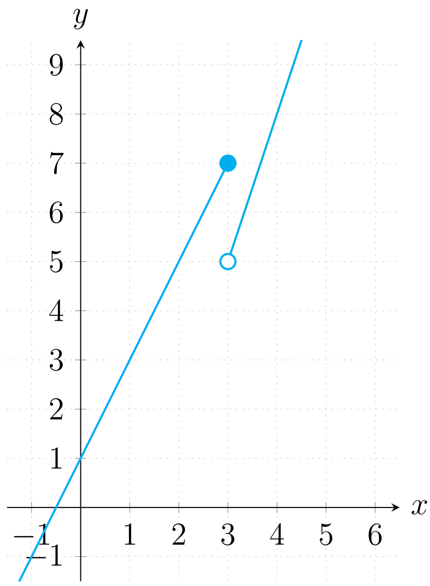



(a)




(b)

(c) 

(d) 

**4. Feladat.** Írjuk fel annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek

(a) meredeksége 2 és (az $y$ tengellyel vett) tengelymetszete 3;

(b) zérushelye $x = 3$, meredeksége $\frac{1}{2}$;

(c) tengelymetszete 5 és nincs zérushelye (a függvény mindenütt értelmezett)

(d) grafikonja áthalad a $P(1;5)$ ponton és meredeksége $-3$;

(e) grafikonja áthalad az $A(2;3)$ és $B(4;6)$ pontonokon.

**5. Feladat.** Az $f(x) = a \cdot x + b$ lineáris függvény hozzárendelési szabályában adjuk meg az $a, b$ paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy

(a) $f(2) = 7, \; f(7) = 17$;

(b) $f(2) = 7, \; f(7) = 7$.

**6. Feladat.** Tudjuk, hogy 0°C = 32°F és 100°C = 212°F, ahol a hőmérsékletértékek a Celsius-, illetve a Fahrenheit-skálán mért értékeket jelentik. Tudjuk, hogy mindkét skála lineáris beosztású. Adjuk meg azokat a függvényeket amelyekkel a Celsius-, illetve a Fahrenheit-hőmérő értékeit átválthatjuk egymásba.

**7. Feladat.** Két, egyenletes sebességgel égő gyertyánk van, az első 18 cm és 9 óra alatt ég el, a másik 12 cm és 6 óra alatt ég el. A gyertyákat egyszerre meggyújtjuk.

(a) Írjuk fel a gyertyák hosszát (cm-ben) az idő függvényében leíró függvényeket.

(b) Ábrázoljuk a függvényeket közös koordináta rendszerben.

(c) Mikor lesz az első gyertya kétszer olyan magas, mint a másik?

(d) Mikor lesz az első gyertya fele olyan magas, mint a másik?

**8. Feladat.** Két, egyenletes sebességgel égő, azonos magasságú (15 cm) gyertyánk van, az egyik 12, a másik 18 óra alatt ég el. Azt, amelyik lassabban ég el reggel 6 órakor, azt amelyik gyorsabban reggel 8 órakor gyújtjuk meg.

(a) Írjuk fel a gyertyák hosszát (cm-ben) az idő függvényében leíró függvényeket.

(b) Ábrázoljuk a függvényeket közös koordináta rendszerben.

(c) Mikor lesz a gyorsabban égő gyertya kétszer olyan magas, mint a lassabban égő?

(d) Mikor lesz a gyorsabban égő gyertya fele olyan magas, mint a lassabban égő?

## Abszolútértéket tartalmazó függvények

**9. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonjait.

(a) $f(x) = 3|x| - 2$

(b) $g(x) = 3|x - 2|$

(c) $h(x) = x + |x|$

(d) $i(x) = |x| - x$

(e) $j(x) = \dfrac{x^2 - 9}{|x| - 3}$

(f) $k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2x - 4}$

**10. Feladat.** Az $f(x) = a \cdot |x| + b$ függvény hozzárendelési szabályában adjuk meg az $a, b$ paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy

(a) $f(-2) = 7,\ f(7) = 17;$

(b) $f(2) = 7,\ f(-7) = 7.$

**11. Feladat.** Az $f(x) = |x - a| + b$ függvény hozzárendelési szabályában adjuk meg az $a, b$ paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy $f(4) = 0$ és $f(0) = -2$.

## Lineáris egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

**12. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenleteket.

(a) $(3a + 4) \cdot (1 + a) - (a - 4) \cdot a + 20 = (2a + 1) \cdot (a - 3) + 3$

(b) $\dfrac{3x - 4}{2} + \dfrac{7 - 3x}{4} = \dfrac{5 - 4x}{2}$

(c) $\dfrac{2x + 5}{2x - 2} - \dfrac{3x + 2}{3x - 3} = \dfrac{x}{4x - 4}$

(d) $\dfrac{3x}{3x - 5} - \dfrac{5}{5 - 3x} = \dfrac{6x + 1}{6x - 10}$

(e) $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

(f) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = 2 + x$

(g) $2 \cdot \dfrac{3x + 1}{x - 1} = \dfrac{7}{x^2 - 1} + 3 \cdot \dfrac{2x - 1}{x + 1}$

(h) $\dfrac{2x + 1}{x^2 - 9} - \dfrac{x + 1}{x^2 + 3x} = \dfrac{7}{3x - x^2} + \dfrac{1}{x - 3}$

(i) $\dfrac{x - 7}{x - 3} - \dfrac{3x + 2}{x^2 + 2x - 15} = \dfrac{x + 9}{x + 5}$

**13. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi abszolútértékes egyenleteket.

(a) $|x+2| = 3$

(b) $||2x-1|-7| = 4$

(c) $|x-3| + 2x = 9$

(d) $|x-1| = 1-x$

(e) $|x-3| + |x+4| = 11$

(f) $2 \cdot |2x+1| - |5-3x| = 4$

(g) $|x-1| + |x+4| - |x-6| = -1$

(h) $2 \cdot |x+5| + 5 \cdot |1-2x| = 4 \cdot |4x+1| + 11$

(i) $\dfrac{|x-2|}{2x+1} = 1$

(j) $\dfrac{3x+5}{|6x+10|} = 0{,}5$

**14. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

(a) $3 \cdot (3-x) + 5 \cdot (2x-4) - x > -3 \cdot (4x+3) + 2$

(b) $(x+1)^2 - 7x + 11 \geq 13 + (7-x)^2$

(c) $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{4x-7}{6} \leq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7-3x}{3}$

(d) $\dfrac{2-x}{4x-8} \geq 0$

(e) $\dfrac{2x+5}{x-12} - \dfrac{3x-7}{x-12} < 0$

(f) $\dfrac{2}{x+5} \leq 0$ (Mikor áll fenn egyenlőség?)

(g) $\dfrac{2x+5}{x-12} \leq 0$ (Hány prím megoldás van?)

(h) $\dfrac{1-4x}{5x+3} < 0$ (Megoldás-e a 0?)

(i) $\dfrac{3x+5}{2x-4} \leq 1$ (Hány nempozitív egész megoldás van?)

(j) $\dfrac{8x+1}{5+2x} > -3$ (Hány olyan egész szám van, ami nem megoldás?)

(k) $\dfrac{x+4}{x-1} + \dfrac{7-3x}{2x-2} \geq \dfrac{5x+1}{3x-3}$ (Hány egész megoldás van?)

(l) $\dfrac{2x-3}{-x+2} + 1 \leq \dfrac{5x+1}{2x-4}$ (Hány megoldás esik a $[0;1]$ intervallumba?)

**15. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi abszolútértékes egyenlőtlenségeket.

(a) $|x| > 3$

(b) $|2x-1| \leq 5$
(Hány egész megoldás van?)

(c) $|x| > x$

(d) $|x| \geq x+1$

(e) $|2x+3| \geq x-1$

(f) $|x| \leq |x+1|$

(g) $|x-5| < |2x-3|$

(h) $3x + 4 + |x-3| \geq x$

(i) $|x+3| + |x-5| \leq 8$
(Hány prím megoldás van?)

(j) $|x-1| - |x+2| < 2$

(k) $\dfrac{|x+2|}{x+2} \geq 0$

(l) $\dfrac{|1-x|}{2x-2} > 0$

(m) $\dfrac{|x|+2}{x+2} \geq 0$

(n) $\dfrac{x-7}{|x|-7} \geq 0$

(o) $\left|\dfrac{5}{x-4}\right| > 2$
(Hány egész megoldás van?)

(p) $\left|\dfrac{3x-4}{2x-4}\right| \leq 1$

(q) $\left|\dfrac{3x-4}{2x-4}\right| \leq 0$

**16. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 5y & = & 12 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \dfrac{3}{x-1} & + & \dfrac{4}{y+5} & = & 7 \\ \dfrac{2}{y+5} & - & \dfrac{2}{1-x} & = & 4 \end{array}\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \dfrac{5}{4x+3y} & + & \dfrac{10}{2y-3x} & = & -3 \\ \dfrac{1}{5(3y+4x)} & - & \dfrac{6}{2y-3x} & = & -1 \end{array}\right\}$$

(d)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} |x-2| & + & y & = & 4 \\ 3y & - & |x-2| & = & 4 \end{array}\right\}$$

(e)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} |x| & + & 2y & = & 6 \\ x & - & 5y & = & 4 \end{array}\right\}$$

(f)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} |x| & + & |y| & = & 11 \\ x & - & 2y & = & 5 \end{array}\right\}$$

**17. Feladat.** Adott 10 kg 30%-os sóoldat.

(a) Hány kilogramm vizet kell elpárologtatnunk, hogy 50%-os legyen?

(b) Hány kilogramm (tiszta) vizet kell hozzáöntenünk, hogy 10%-os legyen?

(c) Hány kilogramm 70%-os oldat hozzáadásával érhető el, hogy a keverék töménysége 50% legyen?

(d) Milyen töménységű az az oldat, amelyből 40 kg hozzáadásával érhető el, hogy a keverék 14%-os legyen?

**18. Feladat.** Egy szemüvegeket gyártó cég azt a reklámajánlatot teszi, hogy annyi százalékot enged vagy a lencse, vagy a keret árából, ahány éves a vásárló. Betti 18 éves és egy 56 000 Ft-os keretet szeretne megvenni, lencséi összesen 94 000 Ft-ba kerülnek.

(a) Hány forintért jut hozzá a szemüvegéhez, ha érvényesíti a kedvezményt?

(b) A szemüveg teljes árát tekintve ez hány százalékos kedvezményt jelent?

(c) Hány évesnek kellene lennie ahhoz, hogy a szemüveg teljes árát tekintve 25%-os kedvezményt kapjon?

**19. Feladat.** Határozzuk meg azt a pozitív egész számot, amely négyszer akkora, mint a számjegyei összege.

**20. Feladat.** Az $A$ és $B$ városok távolsága 50 km. $A$-ból elindul egy kerékpáros $B$-be, reggel 9 órakor, 12 km/h sebességgel egyenletesen haladva, míg $B$-ből $A$-ba egy gyalogos reggel 8 órakor, 4 km/h sebességgel.

(a) Mikor és hol találkoznak?

(b) Ábrázoljuk mozgásukat út-idő grafikonon.

(c) Oldjuk meg az előző két feladatot úgyis, hogy a gyalogos $A$-val ellentétes irányba halad.

**21. Feladat.** Egy kétjegyű pozitív egész számból levonva a jegyei megfordításával kapott számot 54-et kapunk. Melyik ez a szám?

**22. Feladat.** Egy osztálykirándulásra mindenkinek azonos összeget kell befizetnie. Ha mindenki 18 000 Ft-ot fizet, 6000 Ft-tal több gyűlik össze a kelleténél, ha viszont csak kettővel kevesebben jönnek, és fejenként 19 000 Ft-ot fizetnek, pontosan összegyűlik a szükséges összeg. Mennyibe kerül a kirándulás összesen?

**23. Feladat.** Mekkorák a háromszög oldalai ha az oldalak páronként vett összege 19, 24, 21?

**24. Feladat.** Ha egy téglalap rövidebb oldalát 2 cm-rel növelem, a hosszabbat ugyanennyivel csökkentem akkor nem változik a téglalap területe. Ha viszont fordítva hajtom végre a fenti változtatásokat, a téglalap területe 8 cm$^2$-rel csökken. Mekkorák a téglalap oldalai (a változtatás előtt)?

**25. Feladat.** Kétfajta sóoldatból keveréket készítünk. Ha az elsőből 14 kg-ot, a másodikból 36 kg-ot veszünk, akkor 30%-os lesz a keverék. Ha viszont a másodikból 5 kg-ot, az elsőből 12 kg-ot keverünk össze, akkor 40%-os keveréket kapunk. Hány százalékosak az összetevők?

**26. Feladat.** Egy autó vízszintes terepen 100 km/h, emelkedőn 90 km/h, lejtőn 120 km/h sebességgel halad. A 180 kilométeres utat egyik irányba 104 perc, a másikba 107 perc 20 másodperc alatt teszi meg. Mekkora az egyes szakaszok hossza?

## Másodfokú függvények

**27. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 2$

(b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ g(x) = (x-1)^2$

(c) $h\colon\ [-3;1[\ \to \mathbb{R},\ h(x) = -2x - x^2 + 3$

(d) $i\colon\ [-3;\infty[\ \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 2, & \text{ha } -3 \le x \le 0 \\ 4 - 2(x-1)^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$

**28. Feladat.** Párosítsuk az alábbi grafikonokat a megadott hozzárendelési szabályokkal. Hozzárendelési szabályok:

(a) $f(x) = 2x^2 - 1$

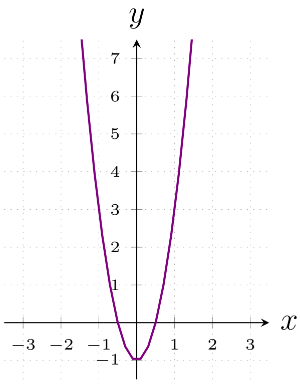
(b) $g(x) = 2(x-1)^2$

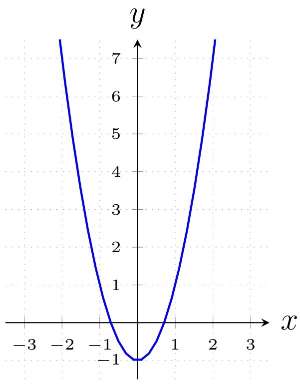
(c) $h(x) = -2x^2 + 1$

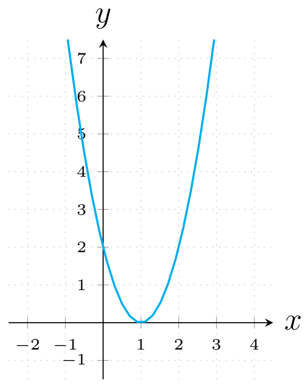
(d) $i(x) = |2x^2 - 1|$

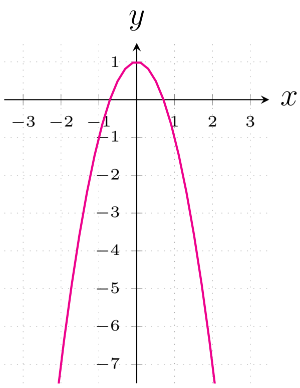
(e) $j(x) = (2x)^2 - 1$

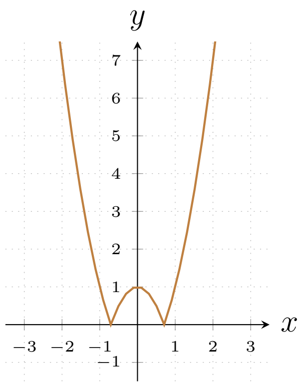
Grafikonok:

(I)



(III)



(V)



(II)



(IV)



**29. Feladat.** Írjuk fel annak a másodfokú függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja

(a) áthalad az $A(4;2), B(5;1), C(6;2)$ pontokon;

(b) áthalad az $A(1;1)$ ponton, szimmetriatengelye az $x = 2$ egyenes, tengelypontjának ordinátája 3.

**30. Feladat.** Hogyan kell megválasztanunk a $c$ paraméter értékét ahhoz, hogy az $f(x) = x^2 - 4x + c$ hozzárendelési szabállyal megadott másodfokú függvénynek

(a) két zérushelye legyen,

(b) egy zérushelye legyen,

(c) ne legyen zérushelye,

(d) $f(2) = 7$ teljesüljön,

(e) egyik zérushelye $x = -1$ legyen,

(f) a két zérushelyének távolsága 2 legyen,

(g) kizárólag pozitív értéket vegyen fel,

(h) ne vegyen fel negatív értéket,

(i) kizárólag negatív értéket vegyen fel?

**31. Feladat.** Határozzuk meg az $a, b, c$ paraméterek értékén ha tudjuk, hogy $f(0) = 10$, $f(-1) = 4$, $f(3) = 52$ és

(a) $f(x) = ax^2 + bx + c$,

(b) $f(x) = a(x + b)^2 + c$.

## Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

**32. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi (másodfokú) egyenleteket.

(a) $1 + \dfrac{(x+3)^2}{5} = \dfrac{(3x-1)^2}{5} + x^2 - \dfrac{3}{2} \cdot x$

(b) $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{8+6x}{4-x^2} = \dfrac{-x-2}{x-2}$

(c) $\dfrac{3}{2x+1} - \dfrac{6}{1-(2x)^2} = 1 + \dfrac{2}{2x-1}$

(d) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$

(e) $x^2 - |x| = 12$

(f) $|x^2 - 4x + 3| = 1$

**33. Feladat.** Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet,

(a) amelyben az együtthatók összege 1,

(b) amelyben az együtthatók összege 1 és gyökei 2 és 3,

(c) a főegyüttható 2 és gyökei 2 és 3,

(d) a konstans tag 3 és gyökei 2 és 3.

**34. Feladat.** Határozzuk meg a $p$ paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletnek

(i) 0,

(ii) 1,

(iii) 2

valós gyöke legyen.

(a) $x^2 + 5x + p = 0$

(b) $3x^2 + px + 3 = 0$

**35. Feladat.** Határozzuk meg az $|x^2 - 4x - 5| = p$ egyenlet megoldásainak számát a $p$ paraméter függvényében.

**36.* Feladat.** Adjuk meg, hogy a $p$ paraméter mely értékeire van a $px^2 + (p-1)x - 2p + 2 = 0$ egyenletnek

(a) két különböző,

(b) két egyenlő

valós gyöke. Mely $p$ paraméterértékre teljesül hogy az egyik gyök

(c) a másik ellentettje,

(d) a másik kétszerese?

**37.* Feladat.** Határozzuk meg a $p$ paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + px + 3 - p = 0$ egyenlet valós gyökeire teljesüljön, hogy

(a) mindkettő pozitív;

(b) mindkettő negatív;

(c) egyik gyök a 3;

(d) egyik gyök a másik kétszerese;

(e) egyik gyök kettővel nagyobb, mint a másik.

**38. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $x^3 - x^2 = 0$

(b) $x^5 - x^3 = 0$

(c) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

(d) $x^8 + 4x^4 + 3 = 0$

(e) $x^6 + 4x^3 + 3 = 0$

(f) $x^6 - 9x^4 + 20x^2 = 0$

(g) $(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) = 24$

(h) $(x^2 + 3x)^2 + 6x^2 - 2 = 38 - 18x$

(i) $\dfrac{5}{x^2 - 5x + 1} + x^2 = 5x - 7$

**39. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

(a) $x^2 - 5x > -6$
(Hány olyan egész szám nem megoldás?)

(b) $2x^2 > 4x - 15$

(c) $12x - x^2 \geq 38$

(d) $\dfrac{5}{x^2 - 1} \leq 0$
(Mikor áll fenn egyenlőség?)

(e) $\dfrac{5x^2 + 4}{2x - 1} \geq 0$

(f) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \geq 0$
(Hány nemnegatív egész szám nemmegoldás?)

(g) $\dfrac{3x - 6}{4 - 2x^2 - 7x} \leq 0$

(h) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{-x^2 + 4x - 3} < 0$

(i) $\dfrac{3x^2 - 18x - 21}{2x^2 - 6x + 4} \geq 0$

(j) $\dfrac{3x^2 - 18x - 21}{2x^2 - 6x + 4} < 1$
(Hány pozitív egész megoldás van?)

(k) $\dfrac{x - 5}{x + 2} - 1 \geq \dfrac{2x}{3 + x}$

(l) $\dfrac{2x + 1}{x - 1} + \dfrac{1 - x}{x + 4} < 1 - \dfrac{3}{2x - 2}$

(m) $x^2 - 5|x| + 6 < 0$

(n) $x^2 - |5x - 6| \geq 0$

(o) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{|2x - 7|} < 0$

(p) $\dfrac{x^2 - 8|x| + 12}{x - 4} \leq 0$

(q) $(x - 1)(2 - 3x)(x + 4) \geq 0$

(r) $x^3 - x \geq 0$

(s) $x^3 - 2x^2 + x < 0$

(t) $(x^2 - 3x + 4)(-x^2 + 6x + 7) < 0$

**40. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a $p$ valós paraméter értékei esetén.

(a) $x^2 + 6x + p < 0$ (b) $x^2 - 6x + p^2 + 9 \geq 0$ (c) $x^2 + p \cdot x + 4 < 0$

**41. Feladat.** Határozzuk meg a $p$ paraméter értékét, ha az alábbi egyenlőtlenségeknek minden valós $x$ megoldása legyen.

(a) $x^2 - (2p-1) \cdot x + 9p - 3 > 0$

(b) $-2x^2 + (4p-1)x + 5p - 6 \geq 0$

(c) $p \cdot x^2 - 5x - 6 > 0$

(d) $p \cdot x^2 - 5x + 6 > 0$

(e) $(p^2 - p - 2) \cdot x^2 - 2(p-2)x + 1 > 0$

**42. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)
$$\left.\begin{array}{rcl} x \cdot y &=& 6 \\ x + y &=& 5 \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} x^2 &+& y^2 &=& 26 \\ 2x &-& y &=& -3 \end{array}\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 &=& 25 \\ x \cdot y &=& 12 \end{array}\right\}$$

(d)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \frac{1}{x} &-& \frac{2}{y} &=& 0{,}6 \\ 5x &+& 2y &=& 15 \end{array}\right\}$$

(e)
$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{x+2}{y+3} &=& 3 \\ (x-2) \cdot (y+2) &=& 10 \end{array}\right\}$$

(f)
$$\left.\begin{array}{rcl} (x+1) \cdot (y-7) &=& 0 \\ (x-2) \cdot (y+2) &=& 0 \end{array}\right\}$$

(g)
$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 - xy &=& 15 \\ y^2 - xy &=& -6 \end{array}\right\}$$

(h)
$$\left.\begin{array}{rcl} x^3 - y^3 &=& 26 \\ x &=& y + 2 \end{array}\right\}$$

(i)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \frac{x}{y} &-& \frac{y}{x} &=& \frac{3}{2} \\ x^2 &+& y^2 &=& 5 \end{array}\right\}$$

**43. Feladat.** Bontsuk fel a 250-et két olyan szorzótényezőre, melyek összege 35.

**44. Feladat.** Hány csapat vett részt abban az egyfordulós körmérkőzés sorozattal lebonyolított bajnokságban, ahol összesen 171 mérkőzésre került sor?

**45. Feladat.** Egy téglalap átlóinak összege 20 cm, kerülete 28 cm. Mekkorák az oldalai?

**46. Feladat.** Két folyóparti város távolsága 120 km. Ezt az utat egy hajójárat oda-vissza 12,5 óra alatt teszi meg. Mekkora a hajó (állóvízben mért) sebessége, ha a folyó sebessége 4 km/h?

**47. Feladat.** Egy futárnak 40 km-t kell megtennie. Mivel a tervezettnél két órával később indult, sebességét 1 km/h-val megnövelve, éppen célba ért. Mekkora sebességgel haladt?

**48. Feladat.** Két szám számtani közepe öttel nagyobb a kisebbik számnál, mértani közepük pedig hattal kisebb a nagyobbik számnál. Melyik ez a két szám?

**49. Feladat.** Két sokszögben az oldalak számának össze 19, az átlók számának összege pedig 68. Hány oldalúak ezek a sokszögek?

# Megoldások

## Lineáris függvények

**1. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonjait.

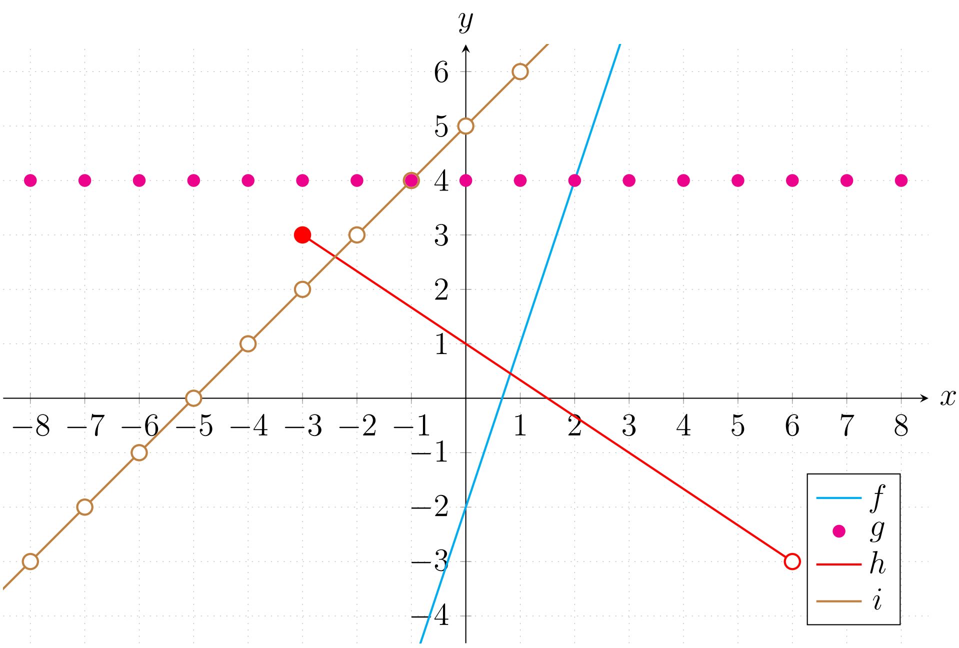
(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2$

(b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ g(x) = 4$

(c) $h\colon\ [-3; 6[ \to \mathbb{R},\ h(x) = -\dfrac{2}{3}x + 1$

(d) $i\colon \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ i(x) = x + 5$

**Megoldás.**




**2. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán.

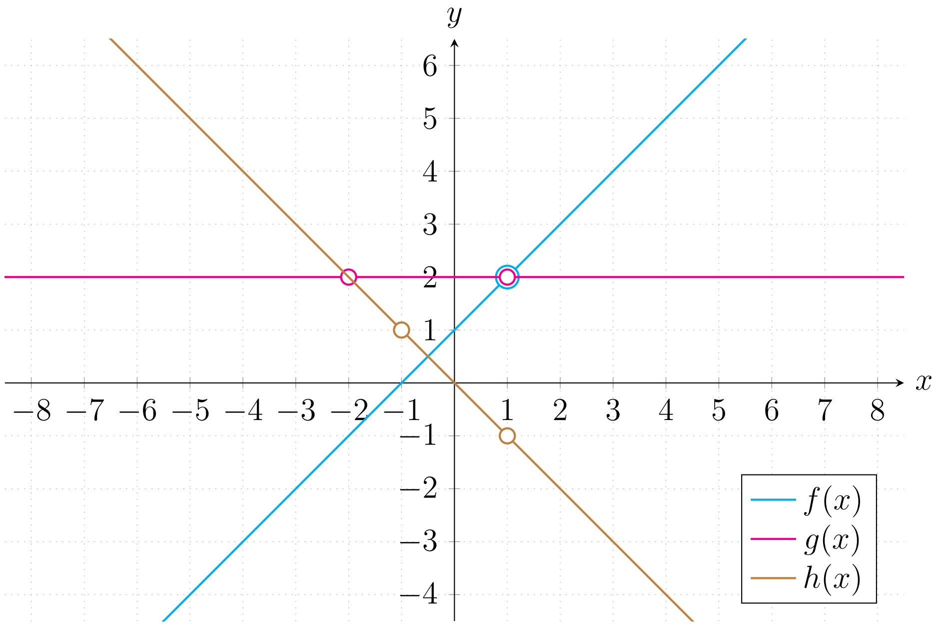
(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $g(x) = \dfrac{2(x-1)(x+2)}{x^2 + x - 2}$

(c) $h(x) = \dfrac{x^3 - x}{(1-x)(x+1)}$

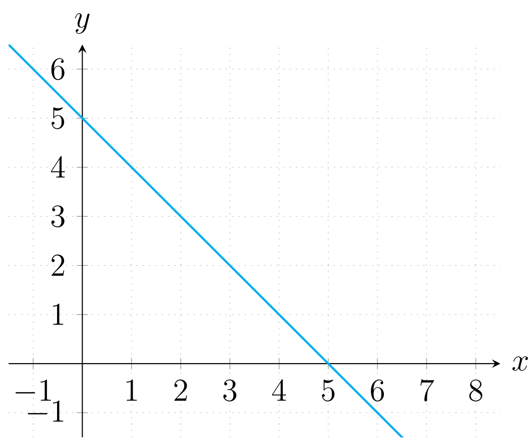
(d) $i(x) = \dfrac{2x - 1}{(1-x)(x+1) + x^2 - 1}$

**Megoldás.**

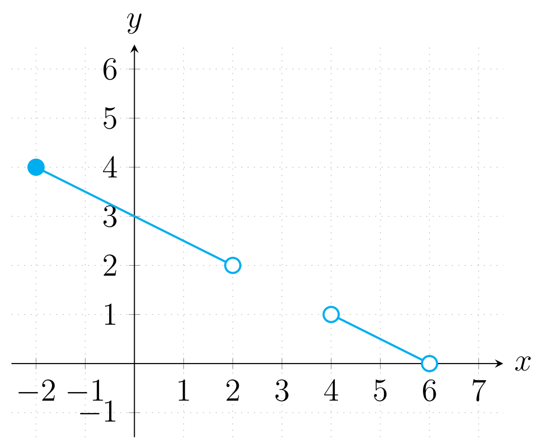



Az $i(x)$ kifejezés értelmezési tartománya az üres halmaz, ezért nem is függvény. (Ábrázolás gyanánt esetleg csak egy üres koordináta-rendszerként illusztrálható.)

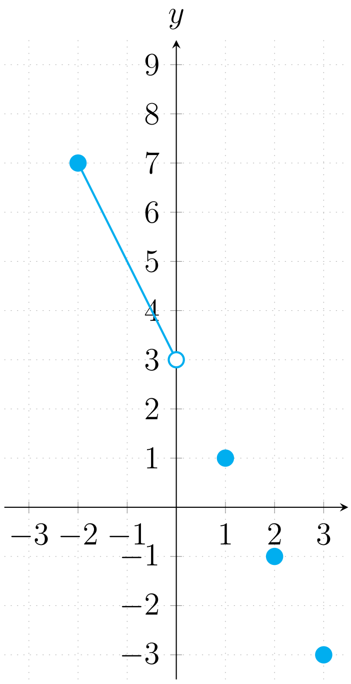
**3. Feladat.** Mely függvények grafikonjai láthatók az alábbi ábrákon? (Adjuk meg az értelmezési tartományt és a hozzárendelési szabályt is.)

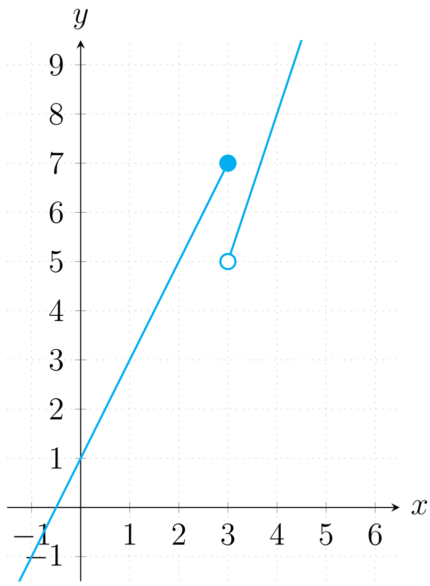



(a)




(b)

(c) 

(d) 

**Megoldás.**

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5 - x$

(b) $g\colon\ [-2;2[\,\cup\,]4;6[\ \to \mathbb{R},\ g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$

(c) $h\colon\ [-2;0[\,\cup\,\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R},\ h(x) = -2x + 3$

(d) $i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{ha } x \leq 3 \\ 3x-4, & \text{ha } x > 3 \end{cases}$

**4. Feladat.** Írjuk fel annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek

(a) meredeksége 2 és (az $y$ tengellyel vett) tengelymetszete 3;

(b) zérushelye $x = 3$, meredeksége $\dfrac{1}{2}$;

(c) tengelymetszete 5 és nincs zérushelye (a függvény mindenütt értelmezett)

(d) grafikonja áthalad a $P(1;5)$ ponton és meredeksége $-3$;

(e) grafikonja áthalad az $A(2;3)$ és $B(4;6)$ pontonokon.

**Megoldás.**

(a) $f(x) = 2x + 3$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

(c) $h(x) = 5$

(d) $p(x) = -3x + 8$

(e) $q(x) = \dfrac{3}{2}x$

**5. Feladat.** Az $f(x) = a \cdot x + b$ lineáris függvény hozzárendelési szabályában adjuk meg az $a, b$ paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy

(a) $f(2) = 7,\ f(7) = 17;$

(b) $f(2) = 7,\ f(7) = 7.$

**Megoldás.**

(a) $a = 2,\ b = 3$

(b) $a = 0,\ b = 7$

**6. Feladat.** Tudjuk, hogy 0°C = 32°F és 100°C = 212°F, ahol a hőmérsékletértékek a Celsius-, illetve a Fahrenheit-skálán mért értékeket jelentik. Tudjuk, hogy mindkét skála lineáris beosztású. Adjuk meg azokat a függvényeket amelyekkel a Celsius-, illetve a Fahrenheit-hőmérő értékeit átválthatjuk egymásba.

**Megoldás.** $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$, $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$

**7. Feladat.** Két, egyenletes sebességgel égő gyertyánk van, az első 18 cm és 9 óra alatt ég el, a másik 12 cm és 6 óra alatt ég el. A gyertyákat egyszerre meggyújtjuk.

(a) Írjuk fel a gyertyák hosszát (cm-ben) az idő függvényében leíró függvényeket.

(b) Ábrázoljuk a függvényeket közös koordináta rendszerben.

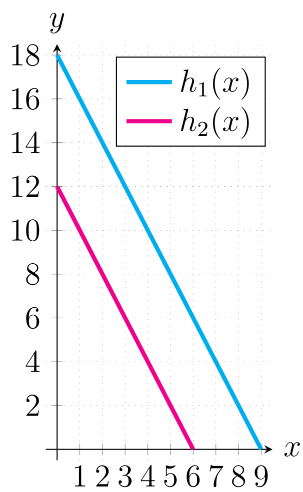
(c) Mikor lesz az első gyertya kétszer olyan magas, mint a másik?

(d) Mikor lesz az első gyertya fele olyan magas, mint a másik?

**Megoldás.**

(a) $h_1(x) = -2x + 18$, $h_2(x) = -2x + 12$

(b)




(c) 3 óra múlva

(d) soha

**8. Feladat.** Két, egyenletes sebességgel égő, azonos magasságú (15 cm) gyertyánk van, az egyik 12, a másik 18 óra alatt ég el. Azt, amelyik lassabban ég el reggel 6 órakor, azt amelyik gyorsabban reggel 8 órakor gyújtjuk meg.

(a) Írjuk fel a gyertyák hosszát (cm-ben) az idő függvényében leíró függvényeket.

(b) Ábrázoljuk a függvényeket közös koordináta rendszerben.

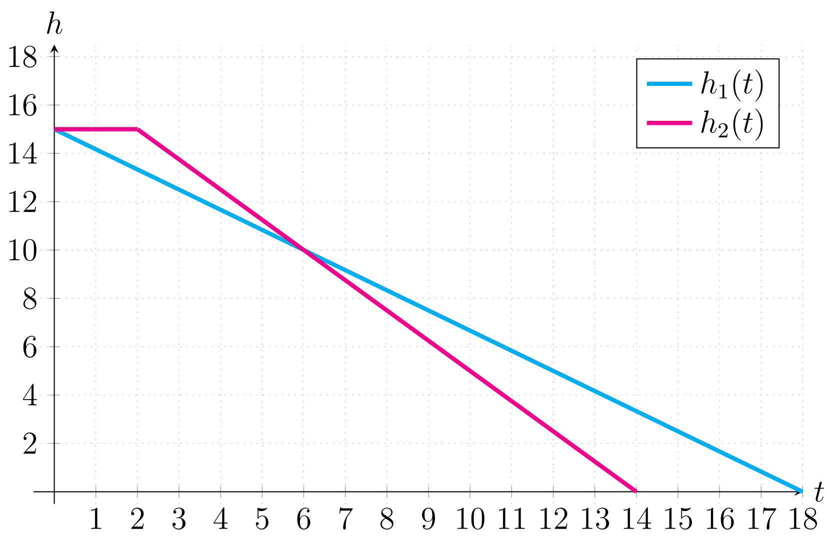
(c) Mikor lesz a gyorsabban égő gyertya kétszer olyan magas, mint a lassabban égő?

(d) Mikor lesz a gyorsabban égő gyertya fele olyan magas, mint a lassabban égő?

**Megoldás.**

(a) $h_1(t) = 15 - \frac{15}{18}t$; $h_2(t) = 15 - \frac{15}{12}(t-2)$, $(t \geq 2)$

(b)




(c) soha

(d) $t = 12$

# Abszolútértéket tartalmazó függvények

**9. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonjait.

(a) $f(x) = 3|x| - 2$

(b) $g(x) = 3|x-2|$

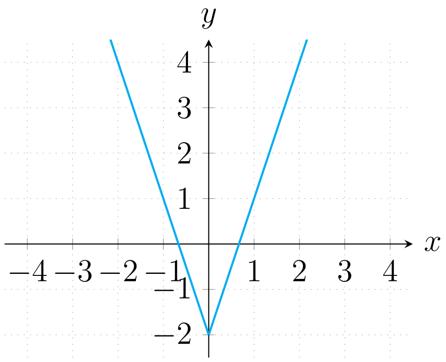
(c) $h(x) = x + |x|$

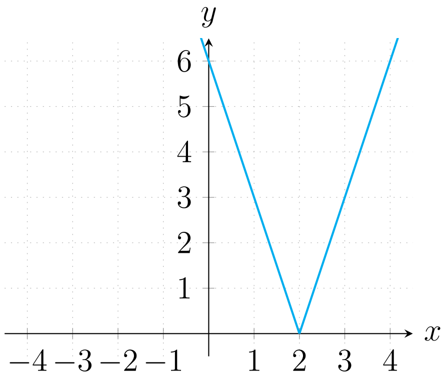
(d) $i(x) = |x| - x$

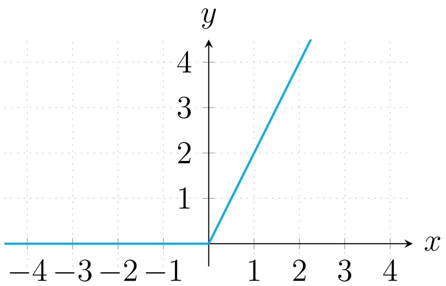
(e) $j(x) = \dfrac{x^2 - 9}{|x| - 3}$

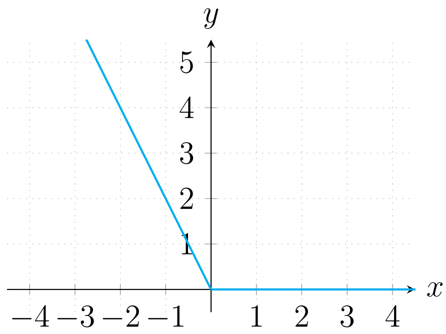
(f) $k(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2x - 4}$

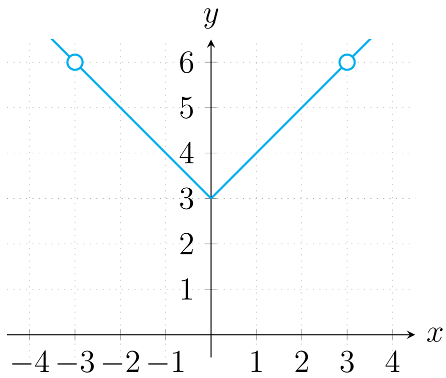
**Megoldás.**

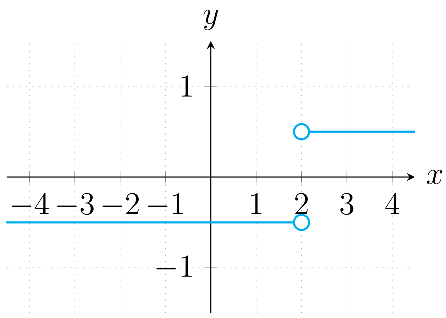
(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)


**10. Feladat.** Az $f(x) = a \cdot |x| + b$ függvény hozzárendelési szabályában adjuk meg az $a, b$ paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy

(a) $f(-2) = 7,\ f(7) = 17$;

(b) $f(2) = 7,\ f(-7) = 7$.

**Megoldás.**

(a) $a = 2,\ b = 3$

(b) $a = 0,\ b = 7$

**11. Feladat.** Az $f(x) = |x - a| + b$ függvény hozzárendelési szabályában adjuk meg az $a, b$ paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy $f(4) = 0$ és $f(0) = -2$.

**Megoldás.** $a = 1,\ b = -3$

## Lineáris egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

**12. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenleteket.

(a) $(3a+4)\cdot(1+a)-(a-4)\cdot a+20=(2a+1)\cdot(a-3)+3$

(b) $\dfrac{3x-4}{2}+\dfrac{7-3x}{4}=\dfrac{5-4x}{2}$

(c) $\dfrac{2x+5}{2x-2}-\dfrac{3x+2}{3x-3}=\dfrac{x}{4x-4}$

(d) $\dfrac{3x}{3x-5}-\dfrac{5}{5-3x}=\dfrac{6x+1}{6x-10}$

(e) $\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$

(f) $\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}=2+x$

(g) $2\cdot\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{7}{x^2-1}+3\cdot\dfrac{2x-1}{x+1}$

(h) $\dfrac{2x+1}{x^2-9}-\dfrac{x+1}{x^2+3x}=\dfrac{7}{3x-x^2}+\dfrac{1}{x-3}$

(i) $\dfrac{x-7}{x-3}-\dfrac{3x+2}{x^2+2x-15}=\dfrac{x+9}{x+5}$

**Megoldás.**

(a) $a=-\dfrac{3}{2}$

(b) $x=1$

(c) $x=\dfrac{22}{3}$

(d) $x\in\emptyset$

(e) $x\in\emptyset$

(f) $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

(g) $x=\dfrac{8}{17}$

(h) $x=-\dfrac{24}{7}$

(i) $x=-\dfrac{10}{11}$

**13. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi abszolútértékes egyenleteket.

(a) $|x+2|=3$

(b) $||2x-1|-7|=4$

(c) $|x-3|+2x=9$

(d) $|x-1|=1-x$

(e) $|x-3|+|x+4|=11$

(f) $2\cdot|2x+1|-|5-3x|=4$

(g) $|x-1|+|x+4|-|x-6|=-1$

(h) $2\cdot|x+5|+5\cdot|1-2x|=4\cdot|4x+1|+11$

(i) $\dfrac{|x-2|}{2x+1}=1$

(j) $\dfrac{3x+5}{|6x+10|}=0{,}5$

**Megoldás.**

(a) $x=-5,\ 1$

(b) $x=-5,\ -1,\ 2,\ 6$

(c) $x=4$

(d) $x\in\,]-\infty;1]$

(e) $x=-6,\ 5$

(f) $x=-11,\ 1$

(g) $x=-8,\ 0$

(h) $x=-1,\ 0$

(i) $x=\dfrac{1}{3}$

(j) $x\in\left]-\dfrac{5}{3};\infty\right[$

**14. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

(a) $3 \cdot (3 - x) + 5 \cdot (2x - 4) - x > -3 \cdot (4x + 3) + 2$

(b) $(x + 1)^2 - 7x + 11 \geq 13 + (7 - x)^2$

(c) $\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{4x - 7}{6} \leq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7 - 3x}{3}$

(d) $\dfrac{2 - x}{4x - 8} \geq 0$

(e) $\dfrac{2x + 5}{x - 12} - \dfrac{3x - 7}{x - 12} < 0$

(f) $\dfrac{2}{x + 5} \leq 0$ (Mikor áll fenn egyenlőség?)

(g) $\dfrac{2x + 5}{x - 12} \leq 0$ (Hány prím megoldás van?)

(h) $\dfrac{1 - 4x}{5x + 3} < 0$ (Megoldás-e a 0?)

(i) $\dfrac{3x + 5}{2x - 4} \leq 1$ (Hány nempozitív egész megoldás van?)

(j) $\dfrac{8x + 1}{5 + 2x} > -3$ (Hány olyan egész szám van, ami nem megoldás?)

(k) $\dfrac{x + 4}{x - 1} + \dfrac{7 - 3x}{2x - 2} \geq \dfrac{5x + 1}{3x - 3}$ (Hány egész megoldás van?)

(l) $\dfrac{2x - 3}{-x + 2} + 1 \leq \dfrac{5x + 1}{2x - 4}$ (Hány megoldás esik a $[0; 1]$ intervallumba?)

**Megoldás.**

(a) $x \in \left]\dfrac{2}{9}; \infty\right[$

(b) $x \in \left[\dfrac{50}{9}; \infty\right[$

(c) $x \in \left]-\infty; -\dfrac{15}{8}\right]$

(d) $x \in \emptyset$

(e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{12\}$

(f) $x \in \left]-\infty; -5\right[$ (Az egyenlőség soha nem áll fenn.)

(g) $x \in \left[\dfrac{-5}{2}; 12\right[$ (Öt prím megoldás van: 2, 3, 5, 7, 11.)

(h) $x \in \left]-\infty; -\dfrac{3}{5}\right[ \cup \left]\dfrac{1}{4}; \infty\right[$ (A 0 nem megoldás.)

(i) $x \in [-9; 2[$ (Tíz nempozitív egész megoldás van.)

(j) $x \in \left]-\infty; -\dfrac{5}{2}\right[ \cup \left]-\dfrac{8}{7}; \infty\right[$ (Egyetlen olyan egész szám van, ami nem megoldás, a $-2$.)

(k) $x \in \left]1; \frac{43}{13}\right]$ (Két egész megoldás van: 2 és 3.)

(l) $x \in \left]-\infty; \frac{1}{7}\right] \cup \left]2; \infty\right[$ (Végtelen sok.)

**15. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi abszolútértékes egyenlőtlenségeket.

(a) $|x| > 3$

(b) $|2x-1| \leq 5$
(Hány egész megoldás van?)

(c) $|x| > x$

(d) $|x| \geq x+1$

(e) $|2x+3| \geq x-1$

(f) $|x| \leq |x+1|$

(g) $|x-5| < |2x-3|$

(h) $3x+4+|x-3| \geq x$

(i) $|x+3|+|x-5| \leq 8$
(Hány prím megoldás van?)

(j) $|x-1|-|x+2| < 2$

(k) $\frac{|x+2|}{x+2} \geq 0$

(l) $\frac{|1-x|}{2x-2} > 0$

(m) $\frac{|x|+2}{x+2} \geq 0$

(n) $\frac{x-7}{|x|-7} \geq 0$

(o) $\left|\frac{5}{x-4}\right| > 2$
(Hány egész megoldás van?)

(p) $\left|\frac{3x-4}{2x-4}\right| \leq 1$

(q) $\left|\frac{3x-4}{2x-4}\right| \leq 0$

**Megoldás.**

(a) $x \in \left]-\infty; -3\right[ \cup \left]3; \infty\right[$

(b) $x \in [-2; 3]$
(Az egész megoldások száma hat.)

(c) $x \in \left]-\infty; 0\right[$

(d) $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

(e) $x \in \mathbb{R}$

(f) $\left[-\frac{1}{2}; \infty\right[$

(g) $x \in \left]-\infty; -2\right[ \cup \left]\frac{8}{3}; \infty\right[$

(h) $x \in \left[-7; \infty\right[$

(i) $x \in [-3; 5]$
(Három prím megoldás van, a 2, 3 és 5.)

(j) $\left]-\frac{3}{2}; \infty\right[$

(k) $\left]-2; \infty\right[$

(l) $\left]1; \infty\right[$

(m) $\left]-2; \infty\right[$

(n) $\left]-7; \infty\right[$

(o) $\left]\frac{3}{2}; \frac{13}{2}\right[ \setminus \{4\}$
(Négy egész megoldás van: 2, 3, 5, 6.)

(p) $x \in \left[0; \frac{8}{5}\right]$

(q) $x = \frac{4}{3}$

**16. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 5y & = & 12 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \dfrac{3}{x-1} & + & \dfrac{4}{y+5} & = & 7 \\ \dfrac{2}{y+5} & - & \dfrac{2}{1-x} & = & 4 \end{array}\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \dfrac{5}{4x+3y} & + & \dfrac{10}{2y-3x} & = & -3 \\ \dfrac{1}{5(3y+4x)} & - & \dfrac{6}{2y-3x} & = & -1 \end{array}\right\}$$

(d)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} |x-2| & + & y & = & 4 \\ 3y & - & |x-2| & = & 4 \end{array}\right\}$$

(e)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} |x| & + & 2y & = & 6 \\ x & - & 5y & = & 4 \end{array}\right\}$$

(f)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} |x| & + & |y| & = & 11 \\ x & - & 2y & = & 5 \end{array}\right\}$$

**Megoldás.**

(a) $(1;2)$

(b) $(2;-4)$

(c) $(-1;1)$

(d) $(0;2)$, $(4;2)$

(e) $\left(-\frac{38}{3};-\frac{10}{3}\right)$, $\left(\frac{38}{7};\frac{2}{7}\right)$

(f) $(9;2)$, $\left(-\frac{17}{3};-\frac{16}{3}\right)$

**17. Feladat.** Adott 10 kg 30%-os sóoldat.

(a) Hány kilogramm vizet kell elpárologtatnunk, hogy 50%-os legyen?

(b) Hány kilogramm (tiszta) vizet kell hozzáöntenünk, hogy 10%-os legyen?

(c) Hány kilogramm 70%-os oldat hozzáadásával érhető el, hogy a keverék töménysége 50% legyen?

(d) Milyen töménységű az az oldat, amelyből 40 kg hozzáadásával érhető el, hogy a keverék 14%-os legyen?

**Megoldás.**

(a) 4 kilogrammot

(b) 20 kilogrammot

(c) 10 kilogramm

(d) 10%-os

**18. Feladat.** Egy szemüvegeket gyártó cég azt a reklámajánlatot teszi, hogy annyi százalékot enged vagy a lencse, vagy a keret árából, ahány éves a vásárló. Betti 18 éves és egy 56 000 Ft-os keretet szeretne megvenni, lencséi összesen 94 000 Ft-ba kerülnek.

(a) Hány forintért jut hozzá a szemüvegéhez, ha érvényesíti a kedvezményt?

(b) A szemüveg teljes árát tekintve ez hány százalékos kedvezményt jelent?

(c) Hány évesnek kellene lennie ahhoz, hogy a szemüveg teljes árát tekintve 25%-os kedvezményt kapjon?

**Megoldás.**

(a) 133080 Ft-ért

(b) 11,28%

(c) Kb. 40 évesnek (39,89).

**19. Feladat.** Határozzuk meg azt a pozitív egész számot, amely négyszer akkora, mint a számjegyei összege.

**Megoldás.** 12, 24, 36, 48

**20. Feladat.** Az $A$ és $B$ városok távolsága 50 km. $A$-ból elindul egy kerékpáros $B$-be, reggel 9 órakor, 12 km/h sebességgel egyenletesen haladva, míg $B$-ből $A$-ba egy gyalogos reggel 8 órakor, 4 km/h sebességgel.

(a) Mikor és hol találkoznak?

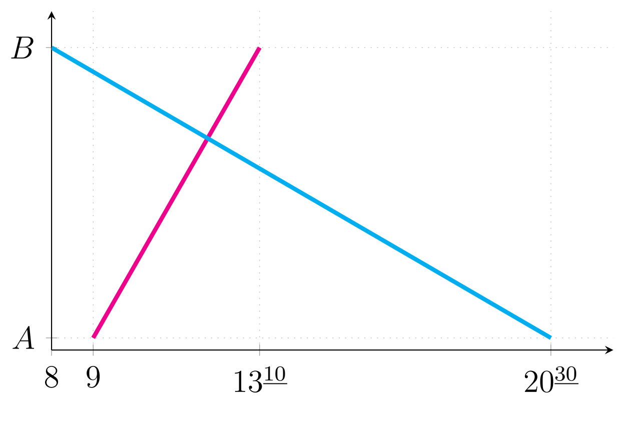
(b) Ábrázoljuk mozgásukat út-idő grafikonon.

(c) Oldjuk meg az előző két feladatot úgyis, hogy a gyalogos $A$-val ellentétes irányba halad.

**Megoldás.**

(a) 11 óra 52,5 perckor találkoznak, $A$ addig 34,5 km-t tett meg, $B$ pedig 15,5 km-t.

(b)




(c) 15 óra 45 perckor találkoznak, $A$ addig 81 km-t tett meg, $B$ pedig 31 km-t.

**21. Feladat.** Egy kétjegyű pozitív egész számból levonva a jegyei megfordításával kapott számot 54-et kapunk. Melyik ez a szám?

**Megoldás.** $71, 82, 93$

**22. Feladat.** Egy osztálykirándulásra mindenkinek azonos összeget kell befizetnie. Ha mindenki 18 000 Ft-ot fizet, 6000 Ft-tal több gyűlik össze a kelleténél, ha viszont csak kettővel kevesebben jönnek, és fejenként 19 000 Ft-ot fizetnek, pontosan összegyűlik a szükséges összeg. Mennyibe kerül a kirándulás összesen?

**Megoldás.** 570000 Ft.

**23. Feladat.** Mekkorák a háromszög oldalai ha az oldalak páronként vett összege $19,\ 24,\ 21$?

**Megoldás.** $8,\ 11,\ 13$

**24. Feladat.** Ha egy téglalap rövidebb oldalát 2 cm-rel növelem, a hosszabbat ugyanennyivel csökkentem akkor nem változik a téglalap területe. Ha viszont fordítva hajtom végre a fenti változtatásokat, a téglalap területe 8 $cm^2$-rel csökken. Mekkorák a téglalap oldalai (a változtatás előtt)?

**Megoldás.** 5 cm, 7 cm.

**25. Feladat.** Kétfajta sóoldatból keveréket készítünk. Ha az elsőből 14 kg-ot, a másodikból 36 kg-ot veszünk, akkor 30%-os lesz a keverék. Ha viszont a másodikból 5 kg-ot, az elsőből 12 kg-ot keverünk össze, akkor 40%-os keveréket kapunk. Hány százalékosak az összetevők?

**Megoldás.** Körülbelül $46,91\%$ és $23,43\%$-osak.

**26. Feladat.** Egy autó vízszintes terepen 100 km/h, emelkedőn 90 km/h, lejtőn 120 km/h sebességgel halad. A 180 kilométeres utat egyik irányba 104 perc, a másikba 107 perc 20 másodperc alatt teszi meg. Mekkora az egyes szakaszok hossza?

**Megoldás.** Az odaúton az emelkedő 60 km, a vízszintes szakasz 40 km, a lejtős 80 km hosszú. (Visszaúton az emelkedő és a lejtő szerepet cserél.)

## Másodfokú függvények

**27. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 - 2$

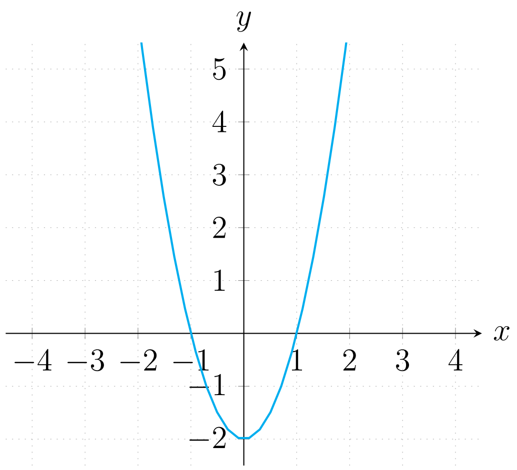
(b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ g(x) = (x-1)^2$

(c) $h\colon\ [-3;1[\ \to \mathbb{R},\ h(x) = -2x - x^2 + 3$

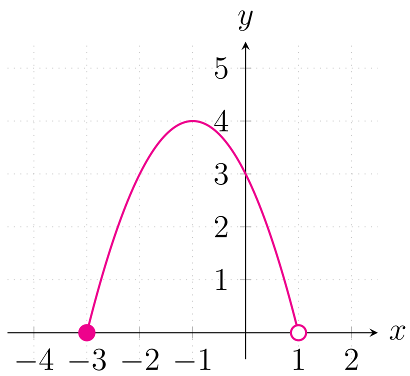
(d) $i\colon\ [-3;\infty[\ \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 2, & \text{ha } -3 \le x \le 0 \\ 4 - 2(x-1)^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$

**Megoldás.**

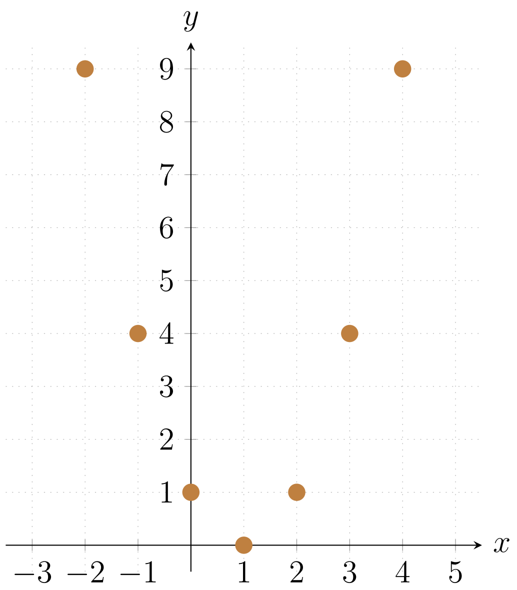
(a)



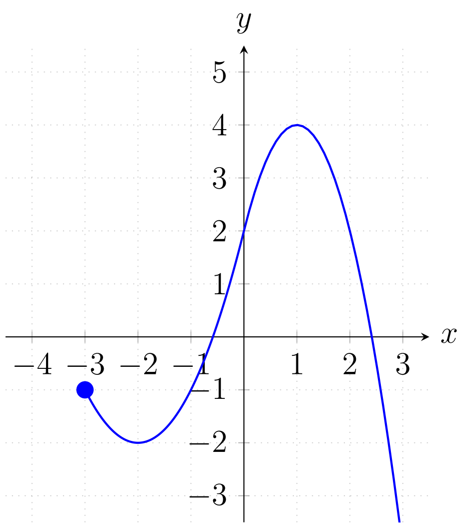
(c)



(b)



(d)



**28. Feladat.** Párosítsuk az alábbi grafikonokat a megadott hozzárendelési szabályokkal. Hozzárendelési szabályok:

(a) $f(x) = 2x^2 - 1$

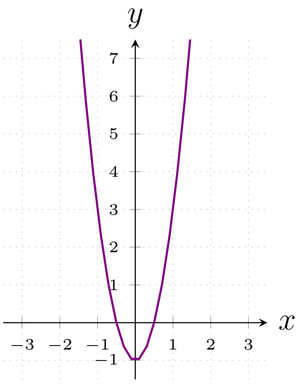
(b) $g(x) = 2(x-1)^2$

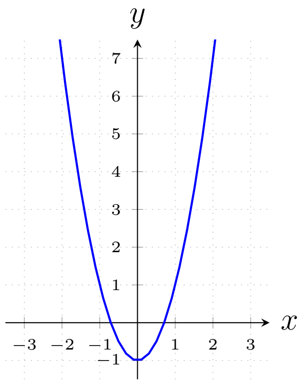
(c) $h(x) = -2x^2 + 1$

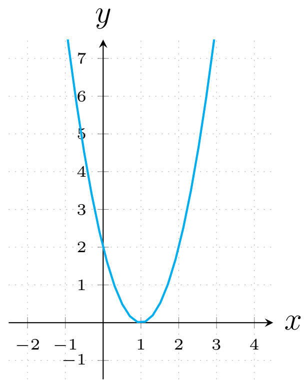
(d) $i(x) = |2x^2 - 1|$

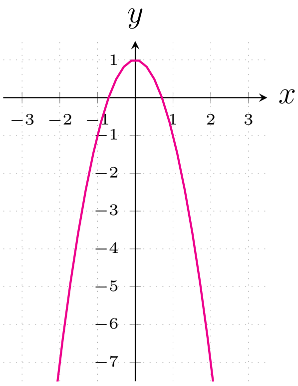
(e) $j(x) = (2x)^2 - 1$

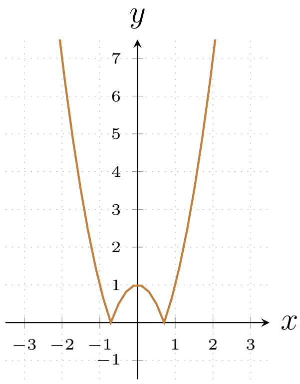
Grafikonok:

(I) 


(III) 


(V) 


(II) 


(IV) 


**Megoldás.** (a) — (III), (b) — (V), (c) — (II), (d) — (IV), (e) — (I)

**29. Feladat.** Írjuk fel annak a másodfokú függvénynek a hozzárendelési szabályát, amelynek grafikonja

(a) áthalad az $A(4;2), B(5;1), C(6;2)$ pontokon;

(b) áthalad az $A(1;1)$ ponton, szimmetriatengelye az $x = 2$ egyenes, tengelypontjának ordinátája 3.

**Megoldás.**

(a) $f(x) = (x-5)^2 + 1$

(b) $f(x) = -2(x-2)^2 + 3$

**30. Feladat.** Hogyan kell megválasztanunk a $c$ paraméter értékét ahhoz, hogy az $f(x) = x^2 - 4x + c$ hozzárendelési szabállyal megadott másodfokú függvénynek

(a) két zérushelye legyen,

(b) egy zérushelye legyen,

(c) ne legyen zérushelye,

(d) $f(2) = 7$ teljesüljön,

(e) egyik zérushelye $x = -1$ legyen,

(f) a két zérushelyének távolsága 2 legyen,

(g) kizárólag pozitív értéket vegyen fel,

(h) ne vegyen fel negatív értéket,

(i) kizárólag negatív értéket vegyen fel?

**Megoldás.**

(a) $c < 4$

(b) $c = 4$

(c) $c > 4$

(d) $c = 11$

(e) $c = -5$

(f) $c = 3$

(g) $c > 4$

(h) $c \geq 4$

(i) $c \in \emptyset$

**31. Feladat.** Határozzuk meg az $a, b, c$ paraméterek értékén ha tudjuk, hogy $f(0) = 10$, $f(-1) = 4$, $f(3) = 52$ és

(a) $f(x) = ax^2 + bx + c$,

(b) $f(x) = a(x + b)^2 + c$.

**Megoldás.**

(a) $a = 2,\ b = 8,\ c = 10$

(b) $a = 2,\ b = 2,\ c = 2$

# Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

**32. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi (másodfokú) egyenleteket.

(a) $1 + \dfrac{(x+3)^2}{5} = \dfrac{(3x-1)^2}{5} + x^2 - \dfrac{3}{2} \cdot x$

(b) $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{8+6x}{4-x^2} = \dfrac{-x-2}{x-2}$

(c) $\dfrac{3}{2x+1} - \dfrac{6}{1-(2x)^2} = 1 + \dfrac{2}{2x-1}$

(d) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$

(e) $x^2 - |x| = 12$

(f) $|x^2 - 4x + 3| = 1$

**Megoldás.**

(a) $x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 2$

(b) $x_1 = 0,\ x_2 = 3$

(c) $x = 1$

(d) $x_1 = -4,\ x_2 = -3,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4$

(e) $x_1 = -4,\ x_2 = 4$

(f) $x_1 = 2,\ x_2 = 2 - \sqrt{2},\ x_3 = 2 + \sqrt{2}$

**33. Feladat.** Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet,

(a) amelyben az együtthatók összege 1,

(b) amelyben az együtthatók összege 1 és gyökei 2 és 3,

(c) a főegyüttható 2 és gyökei 2 és 3,

(d) a konstans tag 3 és gyökei 2 és 3.

**Megoldás.**

(a) $x^2 + x - 1 = 0$

(b) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 = 0$

(c) $2x^2 - 10x + 12 = 0$

(d) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 = 0$

**34. Feladat.** Határozzuk meg a $p$ paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletnek

(i) 0, (ii) 1, (iii) 2

valós gyöke legyen.

(a) $x^2 + 5x + p = 0$

(b) $3x^2 + px + 3 = 0$

**Megoldás.**

(a) (i) $p < \frac{25}{4}$ (ii) $p = \frac{25}{4}$ (iii) $p > \frac{25}{4}$

(b) (i) $p \in (-6; 6)$ (ii) $p_1 = -6,\ p_2 = 6$ (iii) $p < -6$ vagy $p > 6$

**35. Feladat.** Határozzuk meg az $|x^2 - 4x - 5| = p$ egyenlet megoldásainak számát a $p$ paraméter függvényében.

**Megoldás.** Ha $p < 0$, akkor nincs megoldás; ha $p = 0$, akkor 2 megoldás van; ha $0 < p < 9$, akkor 4 megoldás van; ha $p = 9$, akkor 3 megoldás van; ha $p > 9$, akkor 2 megoldás van.

**36.* Feladat.** Adjuk meg, hogy a $p$ paraméter mely értékeire van a $px^2 + (p-1)x - 2p + 2 = 0$ egyenletnek

(a) két különböző,

(b) két egyenlő

valós gyöke. Mely $p$ paraméterértékre teljesül hogy az egyik gyök

(c) a másik ellentettje,

(d) a másik kétszerese?

**Megoldás.**

(a) $p \in \left( \left] -\infty; \frac{1}{9} \right[ \setminus \{0\} \right) \cup ]1; \infty[$

(b) $p_1 = 1,\ p_2 = \frac{1}{9}$

(c) $p = 1$

(d) $p = 10$ (Valós gyökök esetén.)

**37.* Feladat.** Határozzuk meg a $p$ paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + px + 3 - p = 0$ egyenlet valós gyökeire teljesüljön, hogy

(a) mindkettő pozitív;

(b) mindkettő negatív;

(c) egyik gyök a 3;

(d) egyik gyök a másik kétszerese;

(e) egyik gyök kettővel nagyobb, mint a másik.

**Megoldás.**

(a) $p \leq -6$

(b) $2 \leq p < 3$

(c) $p = -6$

(d) $p = -\frac{3}{4}(3 + \sqrt{33})$ vagy $p = \frac{3}{4}(\sqrt{33} - 3)$.

(e) $p = 2\sqrt{5} - 2$.

**38. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $x^3 - x^2 = 0$

(b) $x^5 - x^3 = 0$

(c) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

(d) $x^8 + 4x^4 + 3 = 0$

(e) $x^6 + 4x^3 + 3 = 0$

(f) $x^6 - 9x^4 + 20x^2 = 0$

(g) $(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) = 24$

(h) $(x^2 + 3x)^2 + 6x^2 - 2 = 38 - 18x$

(i) $\frac{5}{x^2 - 5x + 1} + x^2 = 5x - 7$

**Megoldás.**

(a) $x = 0,\ 1$

(b) $x = 0,\ -1,\ 1$

(c) $x = \pm 1,\ \pm\sqrt{8}$

(d) $x \in \emptyset$

(e) $x = -1,\ -\sqrt[3]{3}$

(f) $x = 0,\ \pm 2,\ \pm\sqrt{5}$

(g) $x = -4,\ 2$

(h) $x = -4,\ 1$

(i) $x = 2,\ 3,\ \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

**39. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

(a) $x^2 - 5x > -6$
(Hány olyan egész szám nem megoldás?)

(b) $2x^2 > 4x - 15$

(c) $12x - x^2 \geq 38$

(d) $\dfrac{5}{x^2 - 1} \leq 0$
(Mikor áll fenn egyenlőség?)

(e) $\dfrac{5x^2 + 4}{2x - 1} \geq 0$

(f) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \geq 0$
(Hány nemnegatív egész szám nemmegoldás?)

(g) $\dfrac{3x - 6}{4 - 2x^2 - 7x} \leq 0$

(h) $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{-x^2 + 4x - 3} < 0$

(i) $\dfrac{3x^2 - 18x - 21}{2x^2 - 6x + 4} \geq 0$

(j) $\dfrac{3x^2 - 18x - 21}{2x^2 - 6x + 4} < 1$
(Hány pozitív egész megoldás van?)

(k) $\dfrac{x - 5}{x + 2} - 1 \geq \dfrac{2x}{3 + x}$

(l) $\dfrac{2x + 1}{x - 1} + \dfrac{1 - x}{x + 4} < 1 - \dfrac{3}{2x - 2}$

(m) $x^2 - 5|x| + 6 < 0$

(n) $x^2 - |5x - 6| \geq 0$

(o) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{|2x - 7|} < 0$

(p) $\dfrac{x^2 - 8|x| + 12}{x - 4} \leq 0$

(q) $(x - 1)(2 - 3x)(x + 4) \geq 0$

(r) $x^3 - x \geq 0$

(s) $x^3 - 2x^2 + x < 0$

(t) $(x^2 - 3x + 4)(-x^2 + 6x + 7) < 0$

**Megoldás.**

(a) $x \in ]-\infty; 2[ \cup ]3; \infty[$
(Két egész szám van ami nem megoldás, a 2 és a 3.)

(b) $x \in \mathbb{R}$

(c) $x \in \emptyset$

(d) $x \in ]-1; 1[$
(Az egyenlőség soha nem áll fenn.)

(e) $x \in \left]\dfrac{1}{2}; \infty\right[$

(f) $x \in ]1; 2] \cup [3; \infty[$
(Két nemnegatív egész szám nemmegoldás, a 0 és az 1.)

(g) $x \in \left]-4; \dfrac{1}{2}\right[ \cup [2; \infty[$

(h) $x \in ]-\infty; 1[ \cup ]2; 3[ \cup ]4; \infty[$

(i) $x \in ]-\infty; -1] \cup ]1; 2[ \cup [7; \infty[$

(j) $x \in \left]6 - \sqrt{61}; 1\right[ \cup \left]2; 6 + \sqrt{61}\right[$
(A pozitív egész megoldások száma 11.)

(k) $x \in ]-3; -2[$

(l) $x \in ]-\infty; -4[ \cup \left]-\frac{26}{19}; 1\right[$

(m) $x \in ]-3; -2[ \cup ]2; 3[$

(n) $x \in ]-\infty; -6] \cup [1; 2] \cup [3; \infty[$

(o) $x \in ]3; 4[ \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$

(p) $x \in ]-\infty; -6] \cup [-2; 2] \cup ]4; 6]$

(q) $x \in ]-\infty; -4] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right]$

(r) $x \in [-1; 0] \cup [1; \infty[$

(s) $x \in ]-\infty; 0[$

(t) $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]7; \infty[$

**40. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a $p$ valós paraméter értékei esetén.

(a) $x^2 + 6x + p < 0$

(b) $x^2 - 6x + p^2 + 9 \geq 0$

(c) $x^2 + p \cdot x + 4 < 0$

**Megoldás.**

(a) Ha $p \geq 9$, akkor nincs megoldás. Ha $p < 9$, akkor

$$x \in \left]-\sqrt{9-p} - 3; \sqrt{9-p} - 3\right[.$$

(b) Minden $p$ valós paraméter érték esetén minden valós $x$ megoldás.

(c) Ha $p \in [-4; 4]$, akkor nincs megoldás. Ha $p > 4$, vagy $p > 4$, akkor

$$x \in \left]\frac{-\sqrt{p^2-16} - p}{2}; \frac{\sqrt{p^2-16} - p}{2}\right[.$$

**41. Feladat.** Határozzuk meg a $p$ paraméter értékét, ha az alábbi egyenlőtlenségeknek minden valós $x$ megoldása legyen.

(a) $x^2 - (2p-1) \cdot x + 9p - 3 > 0$

(b) $-2x^2 + (4p-1)x + 5p - 6 \geq 0$

(c) $p \cdot x^2 - 5x - 6 > 0$

(d) $p \cdot x^2 - 5x + 6 > 0$

(e) $(p^2 - p - 2) \cdot x^2 - 2(p-2)x + 1 > 0$

**Megoldás.**

(a) $p \in \left]\frac{10 - \sqrt{87}}{2}; \frac{103\sqrt{87}}{2}\right[$

(b) $p \in \emptyset$

(c) $p \in \emptyset$

(d) $p > \frac{25}{24}$

(e) $p \geq 2$

**42. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)
$$\left.\begin{array}{rcl} x \cdot y & = & 6 \\ x + y & = & 5 \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} x^2 & + & y^2 & = & 26 \\ 2x & - & y & = & -3 \end{array}\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 25 \\ x \cdot y & = & 12 \end{array}\right\}$$

(d)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \dfrac{1}{x} & - & \dfrac{2}{y} & = & 0{,}6 \\ 5x & + & 2y & = & 15 \end{array}\right\}$$

(e)
$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{x+2}{y+3} & = & 3 \\ (x-2) \cdot (y+2) & = & 10 \end{array}\right\}$$

(f)
$$\left.\begin{array}{rcl} (x+1) \cdot (y-7) & = & 0 \\ (x-2) \cdot (y+2) & = & 0 \end{array}\right\}$$

(g)
$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 - xy & = & 15 \\ y^2 - xy & = & -6 \end{array}\right\}$$

(h)
$$\left.\begin{array}{rcl} x^3 - y^3 & = & 26 \\ x & = & y + 2 \end{array}\right\}$$

(i)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \dfrac{x}{y} & - & \dfrac{y}{x} & = & \dfrac{3}{2} \\ x^2 & + & y^2 & = & 5 \end{array}\right\}$$

**Megoldás.**

(a) $(3;2)$, $(2;3)$

(b) $(1;5)$, $\left(-\dfrac{17}{5};-\dfrac{19}{5}\right)$

(c) $(3;4)$, $(-3;-4)$,
$(4;3)$, $(-4;-3)$

(d) $(1;5)$, $(5;-5)$

(e) $(7;0)$, $\left(-4;-\dfrac{11}{3}\right)$

(f) $(-1;-2)$, $(2;7)$

(g) $(5;2)$, $(-5;-2)$

(h) $(3;1)$, $(-1;-3)$

(i) $(1;-2)$, $(-1;2)$,
$(2;1)$, $(-2;-1)$

**43. Feladat.** Bontsuk fel a 250-et két olyan szorzótényezőre, melyek összege 35.

**Megoldás.** 25 és 10

**44. Feladat.** Hány csapat vett részt abban az egyfordulós körmérkőzés sorozattal lebonyolított bajnokságban, ahol összesen 171 mérkőzésre került sor?

**Megoldás.** 19

**45. Feladat.** Egy téglalap átlóinak összege 20 cm, kerülete 28 cm. Mekkorák az oldalai?

**Megoldás.** 6 cm és 8 cm

**46. Feladat.** Két folyóparti város távolsága 120 km. Ezt az utat egy hajójárat oda-vissza 12,5 óra alatt teszi meg. Mekkora a hajó (állóvízben mért) sebessége, ha a folyó sebessége 4 km/h?

**Megoldás.** 20 km/h

**47. Feladat.** Egy futárnak 40 km-t kell megtennie. Mivel a tervezettnél két órával később indult, sebességét 1 km/h-val megnövelve, éppen célba ért. Mekkora sebességgel haladt?

**Megoldás.** 4 km/h.

**48. Feladat.** Két szám számtani közepe öttel nagyobb a kisebbik számnál, mértani közepük pedig hattal kisebb a nagyobbik számnál. Melyik ez a két szám?

**Megoldás.** 8 és 18

**49. Feladat.** Két sokszögben az oldalak számának össze 19, az átlók számának összege pedig 68. Hány oldalúak ezek a sokszögek?

**Megoldás.** 7 és 12

# 5 | Gyökös, exponenciális, logaritmusos függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

## Gyökös függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

**1. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonjait. Határozzuk meg a (lehető legbővebb) értelmezési tartományt is.

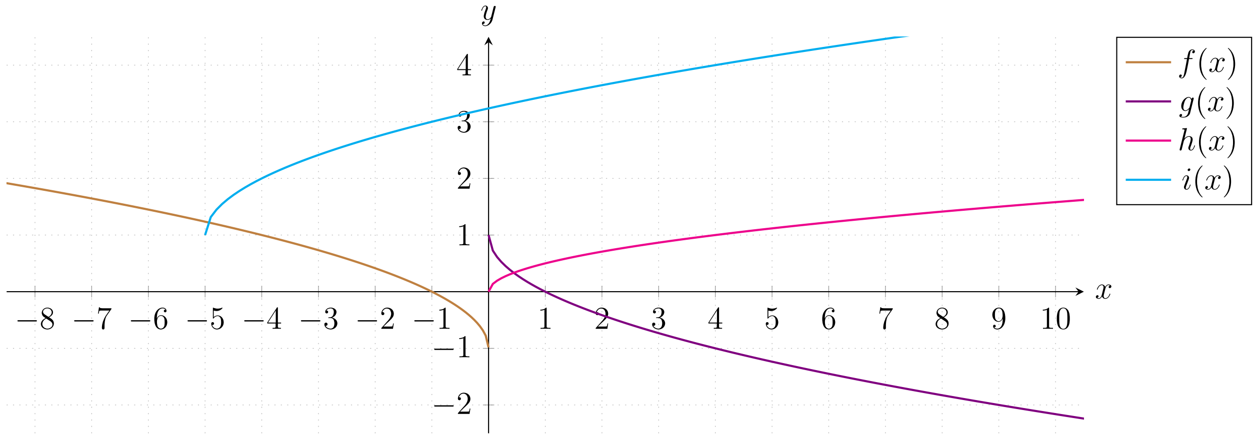
(a) $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$

(b) $g(x) = 1 - \sqrt{x-2}$

(c) $h(x) = 2\sqrt{x-2} - 1$

(d) $i(x) = \sqrt{2x-2} - 1$

**2. Feladat.** Az alábbi ábrán a négyzetgyökfüggvény néhány transzformáltja látható. Határozzuk meg a függvények hozzárendelési szabályait.




**3. Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x+a} + b$ hozzárendelési szabállyal adott függvényben az $a$ és $b$ paraméterek értékét úgy, hogy $f(1) = 4$ és $f(10) = 7$ teljesüljön.

**4. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $2\sqrt{x-3} = 4$

(b) $\sqrt{x^2 + 4^2} = 5$

(c) $\sqrt{x+7} = 2\sqrt{x+1}$

(d) $\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}$

(e) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+5}} = \sqrt{x}$

(f) $1 - \sqrt{x^2+4x} = 6$

(g) $\sqrt{x-5} + \sqrt{3-2x} = 10$

(h) $\sqrt{x+5} = x-1$

(i) $1 - \sqrt{x^2-5x+11} = 2x$

(j) $\sqrt{3x-5} + 1 = x$

(k) $2x - \sqrt{4-3x} = 1$

(l) $\sqrt{x+\sqrt{x+3}} = 3$

(m) $3 - \sqrt{6-\sqrt{3+\sqrt{x-2}}} = 1$

(n) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = 4$

(o) $\sqrt{5x-4} = 7 - \sqrt{2x+1}$

(p) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-6}$

(q) $2x^2+5x - \sqrt{2x^2+5x+7} = 13$

(r) $\sqrt{x^2-4x} + 4x + 6 = x^2$

(s) $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+4x+4} = 5$

(t) $\sqrt{x+\sqrt{10x-25}} + \sqrt{x-\sqrt{10x-25}} = \sqrt{20}$

(u) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}} - \sqrt{x-\sqrt{6x-9}} = 2$

(v) $\sqrt[3]{2x-1} = -1$

(w) $\sqrt[4]{3x+1} = 2$

(x) $\sqrt{x} = \sqrt[4]{x} + 2$

(y) $x^3 - 5x\sqrt{x} + 6 = 0$

**5. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

(a) $\sqrt{2x-1} \geq 2$

(b) $\sqrt{2x-1} < 2$

(c) $\sqrt{x^2-5x+6} < -1$

(d) $\sqrt{x^2-5x+6} \geq 0$

(e) $\sqrt{x-5} > \sqrt{2-x}$

(f) $\sqrt{5x+7} \leq \sqrt{2x+5}$

(g) $\sqrt{2x-1} < x$

(h) $\sqrt{5x-6} - x \leq 0$

(i) $\sqrt{x^2-6x+9} - x \geq 1$

(j) $\sqrt{\dfrac{x-3}{1+3x}} > -2$

(k) $\dfrac{1-\sqrt{1-9x^2}}{x+2} \geq 0$

**6. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)

$$\left.\begin{array}{rcl} x \cdot y & = & 36 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} & = & 5 \end{array}\right\}$$

(b)

$$\left.\begin{array}{rcl} \sqrt{xy} & = & 20 \\ 3\sqrt{x}-2\sqrt{y} & = & 2 \end{array}\right\}$$

(c)

$$\left.\begin{array}{rcrcr} \sqrt{x+y} & + & \sqrt{x-y} & = & 6 \\ x^2 & + & y^2 & = & 136 \end{array}\right\}$$

(d)

$$\left.\begin{array}{rcl} 2\cdot\sqrt{x+2y} & = & x+5 \\ \sqrt{y-1} & = & x-2 \end{array}\right\}$$

## Exponenciális függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

**7. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonjait. Határozzuk meg a függvények értékkészletét is.

(a) $f(x) = 2^{x+1} - 2$

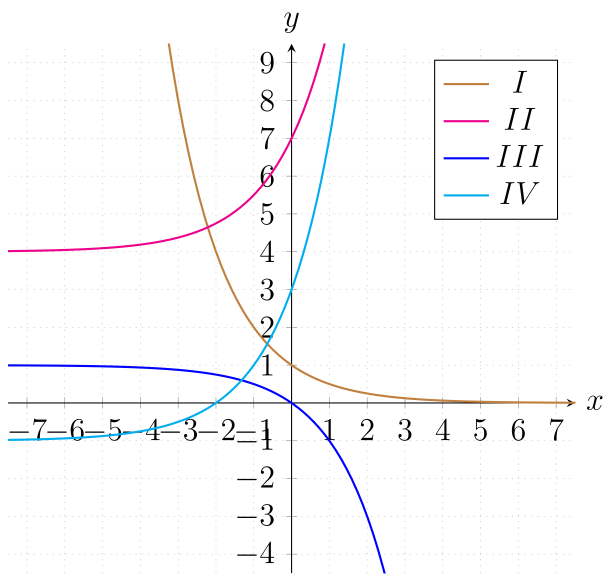
(b) $g(x) = 3^{2x} - \frac{2}{3} \cdot 9^x$

(c) $h(x) = 2^{x+1} \cdot 3^x - 4$

(d) $i(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 1$

(e) $j(x) = \sqrt{0,25^{1-x}} + 2$

**8. Feladat.** Az alábbi ábrán a $2^x$ függvény néhány transzformáltja látható. Párosítsuk a függvények hozzárendelési szabályait és grafikonjait.




(a) $f(x) = 1 - 2^x$

(b) $g(x) = 2^{x+2} - 1$

(c) $h(x) = 2^{-x}$

(d) $i(x) = 3 \cdot 2^x + 4$

**9. Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = a^x + b$ hozzárendelési szabállyal adott exponenciális függvényben $(a > 0)$ az $a$ és $b$ paraméterek értékét, ha $f(1) = 0$ és $f(-1) = 1{,}5$.

**10. Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = a^x + b$ hozzárendelési szabállyal adott exponenciális függvényben $(a > 0)$ az $a$ és $b$ paraméterek értékét, ha a függvény grafikonjának tengelymetszetei $(0; -2)$ és $(1; 0)$.

**11. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $2^{x^2-5x+6} = 1$

(b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{|4-x^2|} = 1$

(c) $5^{\sin x} = 0{,}2$

(d) $2^{(4^x)} = 256^4$

(e) $5^{3x+1} : 0{,}2^{1-7x} = 125^x$

(f) $8^{2x-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x} = \sqrt[3]{32^{4x+2}}$

(g) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{4-x}} = \frac{7}{3}$

(h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{4-x}} = \frac{9}{49}$

(i) $34^{\frac{1}{x}} = -2$

(j) $17^x = 4^{2x}$

(k) $8 \cdot 4^x = 9^x \cdot 27$

(l) $2 \cdot 81^x - 3 \cdot 4^{2x} = 0$

(m) $\dfrac{1}{81} \cdot 3^x \cdot 12^x = 2^{2x}$

(n) $\dfrac{5^x}{\sqrt[3]{4^{4x+3}}} = 10^x$

(o) $2^x + 3 \cdot 2^{x+1} = 28$

(p) $2^x + 3 \cdot 2^{x+1} = 25$

(q) $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2-x} - 27 \cdot 5^x$

(r) $4^x - 2^x - 2 = 0$

(s) $10^{x+1} + 0{,}1^{x-2} = 1001$

(t) $3^{x+2} + 3^{1-x} = 12$

(u) $3 \cdot 4^x + 9^x = 4 \cdot 6^x$

(v) $5 \cdot 4^{x+\frac{1}{2}} - 29 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^{x+\frac{1}{2}} = 0$

**12. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $2^x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = -y^2 + 6y - 7$

(b) $2^{\sin^2 x + \cos^2 x} = 0{,}5^{\frac{1}{\operatorname{tg} y}}$

**13. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

(a) $2^{2x-1} \geq 2$

(b) $3^{5x+4} < \dfrac{1}{3}$

(c) $7^{4x^2+5x-6} < -7$

(d) $0{,}25^{\frac{3x-4}{x+5}} \geq -2$

(e) $0{,}2^{2|x+2|-1} > 5^x$

(f) $3^{\frac{x+2}{x+3}} \leq 9$

(g) $3^{(x^2)} \cdot 27 \leq \left(\dfrac{1}{729}\right)^{x+1}$

(h) $2^x < 3 - 2^{1-x}$

(i) $3^{x^2-2x} \geq 27$

**14. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)
$$\left.\begin{array}{rcl} 2^x \cdot 3^y & = & 18 \\ 5 \cdot 3^y - 4 \cdot 2^x & = & 37 \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} 3 \cdot 2^{x+2} & + & 3^{y-1} & = & 27 \\ 2 \cdot 3^{y-2} & - & 7 \cdot 2^{x+1} & = & -26 \end{array}\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{rcl} 5^{2x} \cdot 25^{y+2} & = & 625 \\ \dfrac{9^{1-2y}}{3^{x+4}} & = & 27 \end{array}\right\}$$

(d)
$$\left.\begin{array}{rcl} 7^{x^2+3x+y} & = & 49 \\ 2^{y-x} - 32 & = & 0 \end{array}\right\}$$

(e)
$$\left.\begin{array}{rcrcl} 7^{2x+3} & - & 16y & = & 0 \\ 4^{2x+3} & - & 49y & = & 0 \end{array}\right\}$$

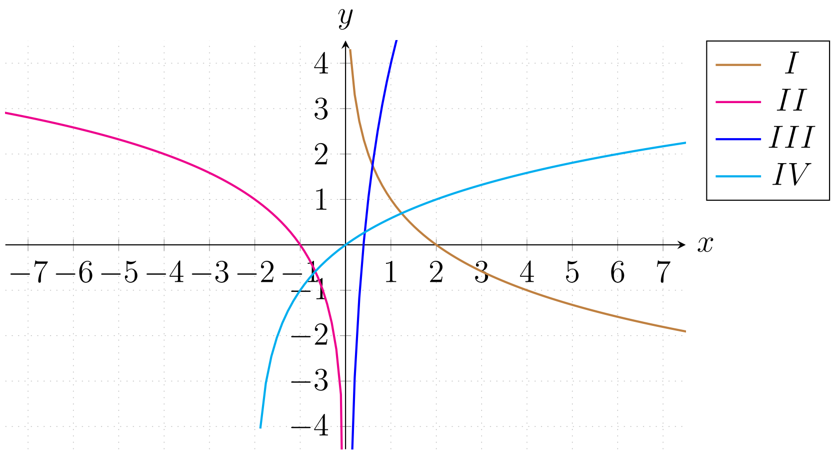
(f)
$$\left.\begin{array}{rcl} (4^x)^y & = & 8 \\ 9^{xy} \cdot 3^x & = & 3 \cdot 27^{\frac{1}{y}} \end{array}\right\}$$

## Logaritmusos függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

**15. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonjait.

(a) $f(x) = \log_2(x-1)+1$
(b) $g(x) = 2\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$
(c) $h(x) = \log_3 x + \log_3 2$
(d) $i(x) = \lg(x^2)$
(e) $j(x) = \ln(x^2-5x+6) - \ln(x-3)$

**16. Feladat.** Az alábbi ábrán a $\log_2 x$ függvény néhány transzformáltja látható. Párosítsuk a függvények hozzárendelési szabályait és grafikonjait.




(a) $f(x) = 1 - \log_2 x$
(b) $g(x) = \log_2(x+2) - 1$
(c) $h(x) = \log_2(-x)$
(d) $i(x) = 3\cdot\log_2 x + 4$

**17. Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = \log_2(x+a)+b$ hozzárendelési szabállyal megadott logaritmikus függvényben az $a$ és $b$ paraméterek értékét, ha $f(0)=1,\ f(4)=2$.

**18. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $\log_2(x-7) = 3$
(b) $1 - \log_3(5-x) = 2$
(c) $\lg(|x|-2) = 1$
(d) $\log_5(x^2+10-3x) = 1$
(e) $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 2$
(f) $\log_2(x-2) - \log_2(x-3) = 2$
(g) $\log_7(1+x) = \log_7(4x+7) - \log_7(x+3)$
(h) $\lg 2 - \lg(x-3) = \lg(x+1) - 1$
(i) $\dfrac{\lg(2x+7)}{\lg(3x+2)} = 1$
(j) $\dfrac{\lg(2x-7)}{\lg(3x+2)} = 1$
(k) $\dfrac{\log_2(2x-10)}{\log_2(x^2-5x-4)} = 1$
(l) $\log_4(\log_3(\log_2(x-3))) = 0$
(m) $\log_7\left(6+\log_4\left(2+\log_2 x\right)\right) = 1$
(n) $\log_x(x^2-5x+7) = 0$

(o) $\log_x(x^2-4x+6)=1$

(p) $\log_x(2x^2-5x+6)=2$

(q) $\log_x(x^2-4x)=3$

(r) $\log_x(2x-3)=2$

(s) $\log_x(2x^2-5x)=3$

(t) $\log_4^2 x-3{,}5\log_4 x^2+6=0$

(u) $\dfrac{6}{\log_3 x+1}-\dfrac{3}{\log_3 x-3}=5$

**19. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

(a) $\log_2(4x+1)\geq\log_2(x+2)$

(b) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+3)<\log_{\frac{1}{2}}(5x-2)$

(c) $\log_7(5x+3)\leq 2$

(d) $\log_{0,1}(7-4x)>-1$

(e) $\ln(x^2-2x-1)>\ln(3x-1)$

(f) $\log_3(x^2-2x-1)\geq\log_3(3x-7)$

(g) $\log_6\dfrac{3x-1}{x+5}>1$

(h) $\log_8(x-2)+\log_8(x+4)\leq 2$

(i) $\lg(4-|x|)\geq -1$

(j) $|\log_2(x-1)|>1$

(k) $|\log_{\frac{1}{3}}(x+2)|\leq 2$

(l) $\dfrac{1}{\log_2 x}-1\leq\dfrac{1}{\log_2 x-1}$

(m) $\log_{x^2-1}81>2$

**20. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)
$$\left.\begin{array}{rcrcl} \lg x & + & \lg y & = & 4 \\ 5\cdot\lg x & - & 3\cdot\lg y & = & 4 \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{rcrcl} 5\cdot\log_3 x & + & \log_2 y & = & 3 \\ 2\cdot\log_2 y & - & 3\cdot\log_2 x & = & 6 \end{array}\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{rcrcl} \lg(x-1) & = & 2 & - & 7\cdot\lg(y+2) \\ \lg(x-1)^3 & = & 6 & + & 5\cdot\lg(y+2) \end{array}\right\}$$

(d)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} y & - & 90 & = & 10x \\ \lg y & - & \lg x & = & 2 \end{array}\right\}$$

(e)
$$\left.\begin{array}{rcl} \log_9\dfrac{x}{y} & = & 1 \\ \log_{\frac{1}{4}}(xy) & = & 2 \end{array}\right\}$$

(f)
$$\left.\begin{array}{rcl} \log_3 x & = & \log_9 y \\ 2x^2-y & = & 81 \end{array}\right\}$$

# Megoldások

## Gyökös függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

**1. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonjait. Határozzuk meg a (lehető legbővebb) értelmezési tartományt is.

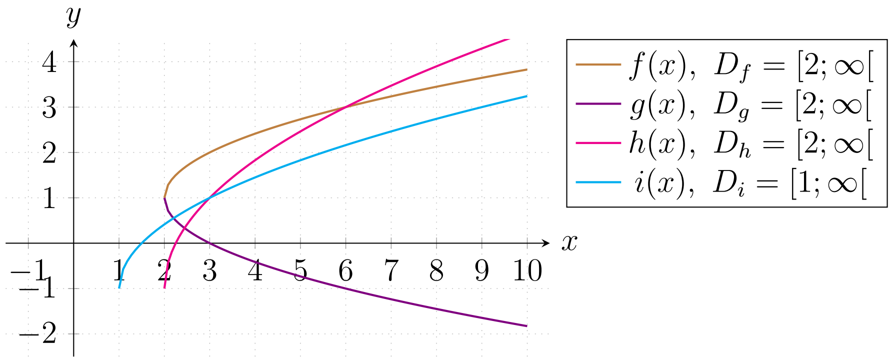
(a) $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$

(b) $g(x) = 1 - \sqrt{x-2}$

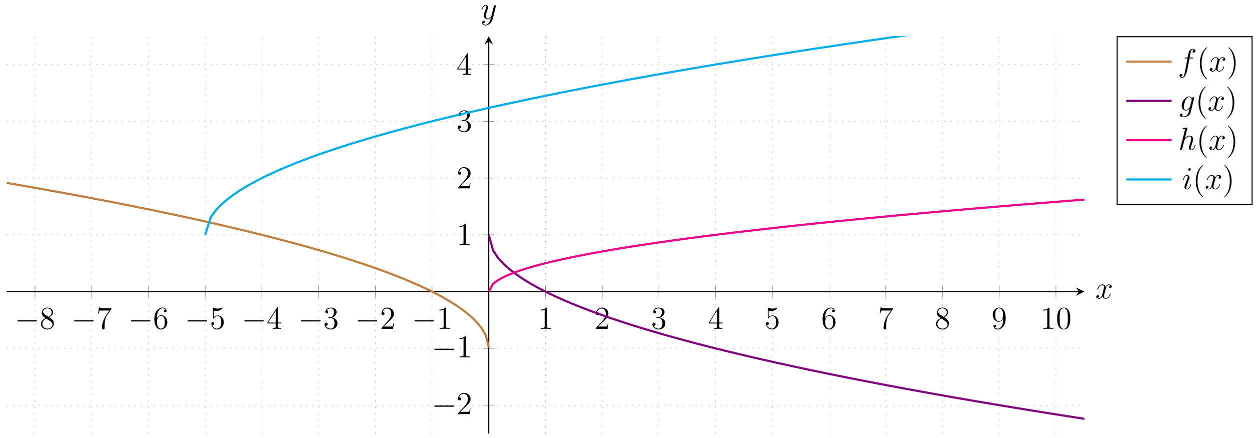
(c) $h(x) = 2\sqrt{x-2} - 1$

(d) $i(x) = \sqrt{2x-2} - 1$

**Megoldás.**




**2. Feladat.** Az alábbi ábrán a négyzetgyökfüggvény néhány transzformáltja látható. Határozzuk meg a függvények hozzárendelési szabályait.



**Megoldás.**

$f(x) = \sqrt{-x} - 1$ $\quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$ $\quad h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ $\quad i(x) = \sqrt{x+5} + 1$

**3. Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x+a} + b$ hozzárendelési szabállyal adott függvényben az $a$ és $b$ paraméterek értékét úgy, hogy $f(1) = 4$ és $f(10) = 7$ teljesüljön.

**Megoldás.** $a = -1, \ b = 4$

**4. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $2\sqrt{x-3} = 4$

(b) $\sqrt{x^2 + 4^2} = 5$

(c) $\sqrt{x+7} = 2\sqrt{x+1}$

(d) $\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}$

(e) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+5}} = \sqrt{x}$

(f) $1 - \sqrt{x^2 + 4x} = 6$

(g) $\sqrt{x-5} + \sqrt{3-2x} = 10$

(h) $\sqrt{x+5} = x - 1$

(i) $1 - \sqrt{x^2 - 5x + 11} = 2x$

(j) $\sqrt{3x-5} + 1 = x$

(k) $2x - \sqrt{4-3x} = 1$

(l) $\sqrt{x + \sqrt{x+3}} = 3$

(m) $3 - \sqrt{6 - \sqrt{3 + \sqrt{x-2}}} = 1$

(n) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = 4$

(o) $\sqrt{5x-4} = 7 - \sqrt{2x+1}$

(p) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x-6}$

(q) $2x^2 + 5x - \sqrt{2x^2 + 5x + 7} = 13$

(r) $\sqrt{x^2 - 4x} + 4x + 6 = x^2$

(s) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5$

(t) $\sqrt{x + \sqrt{10x - 25}} + \sqrt{x - \sqrt{10x - 25}} = \sqrt{20}$

(u) $\sqrt{x + \sqrt{6x - 9}} - \sqrt{x - \sqrt{6x - 9}} = 2$

(v) $\sqrt[3]{2x-1} = -1$

(w) $\sqrt[4]{3x+1} = 2$

(x) $\sqrt{x} = \sqrt[4]{x} + 2$

(y) $x^3 - 5x\sqrt{x} + 6 = 0$

**Megoldás.**

(a) $x = 7$

(b) $x = \pm 3$

(c) $x = 1$

(d) $x = 7$

(e) $x = 4$

(f) $x \in \emptyset$

(g) $x \in \emptyset$

(h) $x = 4$

(i) $x = -2$

(j) $x_1 = 2,$ $x_2 = 3$

(k) $x = 1$

(l) $x = 6$

(m) $x = 3$

(n) $x = 4$

(o) $x = 4$

(p) $x = 10$

(q) $x_1 = 2,$ $x_2 = -\frac{9}{2}$

(r) $x = 2 \pm \sqrt{13}$

(s) $x \in [-2; 3]$

(t) $x = \frac{15}{2}$

(u) $x = \frac{5}{2}$

(v) $x = 0$

(w) $x = 5$

(x) $x = 16$

(y) $x_1 = \sqrt[3]{4},$ $x_2 = \sqrt[3]{9}$

**5. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

(a) $\sqrt{2x-1} \geq 2$

(b) $\sqrt{2x-1} < 2$

(c) $\sqrt{x^2-5x+6} < -1$

(d) $\sqrt{x^2-5x+6} \geq 0$

(e) $\sqrt{x-5} > \sqrt{2-x}$

(f) $\sqrt{5x+7} \leq \sqrt{2x+5}$

(g) $\sqrt{2x-1} < x$

(h) $\sqrt{5x-6} - x \leq 0$

(i) $\sqrt{x^2-6x+9} - x \geq 1$

(j) $\sqrt{\dfrac{x-3}{1+3x}} > -2$

(k) $\dfrac{1-\sqrt{1-9x^2}}{x+2} \geq 0$

**Megoldás.**

(a) $x \in \left[\dfrac{5}{2}; \infty\right[$

(b) $x \in \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right[$

(c) $x \in \emptyset$

(d) $x \in \left]-\infty; 2\right] \cup \left[3; \infty\right[$

(e) $x \in \emptyset$

(f) $x \in \left[-\dfrac{7}{5}; -\dfrac{2}{3}\right]$

(g) $x \in \left[\dfrac{1}{2}; \infty\right[ \setminus \{1\}$

(h) $x \in \left[\dfrac{6}{5}; 2\right] \cup \left[3; \infty\right[$

(i) $x \in \left]-\infty; 1\right]$

(j) $x \in \left]-\infty; -\dfrac{1}{3}\right[ \cup \left[3; \infty\right[$

(k) $x \in \left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right]$

**6. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)

$$\left.\begin{array}{rcl} x \cdot y & = & 36 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} & = & 5 \end{array}\right\}$$

(b)

$$\left.\begin{array}{rcl} \sqrt{xy} & = & 20 \\ 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} & = & 2 \end{array}\right\}$$

(c)

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \sqrt{x+y} & + & \sqrt{x-y} & = & 6 \\ x^2 & + & y^2 & = & 136 \end{array}\right\}$$

(d)

$$\left.\begin{array}{rcl} 2 \cdot \sqrt{x+2y} & = & x+5 \\ \sqrt{y-1} & = & x-2 \end{array}\right\}$$

**Megoldás.**

(a) $(4; 9)$, $(9; 4)$

(b) $(16; 25)$

(c) $(10; 6)$, $(10; -6)$

(d) $(5; 10)$

# Exponenciális függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

**7. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonjait. Határozzuk meg a függvények értékkészletét is.

(a) $f(x) = 2^{x+1} - 2$

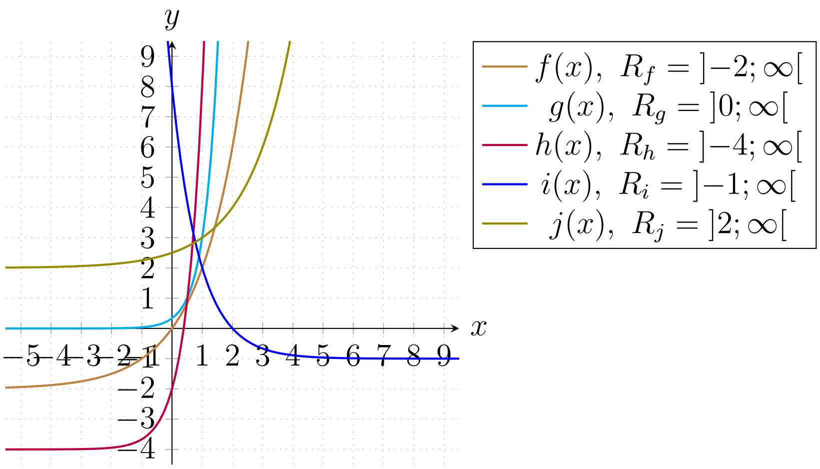
(b) $g(x) = 3^{2x} - \dfrac{2}{3} \cdot 9^x$

(c) $h(x) = 2^{x+1} \cdot 3^x - 4$

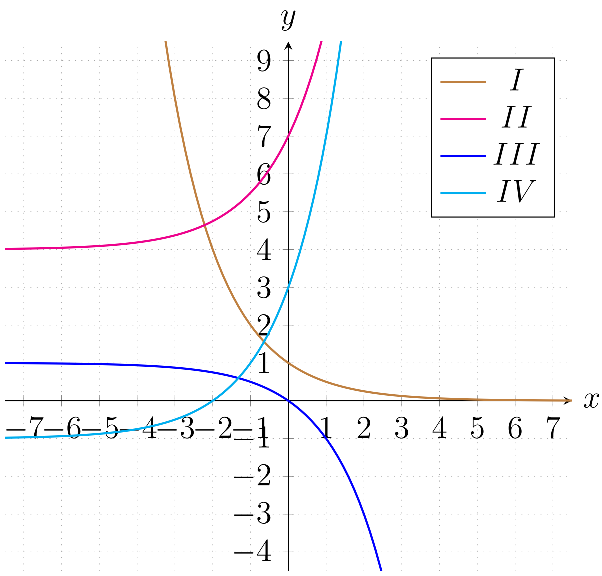
(d) $i(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} - 1$

(e) $j(x) = \sqrt{0,25^{1-x}} + 2$

**Megoldás.**




**8. Feladat.** Az alábbi ábrán a $2^x$ függvény néhány transzformáltja látható. Párosítsuk a függvények hozzárendelési szabályait és grafikonjait.




(a) $f(x) = 1 - 2^x$

(b) $g(x) = 2^{x+2} - 1$

(c) $h(x) = 2^{-x}$

(d) $i(x) = 3 \cdot 2^x + 4$

**Megoldás.**

(a) $III$ (b) $IV$ (c) $I$ (d) $II$

**9. Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = a^x + b$ hozzárendelési szabállyal adott exponenciális függvényben $(a > 0)$ az $a$ és $b$ paraméterek értékét, ha $f(1) = 0$ és $f(-1) = 1{,}5$.

**Megoldás.** $a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$

**10. Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = a^x + b$ hozzárendelési szabállyal adott exponenciális függvényben $(a > 0)$ az $a$ és $b$ paraméterek értékét, ha a függvény grafikonjának tengelymetszetei $(0; -2)$ és $(1; 0)$.

**Megoldás.** $a = 3,\ b = -3$

**11. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $2^{x^2-5x+6} = 1$

(b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{|4-x^2|} = 1$

(c) $5^{\sin x} = 0{,}2$

(d) $2^{(4^x)} = 256^4$

(e) $5^{3x+1} : 0{,}2^{1-7x} = 125^x$

(f) $8^{2x-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x} = \sqrt[3]{32^{4x+2}}$

(g) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{4-x}} = \frac{7}{3}$

(h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{4-x}} = \frac{9}{49}$

(i) $34^{\frac{1}{x}} = -2$

(j) $17^x = 4^{2x}$

(k) $8 \cdot 4^x = 9^x \cdot 27$

(l) $2 \cdot 81^x - 3 \cdot 4^{2x} = 0$

(m) $\frac{1}{81} \cdot 3^x \cdot 12^x = 2^{2x}$

(n) $\frac{5^x}{\sqrt[3]{4^{4x+3}}} = 10^x$

(o) $2^x + 3 \cdot 2^{x+1} = 28$

(p) $2^x + 3 \cdot 2^{x+1} = 25$

(q) $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2-x} - 27 \cdot 5^x$

(r) $4^x - 2^x - 2 = 0$

(s) $10^{x+1} + 0{,}1^{x-2} = 1001$

(t) $3^{x+2} + 3^{1-x} = 12$

(u) $3 \cdot 4^x + 9^x = 4 \cdot 6^x$

(v) $5 \cdot 4^{x+\frac{1}{2}} - 29 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^{x+\frac{1}{2}} = 0$

**Megoldás.**

(a) $x = 2; 3$
(b) $x = \pm 2$
(c) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
(d) $x = \frac{5}{2}$
(e) $x = \frac{2}{7}$
(f) $x = \frac{25}{7}$
(g) $x \in \emptyset$
(h) $x = 0$
(i) $x \in \emptyset$
(j) $x = 0$
(k) $x = -\frac{3}{2}$
(l) $x = \frac{1}{4}$
(m) $x = 2$
(n) $x = -\frac{6}{11}$
(o) $x = 2$
(p) $x = \log_2 \frac{25}{7}$
(q) $x = 0$
(r) $x = 1$
(s) $x_1 = -1,\ x_2 = 2$
(t) $x_1 = -1,\ x_2 = 0$
(u) $x_1 = 0,\ x_2 = \log_{\frac{3}{2}} 3$
(v) $x = \pm 1$

**12. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = -y^2 + 6y - 7$
(b) $2^{\sin^2 x + \cos^2 x} = 0{,}5^{\frac{1}{\operatorname{tg} y}}$

**Megoldás.**

(a) $x = 0,\ y = 3$
(b) $x \in \mathbb{R},\ y = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**13. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

(a) $2^{2x-1} \geq 2$
(b) $3^{5x+4} < \frac{1}{3}$
(c) $7^{4x^2+5x-6} < -7$
(d) $0{,}25^{\frac{3x-4}{x+5}} \geq -2$
(e) $0{,}2^{2|x+2|-1} > 5^x$
(f) $3^{\frac{x+2}{x+3}} \leq 9$
(g) $3^{(x^2)} \cdot 27 \leq \left(\frac{1}{729}\right)^{x+1}$
(h) $2^x < 3 - 2^{1-x}$
(i) $3^{x^2-2x} \geq 27$

**Megoldás.**

(a) $x \in [1; \infty[$
(b) $x \in ]-\infty; -1[$
(c) $x \in \emptyset$
(d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
(e) $x \in ]-5; -1[$
(f) $x \in ]-\infty; -4] \cup ]-3; \infty[$
(g) $x = -3$
(h) $x \in ]0; 1[$
(i) $x \in ]-\infty; -1] \cup [3; \infty[$

**14. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)
$$\left.\begin{array}{rcl} 2^x \cdot 3^y & = & 18 \\ 5 \cdot 3^y - 4 \cdot 2^x & = & 37 \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{rcccl} 3 \cdot 2^{x+2} & + & 3^{y-1} & = & 27 \\ 2 \cdot 3^{y-2} & - & 7 \cdot 2^{x+1} & = & -26 \end{array}\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{rcl} 5^{2x} \cdot 25^{y+2} & = & 625 \\ \dfrac{9^{1-2y}}{3^{x+4}} & = & 27 \end{array}\right\}$$

(d)
$$\left.\begin{array}{rcl} 7^{x^2+3x+y} & = & 49 \\ 2^{y-x} - 32 & = & 0 \end{array}\right\}$$

(e)
$$\left.\begin{array}{rcccl} 7^{2x+3} & - & 16y & = & 0 \\ 4^{2x+3} & - & 49y & = & 0 \end{array}\right\}$$

(f)
$$\left.\begin{array}{rcl} (4^x)^y & = & 8 \\ 9^{xy} \cdot 3^x & = & 3 \cdot 27^{\frac{1}{y}} \end{array}\right\}$$

**Megoldás.**

(a) $(1; 2)$

(b) $(1; 2)$

(c) $\left(\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}\right)$

(d) $(-1; 4)$, $(-3; 2)$

(e) $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{784}\right)$

(f) $\left(2; \frac{3}{4}\right)$

## Logaritmusos függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek

**15. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonjait.

(a) $f(x) = \log_2(x-1) + 1$

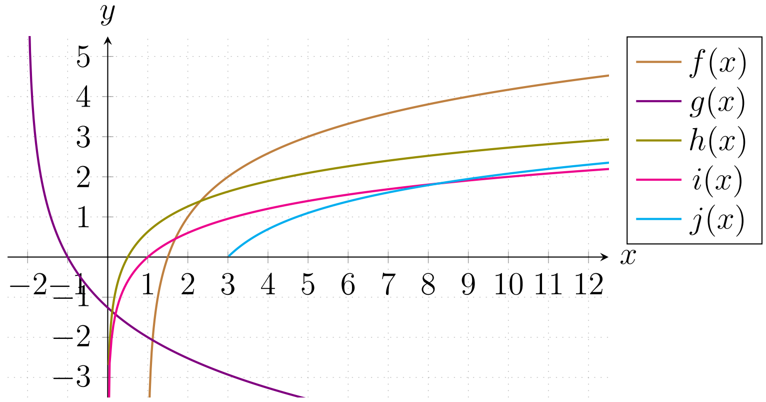
(b) $g(x) = 2\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

(c) $h(x) = \log_3 x + \log_3 2$

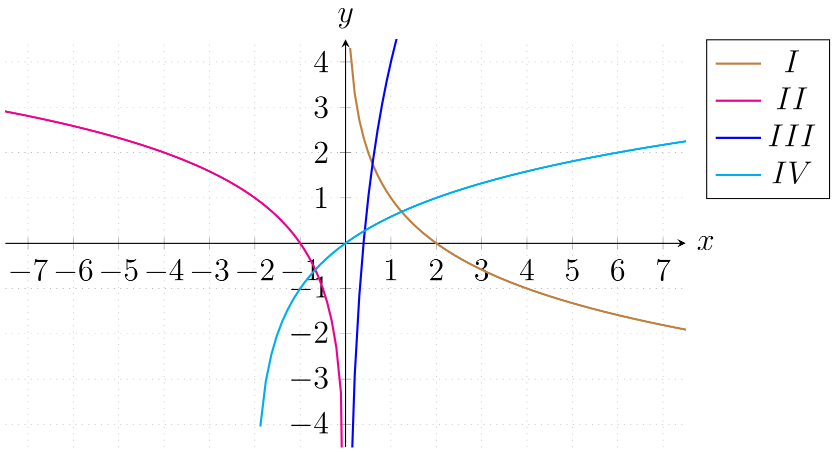
(d) $i(x) = \lg(x^2)$

(e) $j(x) = \ln(x^2 - 5x + 6) - \ln(x-3)$

**Megoldás.**




**16. Feladat.** Az alábbi ábrán a $\log_2 x$ függvény néhány transzformáltja látható. Párosítsuk a függvények hozzárendelési szabályait és grafikonjait.




(a) $f(x) = 1 - \log_2 x$

(b) $g(x) = \log_2(x+2) - 1$

(c) $h(x) = \log_2(-x)$

(d) $i(x) = 3 \cdot \log_2 x + 4$

**Megoldás.**

(a) $I$
(b) $IV$
(c) $II$
(d) $III$

**17. Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = \log_2(x + a) + b$ hozzárendelési szabállyal megadott logaritmikus függvényben az $a$ és $b$ paraméterek értékét, ha $f(0) = 1$, $f(4) = 2$.

**Megoldás.** $a = 4$, $b = -1$

**18. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

(a) $\log_2(x - 7) = 3$
(b) $1 - \log_3(5 - x) = 2$
(c) $\lg(|x| - 2) = 1$
(d) $\log_5(x^2 + 10 - 3x) = 1$
(e) $\log_2(x - 2) + \log_2(x - 3) = 2$
(f) $\log_2(x - 2) - \log_2(x - 3) = 2$
(g) $\log_7(1 + x) = \log_7(4x + 7) - \log_7(x + 3)$
(h) $\lg 2 - \lg(x - 3) = \lg(x + 1) - 1$
(i) $\dfrac{\lg(2x + 7)}{\lg(3x + 2)} = 1$
(j) $\dfrac{\lg(2x - 7)}{\lg(3x + 2)} = 1$
(k) $\dfrac{\log_2(2x - 10)}{\log_2(x^2 - 5x - 4)} = 1$
(l) $\log_4(\log_3(\log_2(x - 3))) = 0$
(m) $\log_7\left(6 + \log_4\left(2 + \log_2 x\right)\right) = 1$
(n) $\log_x(x^2 - 5x + 7) = 0$
(o) $\log_x(x^2 - 4x + 6) = 1$
(p) $\log_x(2x^2 - 5x + 6) = 2$
(q) $\log_x(x^2 - 4x) = 3$
(r) $\log_x(2x - 3) = 2$
(s) $\log_x(2x^2 - 5x) = 3$
(t) $\log_4^2 x - 3{,}5 \log_4 x^2 + 6 = 0$
(u) $\dfrac{6}{\log_3 x + 1} - \dfrac{3}{\log_3 x - 3} = 5$

**Megoldás.**

(a) $x = 15$
(b) $x = \dfrac{14}{3}$
(c) $x = \pm 12$
(d) $x \in \emptyset$
(e) $x = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}$
(f) $x = \dfrac{10}{3}$
(g) $x = 2$
(h) $x = 1 + 2\sqrt{6}$
(i) $x = 5$
(j) $x \in \emptyset$
(k) $x = 6$
(l) $x = 11$
(m) $x = 4$
(n) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
(o) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
(p) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$
(q) $x \in \emptyset$
(r) $x \in \emptyset$
(s) $x \in \emptyset$
(t) $x_1 = 4$, $x_2 = 4096$
(u) $x_1 = 9$, $x_2 = \sqrt[5]{27}$

**19. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

(a) $\log_2(4x+1) \geq \log_2(x+2)$

(b) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+3) < \log_{\frac{1}{2}}(5x-2)$

(c) $\log_7(5x+3) \leq 2$

(d) $\log_{0,1}(7-4x) > -1$

(e) $\ln(x^2-2x-1) > \ln(3x-1)$

(f) $\log_3(x^2-2x-1) \geq \log_3(3x-7)$

(g) $\log_6 \dfrac{3x-1}{x+5} > 1$

(h) $\log_8(x-2) + \log_8(x+4) \leq 2$

(i) $\lg(4-|x|) \geq -1$

(j) $|\log_2(x-1)| > 1$

(k) $|\log_{\frac{1}{3}}(x+2)| \leq 2$

(l) $\dfrac{1}{\log_2 x} - 1 \leq \dfrac{1}{\log_2 x - 1}$

(m) $\log_{x^2-1} 81 > 2$

**Megoldás.**

(a) $x \in \left[\dfrac{1}{3}; \infty\right[$

(b) $x \in \left]\dfrac{2}{5}; \dfrac{5}{2}\right[$

(c) $x \in \left]-\dfrac{3}{5}; \dfrac{46}{5}\right]$

(d) $x \in \left]-\dfrac{3}{4}; \dfrac{7}{4}\right[$

(e) $x \in ]5; \infty[$

(f) $x \in [3; \infty[$

(g) $x \in \left]-\dfrac{31}{3}; -5\right[$

(h) $x \in ]2; \sqrt{73}-1]$

(i) $x \in [-3{,}9; 3{,}9]$

(j) $x \in \left]1; \dfrac{3}{2}\right[ \cup ]3; \infty[$

(k) $x \in \left[-\dfrac{17}{9}; 7\right]$

(l) $x \in ]0; 1[ \cup ]2; \infty[$

(m) $x \in \left]-\sqrt{10}; -\sqrt{2}\right[ \cup \left]\sqrt{2}; \sqrt{10}\right[$

**20. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket.

(a)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \lg x & + & \lg y & = & 4 \\ 5\cdot\lg x & - & 3\cdot\lg y & = & 4 \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} 5\cdot\log_3 x & + & \log_2 y & = & 3 \\ 2\cdot\log_2 y & - & 3\cdot\log_2 x & = & 6 \end{array}\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} \lg(x-1) & = & 2 & - & 7\cdot\lg(y+2) \\ \lg(x-1)^3 & = & 6 & + & 5\cdot\lg(y+2) \end{array}\right\}$$

(d)
$$\left.\begin{array}{rcrcr} y & - & 90 & = & 10x \\ \lg y & - & \lg x & = & 2 \end{array}\right\}$$

(e)
$$\left.\begin{array}{rcr} \log_9 \dfrac{x}{y} & = & 1 \\ \log_{\frac{1}{4}}(xy) & = & 2 \end{array}\right\}$$

(f)
$$\left.\begin{array}{rcr} \log_3 x & = & \log_9 y \\ 2x^2-y & = & 81 \end{array}\right\}$$

**Megoldás.**

(a) $(100; 100)$

(b) $(1; 8)$

(c) $(101; -1)$

(d) $(1; 100)$

(e) $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{1}{12}\right)$, $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{12}\right)$

(f) $(9; 81)$

# Első zárthelyi dolgozat

A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos! Válaszait minden esetben részletesen indokolja, indoklás nélküli megoldásra nem jár pont. A feladatok megoldásához 100 perc áll rendelkezésre.

# Matematikai alapismeretek — 1. zh

Név: ______________________________

| Feladat: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max pont: | 18 | 14 | 14 | 14 | 20 | 20 | 100 |
| Elért pont: | | | | | | | |

1. Hány olyan legfeljebb háromjegyű pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel? [18]

2. Bizonyítsuk be, hogy két tetszőleges páratlan szám négyzetének különbsége osztható 8-cal. [14]

3. Képezzük az [14]

$$\frac{a}{b}, \quad (a; b \in \mathbb{R}^+, a > b)$$

tört és reciprok értékének szorzatát, valamint a tört és reciprokának összegének, továbbá különbségének felét. Igazoljuk, hogy ezek az értékek lehetnek egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai.

4. A változók lehetséges értékeinek figyelembe vételével végezzük el a kijelölt műveleteket, és hozzuk a következőkifejezést a lehető legegyszerűbb alakúra. [14]

$$\left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right):\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2$$

5. Egy motorcsónak és egy tutaj egy időben indul a folyón lefelé. A motorcsónak 15 km megtétele után visszafordul, és a visszafordulás helyétől 9 km-re találkozik a tutajjal. Határozzuk meg a motorcsónak sebességét, ha a tutajé 4 km/h. [20]

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán. [20]

$$\left.\begin{array}{rcccl} 2^{2x-2y} & + & 2^{x-y} & = & 2 \\ 2^{2x+1} & + & \left(\frac{1}{2}\right)^{2y-1} & = & 5 \end{array}\right\}$$

# Matematikai alapismeretek — 1. zh

Név: ______________________________

| Feladat: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max pont: | 18 | 14 | 14 | 14 | 20 | 20 | 100 |
| Elért pont: | | | | | | | |

1. Hány olyan legfeljebb háromjegyű pozitív egész szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel? [18]

**Megoldás.**

- Jelölje a legfeljebb háromjegyű pozitív egész számok halmazát $U$. Ekkor $|U| = 999$. 1 pont
- Jelölje a legfeljebb háromjegyű kettővel osztható pozitív egész számok halmazát $K$. Ekkor $|K| = 499$. 2 pont
- Jelölje a legfeljebb háromjegyű hárommal osztható pozitív egész számok halmazát $H$. Ekkor $|H| = 333$. 2 pont
- Jelölje a legfeljebb háromjegyű öttel osztható pozitív egész számok halmazát $O$. Ekkor $|O| = 199$. 2 pont
- Továbbá a legfeljebb háromjegyű kettővel és hárommal (azaz hattal) osztható pozitív egész számok száma: $|K \cap H| = 166$. 2 pont
- A legfeljebb háromjegyű kettővel és öttel (azaz tízzel) osztható pozitív egész számok száma: $|K \cap O| = 99$. 2 pont
- A legfeljebb háromjegyű hárommal és öttel (azaz tizenöttel) osztható pozitív egész számok száma: $|H \cap O| = 66$. 2 pont
- A legfeljebb háromjegyű kettővel és hárommal és öttel (azaz harminccal) osztható pozitív egész számok száma: $|K \cap H \cap O| = 33$. 2 pont
- Ekkor a logikai szita módszerét használva a legfeljebb háromjegyű, sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható pozitív egész számok száma:

$$|U| - |K| - |H| - |O| + |K \cap H| + |K \cap O| + |H \cap O| - |K \cap H \cap O| = 266.$$

3 pont

2. Bizonyítsuk be, hogy két tetszőleges páratlan szám négyzetének különbsége osztható 8-cal. [14]

**Megoldás.**

- Legyen $k, l, \in \mathbb{Z}$. Így a két páratlan szám négyzetének különbsége $(2k-1)^2 - (2l-1)^2$ alakban írható. 2 pont
- Ekkor $(2k-1)^2 - (2l-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 - 4l^2 + 4l - 1$. 2 pont
- Szorzattá alakítva $4k^2 - 4k + 1 - 4l^2 + 4l - 1 = 4(k-l)(k+l+1)$. 3 pont

- Ekkor látható, hogy $(2k-1)^2-(2l-1)^2=4(k-l)(k+l+1)$ osztható 4-gyel. 1 pont
- Viszont, ha $k$ és $l$ azonos paritású akkor $k-l$ páros, 2 pont
- vagyis $4(k-l)(k+l+1)$ osztható 8-cal. 1 pont
- Ha $k$ és $l$ különböző paritású akkor $k-l+1$ páros, 2 pont
- vagyis $4(k-l)(k+l+1)$ szintén osztható 8-cal. 1 pont

3. Képezzük az [14]

$$\frac{a}{b}, \quad (a;b\in\mathbb{R}^+, a>b)$$

tört és reciprok értékének szorzatát, valamint a tört és reciprokának összegének, továbbá különbségének felét. Igazoljuk, hogy ezek az értékek lehetnek egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai.

**Megoldás.**

- Legyen

$$A=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}, \quad B=\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}, \quad C=\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{2}.$$

3 pont

- Ekkor $A=1$, 1 pont
- $B=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$, 2 pont
- $C=\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$. 2 pont
- Továbbá $A^2+C^2=1+\dfrac{a^4-2a^2b^2+b^4}{4a^2b^2}$ 2 pont
- $=\dfrac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4a^2b^2}$ 1 pont
- $=\dfrac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2}$ 1 pont
- $=\left(\dfrac{a^2+b^2}{2ab}\right)^2=B^2$. 1 pont
- Ez azt jelenti, hogy $A,B,C$ egy $B$ átfogójú derékszögű háromszög oldalai. 1 pont

4. A változók lehetséges értékeinek figyelembe vételével végezzük el a kijelölt műveleteket, és hozzuk a követ-kezőkifejezést a lehető legegyszerűbb alakúra. [14]

$$\left(\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right):\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2$$

**Megoldás.**

- Vegyük észre, hogy $\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(a+\sqrt{ab}+b)$. 2 pont

- Így $\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(a+\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}$ 1 pont
- $=a+2\sqrt{ab}+b$ 2 pont
- $=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2.$ 2 pont
- Továbbá $\left(\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right):\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$ 2 pont
- $=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a-b)^2}$ 2 pont
- $=\dfrac{((\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b}))^2}{(a-b)^2}$ 2 pont
- $=\dfrac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=1.$ 1 pont

5. Egy motorcsónak és egy tutaj egy időben indul a folyón lefelé. A motorcsónak 15 km megtétele után visszafordul, és a visszafordulás helyétől 9 km-re találkozik a tutajjal. Határozzuk meg a motorcsónak sebességét, ha a tutajé 4 km/h. [20]

**Megoldás.**

- Mivel a tutaj sebessége 4 km/h, ezért a folyó sebessége is 4 km/h. 1 pont
- Jelölje a motorcsónak saját (pl. egy tavon mérhető) sebességét km/h-ban mérve $v$. 1 pont
- Ekkor a motorcsónak 15 km-t tett meg a folyón lefelé $v+4$ km/h sebességgel. 2 pont
- Ehhez $t_1=\dfrac{15}{v+4}$ órára van szüksége. 2 pont
- Ekkor a motorcsónak 9 km-t tett meg a folyón felfelé $v-4$ km/h sebességgel. 2 pont
- Ehhez $t_2=\dfrac{9}{v-4}$ órára van szüksége. 2 pont
- Ez idő alatt a tutaj $15-9=6$ km-t tett meg 4 km/h sebességgel. 1 pont
- Ehhez $\dfrac{6}{4}$ órára van szüksége, vagyis $t_1+t_2=\dfrac{6}{4}$. 2 pont
- Ekkor $\dfrac{15}{v+4}+\dfrac{9}{v-4}=\dfrac{6}{4}$. 2 pont
- Ezt rendezve másodfokú egyenletet kapunk, melynek egyetlen pozitív megoldása $v=16$. 4 pont
- A motorcsónak sebessége $v=16$ km/h. 1 pont

6. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán. [20]

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 2^{2x-2y} & + & 2^{x-y} & = & 2 \\ 2^{2x+1} & + & \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2y-1} & = & 5 \end{array}\right\}$$

# Matematikai alapismeretek — 1. zh

**Megoldás.**

- Az első egyenletnél az $x - y = a$ helyettesítéssel a $2^{2a} + 2^a = 2$ egyenlethez jutunk. 1 pont
- Ekkor, ha $2^a = b$, a $b^2 + b = 2$ másodfokú egyenlethez jutunk. 2 pont
- Ennek pozitív megoldásait keressük ($b = 2^a > 0$) 2 pont
- az egyetlen pozitív megoldás $b = 1$. 2 pont
- Ekkor, mivel az exponenciális függvény szigorú monoton $a = 1$. 1 pont
- Kaptuk, hogy $x - y = 1$, vagyis $y = 1 - x$.
- Mivel $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, 1 pont
- ezért a második egyenlet $2^{2x+1} + 2^{1-2y} = 5$ alakban írható fel. 2 pont
- Mivel $y = 1 - x$, ezért $2^{2x+1} + 2^{1-2y} = 2^{2x+1} + 2^{2x-1}$. 2 pont
- Ekkor $2^{2x+1} + 2^{2x-1} = 2 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} = \frac{5}{2} \cdot 2^{2x} = 5$. 2 pont
- Innen $2^{2x} = 2$, 2 pont
- és, mivel az exponenciális függvény szigorú monoton, $x = \frac{1}{2}$. 1 pont
- Ekkor $y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. 1 pont
- Az egyenletrendszer egyetlen megoldása az $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ számpár. 1 pont

# 6 | Alapvető elemi geometriai tételek és alkalmazásaik

## Thalész-tétel, látószögek

**1. Feladat.** Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonalának hossza $s_c = 5$. Határozzuk meg az átfogó hosszát.

**2. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög bármely oldalfelező pontja egyenlő távol van a másik két oldalhoz tartozó magasság talppontjától.

**3. Feladat.** Egy kör alakú amfiteátrum két átellenes pontjában egy-egy gladiátor áll, akik egyszerre odafutnak a pálya szélén álló császárhoz. Egyikük 20 métert, másikuk 21 métert fut. Mekkora az amfiteátrum területe?

**4.* Feladat.** Egy kör egy húrjának egyik végpontját kössük össze a kör középpontjával. Igazoljuk, hogy az így kapott átmérő Thalész-köre felezi a húrt.

## A háromszög nevezetes vonalai, körei

**5. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy konvex négyszög szomszédos oldalfelezési pontjait összekötve, paralelogrammát kapunk.

**6. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy konvex négyszög szemközti oldalfelezési pontjait összekötve, az összekötő szakaszok felezve metszik egymást.

**7. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely $ABC$ háromszögre a sík tetszőleges, a háromszög csúcsaitól különböző, $O$ pontja esetén, az $OA, OB, OC$ szakaszok felezőpontjai által alkotott háromszögek egybevágóak, bárhol is vesszük fel az O pontot. Milyen kapcsolat van ezen háromszögek, és az $ABC$ háromszög között?

**8.* Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög köré írt köre középpontjának, a háromszög valamely oldalától vett távolsága feleakkora, mint a az ugyanezen oldalhoz tartozó magasságának a csúcs és magasságpont közé eső szakasza.

**9. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög köré írt körének középpontja megegyezik a háromszög oldalfelező pontjai által alkotott háromszög magasságpontjával.

**10. Feladat.** Igazoljuk, hogy a szabályos háromszög köré írt köre sugarának hossza, a beírt kör sugara hosszának a kétszerese.

**11. Feladat.** Legyen az $ABC$ háromszög szögei a szokásos jelölésekkel élve $\alpha, \beta, \gamma$. Határozzuk meg, hogy mekkora szögben látszanak az oldalak a háromszög

(a) beírt körének középpontjából,

(b) magasságpontjából.

**Elméleti kiegészítés.** Egy háromszög két külső, és harmadik belső szögének szögfelezője egy pontban metszik egymást. Ez a pont egyenlő távol van a háromszög egyik oldalától, és másik két oldalegyenesétől, így az egyik oldalt és a másik két oldal egyenesét érintő kör (a háromszög egyik hozzáírt körének) középpontja. Egy háromszögnek három hozzáírt köre van.

**12. Feladat.** Igazoljuk, hogy a szabályos háromszög hozzáírt köre sugarának hossza, a beírt kör sugara hosszának a háromszorosa.

**13. Feladat.** Mekkora részekre osztják egy háromszög oldalait a beírt kör érintési pontjai?

**14. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög oldalainak meghosszabbításait a háromszög hozzáírt köre az oldalak metszéspontjától félkerületnyi távolságban érinti.

**15. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy paralelogramma belső szögfelezői téglalapot határolnak, vagy egy ponton mennek át.

**16. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy rombusz egy belső pontjának a rombusz két szomszédos oldalától vett távolságai különbségének abszolútértéke egyenlő a másik két oldaltól vett távolságai különbségének abszolútértékével.

**17. Feladat.** Egy derékszögű háromszögben az átfogó, és a derékszög belső szögfelezőjének metszéspontjából párhuzamosokat húztunk a háromszög befogóival. Igazoljuk, hogy így négyzetet kaptunk.

**18. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha egy trapéz rövidebb alapjának hossza, egyenlő a szárak hosszának összegével, akkor a hosszabb alapon fekvő szögek szögfelezői a rövidebb alapon metszik egymást.

**19. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy trapézban az alaphosszak különbségének abszolútértéke kisebb, mint a szárak hosszának összege.

# Körök

**20. Feladat.** A $P$ és $O$ pontok távolsága 13 egység. Hány egység annak az $O$ középpontú körnek a sugara, melyhez a $P$ pontból húzott érintőszakaszok hossza

(a) 12 egység,

(b) 14 egység?

**21. Feladat.** Legyenek az $ABC$ háromszög szögei a szokásos jelölésekkel élve $\alpha, \beta, \gamma$. Határozzuk meg, hogy mekkorák annak a háromszögnek a szögei, melyet a beírt kör érintési pontjai határoznak meg.

**22. Feladat.** Legyen az $ABC$ háromszög szögei a szokásos jelölésekkel élve $\alpha, \beta, \gamma$. Határozzuk meg, hogy mekkorák annak a háromszögnek a szögei, melyet a köré írt kör háromszög csúcsaiba húzott érintői alkotnak.

**Elméleti kiegészítés.** Egy négyszög *húrnégyszög*, ha oldalai egy kör húrjai. Egy négyszög pontosan akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180° Egy négyszög *érintőnégyszög*, ha oldalai egy kör érintői. Egy konvex négyszög pontosan akkor érintőnégyszög, ha szemközti oldalai hosszának összege egyenlő.

**23. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög két csúcsa, és a belőlük induló magasságok talppontjai húrnégyszöget alkotnak.

**24. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög egy csúcsa, a csúcsból induló két oldalon lévő magasságtalppontok, valamint a háromszög magasságpontja húrnégyszöget alkot.

## Hasonlóság, arányossági tételek, párhuzamos szelők, szelőszakaszok

**Elméleti kiegészítés.**

*(Párhuzamos szelők tétele.)* Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező, nekik megfelelő szakaszok arányával. Ez a párhuzamos szelők tétele.

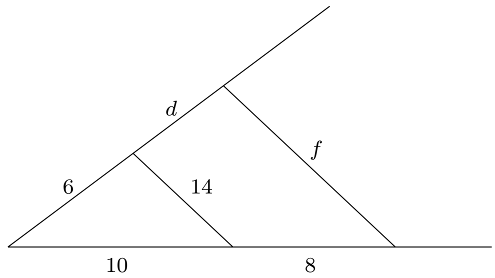
*(Párhuzamos szelők tételének megfordítása.)* Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyeknek aránya mindkét száron egyenlő, akkor a két egyenes párhuzamos.

*(Párhuzamos szelőszakaszok tétele.)* Egy szög szárait metsző párhuzamosokból a szárak által kimetszett szakaszok aránya megegyezik a párhuzamosok által az egyik szögszárból kimetszett, a szög csúcsától mért szakaszok arányával.

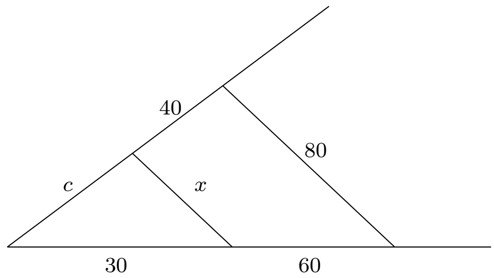
**25. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha egy háromszög egyik oldalával párhuzamosokat húzunk úgy, hogy azok metsszék a háromszög másik két oldalát, akkor ezen párhuzamosoknak a háromszög oldalai közé eső szakaszait a háromszög adott oldalhoz tartozó súlyvonala felezi.

**26. Feladat.** Az alábbi ábrákon egy szög szárait párhuzamosokkal metszettük. Határozzuk meg az ismeretlen szakaszok hosszát.

(a)




(b)




**27. Feladat.** Egy szimmetrikus trapéz alapjainak hossza 10 cm és 25 cm, szárai 12 cm hosszúak.

(a) Határozzuk meg a trapéz kiegészítő háromszöge oldalainak a hosszát.

(b) Hányszorosa a trapéz területe a kiegészítő háromszög területének?

(c) Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói?

(d) Határozzuk meg a trapéz átlóinak metszéspontján átmenő, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenes trapézba eső szakaszának a hosszát.

**28. Feladat.** Egy vízszintes terepen álló épület magasságát szeretnénk megmérni. Ha az épülettől egyenes vonalban 180 métert távolodunk, akkor egy 10,5 méter magas fához érünk, míg ha újabb 45 métert távolodunk, akkor egy olyan pontba érünk, ahonnan 1,7 méter magas szemmagasságunkból nézve a fa és az épület teteje egy vonalban látszik. Milyen magas az épület?

**29. Feladat.** Tekintsük az az $ABCD$ négyszögben az $AB$ oldal $A$-hoz legközelebbi, a $BC$ oldal $C$-hez legközelebbi, a $CD$ oldal és az $AD$ oldal $D$-hez legközelebbi negyedelőpontjait.

(a) Igazoljuk, hogy ezen negyedelőpontok egy trapézt feszítenek ki.

(b) Határozzuk meg ezen trapéz alapjainak hosszát, ha a négyszög $AC$ átlója 30 cm hosszúságú.

**Elméleti kiegészítés.** *(Szögfelezőtétel.)* A háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

**30. Feladat.** Egy háromszög oldalainak hossza 10 cm, 12 cm és 14 cm. Határozzuk meg, mekkora szakaszokra osztja a háromszög legnagyobb szögének szögfelezője a szemközti oldalt.

**31. Feladat.** Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 3 : 4, átfogója 15 dm. Határozzuk meg az átfogón a magasságtalppont által levágott szeletek hosszát.

**32. Feladat.** Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának hossza 12 cm, egy másik magasságának hossza 1,5 dm. Határozzuk meg a háromszög hiányzó oldalainak hosszát, a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek a hosszát, valamint a háromszög beírt és köré írt köre sugarainak a hosszát.

**33. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy derékszögű háromszög befogóira írt négyzetek területeinek aránya megegyezik a befogók átfogóra eső merőleges vetületei hosszának arányával.

**34. Feladat.** Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 1 : 3. A befogók átfogóra eső merőleges vetületei hosszának különbsége 4 cm. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát, a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek a hosszát, az átfogóhoz tartozó magasság hosszát, valamint a háromszög beírt és köré írt köre sugarainak a hosszát.

**35. Feladat.** Igazoljuk, hogy a szögek páronkénti egyenlősége nem elegendő két négyszög hasonlóságához.

**36. Feladat.** Mekkora az oldalak aránya abban a téglalapban, melyet az egyik középvonala az eredetivel hasonló téglalapokra vág szét?

**37. Feladat.** Két hasonló négyszög közül az egyik oldalainak hossza rendre 4, 3, 5, 6. Határozzuk meg a hozzá hasonló négyszög oldalainak hosszát, ha

(a) ezen négyszög leghosszabb oldala 18;

(b) ezen négyszög leghosszabb és legrövidebb oldala hosszának különbsége 6;

(c) ezen négyszög területe kilencszer akkora, mint az eredi négyszögé.

**38. Feladat.** Egy 100 $\text{cm}^2$ alapterületű, 40 cm magas szabályos négyoldalú gúlát az alaplapjával párhuzamos síkokkal három egyenlő térfogatú részre vágtunk. Határozzuk meg a keletkező síkmetszetek területét, valamint a gúla (alaplapra nem illeszkedő) csúcsától való távolságukat.

## Pithagorasz-tétel

**39. Feladat.** Egy derékszögű háromszög egyik szöge 30°. A háromszög leghosszabb oldalának hossza $a$. Fejezzük ki $a$ segítségével a többi oldal hosszát.

**40. Feladat.** Milyen távol van egy 10 cm sugarú kör középpontjától annak

(a) 6 cm, (b) 20 cm, (c) 22 cm

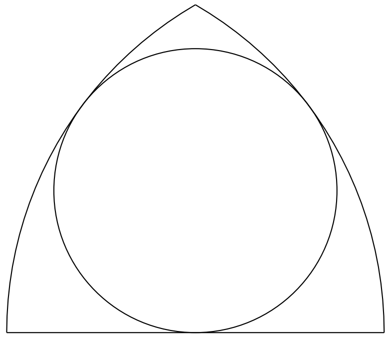
hosszúságú húrja?

**41. Feladat.** Mekkora annak a körnek a sugara amelyben egymástól 11 cm távolságban két párhuzamos, 24 cm és 20 cm hosszú húr húzható?

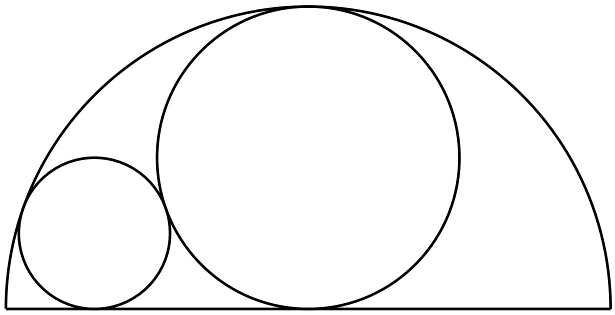
**42. Feladat.** Egy 19,5 cm és egy 22,5 cm sugarú, egymást metsző kör közös húrja 36 cm hosszúságú. Milyen messze vannak egymástól a körök középpontjai?

**43. Feladat.** Egy háromszög oldalainak hossza rendre 26 m, 40 m és 42 m. Határozzuk meg a háromszög magasságainak hosszát.

**44. Feladat.** Határozzuk meg a jobb oldali ábrán látható kör sugarának hosszát, ha a kört két 30 cm sugarú körív határolja.



**45.* Feladat.** Határozzuk meg az alábbi ábrán látható legkisebb kör sugarának hosszát, ha a félkör átmérője 24 cm.



**46. Feladat.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja, és a hozzá tartozó magasság is 18 mm hosszúságú. Határozzuk meg a köré írt kör sugarának a hosszát.

## Vektorok

**47. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy $ABCD$ paralelogramma esetén teljesülnek a következő összefüggések.

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$

(b) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$

(c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

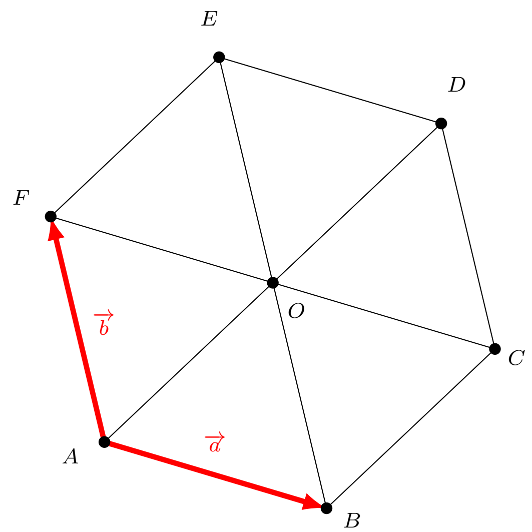
(d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

**48. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha két vektor hossza megegyezik, akkor az összegük és a különbségük merőleges egymásra.

**49. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha két vektor összege és különbsége merőleges egymásra, akkor a két vektor hossza megegyezik.

**Elméleti kiegészítés.** Legyen adott az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektor, valamint az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalár. Ekkor az $\alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b}$ alakú kifejezéseket az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok *lineáris kombináció*jának nevezzük. Ha $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{b}$ (ekkor persze egyik vektor sem a nullvektor), akkor a sík bármely $\overrightarrow{c}$ vektora egyértelműen előáll az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz bármely $\overrightarrow{c}$ vektorhoz létezik pontosan egy olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, melyre $\overrightarrow{c} = \alpha \cdot \overrightarrow{a} + \beta \cdot \overrightarrow{b}$.

**50. Feladat.** Az ábrán látható szabályos hatszög egyik csúcsából indított $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok segítségével (az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként) fejezzük ki a következő vektorokat.




(a) $\overrightarrow{BC}$
(b) $\overrightarrow{DE}$
(c) $\overrightarrow{OB}$
(d) $\overrightarrow{AC}$
(e) $\overrightarrow{FD}$
(f) $\overrightarrow{BE}$
(g) $\overrightarrow{AE}$
(h) $\overrightarrow{EE}$

Adjuk meg az alábbi vektorokat úgy, hogy kezdő- és végpontjuk is a hatszög egyik csúcsa, vagy a középpontja legyen.

(i) $2\overrightarrow{b}$
(ii) $-\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$
(iii) $\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{a}$
(iv) $2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$

Határozzuk meg az $F$ végpontú vektor $X$ kezdőpontját, ha

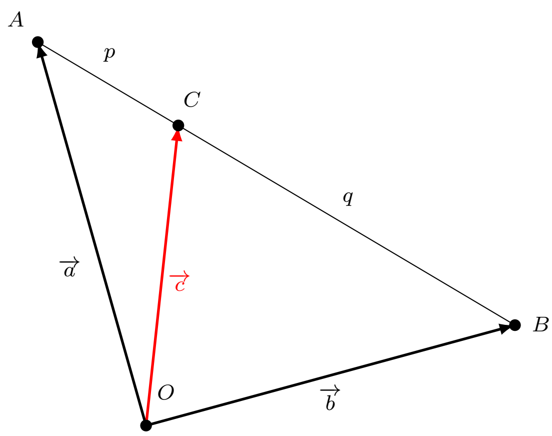
(A) $\overrightarrow{XF}=-\overrightarrow{b}$
(B) $\overrightarrow{XF}=-\overrightarrow{a}$
(C) $\overrightarrow{XF}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$
(D) $\overrightarrow{XF}=-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

### Elméleti kiegészítés.

Legyen $O$ a sík tetszőleges, rögzített pontja. Ekkor az $AB$ szakaszt $p:q$ arányban osztó $C$ pont $O$-ból induló $\overrightarrow{c}$ helyvektora

$$\overrightarrow{c}=\frac{q\cdot\overrightarrow{a}+p\cdot\overrightarrow{b}}{p+q},$$

ahol $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ az $A$, illetve $B$ pontok ($O$-ból induló) helyvektora.




**51. Feladat.** Igazoljuk, hogy a sík bármely, tetszőlegesen választott $O$ vonatkoztatási pontja esetén, bármely $ABC$ háromszögre

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\cdot\overrightarrow{OS},$$

ahol $S$ a háromszög súlypontja.

**52. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely $ABC$ háromszögre

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{0},$$

ahol $S$ a háromszög súlypontja.

**53. Feladat.** Igazoljuk, hogy az $ABC$ háromszög csúcsaiba mutató, tetszőleges $O$ pontból indított helyvektorok összege megegyezik az $O$ pontból indított, a háromszög oldalfelező pontjaiba mutató helyvektorok összegével.

**54. Feladat.** Az $ABC$ háromszög csúcsaiba mutató, tetszőleges $O$ pontból indított helyvektorok legyenek rendre $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ és $\overrightarrow{c}$. Fejezzük ki az $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektorok segítségével a háromszög $AC$ és $BC$ oldalainak a felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjába mutató helyvektort.

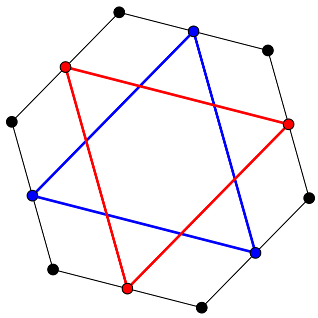
**55. Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges négyszög középvonalai felezve metszik egymást.

**56. Feladat.** Legyen $ABCD$ és $EFGH$ két négyszög a síkon. Igazoljuk, hogy

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF}.$$

**57. Feladat.** Legyenek egy hatszög oldalfelezési pontjai valamilyen körüljárás szerint $A; B; C; D; E; F$. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{0}$.

**58. Feladat.** Kössük össze egy szabályos hatszög minden második oldalfelező pontját mindkét lehetséges módon. Igazoljuk, hogy az így kapott két háromszög súlypontjai megegyeznek.



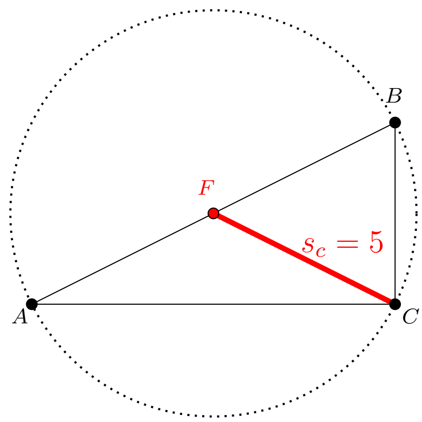
# Megoldások

## Thalész-tétel, látószögek

**1. Feladat.** Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó súlyvonalának hossza $s_c = 5$. Határozzuk meg az átfogó hosszát.

**Megoldás.**

Jelöljük $F$-fel az $ABC$ derékszögű háromszög átfogójának felezőpontját. Ekkor akkor az $ABC$ háromszög köré írt köre, Thalész tételének megfordítása alapján, az $|FA|$ sugarú, $F$ középpontú kör. Az átfogó hossza ebből adódóan $2 \cdot 5 = 10$.

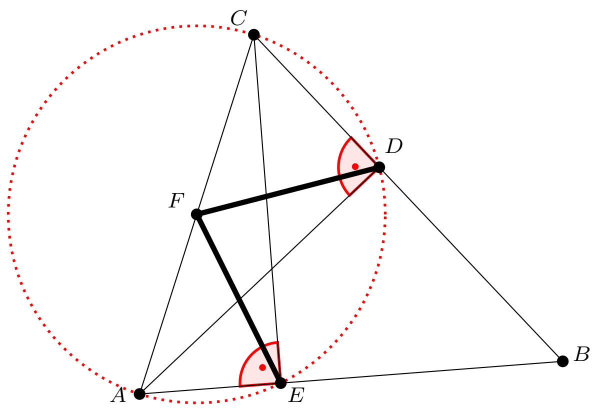



**2. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög bármely oldalfelező pontja egyenlő távol van a másik két oldalhoz tartozó magasság talppontjától.

**Megoldás.**

Legyen az $ABC$ háromszög $AC$ oldalának felezőpontja $F$, az $AB$ oldalhoz tartozó magasság talppontja $E$, illetve a $BC$ oldalhoz tartozó magasságtalppont pedig $D$.

Az $ADC$ és $AEC$ háromszögek a konstrukciójuk miatt derékszögűek, és közös az átfogójuk: $AC$. Thalész tételének megfordítása alapján $A$, $E$, $C$ és $D$ mind egy $F$ középpontú körre illeszkednek.



**3. Feladat.** Egy kör alakú amfiteátrum két átellenes pontjában egy-egy gladiátor áll, akik egyszerre odafutnak a pálya szélén álló császárhoz. Egyikük 20 métert, másikuk 21 métert fut. Mekkora az amfiteátrum területe?

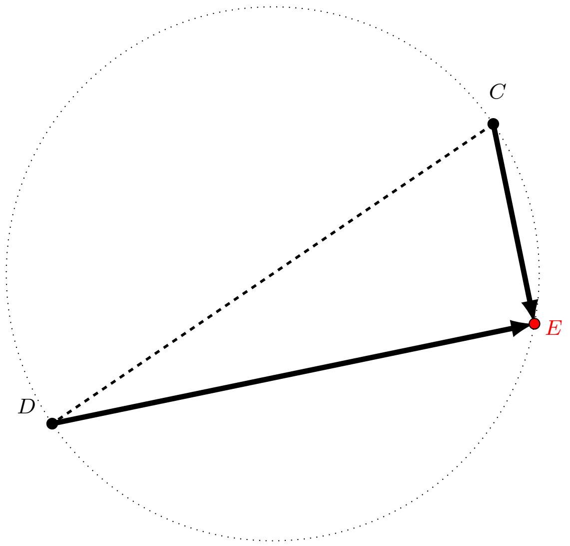
**Megoldás.**

A két gladiátort jelölje $C$ és $D$, a császárt $E$. Thalész tétele alapján a $CED$ háromszög derékszögű, tehát a $CD$ oldal hosszát Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk:

$$|CD| = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29.$$

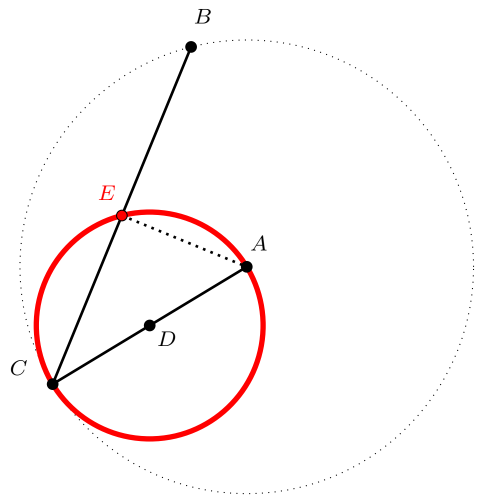
A kör sugara 14,5 méter, területe pedig

$$t = 14{,}5^2\pi \text{ négyzetméter.}$$




**4.* Feladat.** Egy kör egy húrjának egyik végpontját kössük össze a kör középpontjával. Igazoljuk, hogy az így kapott átmérő Thalész-köre felezi a húrt.

**Megoldás.** Tekintsük az alábbi ábrát.

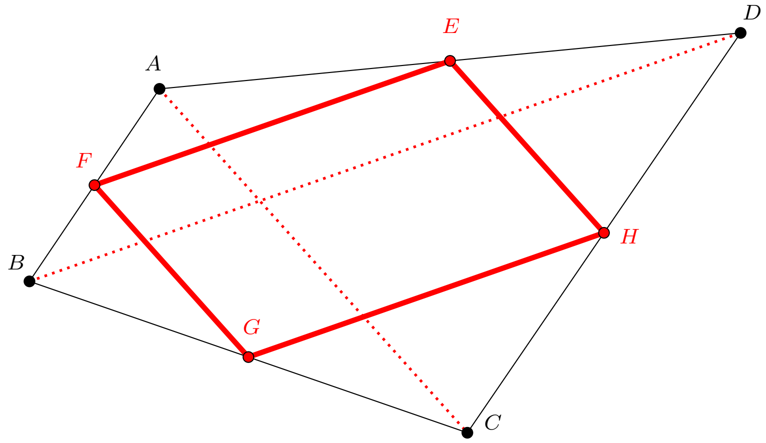



Ekkor az $ABC$ háromszög egyenlő szárú, az $EA$ szakasz pedig Thalész tétele alapján merőleges $CB$-re, vagyis az $ABC$ egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága, ami felezi az alapot, tehát $E$ tényleg a $CB$ szakasz felezőpontja.

# A háromszög nevezetes vonalai, körei

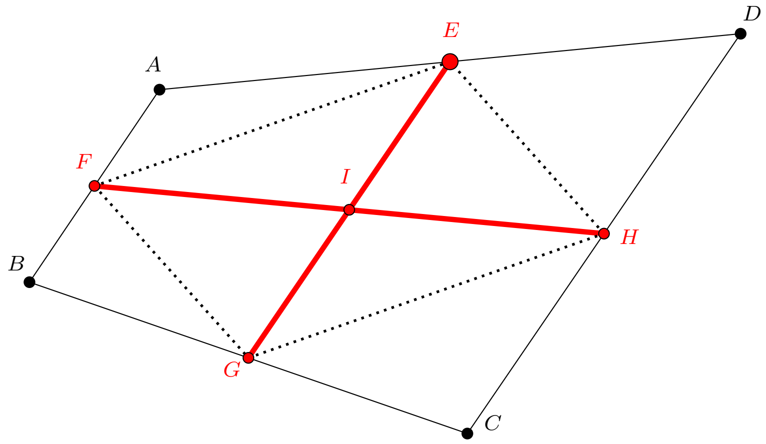
**5. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy konvex négyszög szomszédos oldalfelezési pontjait összekötve, paralelogrammát kapunk.

**Megoldás.** Az $ABCD$ négyszögben vizsgálandó az $EFGH$ négyszög. Ennek szemközti oldalai, pl. $EF$ és $GH$ oldalai az $ABD$ és $CBD$ háromszögek $BD$ oldalhoz tartozó középvonalai. Így $EF$ és $GH$ párhuzamosak $BD$-vel (és így egymással is) és fele olyan hosszúak. Az $EFGH$ négyszög két szemközti oldala így párhuzamos és egyenlő, vagyis a négyszög parallelogramma. (Az állítás igaz konkáv, sőt önátmetsző négyszögekre is.)



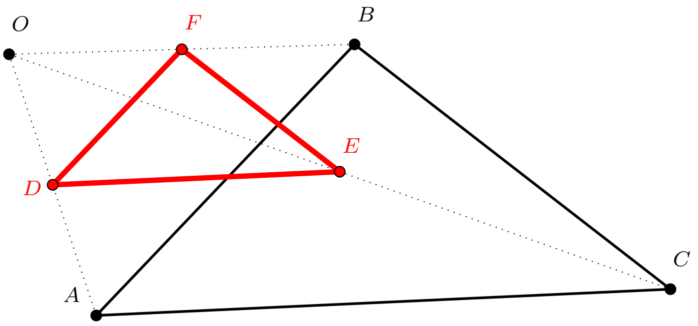

**6. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy konvex négyszög szemközti oldalfelezési pontjait összekötve, az összekötő szakaszok felezve metszik egymást.

**Megoldás.** Az előző feladat alapján tudjuk, hogy $EFGH$ paralelogramma, ennek átlói pedig felezik egymást.



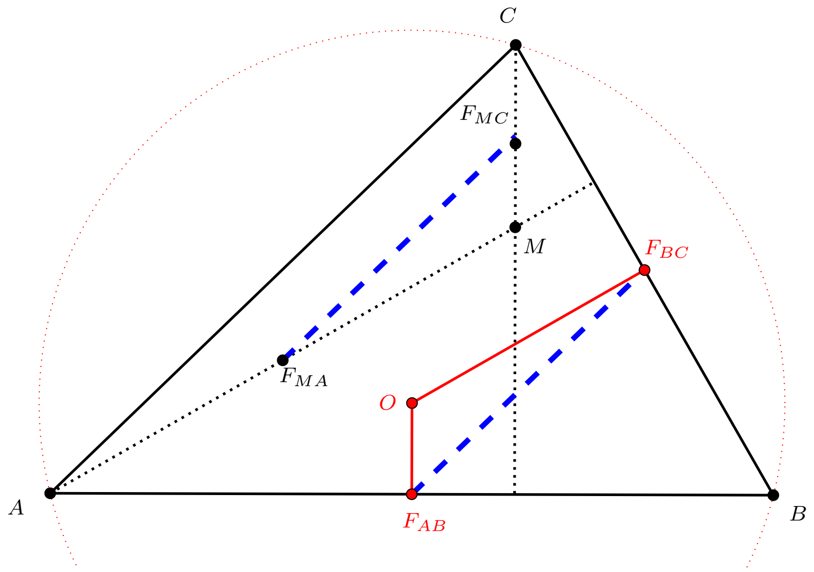

**7. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely $ABC$ háromszögre a sík tetszőleges, a háromszög csúcsaitól különböző, $O$ pontja esetén, az $OA, OB, OC$ szakaszok felezőpontjai által alkotott háromszögek egybevágóak, bárhol is vesszük fel az O pontot. Milyen kapcsolat van ezen háromszögek, és az $ABC$ háromszög között?

**Megoldás.** Legyen $D$ az $OA$, $E$ az $OC$ és $F$ az $OB$ szakasz felezőpontja. Az $EF$ szakasz az $OBC$ háromszög $BC$ oldalhoz tartozó középvonala, tehát az $EF$ szakasz hossza a $BC$ szakasz hosszának fele, és a két szakasz párhuzamos. Ez az érvelés elvégezhető az $FD$ és $ED$ szakaszokra is. Tehát az $EFD$ háromszög oldalai egyértelműen meghatározottak, ami azt jelenti, hogy a háromszögek az $O$ pont választásától függetlenül egybevágóak, illetve az $ABC$ háromszög $O$ középpontú $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal kapott képei.



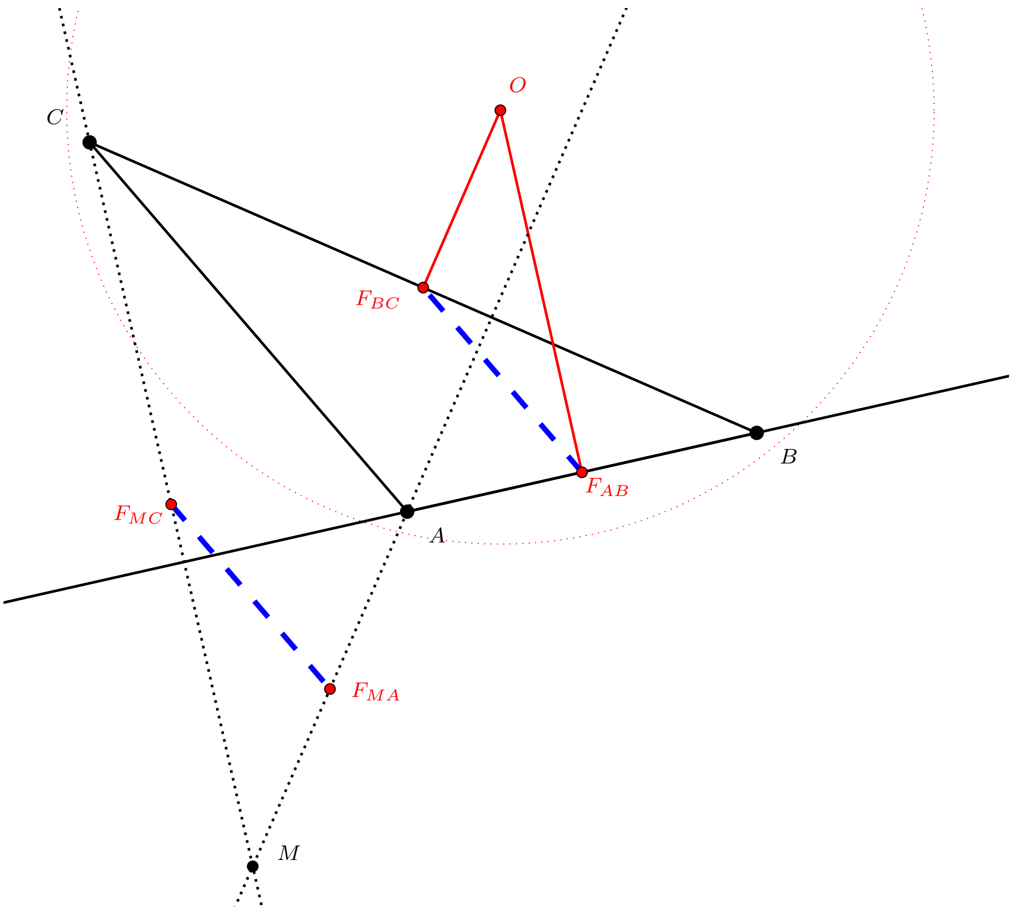

**8.*Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög köré írt köre középpontjának, a háromszög valamely oldalától vett távolsága feleakkora, mint a az ugyanezen oldalhoz tartozó magasságának a csúcs és magasságpont közé eső szakasza.

**Megoldás.** Tekintsük az alábbi ábrát ahol M a háromszög magasságpontja, O a köré írt kör középpontja, $F_{XY}$ a megfelelő szakasz felezőpontját jelöli.

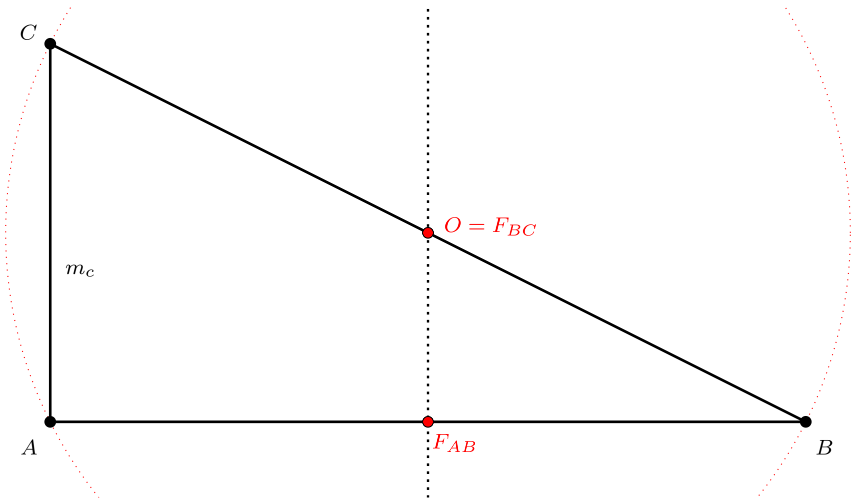



Az összefüggést az $AB$ oldalhoz tartozó magasságra bizonyítjuk, hasonlóan elvégezhető a többire is. Ekkor az $F_{MA}F_{MC}$ és az $F_{AB}F_{BC}$ szakaszok párhuzamosak és egyenlők, mert mindkettő az $AC$ oldalhoz tartozó középvonal az $AMC$, illetve $ABC$ háromszögben. Így az $MF_{MA}F_{MC}$ és $OF_{AB}F_{BC}$ háromszögek egybevágóak, mert oldalaik párhuzamosak, tehát szögeik egyenlőek, és egy oldaluk azonos hosszúságú. Ekkor az egymásnak megfelelő oldalak hossza egyenlő, vagyis például $OF_{AB} = MF_{MC} = MC/2$.

A bizonyítás hasonlóan elvégezhető tompaszögű háromszögben is.




Derékszögű háromszög esetére pedig tekintsük a következő ábrát.

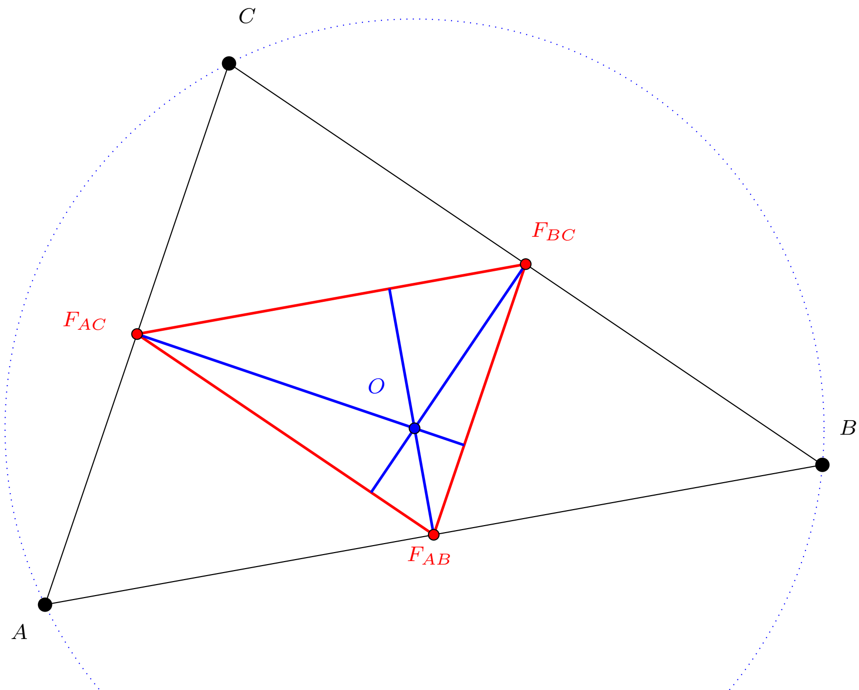



Ekkor egyszerűen látható, hogy $OF_{AB}$ középvonal az $ABC$ háromszögben, így

$$F_{AB}F_{BC} = AC/2 = \frac{m_c}{2}.$$

**9. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög köré írt körének középpontja megegyezik a háromszög oldalfelező pontjai által alkotott háromszög magasságpontjával.

**Megoldás.** Tekintsük a következő ábrát.

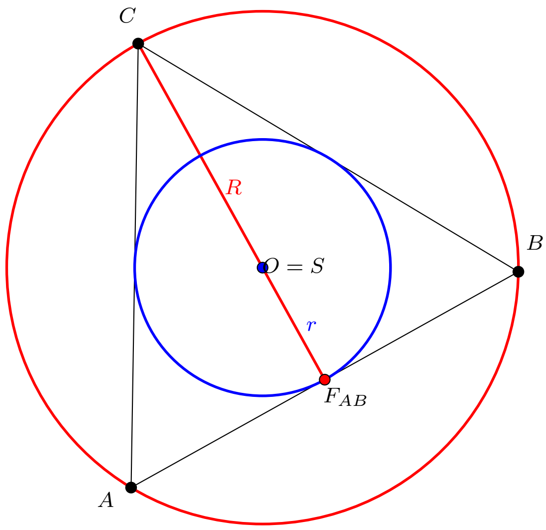



A háromszög köré írt körének középpontját az oldalfelező merőleges egyenesek közös metszéspontja hozza létre. Mivel az oldalfelezési pontok összekötésével keletkező háromszög oldalai (az eredeti háromszög középvonalai) párhuzamosak az $ABC$ háromszög oldalaival, így az $ABC$ háromszög oldalfelező merőlegesei az $F_{AB}F_{BC}F_{CA}$ háromszög magasságvonalai, vagyis az $ABC$ háromszög köré írt körének középpontja az $F_{AB}F_{BC}F_{CA}$ háromszög magasságpontja.

**10. Feladat.** Igazoljuk, hogy a szabályos háromszög köré írt köre sugarának hossza, a beírt kör sugara hosszának a kétszerese.

**Megoldás.**

A szabályos háromszög nevezetes pontjai (a beírt kör középpontja, a köré írt kör középpontja, a súlypont és a magasságpont) egybeesnek, és a háromszög nevezetes vonalai (belső szögfelezők, oldalfelező merőleges egyenesek, súlyvonalak, magasságvonalak) is egybeesnek, illetve illeszkednek egymásra. Így pl. a háromszög $m_c$ magassága a beírt és a köré írt kör sugarának összege, s ezen szakaszt a körök közös középpontja, vagyis a súlypont $2:1$ arányban osztja, azaz $R = 2r$. (Tetszőleges háromszögben $R \geq 2r$, ez az úgynevezett sugáregyenlőtlenség.)



**11. Feladat.** Legyen az $ABC$ háromszög szögei a szokásos jelölésekkel élve $\alpha, \beta, \gamma$. Határozzuk meg, hogy mekkora szögben látszanak az oldalak a háromszög

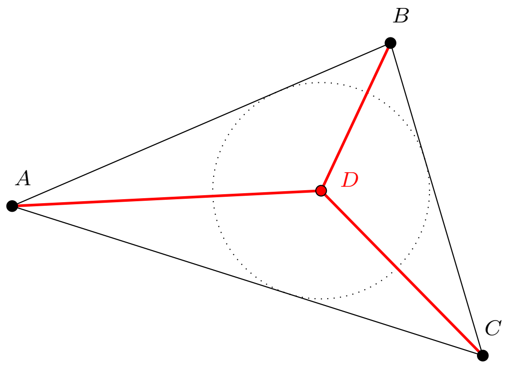
(a) beírt körének középpontjából,

(b) magasságpontjából.

**Megoldás.**

(a) A beírt kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja. Ha $D$ jelöli a középpontot, akkor az $ABD$ háromszög belső szögei $\alpha/2$, $\beta/2$ és az $ADB$ szög. Így

$$ADB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}, \qquad ADC\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}, \qquad CDB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

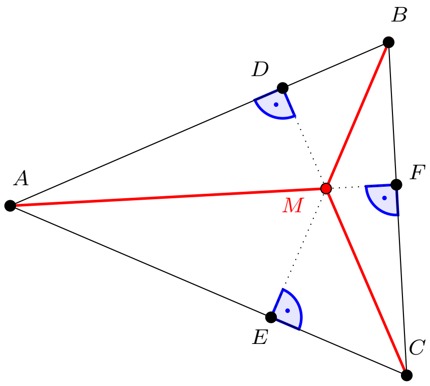



(b) Jelölje a magasságpontot $M$, az $A$-hoz tartozó magasságtalppontot $F$, a $B$-hez tartozót $E$ és a $C$-hez tartozót $D$. Vizsgáljuk az $AFC$ és $ADC$ derékszögű háromszögeket. Mivel $CAF\sphericalangle = 90^\circ - \gamma$ és $ACD\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, ezért

$$AMC\sphericalangle = 180^\circ - CAF\sphericalangle - ACD\sphericalangle = \alpha + \gamma.$$

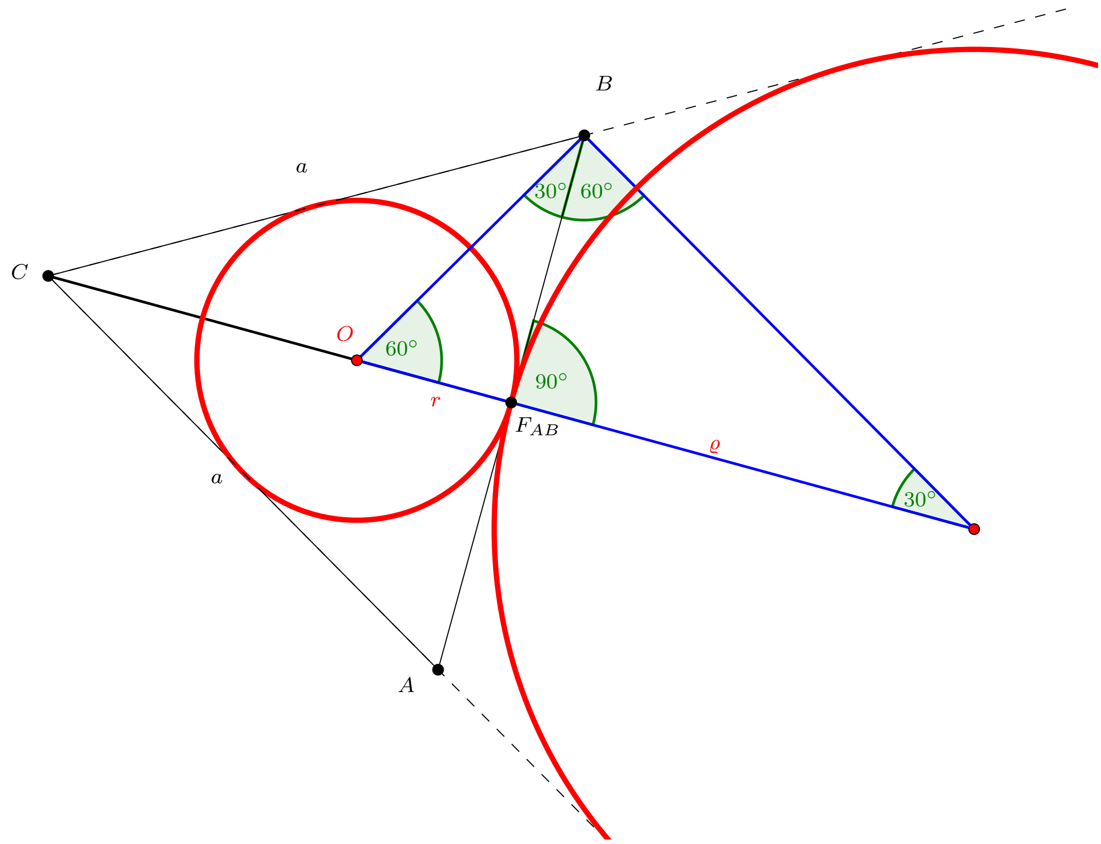
Hasonlóan megkaphatjuk, hogy

$$AMB\sphericalangle = \alpha + \beta \qquad \text{és} \qquad BMC\sphericalangle = \beta + \gamma.$$




**12. Feladat.** Igazoljuk, hogy a szabályos háromszög hozzáírt köre sugarának hossza, a beírt kör sugara hosszának a háromszorosa.

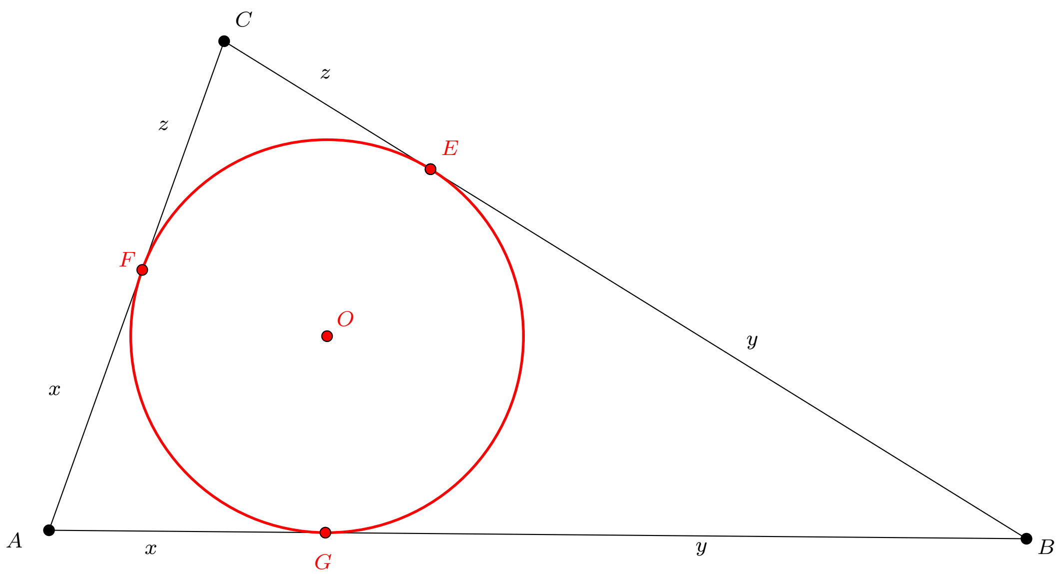
**Megoldás.** Tekintsük az alábbi ábrát.




Leolvasható, hogy $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{r}{a/2}$ és $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} = \dfrac{\varrho}{a/2}$, amiből $r : \varrho = 1 : 3$.

**13. Feladat.** Mekkora részekre osztják egy háromszög oldalait a beírt kör érintési pontjai?

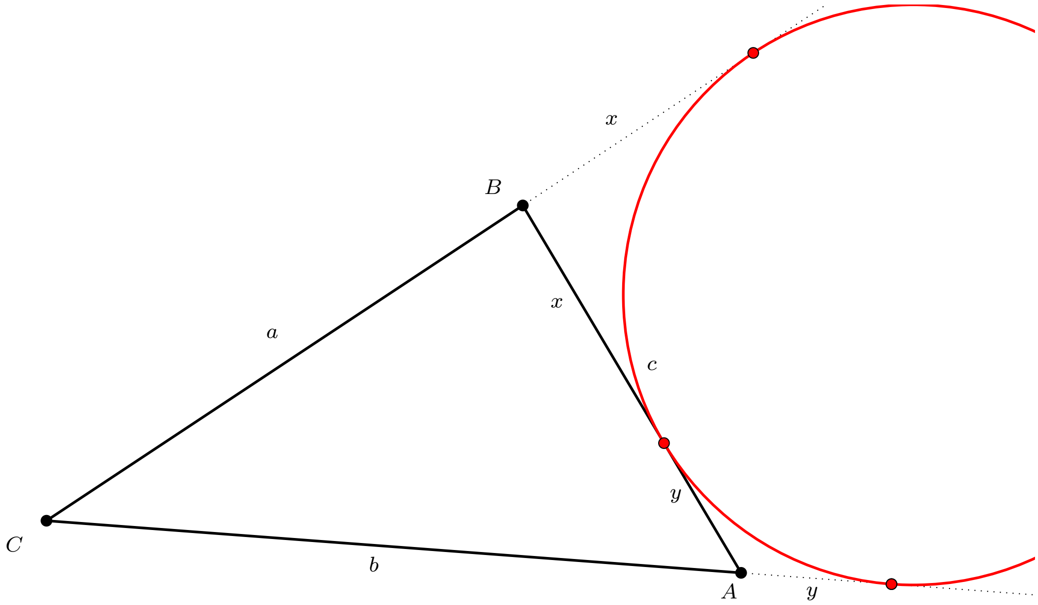
**Megoldás.** Tekintsük az alábbi ábrát.




Mivel külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, ezért az azonosan jelölt szakaszok egyenlő hosszúságúak. Ekkor $x + y + z = s$, ahol $s$ a háromszög félkerületét jelöli. Továbbá $x = s - (y + z) = s - a$, $y = s - b$ és $z = s - c$.

**14. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög oldalainak meghosszabbításait a háromszög hozzáírt köre az oldalak metszéspontjától félkerületnyi távolságban érinti.

**Megoldás.** Tekintsük az alábbi ábrát.

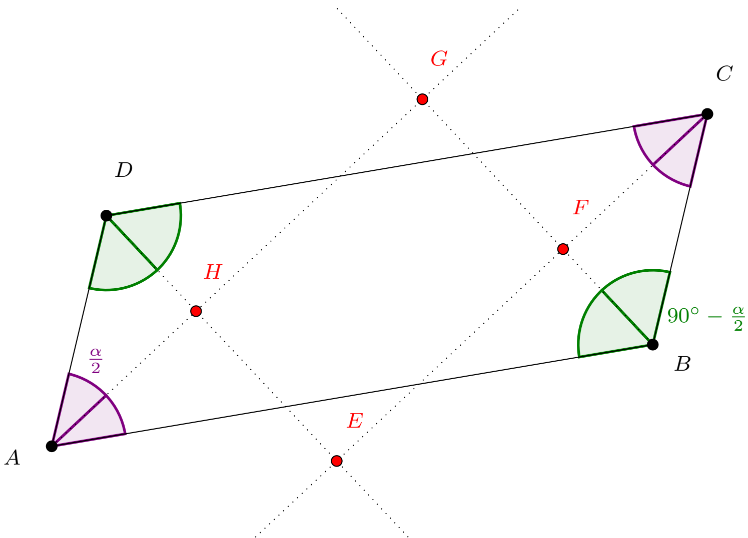



Mivel külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, ezért az azonosan jelölt szakaszok egyenlő hosszúságúak, továbbá $b + y = a + x$. Ekkor a fentiek alapján

$$k = a + b + c = a + b + x + y = (a + x) + (b + y) = 2(a + x) = 2(b + y).$$

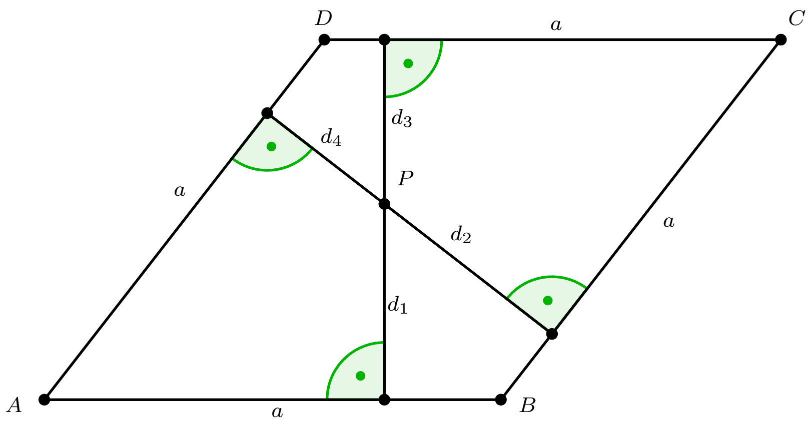
**15. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy paralelogramma belső szögfelezői téglalapot határolnak, vagy egy ponton mennek át.

**Megoldás.** Ha a paralelogramma rombusz, a belső szögfelezők az átlókra illeszkednek, így egy ponton mennek át. Ha a paralelogramma nem rombusz, akkor az alábbi ábra alapján az $EFGH$ négyszög minden szöge derékszög, vagyis téglalap.



**16. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy rombusz egy belső pontjának a rombusz két szomszédos oldalától vett távolságai különbségének abszolútértéke egyenlő a másik két oldaltól vett távolságai különbségének abszolútértékével.

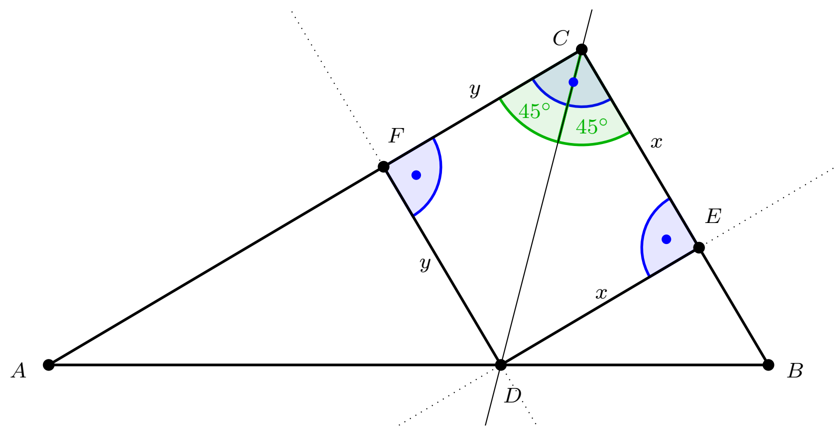
**Megoldás.** Tekintsük az alábbi ábrát.




Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $d_1 \geq d_2$ , illetve $d_4 \geq d_3$. Ekkor a bizonyítandó $|d_4 - d_3| = |d_1 - d_2|$ ekvivalens a $d_4 - d_3 = d_1 - d_2$ összefüggéssel, ami ekvivalens a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ állítással, ami fennáll, mert mindkét oldalon a rombusz magassága áll.

**17. Feladat.** Egy derékszögű háromszögben az átfogó, és a derékszög belső szögfelezőjének metszéspontjából párhuzamosokat húztunk a háromszög befogóival. Igazoljuk, hogy így négyzetet kaptunk.

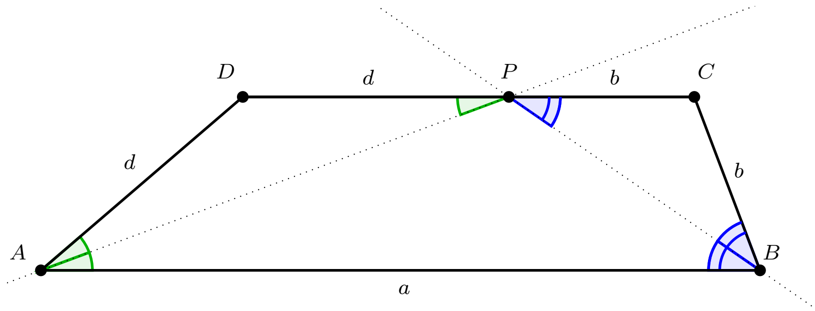
**Megoldás.**




Az fenti ábrán a $CDE\sphericalangle$ és $CDF\sphericalangle$ szögek egyenlőek (45°-osak), így a $DEC$ és $DFC$ háromszögek egyenlő szárúak, vagyis az ábrán azonos módon jelölt szakaszok egyenlőek. Így a $DEFC$ négyszög olyan téglalap, amelynek két-két szomszédos oldala is egyenlő, vagyis négyzet.

**18. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha egy trapéz rövidebb alapjának hossza, egyenlő a szárak hosszának összegével, akkor a hosszabb alapon fekvő szögek szögfelezői a rövidebb alapon metszik egymást.

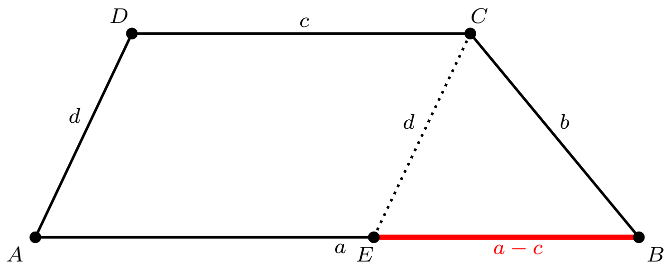
**Megoldás.**




A fenti ábra jelöléseit használva jelölje a $c$ oldal és az $A$ csúcsból húzott szögfelező metszéspontját $P$. Belátjuk, hogy a $P$ pont rajta van a $B$ csúcsból húzott szögfelezőn is. Ekkor $BAP\sphericalangle = APD\sphericalangle$, mert váltószögek. Így az $ADP$ háromszög egyenlő szárú, vagyis $DP = d$. Ekkor a trapéz oldalaira vonatkozó feltétel alapján $PC = b$, így viszont a $PBC$ háromszög is egyenlő szárú, azaz $CPB\sphericalangle = CBP\sphericalangle$. Viszont $CPB\sphericalangle = PBA\sphericalangle$, mert váltószögek. Így kaptuk, hogy $CBP\sphericalangle = PBA\sphericalangle$, vagyis a $P$ pont rajta van a $B$ csúcsból induló szögfelezőn.

**19. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy trapézban az alaphosszak különbségének abszolútértéke kisebb, mint a szárak hosszának összege.

**Megoldás.** Toljuk el a trapéz egyik szárát önmagával párhuzamosan az ábrán látható módon.




Ekkor az $EBC$ háromszögre a háromszög-egyenlőtlenséget felírva $d + b > a - c$ adódik.

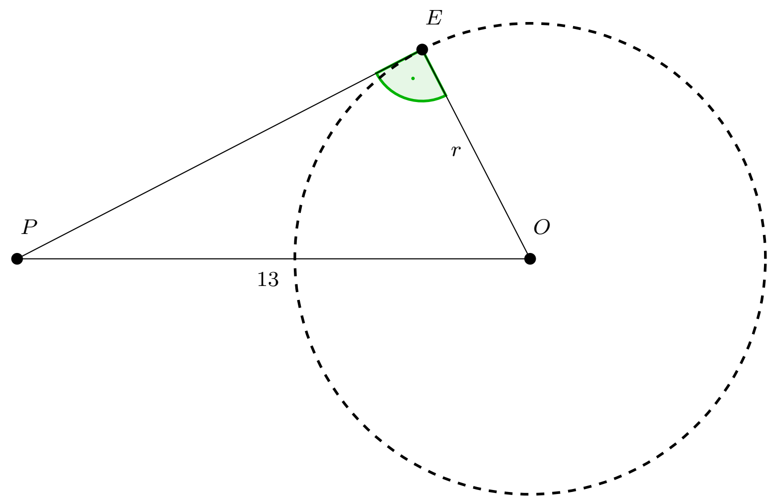
# Körök

**20. Feladat.** A $P$ és $O$ pontok távolsága 13 egység. Hány egység annak az $O$ középpontú körnek a sugara, melyhez a $P$ pontból húzott érintőszakaszok hossza

(a) 12 egység,

(b) 14 egység?

**Megoldás.**

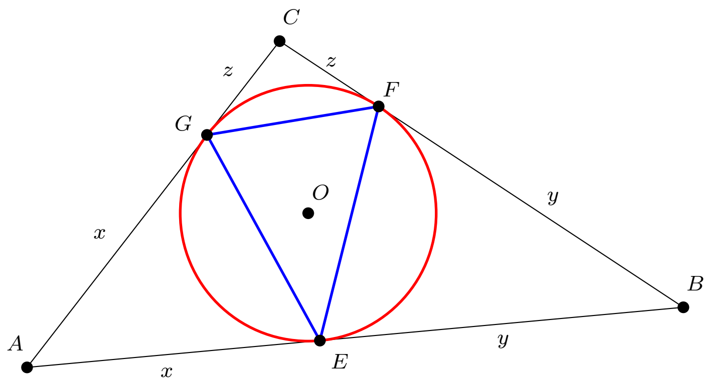



Mivel a $POE$ háromszög derékszögű, ezért Pitagorasz tételéből egyszerűen adódik, hogy

(a) 5, illetve (b) nincs megoldás.

**21. Feladat.** Legyenek az $ABC$ háromszög szögei a szokásos jelölésekkel élve $\alpha, \beta, \gamma$. Határozzuk meg, hogy mekkorák annak a háromszögnek a szögei, melyet a beírt kör érintési pontjai határoznak meg.

**Megoldás.**




Mivel külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, az azonos módon jelölt szakaszok egyenlő hosszúságúak. Így az $AEG, BEF, CGF$ háromszögek egyenlő szárúak, amiből

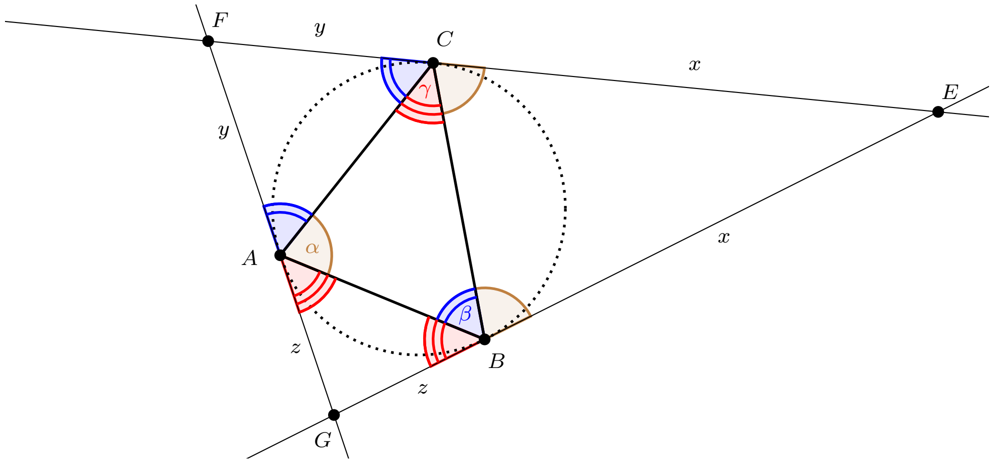
$$AEG\sphericalangle = EGA\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad FEB\sphericalangle = BFE\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad CFG\sphericalangle = CGF\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

és innen az érintési pontok által meghatározott háromszög szögei

$$GEF\sphericalangle = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad EFG\sphericalangle = \frac{\beta+\gamma}{2}, \qquad FGE\sphericalangle = \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

**22. Feladat.** Legyen az $ABC$ háromszög szögei a szokásos jelölésekkel élve $\alpha, \beta, \gamma$. Határozzuk meg, hogy mekkorák annak a háromszögnek a szögei, melyet a köré írt kör háromszög csúcsaiba húzott érintői alkotnak.

**Megoldás.**




Mivel külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, az azonos módon jelölt szakaszok egyenlő hosszúságúak. Továbbá a kerületi szögek tétele alapján

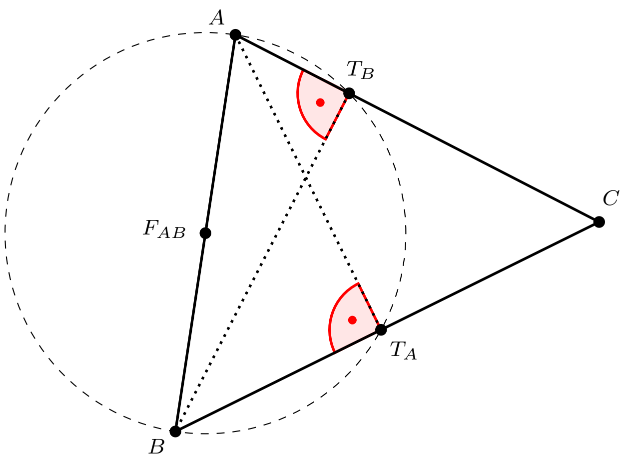
$$CAB\sphericalangle = ECB\sphericalangle = EBC\sphericalangle, \quad CBA\sphericalangle = FCA\sphericalangle = CAF\sphericalangle, \quad ACB\sphericalangle = BAG\sphericalangle = ABG\sphericalangle.$$

Tehát a keresett szögek nagysága

$$CEB\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha, \quad AFC\sphericalangle = 180^\circ - 2\beta, \quad BGA\sphericalangle = 180^\circ - 2\gamma.$$

**23. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög két csúcsa, és a belőlük induló magasságok talppontjai húrnégyszöget alkotnak.

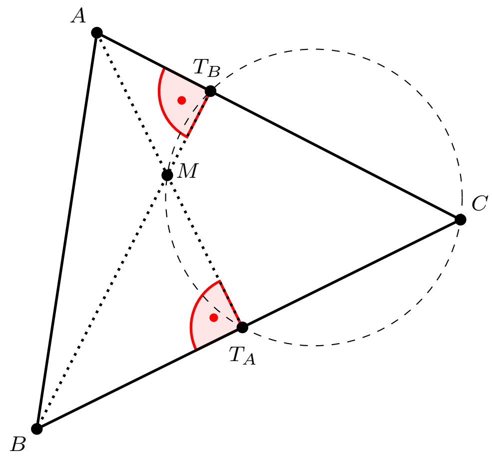
**Megoldás.** A magasságtalppontok rajta vannak az adott oldal Thalész körén.




**24. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy háromszög egy csúcsa, a csúcsból induló két oldalon lévő magasságtalppontok, valamint a háromszög magasságpontja húrnégyszöget alkot.

**Megoldás.**

Az $MT_ACT_B$ négyszögben a $T_A$ és $T_B$ csúcsoknál derékszög van, vagyis összegük 180°, így a húrnégyszögek tételének megfordítása értelmében az $MT_ACT_B$ négyszög húrnégyszög.

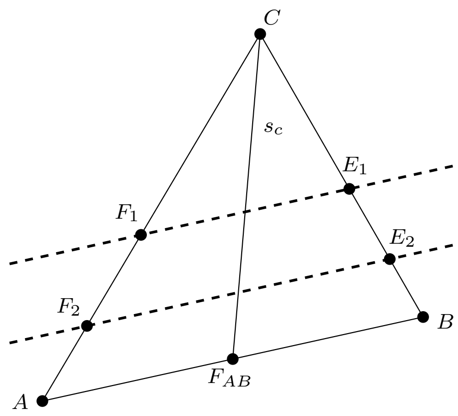



## Hasonlóság, arányossági tételek, párhuzamos szelők, szelőszakaszok

**25. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha egy háromszög egyik oldalával párhuzamosokat húzunk úgy, hogy azok metsszék a háromszög másik két oldalát, akkor ezen párhuzamosoknak a háromszög oldalai közé eső szakaszait a háromszög adott oldalhoz tartozó súlyvonala felezi.

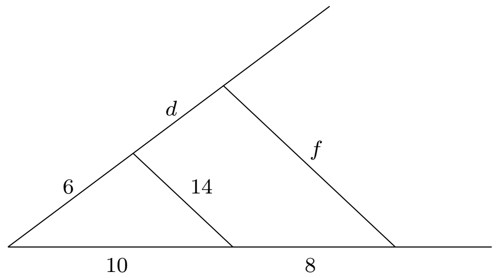
**Megoldás.**

A megfelelő háromszögek hasonlóságából következik az adott szakaszok egyenlősége.

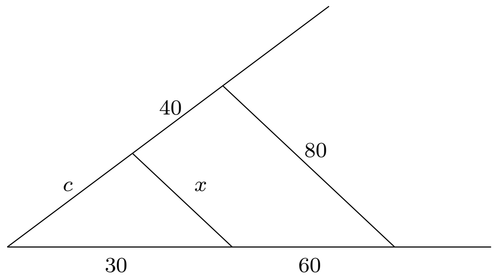


**26. Feladat.** Az alábbi ábrákon egy szög szárait párhuzamosokkal metszettük. Határozzuk meg az ismeretlen szakaszok hosszát.

(a)




(b)




**Megoldás.**

(a) $\dfrac{d}{6} = \dfrac{8}{10} \implies d = \dfrac{48}{10} = 4{,}8$

$\dfrac{f}{14} = \dfrac{18}{8} \implies f = \dfrac{252}{8} = 31{,}5$

(b) $\dfrac{c}{40} = \dfrac{30}{60} \implies c = \dfrac{1200}{60} = 20$

$\dfrac{x}{30} = \dfrac{80}{90} \implies x = \dfrac{2400}{90} = \dfrac{80}{3}$

**27. Feladat.** Egy szimmetrikus trapéz alapjainak hossza 10 cm és 25 cm, szárai 12 cm hosszúak.

(a) Határozzuk meg a trapéz kiegészítő háromszöge oldalainak a hosszát.

(b) Hányszorosa a trapéz területe a kiegészítő háromszög területének?

(c) Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói?

(d) Határozzuk meg a trapéz átlóinak metszéspontján átmenő, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenes trapézba eső szakaszának a hosszát.

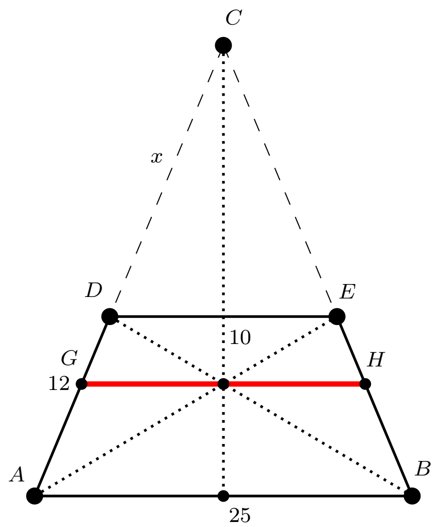
**Megoldás.**

(a) $\dfrac{x}{x+12} = \dfrac{10}{25} \implies x = 8$

(b) $T_{ABC} = \left(\dfrac{25}{10}\right)^2 T_{DEC} \implies T_{ABCD} = \dfrac{21}{4} \cdot T_{DEC}$

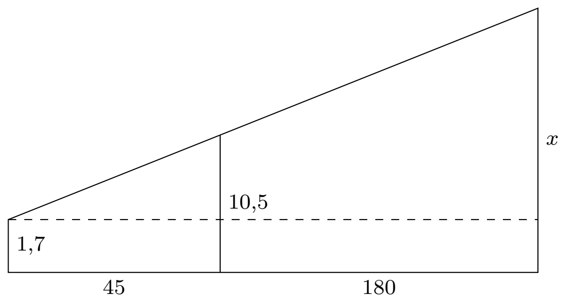
(c) $10 : 25 = 2 : 5$

(d) $GH = \dfrac{100}{7}$ cm



**28. Feladat.** Egy vízszintes terepen álló épület magasságát szeretnénk megmérni. Ha az épülettől egyenes vonalban 180 métert távolodunk, akkor egy 10,5 méter magas fához érünk, míg ha újabb 45 métert távolodunk, akkor egy olyan pontba érünk, ahonnan 1,7 méter magas szemmagasságunkból nézve a fa és az épület teteje egy vonalban látszik. Milyen magas az épület?

**Megoldás.**




Használva a párhuzamos szelőszakaszok tételét

$$\frac{x-1{,}7}{225} = \frac{10{,}5-1{,}7}{45} \quad \Longrightarrow \quad x = 225 \cdot \frac{8{,}8}{45} + 1{,}7 = 45{,}7.$$

Tehát az épület 45,7 méter magas.

**29. Feladat.** Tekintsük az az $ABCD$ négyszögben az $AB$ oldal $A$-hoz legközelebbi, a $BC$ oldal $C$-hez legközelebbi, a $CD$ oldal és az $AD$ oldal $D$-hez legközelebbi negyedelőpontjait.

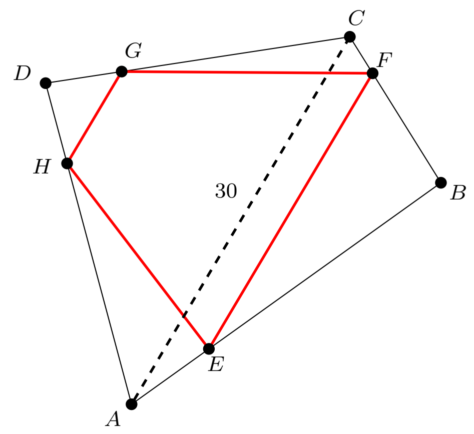
(a) Igazoljuk, hogy ezen negyedelőpontok egy trapézt feszítenek ki.

(b) Határozzuk meg ezen trapéz alapjainak hosszát, ha a négyszög $AC$ átlója 30 cm hosszúságú.

**Megoldás.**

(a) Húzzuk be az $AC$ átlót és alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételének megfordítását.

(b) $HG = 7{,}5$ cm, $EF = 22{,}5$ cm.




**30. Feladat.** Egy háromszög oldalainak hossza 10 cm, 12 cm és 14 cm. Határozzuk meg, mekkora szakaszokra osztja a háromszög legnagyobb szögének szögfelezője a szemközti oldalt.

**Megoldás.** Alkalmazzuk a szögfelezőtételt. A keresett szakaszok hossza $\frac{140}{22}$ és $\frac{168}{22}$ cm.

**31. Feladat.** Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 3 : 4, átfogója 15 dm. Határozzuk meg az átfogón a magasságtalppont által levágott szeletek hosszát.

**Megoldás.** Befogótételt alkalmazása után kapjuk, hogy a szeletek hossza 5,4 és 9,6 cm.

**32. Feladat.** Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának hossza 12 cm, egy másik magasságának hossza 1,5 dm. Határozzuk meg a háromszög hiányzó oldalainak hosszát, a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek a hosszát, valamint a háromszög beírt és köré írt köre sugarainak a hosszát.

**Megoldás.** Használjuk a magasság- és a befogótételt. A befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek hossza 9 cm és 16 cm, így az átfogó hossza 25 cm, a köré írt kör sugara 12,5 cm, a háromszög hiányzó oldala 20 cm, a beírt kör sugara pedig 5 cm.

**33. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy derékszögű háromszög befogóira írt négyzetek területeinek aránya megegyezik a befogók átfogóra eső merőleges vetületei hosszának arányával.

**Megoldás.** Használjuk a magasság- és a befogótételt.

**34. Feladat.** Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 1 : 3. A befogók átfogóra eső merőleges vetületei hosszának különbsége 4 cm. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát, a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek a hosszát, az átfogóhoz tartozó magasság hosszát, valamint a háromszög beírt és köré írt köre sugarainak a hosszát.

**Megoldás.** A befogók hossza $\sqrt{2{,}5}$ és $3 \cdot \sqrt{2{,}5}$ cm, az átfogó hossza 5 cm, az átfogóhoz tartozó magasság hossza 1,5 cm. A befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek hossza 0,5 és 4,5 cm. A köré írt kör sugara 2,5 cm, a beírt kör sugara pedig $r \approx 0{,}662$ cm.

**35. Feladat.** Igazoljuk, hogy a szögek páronkénti egyenlősége nem elegendő két négyszög hasonlóságához.

**Megoldás.** Gondoljunk a négyzetre, és egy olyan téglalapra, amelyik nem négyzet.

**36. Feladat.** Mekkora az oldalak aránya abban a téglalapban, melyet az egyik középvonala az eredetivel hasonló téglalapokra vág szét?

**Megoldás.** $\sqrt{2}$

**37. Feladat.** Két hasonló négyszög közül az egyik oldalainak hossza rendre 4, 3, 5, 6. Határozzuk meg a hozzá hasonló négyszög oldalainak hosszát, ha

(a) ezen négyszög leghosszabb oldala 18;

(b) ezen négyszög leghosszabb és legrövidebb oldala hosszának különbsége 6;

(c) ezen négyszög területe kilencszer akkora, mint az eredi négyszögé.

**Megoldás.**

(a) 12, 9, 15, 18 (b) 8, 6, 10, 12 (c) 12, 9, 15, 18.

**38. Feladat.** Egy 100 cm$^2$ alapterületű, 40 cm magas szabályos négyoldalú gúlát az alaplapjával párhuzamos síkokkal három egyenlő térfogatú részre vágtunk. Határozzuk meg a keletkező síkmetszetek területét, valamint a gúla (alaplapra nem illeszkedő) csúcsától való távolságukat.

**Megoldás.**

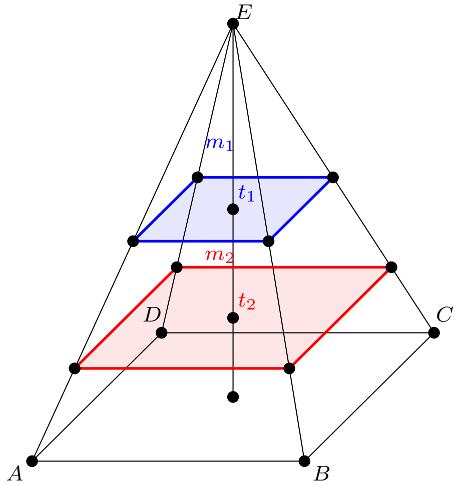
A hasonló testek térfogatára, és a hasonló síkidomok területére vonatkozó összefüggések alapján

$$t_1 = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2 \cdot 100,$$

$$t_2 = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^2 \cdot 100,$$

illetve

$$m_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot 4 \quad \text{és} \quad m_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot 40.$$




# Pithagorasz-tétel

**39. Feladat.** Egy derékszögű háromszög egyik szöge 30°. A háromszög leghosszabb oldalának hossza $a$. Fejezzük ki $a$ segítségével a többi oldal hosszát.

**Megoldás.** A legrövidebb oldal $\frac{a}{2}$ és a másik $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ hosszú.

**40. Feladat.** Milyen távol van egy 10 cm sugarú kör középpontjától annak

(a) 6 cm, (b) 20 cm, (c) 22 cm

hosszúságú húrja?

**Megoldás.**

(a) 4 cm (b) 0 cm (c) Nincs ilyen húr.

**41. Feladat.** Mekkora annak a körnek a sugara amelyben egymástól 11 cm távolságban két párhuzamos, 24 cm és 20 cm hosszú húr húzható?

**Megoldás.** $r = 12{,}5$ cm.

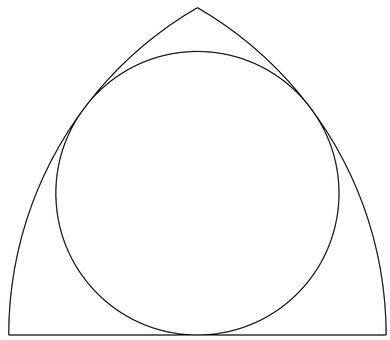
**42. Feladat.** Egy 19,5 cm és egy 22,5 cm sugarú, egymást metsző kör közös húrja 36 cm hosszúságú. Milyen messze vannak egymástól a körök középpontjai?

**Megoldás.** 21 cm

**43. Feladat.** Egy háromszög oldalainak hossza rendre 26 m, 40 m és 42 m. Határozzuk meg a háromszög magasságainak hosszát.

**Megoldás.** Legrövidebbtől a leghosszabbig: 24, 25,2 és $\frac{504}{13}$ méter.

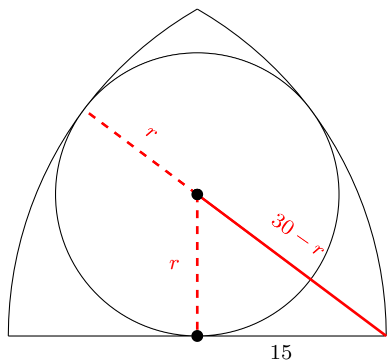
**44. Feladat.** Határozzuk meg a jobb oldali ábrán látható kör sugarának hosszát, ha a kört két 30 cm sugarú körív határolja.



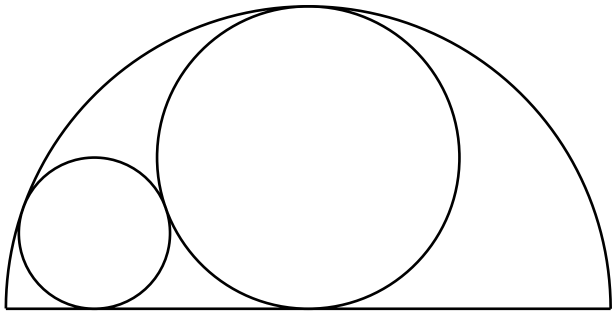
**Megoldás.**

Tekintsük az jobb oldali ábrát és használjuk a Pitagorasz-tételt:

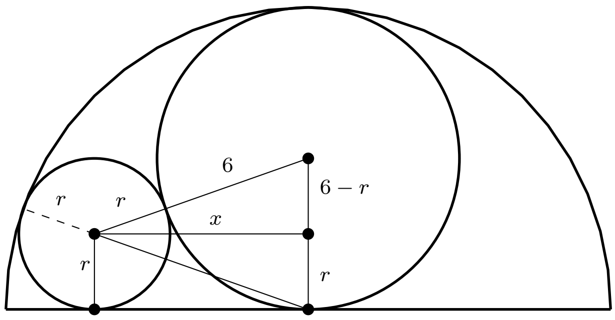
$$r = \frac{45}{4} \text{ cm.}$$



**45.* Feladat.** Határozzuk meg az alábbi ábrán látható legkisebb kör sugarának hosszát, ha a félkör átmérője 24 cm.



**Megoldás.** Tekintsük az alábbi ábrát.




A megfelelő derékszögű háromszögekből az $x^2 + r^2 = (12 - r)^2$ és $x^2 + (6 - r)^2 = (6 + r)^2$ egyenletek írhatók fel. Ezek megoldása után $r = 3$ cm adódik.

**46. Feladat.** Egy egyenlő szárú háromszög alapja, és a hozzá tartozó magasság is 18 mm hosszúságú. Határozzuk meg a köré írt kör sugarának a hosszát.

**Megoldás.** $R = 11{,}25$ cm

## Vektorok

**47. Feladat.** Igazoljuk, hogy egy $ABCD$ paralelogramma esetén teljesülnek a következő összefüggések.

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$

(b) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$

(c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

(d) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

**Megoldás.**

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$
A többi esetben a fentihez hasonló egyszerű számolás adja az összefüggéseket.

**48. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha két vektor hossza megegyezik, akkor az összegük és a különbségük merőleges egymásra.

**Megoldás.** Tekintsük az összeg és a különbség skaláris szorzatát. Ekkor

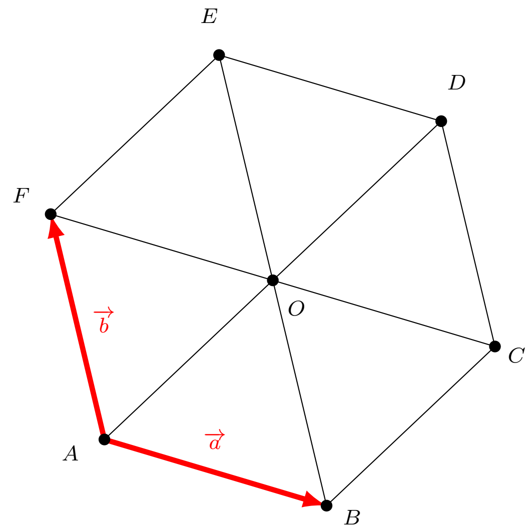
$$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=(\overrightarrow{a})^2-\left(\overrightarrow{b}\right)^2=|\overrightarrow{a}|^2-\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0.$$

Mivel két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0, ebből következik, hogy a megfelelő két vektor merőleges egymásra.

**49. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha két vektor összege és különbsége merőleges egymásra, akkor a két vektor hossza megegyezik.

**Megoldás.** Az előző feladat megoldásából egyszerűen adódik az állítás helyessége.

**50. Feladat.** Az ábrán látható szabályos hatszög egyik csúcsából indított $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok segítségével (az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként) fejezzük ki a következő vektorokat.




(a) $\overrightarrow{BC}$
(b) $\overrightarrow{DE}$
(c) $\overrightarrow{OB}$
(d) $\overrightarrow{AC}$
(e) $\overrightarrow{FD}$
(f) $\overrightarrow{BE}$
(g) $\overrightarrow{AE}$
(h) $\overrightarrow{EE}$

Adjuk meg az alábbi vektorokat úgy, hogy kezdő- és végpontjuk is a hatszög egyik csúcsa, vagy a középpontja legyen.

(i) $2\overrightarrow{b}$
(ii) $-\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$
(iii) $\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{a}$
(iv) $2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$

Határozzuk meg az $F$ végpontú vektor $X$ kezdőpontját, ha

(A) $\overrightarrow{XF}=-\overrightarrow{b}$
(B) $\overrightarrow{XF}=-\overrightarrow{a}$
(C) $\overrightarrow{XF}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$
(D) $\overrightarrow{XF}=-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$

**Megoldás.**

(a) $\overrightarrow{b}$ (c) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ (e) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (g) $2 \cdot \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$

(b) $-\overrightarrow{a}$ (d) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ (f) $2 \cdot \overrightarrow{b} - 2 \cdot \overrightarrow{a}$ (h) $0 \cdot \overrightarrow{a} + 0 \cdot \overrightarrow{b}$

(i) $\overrightarrow{AD}$ (ii) $\overrightarrow{CA}$ (iii) $\overrightarrow{BF}$ (iv) $\overrightarrow{AE}$

(A) $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{b}$ (B) $\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{a}$ (C) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ (D) $\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

**51. Feladat.** Igazoljuk, hogy a sík bármely, tetszőlegesen választott $O$ vonatkoztatási pontja esetén, bármely $ABC$ háromszögre

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OS},$$

ahol $S$ a háromszög súlypontja.

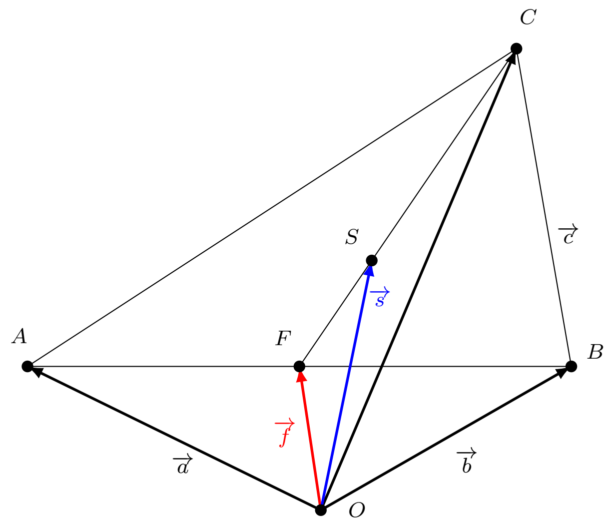
**Megoldás.**

Használjuk az ábra jelöléseit. Ekkor

$$\overrightarrow{f} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{s} = \frac{2 \cdot \overrightarrow{f} + \overrightarrow{c}}{3} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3},$$

ahonnan beszorzással adódik a bizonyítandó állítás.




**52. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely $ABC$ háromszögre

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{0},$$

ahol $S$ a háromszög súlypontja.

**Megoldás.** Éljünk az $S = O$ választással, és tekintsük az előző feladat állítását, megoldását.

**53. Feladat.** Igazoljuk, hogy az $ABC$ háromszög csúcsaiba mutató, tetszőleges $O$ pontból indított helyvektorok összege megegyezik az $O$ pontból indított, a háromszög oldalfelező pontjaiba mutató helyvektorok összegével.

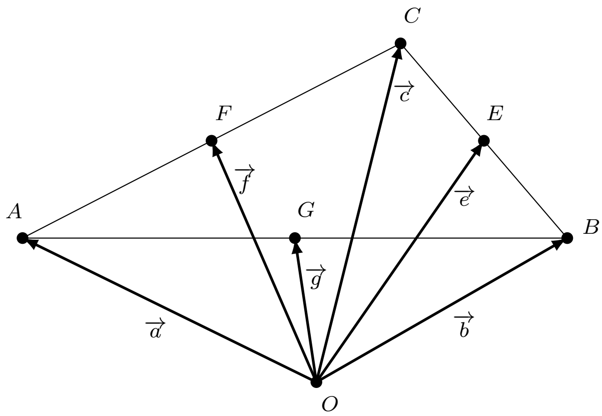
**Megoldás.**

Használjuk az ábra jelöléseit:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \vec{f} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \quad \vec{g} = \frac{\vec{c} + \vec{b}}{2}.$$

Így

$$\vec{e} + \vec{f} + \vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{b}}{2}$$
$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

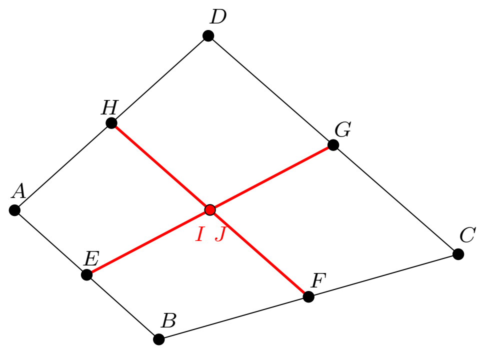



**54. Feladat.** Az $ABC$ háromszög csúcsaiba mutató, tetszőleges $O$ pontból indított helyvektorok legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Fejezzük ki az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok segítségével a háromszög $AC$ és $BC$ oldalainak a felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjába mutató helyvektort.

**Megoldás.** $\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}}{4}$

**55. Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges négyszög középvonalai felezve metszik egymást.

**Megoldás.** Tekintsük a következő ábrát.




Az $EG$ középvonal $I$ felezőpontjára egy tetszőleges $O$ vonatkoztatási pontból indított helyvektorokkal felírható, hogy

$$\vec{i} = \frac{\vec{e} + \vec{g}}{2} = \frac{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4},$$

a $HF$ középvonal $J$ felezőpontjára pedig

$$\vec{j} = \frac{\vec{h} + \vec{f}}{2} = \frac{\frac{\vec{a} + \vec{d}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}.$$

Ebből következik, hogy $I = J$, tehát a középvonalak a felezőpontjaikban metszik egymást.

**56. Feladat.** Legyen $ABCD$ és $EFGH$ két négyszög a síkon. Igazoljuk, hogy

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DF}.$$

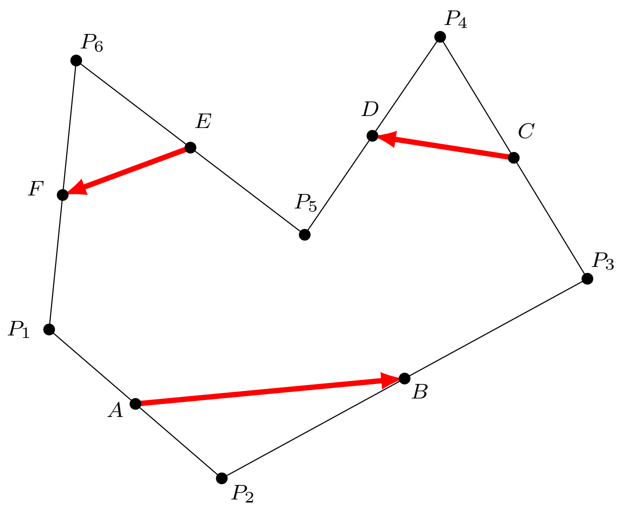
**Megoldás.** Fejezünk ki minden vektort egy tetszőleges $O$ pontból indított helyvektorok segítségével. Így egyszerűen látható lesz a két oldal egyenlősége.

**57. Feladat.** Legyenek egy hatszög oldalfelezési pontjai valamilyen körüljárás szerint $A; B; C; D; E; F$. Igazoljuk, hogy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{0}$.

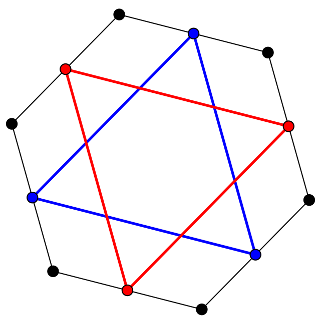
**Megoldás.** Fejezzünk ki minden vektort a hatszög csúcsaiba mutató helyvektorok segítségével. Ekkor

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}=\frac{\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}}{2}-\frac{\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}}{2}.$$

A másik két vektort is hasonlóan felírva, majd ezeket összeadva adódik a bizonyítandó egyenlőség.




**58. Feladat.** Kössük össze egy szabályos hatszög minden második oldalfelező pontját mindkét lehetséges módon. Igazoljuk, hogy az így kapott két háromszög súlypontjai megegyeznek.



**Megoldás.** Fejezünk ki minden vektort egy tetszőleges $O$ pontból indított helyvektorok segítségével. Így egyszerűen látható lesz a két oldal egyenlősége.

# 7 | Szögfüggvények

## Szögfüggvények geometriai alkalmazásai

### A szinusztétel alkalmazásai

**1. Feladat.** Egy háromszög kerülete 90 cm, belső szögeinek aránya 2 : 3 : 4. Mekkorák a háromszög oldalai?

**2. Feladat.** Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel élve $a + b = 12$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 80°$. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát, területét, a köré írt, valamint a beírt körének sugarának hosszát.

**3. Feladat.** Egy háromszög területe 100 cm$^2$. Két szögének nagysága 60,43° és 57,12°. Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát.

**4. Feladat.** Egy szimmetrikus trapéz átlója 20 cm hosszúságú. Az átló a trapéz hegyesszögét $25°11'$ és $32°47'$ nagyságú részekre osztja, melyek közül a nagyobbik szög illeszkedik a trapéz szárára. Számítsuk ki a trapéz oldalainak a hosszát.

**5. Feladat.** Egy szimmetrikus trapéz átlója 10,2 dm, rövidebb alapja 6,1 dm hosszúságú. A trapéz egyik szöge $72°40'$. Számítsuk ki a trapéz ismeretlen oldalainak a hosszát és a trapéz területét.

**6. Feladat.** Egy háromszög egyik szögének nagysága 80°. A szöghöz tartozó csúcsból induló magasság hossza 8 cm, az ebből a csúcsból induló szögfelező háromszögbe eső darabjának hossza 10 cm. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát, hiányzó szögeinek nagyságát, a háromszög területét, valamint a beírt és a köré írt kör sugarának hosszát.

**7. Feladat.** Egy egyenes országútból 28°-os szögben egy egyenes út ágazik el. Ezen úton két épület áll. Az országúton az elágazástól 800 m-t tovább haladva az országúton, az épületek felé mutató irányok 100°-os, illetve 70°-os szöget zárnak be a haladás irányával. Mekkora távolságra fekszik egymástól a két épület?

**8.* Feladat.** A folyó egyik partján állva szeretnénk megmérni a folyón lévő szigeten egy $A$ pontban elhelyezkedő épület, és a folyó túlpartján egy $B$ pontban álló fa távolságát. Ehhez a folyó innenső partján az $AB$ egyenes mentén felveszünk egy $C$ pontot, illetve ebből a pontból kiindulva felvesszük a 400 m hosszú $CD$ szakaszt. Megmérve néhány szöget, a következőket tapasztaljuk: $ACD\measuredangle = 73,4°$; $ADC\measuredangle = 40°23'$; $ADB\measuredangle = 29°30'47''$. Mekkora az épület és a fa távolsága?

**9. Feladat.** Az $A$ épület egy útkereszteződéstől északra, 3600 m-re fekszik, míg a $B$ épület nyugatra van, 4800 m-re. A $C$ épületbe $A$-ból olyan egyenes út vezet amely az északi iránytól balra tér el $80,6°$-os szögben, míg $B$-ből $C$-be a nyugati iránytól jobbra, $74,64°$-os szögben eltérő úton lehet eljutni. Milyen messze van $C$ $A$-tól, illetve $B$-től?

**10. Feladat.** Egy megközelíthetetlen terepen álló antenna magasságát szeretnénk megmérni. Ehhez felveszünk a síkon egy $AB = 150$ m-es szakaszt. Az antenna csúcsát $C$-vel, talppontját $D$-vel jelölve a következő szögeket mérjük $BAD\measuredangle = 55,47°$; $ABD\measuredangle = 70°40'$; $CAD\measuredangle = 47°27'$. Határozzuk meg az antenna magasságát.

## A koszinusztétel alkalmazásai

**11. Feladat.** Egy háromszög két oldalának hossza 10 dm és 16 dm, a háromszög területe 4800 cm$^2$. Határozzuk meg a hiányzó oldal hosszát.

**12. Feladat.** Egy paralelogramma területe 114,4 m$^2$, egyik oldala 71 dm, egyik szöge 147,7°. Határozzuk meg a hiányzó oldal és a hosszabbik átló hosszát.

**13. Feladat.** Egy repülőgép először északnak repül két órán keresztül 200 km/h-s sebességgel, majd kelet-északkeletnek fordul és három és fél órán át 260 km/h-s sebességgel repül. Milyen távol van ekkor a kiindulási pontjától?

**14. Feladat.** Milyen hosszúak az óramutatók, ha végpontjaik távolsága 10 órakor 26 cm, 3 órakor pedig 34 cm?

**15. Feladat.** Igazoljuk, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével.

**16. Feladat.** Egy paralelogramma két oldalának hossza 2 dm és 3,5 dm. Az átlói hosszának különbsége 10 cm. Határozzuk meg az átlók hosszát.

**17.* Feladat.** Fejezzük ki a háromszög súlyvonalainak hosszát az oldalhosszainak segítségével.

**18. Feladat.** Egy háromszög oldalainak hossza 2,6 m, 2,4 m, illetve 3 m. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti a háromszög két rövidebb oldalát, középpontja pedig a háromszög leghosszabb oldalán van?

**19. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel élve $c\cdot\cos\alpha = a\cdot\cos\gamma$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

**20. Feladat.** Igazoljuk, hogy a szokásos jelölésekkel élve, bármely háromszögben

$$c \cdot \cos\alpha - a \cdot \cos\gamma = \frac{c^2 - a^2}{b}.$$

**21. Feladat.** Egy háromszög területe 265 cm$^2$, köré írt körének sugara 16 cm, egyik szöge $72°43'$. Határozzuk meg a hiányzó oldalak hosszát.

**22.* Feladat.** Igazoljuk, hogy a szokásos jelölésekkel élve, bármely háromszögben

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot t},$$

ahol $t$ a háromszög területét jelöli.

# Trigonometrikus függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

**Elméleti kiegészítés.** Addíciós tételeknek, vagy összegzési képleteknek az alábbi trigonometrikus összefüggéseket nevezzük.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Ezek leggyakrabban használt speciális esetei az ún. kétszeres szögek szögfüggvényei:

$$\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

**23. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját, és jellemezzük (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás, paritás, periodicitás szempontjából) a függvényeket.

(a) $f(x) = 2\sin x\cos x$

(b) $g(x) = |\sin(-x)|$

(c) $h(x) = \sin(x) - \sin(-x)$

(d) $i(x) = \cos x + |\cos x|$

(e) $j(x) = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$

(f) $k(x) = \dfrac{\sin x}{|\cos x|}$

(g) $l(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x$

(h) $m(x) = \sin x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(i) $n(x) = 2\cdot\cos(2x) - 2$

(j) $o(x) = 2 - 2\cdot\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

**24. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$

(b) $2\cos^2(2x) = \dfrac{3}{2}$

(c) $\left|\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right| = \sqrt{3}$

(d) $1 - \sin(4x - \pi) = 0$

(e) $\operatorname{ctg}\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0{,}45$

(f) $3\sin^2(7x - \pi) = \dfrac{23}{3}$

**25. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $\sin x = \sin(2x)$

(b) $\sin(x+\pi) - \sin(3x) = 0$

(c) $\sin(4x+\pi) = -\sin(5x)$

(d) $\sin(2x-\pi) + \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$

(e) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

(f) $-\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$

(g) $\cos(3x) - \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$

(h) $\cos(10x) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

(i) $\cos(\pi - x) = -\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)$

(j) $\sin x + \cos x = 0$

(k) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

(l) $\sin x = 2\cdot \operatorname{tg} x$

(m) $\dfrac{\sin(2x)}{\operatorname{tg}(2x)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(n) $\operatorname{ctg} x = \cos x$

**26. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $2\cdot\cos^2 x + 2 = 5\cos x$

(b) $4\cdot\cos^2 x + 2\cos x = 1$

(c) $5\cdot\sin^2 x - 1 = 3\sin x$

(d) $\cos x = \cos(2x)$

(e) $\cos x = 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$

(g) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2\cdot\sqrt{3}$

(h) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$

(i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 0{,}5$

(j) $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$

(k) $\dfrac{\sin x}{\operatorname{ctg} x} = \dfrac{3}{2}$

(l) $1{,}5\cdot\operatorname{tg} x = \cos x$

**27. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $\dfrac{\sin x}{1-\sin(2x)} = 0$

(b) $\cos x\cdot\operatorname{tg} x = 0$

(c) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin(2x)} = 0$

(d) $x^2 - \sin x = -1$

(e) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{3}{2}\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - \frac{1}{2}$

(f) $3\cdot\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{5}{\sin x}$

(g) $\operatorname{tg}^2 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$

**28. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $\sin(2x) = \sin x$

(b) $\cos x\cdot\operatorname{ctg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

(c) $16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3 = 0$

(d) $\sin^2 x - 0{,}75 = |\cos x|$

(e) $\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x = 2\cdot\cos^2 x$

(f) $\sin^4 x = 0{,}625 - \cos^4 x$

(g) $\operatorname{tg} x + \cos x = 1 + \sin x$

**29.* Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $\sin x + \cos x = 1$

(b) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

(c) $3\sin x - 4\cos x = 2$

(d) $4\sin x + 3\cos x = 6$

(e) $2\cos x = 2(1 - \sin x)$

**30. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenlőtlenségeket.

(a) $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$

(b) $\cos(2x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\operatorname{tg} x - 1 > 0$

(d) $\operatorname{ctg}^2(3x) \geq 3$

(e) $\sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) \leq -1$

(f) $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 > 0$

(g) $\sin^2(x - \pi) < \dfrac{1}{2}$

(h) $\sin^2 x \leq \sin x$

(i) $\cos^2 x > 2\cos x$

(j) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \geq 0$

(k) $2\cos^2 x - 3\cos x < -1$

(l) $8\sin^4 x - 1 \geq 2\cos^2 x$

(m) $8\cos^4 x - 1 < 5 - 2\sin^2 x$

**31.* Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenlőtlenségeket.

(a) $\dfrac{\sin x}{3 + \cos x} \leq 0$

(b) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} \leq 0$

(c) $\dfrac{\cos x}{\sin x - 2} > 0$

(d) $\dfrac{\cos x}{\sin x - 1} > 0$

(e) $\dfrac{\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}} \geq 0$

(f) $\dfrac{\sin x}{1 + \sin(2x)} \leq 0$

(g) $\sin x \cdot \cos x > 0$

(h) $\cos x \cdot \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \leq 0$

(i) $\sin x \cdot (1 + \sin(2x)) \leq 0$

(j) $\operatorname{tg} x > \dfrac{1}{\cos x}$

(k) $\operatorname{tg} x \geq \dfrac{1}{2\cos x}$

(l) $\operatorname{tg} x < \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos x}$

(m) $(\cos x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 2) < 0$

(n) $(2 - x^2 + x) \cdot (\sin x + 1) \geq 0$

**32. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát.

(a) $\sqrt{\sin x}$

(b) $\sqrt[4]{1 - \sin x}$

(c) $\sqrt{1 + \cos x}$

(d) $\sqrt{\cos(2x) - 1}$

(e) $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}$

(f) $\sqrt{\cos^2 x - 0{,}5}$

(g) $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)}$

(h) $\sqrt{\operatorname{tg}\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)}$

(i) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)}}$

(j) $\sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)}}$

**33. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenletrendszereket.

(a)

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos(x-y) & = & 0 \\ \cos(x+y) & = & 0 \end{array}\right\}$$

(b)

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos x \cdot \sin y & = & 0 \\ \cos(x+y) & = & 0 \end{array}\right\}$$

(c)

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos^2 x + \sin^2 y & = & \frac{3}{2} \\ \sin^2 x - \cos^2 y & = & \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

(d)

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & \frac{\pi}{3} \\ \sin x - \cos y & = & 0 \end{array}\right\}$$

(e)

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos^2 x & = & \cos y \\ \sin^2 x & = & \sin y \end{array}\right\}$$

# Megoldások

## Szögfüggvények geometriai alkalmazásai

### A szinusztétel alkalmazásai

**1. Feladat.** Egy háromszög kerülete 90 cm, belső szögeinek aránya 2 : 3 : 4. Mekkorák a háromszög oldalai?

**Megoldás.** Használjuk a szinusztételt az oldalhosszak arányának meghatározására. Az oldalak hossza közelítőleg 23,2 cm, 31,26 cm és 35,54 cm.

**2. Feladat.** Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel élve $a + b = 12$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 80°$. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát, területét, a köré írt, valamint a beírt körének sugarának hosszát.

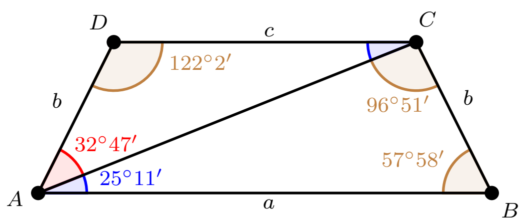
**Megoldás.** A köré írt kör sugarának meghatározására használjuk a szokásos jelölésekkel élve $a = 2R \cdot \sin\alpha$ alakban felírható összefüggéseket, a beírt kör sugarának kiszámításához pedig a $t = r \cdot s$ összefüggést, ahol $s$ a háromszög félkerületét jelöli. A háromszög oldalai $a \approx 5{,}015$ cm, $b \approx 6,985$ cm és $c \approx 5{,}81$ cm. A háromszög területe $t \approx 14,348$ cm$^2$. Beírt körének sugara $r \approx 1,611$ cm, a köré írt kör sugarának hossza $R \approx 3{,}546$ cm.

**3. Feladat.** Egy háromszög területe 100 cm$^2$. Két szögének nagysága 60,43° és 57,12°. Határozzuk meg a háromszög oldalainak a hosszát.

**Megoldás.** Az oldalak hossza közelítőleg 15,285 cm, 14,758 cm és 15,581 cm.

**4. Feladat.** Egy szimmetrikus trapéz átlója 20 cm hosszúságú. Az átló a trapéz hegyesszögét $25°11'$ és $32°47'$ nagyságú részekre osztja, melyek közül a nagyobbik szög illeszkedik a trapéz szárára. Számítsuk ki a trapéz oldalainak a hosszát.

**Megoldás.**



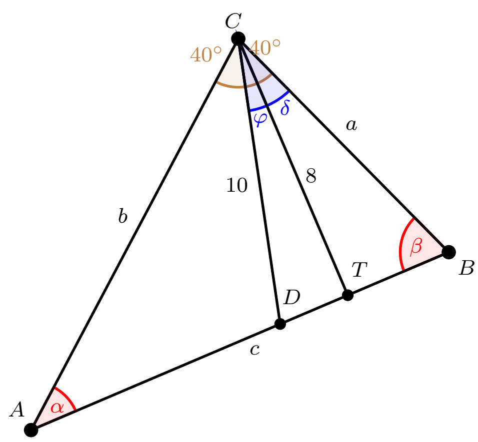
Az ábrán jelölt szögek egyszerűen kiszámolhatók, majd az $ABC$ háromszögre felírt szinusztételek segítségéve a trapéz szárainak, illetve rövidebb alapjának hossza meghatározható, míg az $ADC$ háromszögre felírt szinusztételből a rövidebb alap hossza számolható. A trapéz szárai 10,04 cm hosszúságúak, az alapjai hossza pedig 23,42 és 12,77 cm.

**5. Feladat.** Egy szimmetrikus trapéz átlója 10,2 dm, rövidebb alapja 6,1 dm hosszúságú. A trapéz egyik szöge $72°40'$. Számítsuk ki a trapéz ismeretlen oldalainak a hosszát és a trapéz területét.

**Megoldás.** A trapéz szárai 6,56 dm hosszúságúak, a hosszabbik alapja pedig 10,01 dm. A trapéz területe $t \approx 50{,}41\ \mathrm{dm}^2$.

**6. Feladat.** Egy háromszög egyik szögének nagysága 80°. A szöghöz tartozó csúcsból induló magasság hossza 8 cm, az ebből a csúcsból induló szögfelező háromszögbe eső darabjának hossza 10 cm. Határozzuk meg a háromszög oldalainak hosszát, hiányzó szögeinek nagyságát, a háromszög területét, valamint a beírt és a köré írt kör sugarának hosszát.

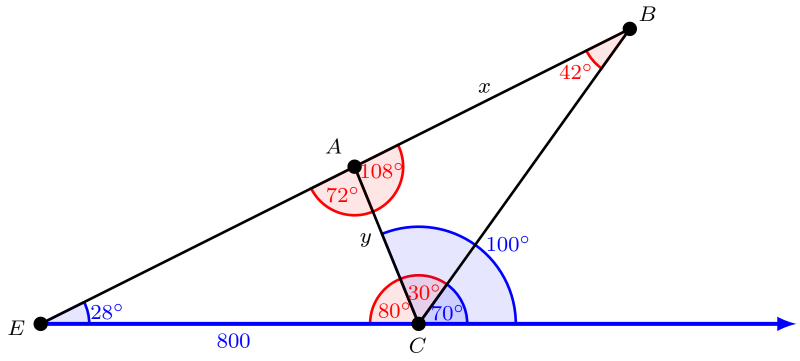
**Megoldás.**




Az ábra jelöléseit használva a $DTC$ háromszögben $\frac{8}{10} = \cos\varphi$, ahonnan $\varphi \approx 36{,}87°$. Ekkor $\delta = 40° - \varphi \approx 3{,}13°$, illetve $\beta \approx 86{,}87°$, $\alpha \approx 13{,}13°$. Ezzel a háromszög szögeinek nagyságát meghatároztuk. Ekkor, a $CTB$ derékszögű háromszögből $\frac{8}{a} = \sin\beta$, ahonnan $a \approx 8{,}01$ cm, majd például a szinusztételből meghatározható a további oldalak hossza, $b \approx 35{,}22$ cm, $c \approx 34{,}73$ cm. Innen az ismert képletek segítségével $t \approx 138{,}89\ \mathrm{cm}^2$, $R \approx 17{,}63$ cm, $r \approx 3{,}56$ cm.

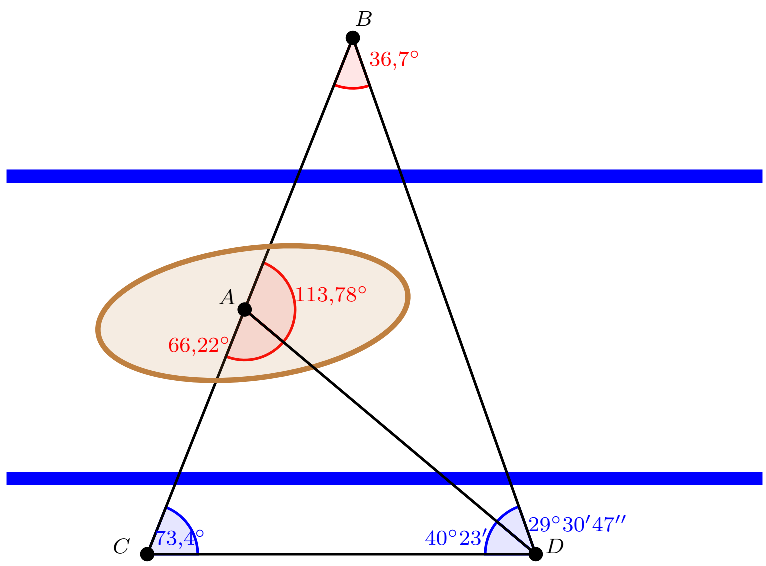
**7. Feladat.** Egy egyenes országútból 28°-os szögben egy egyenes út ágazik el. Ezen úton két épület áll. Az országúton az elágazástól 800 m-t tovább haladva az országúton, az épületek felé mutató irányok 100°-os, illetve 70°-os szöget zárnak be a haladás irányával. Mekkora távolságra fekszik egymástól a két épület?

**Megoldás.** Tekintsük az alábbi ábrát. Az ábrán szereplő szögek egyszerűen meghatározhatók. Ekkor az $ECA$ háromszögben egy szinusztételt felírva adódik az $y$-nal jelölt szakasz hossza, $y \approx 394{,}90$ m, majd az $ACB$ háromszögben felírt szinusztételből $x \approx 295{,}09$ m a két épület távolsága.




**8.* Feladat.** A folyó egyik partján állva szeretnénk megmérni a folyón lévő szigeten egy $A$ pontban elhelyezkedő épület, és a folyó túlpartján egy $B$ pontban álló fa távolságát. Ehhez a folyó innenső partján az $AB$ egyenes mentén felveszünk egy $C$ pontot, illetve ebből a pontból kiindulva felvesszük a 400 m hosszú $CD$ szakaszt. Megmérve néhány szöget, a következőket tapasztaljuk: $ACD\measuredangle = 73,4°$; $ADC\measuredangle = 40°23'$; $ADB\measuredangle = 29°30'47''$. Mekkora az épület és a fa távolsága?

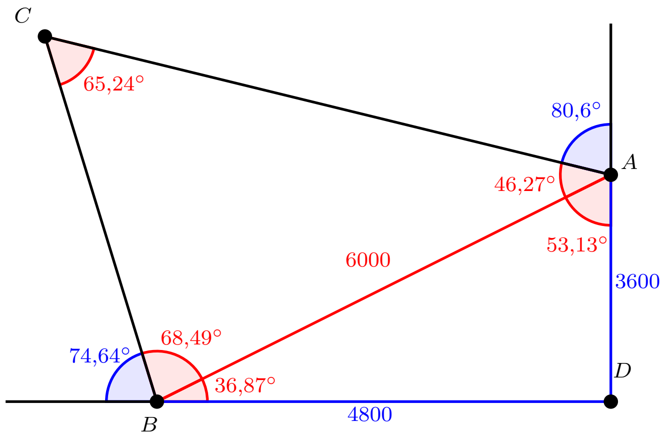
**Megoldás.**




Az ábrán jelölt szögek egyszerűen meghatározhatók. Ekkor az $ACD$ háromszögben szinusztételt felírva meghatározhatjuk az $AD$ szakasz hosszát, $AD \approx 418{,}99$ m, majd az $ADB$ háromszögben felírt szinusztételből az $AB$ szakasz hosszát, $AB \approx 345{,}29$ m, ennyi az épület és a fa távolsága.

**9. Feladat.** Az $A$ épület egy útkereszteződéstől északra, 3600 m-re fekszik, míg a $B$ épület nyugatra van, 4800 m-re. A $C$ épületbe $A$-ból olyan egyenes út vezet amely az északi iránytól balra tér el $80,6°$-os szögben, míg $B$-ből $C$-be a nyugati iránytól jobbra, $74,64°$-os szögben eltérő úton lehet eljutni. Milyen messze van $C$ $A$-tól, illetve $B$-től?

**Megoldás.** Tekintsük az alábbi ábrát. Az $AB$ szakasz hossza Pitagorasz tételéből $AB = 6000$ m. Az ábrán jelölt szögek egyszerűen meghatározhatók, elsőként az $ADB$ háromszögben felírt valamely szögfüggvény segítségével. A szögek ismeretében pedig az $ABC$ háromszögben felírt szinusztétel segítségével meghatározhatók a kérdéses távolságok $AC \approx 6147{,}24$ m, $CB \approx 4774{,}56$ m.




**10. Feladat.** Egy megközelíthetetlen terepen álló antenna magasságát szeretnénk megmérni. Ehhez felveszünk a síkon egy $AB = 150$ m-es szakaszt. Az antenna csúcsát $C$-vel, talppontját $D$-vel jelölve a következő szögeket mérjük $BAD\measuredangle = 55,47°$; $ABD\measuredangle = 70°40'$; $CAD\measuredangle = 47°27'$. Határozzuk meg az antenna magasságát.

**Megoldás.**

A megadott szögek alapján

$$ADB\sphericalangle = 53{,}86°,$$

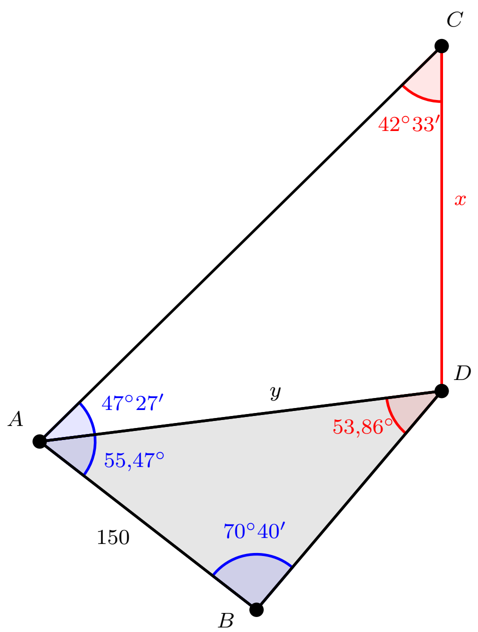
az $ADB$ háromszögben felírt szinusztétellel adódik, hogy

$$y \approx 175{,}27 \text{ m}.$$

Az $ADC$ derékszögű háromszögben felírt tangens szögfüggvényből

$$x \approx 190{,}9 \text{ m}$$

adódik.



## A koszinusztétel alkalmazásai

**11. Feladat.** Egy háromszög két oldalának hossza 10 dm és 16 dm, a háromszög területe 4800 $cm^2$. Határozzuk meg a hiányzó oldal hosszát.

**Megoldás.** Két megoldás van, $c_1 = 10$ dm, illetve $c_2 \approx 24{,}74$ dm.

**12. Feladat.** Egy paralelogramma területe 114,4 $m^2$, egyik oldala 71 dm, egyik szöge 147,7°. Határozzuk meg a hiányzó oldal és a hosszabbik átló hosszát.

**Megoldás.** A hiányzó oldal hossza $b \approx 30{,}15$ m, a hosszabbik átló hossza $x \approx 36{,}35$ m.

**13. Feladat.** Egy repülőgép először északnak repül két órán keresztül 200 km/h-s sebességgel, majd kelet-északkeletnek fordul és három és fél órán át 260 km/h-s sebességgel repül. Milyen távol van ekkor a kiindulási pontjától?

**Megoldás.** A távolság 1125,92 km.

**14. Feladat.** Milyen hosszúak az óramutatók, ha végpontjaik távolsága 10 órakor 26 cm, 3 órakor pedig 34 cm?

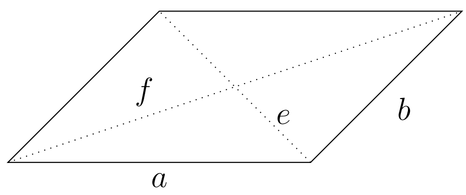
**Megoldás.** 30 cm és 16 cm

**15. Feladat.** Igazoljuk, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével.

**Megoldás.**

A jobb oldali ábra alapján, ha $\varphi$ jelöli a paralelogramma hegyesszögét, akkor

$$\begin{aligned} e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi \\ f^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \varphi) \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi, \end{aligned}$$




amiből

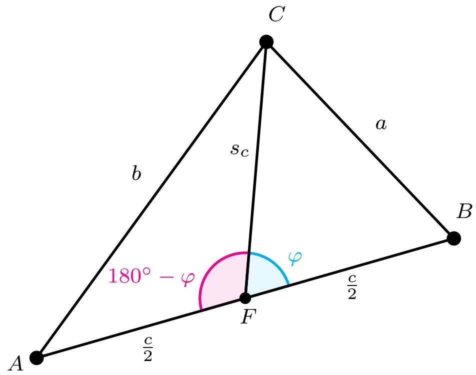
$$e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

**16. Feladat.** Egy paralelogramma két oldalának hossza 2 dm és 3,5 dm. Az átlói hosszának különbsége 10 cm. Határozzuk meg az átlók hosszát.

**Megoldás.** Akár koszinusztételt, akár az előző feladat eredményét használva az átlók hossza $3,5$ dm, illetve $4,5$ dm.

**17.* Feladat.** Fejezzük ki a háromszög súlyvonalainak hosszát az oldalhosszainak segítségével.

**Megoldás.** Az alábbi ábra jelöléseit használva, írjuk fel a koszinusztételt az $AFC$ és a $BFC$ háromszögekben, a $180° - \varphi$, illetve a $\varphi$ szögekre.




Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\cos(180° - \varphi) = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 - b^2}{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot s_c}, \quad \text{illetve} \quad \cos\varphi = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 - a^2}{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot s_c}.$$

Felhasználva, hogy $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$, a

$$\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 - b^2}{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot s_c} = -\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 - a^2}{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot s_c}$$

összefüggés adódik. Innen algebrai átalakítások segítségével kapjuk, hogy

$$s_c = \frac{\sqrt{2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 - c^2}}{2}.$$

**18. Feladat.** Egy háromszög oldalainak hossza 2,6 m, 2,4 m, illetve 3 m. Mekkora annak a körnek a sugara, amely érinti a háromszög két rövidebb oldalát, középpontja pedig a háromszög leghosszabb oldalán van?

**Megoldás.** Használjuk ki, hogy a kör középpontja rajta van a háromszög legnagyobb szögének szögfelezőjén, majd használjuk a szögfelezőtételt, valamint a koszinusztételt, kapjuk $r \approx 0{,}622$ m.

**19. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel élve $c \cdot \cos\alpha = a \cdot \cos\gamma$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

**Megoldás.** A feltétel és a koszinusztétel alapján

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

valamint

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

A két egyenletet kivonva egymásból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 &= c^2 - a^2 \\ (a-c)(a+c) &= (c-a)(c+a) \\ a - c &= c - a \\ a &= c. \end{aligned}$$

**20. Feladat.** Igazoljuk, hogy a szokásos jelölésekkel élve, bármely háromszögben

$$c \cdot \cos\alpha - a \cdot \cos\gamma = \frac{c^2 - a^2}{b}.$$

**Megoldás.** Mivel

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 - 2ba\cos\gamma \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \end{aligned}$$

ezért

$$c^2 - a^2 = a^2 - c^2 - 2ba\cos\gamma + 2bc\cos\alpha,$$

azaz

$$\frac{c^2 - a^2}{b} = c\cos\alpha - a\cos\gamma.$$

**21. Feladat.** Egy háromszög területe 265 $\mathrm{cm}^2$, köré írt körének sugara 16 cm, egyik szöge $72°43'$. Határozzuk meg a hiányzó oldalak hosszát.

**Megoldás.** Használjuk az $a = 2R\sin\alpha$ összefüggést, a $t = \dfrac{abc}{4R}$ területképletet, valamint a koszinusztételt. A háromszög oldalainak hossza 28,45 cm; illetve 18,8 cm és 31,7 cm.

**22.* Feladat.** Igazoljuk, hogy a szokásos jelölésekkel élve, bármely háromszögben

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot t},$$

ahol $t$ a háromszög területét jelöli.

**Megoldás.** Mivel

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2, \quad 2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \quad \text{és} \quad 2ab\cos\gamma = b^2 + a^2 - c^2,$$

ezért ezeket összeadva

$$2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta + 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 + c^2.$$

A kotangens definícióját használva

$$2bc\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha + 2ac\sin\beta\,\mathrm{ctg}\,\beta + 2ab\sin\gamma\,\mathrm{ctg}\,\gamma = a^2 + b^2 + c^2$$

adódik, amiből a $2t = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ac\sin\beta$ összefüggés alapján

$$4t(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma) = a^2 + b^2 + c^2$$

adódik, ami pontosan a bizonyítandó állítás.

## Trigonometrikus függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

**23. Feladat.** Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját, és jellemezzük (értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás, paritás, periodicitás szempontjából) a függvényeket.

(a) $f(x) = 2\sin x\cos x$

(b) $g(x) = |\sin(-x)|$

(c) $h(x) = \sin(x) - \sin(-x)$

(d) $i(x) = \cos x + |\cos x|$

(e) $j(x) = \dfrac{\cos x}{|\cos x|}$

(f) $k(x) = \dfrac{\sin x}{|\cos x|}$

(g) $l(x) = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x$

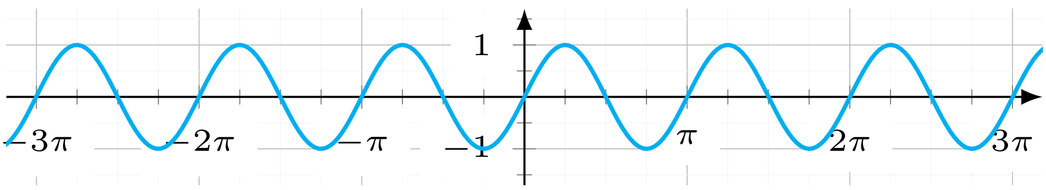
(h) $m(x) = \sin x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

(i) $n(x) = 2\cdot\cos(2x) - 2$

(j) $o(x) = 2 - 2\cdot\sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

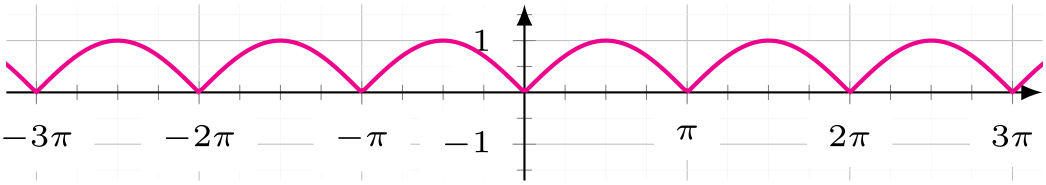
**Megoldás.**

(a)



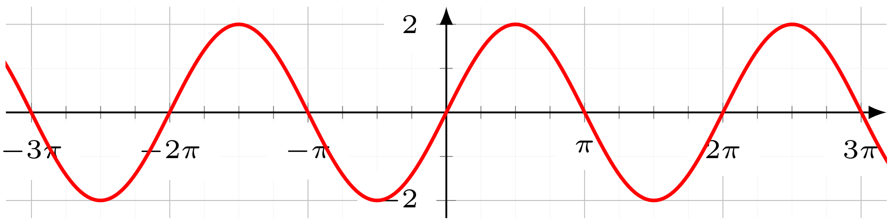
- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- Értékkészlet: $y \in [-1, 1]$.
- Zérushelyek: $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Max: 1, hely: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Min: $-1$, hely: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Paritás: páratlan.
- Periódus: $\pi$.

(b)



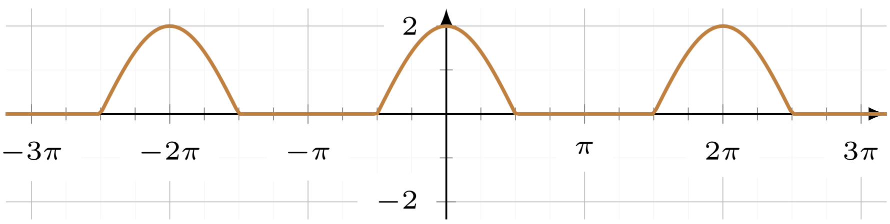

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- Értékkészlet: $y \in [0, 1]$.
- Zérushelyek: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Max: 1, hely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Min: 0, hely: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Paritás: páros.
- Periódus: $\pi$.

(c)



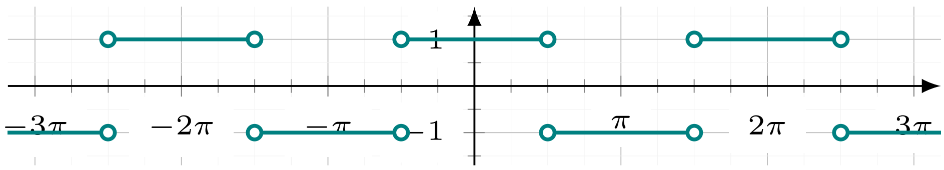

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- Értékkészlet: $y \in [-2, 2]$.
- Zérushelyek: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Max: 2, hely: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Min: $-2$, hely: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Paritás: páratlan.
- Periódus: $2\pi$.

(d)



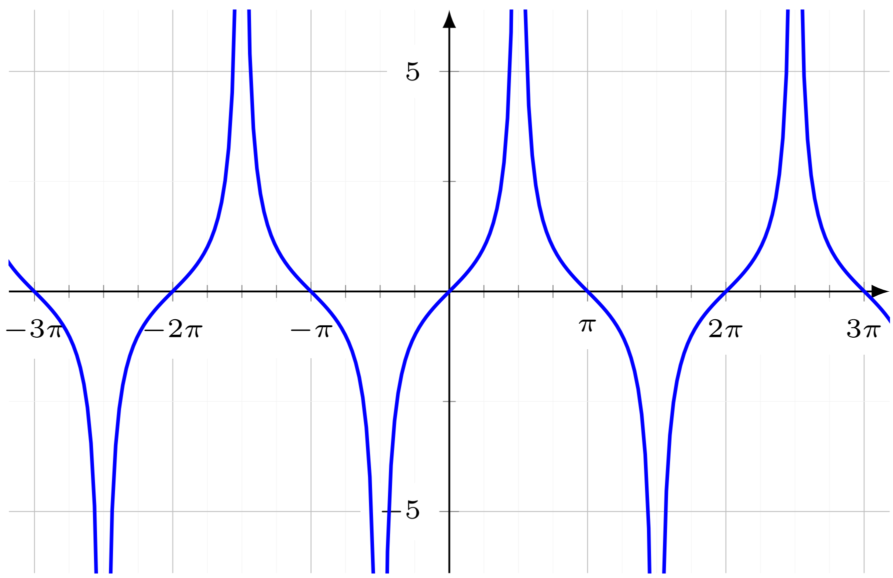
- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- Értékkészlet: $y \in [0, 2]$.
- Zérushelyek:
$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \ k \in \mathbb{Z}.$$
- Max: 2, hely: $x = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.
- Min: 0, hely:
$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \ k \in \mathbb{Z}.$$
- Paritás: páros.
- Periódus: $2\pi$.

(e)



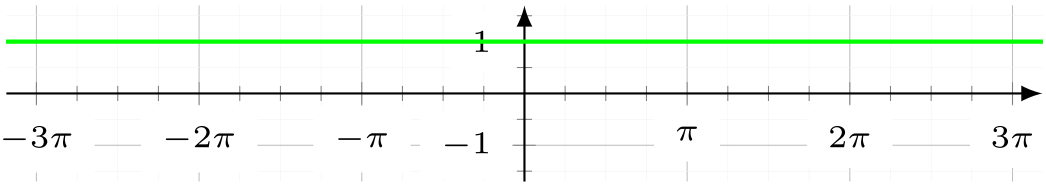

- Értelmezési tartomány: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.
- Értékkészlet: $y \in \{-1, 1\}$.
- Zérushely: nincs.
- Max: 1, hely:
$$x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}.$$
- Min: $-1$, hely:
$$x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[, \ k \in \mathbb{Z}.$$
- Paritás: páros.
- Periódus: $2\pi$.

(f)



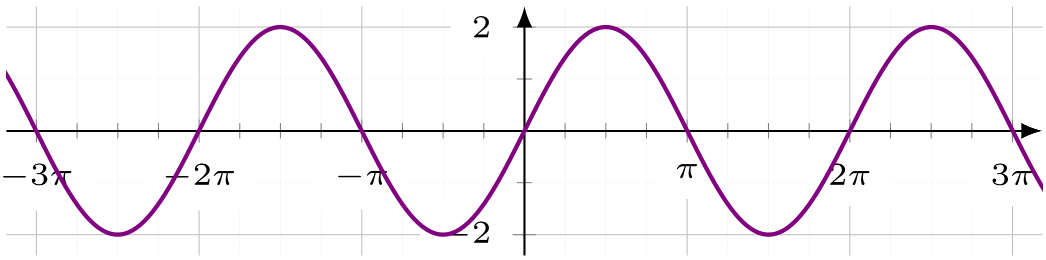

- Értelmezési tartomány:
$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$
- Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$.
- Zérushelyek: $x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$
- Max: nincs.
- Min: nincs.
- Paritás: páratlan.
- Periódus: $2\pi$.

(g)



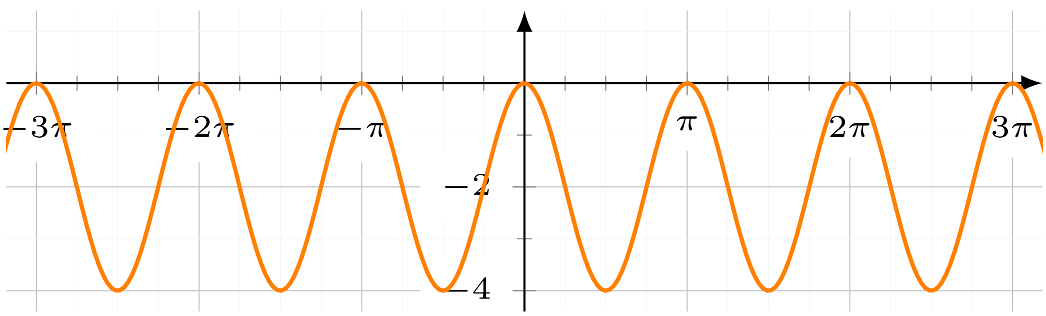

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- Értékkészlet: $y = 1$.
- Zérushely: nincs.
- Max: 1, hely: $x \in \mathbb{R}$.
- Min: 1, hely: $x \in \mathbb{R}$.
- Paritás: páros.
- Periódus: nincs.

(h)



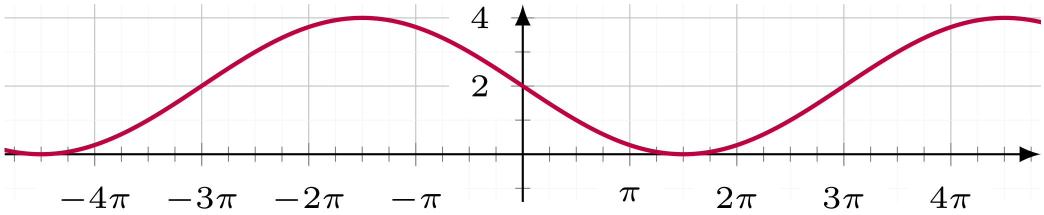

- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- Értékkészlet: $y \in [-1; 1]$.
- Zérushelyek: $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Max: 2, hely: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Min: $-2$, hely: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Paritás: páratlan.
- Periódus: $2\pi$.

(i)




- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- Értékkészlet: $y \in [-4; 0]$.
- Zérushelyek: $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Max: 2, hely: $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Min: $-2$, hely: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Paritás: páros.
- Periódus: $\pi$.

(j)




- Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.
- Értékkészlet: $y \in [0;4]$.
- Zérushelyek: $x = \frac{3\pi}{2} + 6k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Max: 4, hely: $x = -\frac{3\pi}{2} + 6k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Min: 0, hely: $x = \frac{3\pi}{2} + 6k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- Paritás: nincs.
- Periódus: $6\pi$.

**24. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $\sin x = \frac{1}{2}$

(b) $2\cos^2(2x) = \frac{3}{2}$

(c) $\left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right| = \sqrt{3}$

(d) $1 - \sin(4x - \pi) = 0$

(e) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}45$

(f) $3\sin^2(7x - \pi) = \frac{23}{3}$

**Megoldás.** A következő megoldásokban $k$ tetszőleges egész számot jelöl.

(a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

(b) $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$

(c) $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$ vagy $x = \frac{11\pi}{6} + k\pi$

(d) $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$

(e) $x = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{9}{20} + \frac{k\pi}{2}$

(f) Nincs megoldás.

**25. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $\sin x = \sin(2x)$

(b) $\sin(x+\pi) - \sin(3x) = 0$

(c) $\sin(4x+\pi) = -\sin(5x)$

(d) $\sin(2x-\pi) + \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$

(e) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

(f) $-\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$

(g) $\cos(3x) - \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = 0$

(h) $\cos(10x) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

(i) $\cos(\pi - x) = -\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)$

(j) $\sin x + \cos x = 0$

(k) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

(l) $\sin x = 2 \cdot \operatorname{tg} x$

(m) $\dfrac{\sin(2x)}{\operatorname{tg}(2x)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(n) $\operatorname{ctg} x = \cos x$

**Megoldás.** A következő megoldásokban $k$ tetszőleges egész számot jelöl.

(a) $x = k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(b) $x = \frac{k\pi}{2}$

(c) $x = 2k\pi, \quad x = \pm\frac{\pi}{9} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \pm\frac{5}{9} + 2k\pi$

(d) $x = -\frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{vagy} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(e) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{vagy} \quad x = \pi + 2k\pi$

(f) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{12} \quad \text{vagy} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + k\pi$

(g) $x = \frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{vagy} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

(h) $x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \quad \text{vagy} \quad x = -\frac{\pi}{72} + \frac{k\pi}{6}$

(i) $x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{vagy} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

(j) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

(k) $x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$

(l) $x = k\pi$

(m) $x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi$

(n) $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

**26. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $2 \cdot \cos^2 x + 2 = 5 \cos x$

(b) $4 \cdot \cos^2 x + 2 \cos x = 1$

(c) $5 \cdot \sin^2 x - 1 = 3 \sin x$

(d) $\cos x = \cos(2x)$

(e) $\cos x = 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(f) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$

(g) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2 \cdot \sqrt{3}$

(h) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$

(i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 0{,}5$

(j) $2 \cos^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$

(k) $\dfrac{\sin x}{\operatorname{ctg} x} = \dfrac{3}{2}$

(l) $1{,}5 \cdot \operatorname{tg} x = \cos x$

**Megoldás.** A következő megoldásokban $k$ tetszőleges egész számot jelöl.

(a) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

(b) $x \approx \pm 1{,}2567 + 2k\pi$ vagy $x \approx \pm 1{,}885 + 2k\pi$, vagy pontos értékkel kifejezve;
$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{4}\left(\pm\sqrt{5} - 1\right)\right) + 2k\pi$, illetve $x = \pm 72^\circ + k \cdot 360^\circ$ vagy $x = \pm 108^\circ + k \cdot 360^\circ$

(c) $x \approx 0{,}995 + 2k\pi$ vagy $x \approx -0{,}241 + 2k\pi$ vagy $x \approx 2{,}147 + 2k\pi$ vagy $x \approx 3{,}382 + 2k\pi$; vagy pontos értékkel kifejezve;

$$x = \arcsin\left(\frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}\right) + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \pi - \arcsin\left(\frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}\right) + 2k\pi$$

(d) $x = \dfrac{2k\pi}{3}$

(e) $x = 2k\pi, \quad x = -\dfrac{5\pi}{3} + 4k\pi \quad$ vagy $\quad x = -\dfrac{\pi}{3} + 4k\pi$

(f) $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

(g) $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$

(h) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

(i) Nincs megoldás.

(j) $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad$ vagy $\quad x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

(k) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

(l) $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \quad$ vagy $\quad x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

**27. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $\dfrac{\sin x}{1 - \sin(2x)} = 0$

(b) $\cos x \cdot \operatorname{tg} x = 0$

(c) $\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin(2x)} = 0$

(d) $x^2 - \sin x = -1$

(e) $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{3}{2}\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - \dfrac{1}{2}$

(f) $3 \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{5}{\sin x}$

(g) $\operatorname{tg}^2 x - 4 \cos^2 x + 1 = 0$

**Megoldás.** A következő megoldásokban $k$ tetszőleges egész számot jelöl.

(a) $x = k\pi$

(b) $x = k\pi$

(c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

(d) Nincs megoldás.

(e) $x \in \mathbb{R}$

(f) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(g) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

**28. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $\sin(2x) = \sin x$

(b) $\cos x \cdot \operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{6}$

(c) $16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3 = 0$

(d) $\sin^2 x - 0{,}75 = |\cos x|$

(e) $\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \cos^2 x$

(f) $\sin^4 x = 0{,}625 - \cos^4 x$

(g) $\operatorname{tg} x + \cos x = 1 + \sin x$

**Megoldás.** A következő megoldásokban $k$ tetszőleges egész számot jelöl.

(a) $x = k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

(c) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

(d) $x = \pm - 0{,}8897 + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \pm - 0{,}6811 + 2k\pi$ vagy pontos értékkel kifejezve;
$$x = \pm 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{-5 + 4\sqrt{2}}\right) + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \pm 2 \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5 + 4\sqrt{2}}{7}}\right) + 2k\pi$$

(e) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{vagy} \quad x = -1{,}1071 + 2k\pi \quad \text{vagy}\ x = 2{,}0344 + 2k\pi$ vagy ez utóbbi megoldásokat pontos értékkel kifejezve;
$$x = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)\right) + 2k\pi$$

(f) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

(g) $x = 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$

**29.* Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenleteket.

(a) $\sin x + \cos x = 1$

(b) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

(c) $3\sin x - 4\cos x = 2$

(d) $4\sin x + 3\cos x = 6$

(e) $2\cos x = 2(1 - \sin x)$

**Megoldás.** A következő megoldásokban $k$ tetszőleges egész számot jelöl.

(a) $x = 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

(b) $x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi$

(c) $x = 1{,}3389 + 2k\pi$ vagy $x = -2{,}6258 + 2k\pi$ vagy pontos értékkel kifejezve;
$x = 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{21}\right)\right) + 2k\pi$

(d) Nincs megoldás.

(e) $x = 2k\pi \quad \text{vagy} \quad x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

**30. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenlőtlenségeket.

(a) $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$

(b) $\cos(2x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\operatorname{tg} x - 1 > 0$

(d) $\operatorname{ctg}^2(3x) \geq 3$

(e) $\sin\left(x - \dfrac{2\pi}{3}\right) \leq -1$

(f) $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 > 0$

(g) $\sin^2(x - \pi) < \dfrac{1}{2}$

(h) $\sin^2 x \leq \sin x$

(i) $\cos^2 x > 2\cos x$

(j) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \geq 0$

(k) $2\cos^2 x - 3\cos x < -1$

(l) $8\sin^4 x - 1 \geq 2\cos^2 x$

(m) $8\cos^4 x - 1 < 5 - 2\sin^2 x$

**Megoldás.** A következő megoldásokban $k$ tetszőleges egész számot jelöl.

(a) $x \in \left[\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right]$

(b) $x \in \left]\dfrac{\pi}{8} + k\pi; \dfrac{7\pi}{8} + k\pi\right[$

(c) $x \in \left]-\dfrac{3\pi}{4} + k\pi; -\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$

(d) $x \in \left[-\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3}; \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{3}\right] \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{3}\right\}$

(e) $x = \dfrac{13\pi}{6} + 2k\pi$

(f) $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}\right[$

(g) $x \in \left]-\dfrac{\pi}{4} + k\pi; \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right[$

(h) $x \in [2k\pi; \pi + 2k\pi]$

(i) $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$

(j) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

(k) $x \in \left]-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[ \setminus \{2k\pi\}$

(l) $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

(m) $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; -0{,}4073 + k\pi\right[$ vagy
$x \in \left]0{,}4073 + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ vagy pontos értékkel kifejezve;
$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{33} - 5}\right) + k\pi\right[$ vagy
$x \in \left]\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{33} - 5}\right) + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi;\right]$

**31.* Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenlőtlenségeket.

(a) $\frac{\sin x}{3 + \cos x} \le 0$

(b) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} \le 0$

(c) $\frac{\cos x}{\sin x - 2} > 0$

(d) $\frac{\cos x}{\sin x - 1} > 0$

(e) $\dfrac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}} \ge 0$

(f) $\frac{\sin x}{1 + \sin(2x)} \le 0$

(g) $\sin x \cdot \cos x > 0$

(h) $\cos x \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \le 0$

(i) $\sin x \cdot (1 + \sin(2x)) \le 0$

(j) $\operatorname{tg} x > \frac{1}{\cos x}$

(k) $\operatorname{tg} x \ge \frac{1}{2\cos x}$

(l) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{2}\cos x}$

(m) $(\cos x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 2) < 0$

(n) $(2 - x^2 + x) \cdot (\sin x + 1) \ge 0$

**Megoldás.** Az alábbi megoldásokban $k$ egy tetszőleges egész számot jelöl.

(a) $x \in [-\pi + 2k\pi; 2k\pi]$

(b) $x \in ]-\pi + 2k\pi; 2k\pi]$

(c) $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$

(d) $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$

(e) $x \in \left]-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[$ vagy $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$

(f) $x \in [-\pi + 2k\pi; 2k\pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

(g) $x \in \left]k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$

(h) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad$ vagy $\quad x \in ]2k\pi; \pi + 2k\pi[$

(i) $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad$ vagy $\quad x \in [-\pi + 2k\pi; 2k\pi]$

(j) $x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$

(k) $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[ \quad$ vagy $\quad x \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$

(l) $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[ \quad$ vagy $\quad x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right[$

(m) $x \in ]2; 2\pi[ \cup ]0; 1[ \quad$ vagy $\quad ]2n\pi; 2\pi + 2n\pi[$, ahol $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

(n) $x \in [-1; 2] \quad$ vagy $\quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

**32. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát.

(a) $\sqrt{\sin x}$

(b) $\sqrt[4]{1 - \sin x}$

(c) $\sqrt{1 + \cos x}$

(d) $\sqrt{\cos(2x) - 1}$

(e) $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}$

(f) $\sqrt{\cos^2 x - 0{,}5}$

(g) $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)}$

(h) $\sqrt{\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)}$

(i) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)}}$

(j) $\sqrt{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)}}$

**Megoldás.** Az alábbi megoldásokban $k$ egy tetszőleges egész számot jelöl.

(a) $x \in [2k\pi; \pi + 2k\pi]$

(b) $x \in \mathbb{R}$

(c) $x \in \mathbb{R}$

(d) $x = k\pi$

(e) $x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{2} + k\pi\right[$

(f) $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

(g) $x \neq \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$

(h) $x \in \left[-\frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right[$

(i) $x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$

(j) $x \in \left]-\frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right]$

**33. Feladat.** Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenletrendszereket.

(a)

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos(x-y) & = & 0 \\ \cos(x+y) & = & 0 \end{array}\right\}$$

(b)

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos x \cdot \sin y & = & 0 \\ \cos(x+y) & = & 0 \end{array}\right\}$$

(c)

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos^2 x + \sin^2 y & = & \frac{3}{2} \\ \sin^2 x - \cos^2 y & = & \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

(d)

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y & = & \frac{\pi}{3} \\ \sin x - \cos y & = & 0 \end{array}\right\}$$

(e)

$$\left.\begin{array}{rcl} \cos^2 x & = & \cos y \\ \sin^2 x & = & \sin y \end{array}\right\}$$

**Megoldás.** Az alábbi megoldásokban $k, n$ tetszőleges egész számokat jelölnek.

(a) $x = k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ vagy $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ y = n\pi$

(b) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ y = n\pi$

(c) $x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ y = -\dfrac{\pi}{2} + n\pi$

(d) $x = -\dfrac{19\pi}{12} + k\pi,\ y = \dfrac{23\pi}{12} - k\pi$

(e) $x = k\pi,\ y = 2n\pi$ vagy $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$

# 8 | Függvények

## Függvénytranszformációk

**1. Feladat.** Ábrázoljuk az alábbi függvényeket a lehető legbővebb halmazon.

(a) $f(x) = [x]$

(b) $f(x) = [2x]$

(c) $f(x) = 2 \cdot [x]$

(d) $f(x) = \{x\}$

(e) $f(x) = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$

(f) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \{x\}$

(g) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

(h) $f(x) = \operatorname{sgn}(-2x)$

(i) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 6)$

(j) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$

(k) $f(x) = \operatorname{sgn}(|\cos x|)$

(l) $f(x) = \operatorname{sgn}(2^x)$

(m) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

(n) $f(x) = |||x - 1| - 2| - 3|$

(o) $f(x) = \sqrt{|x|}$

(p) $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$

**2. Feladat.** Ábrázoljuk transzformációs lépésekkel az alábbi függvényeket.

(a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2$

(b) $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

(c) $f(x) = -2\sqrt{x+3} + 1$

(d) $f(x) = \frac{(x-3)^3}{4}$

(e) $f(x) = -\sqrt[3]{x+3} + 1$

(f) $f(x) = \sin(2x) - 1$

(g) $f(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

(h) $f(x) = |\operatorname{tg}(x)|$

(i) $f(x) = 2 \cdot 3^{x-2} - 4$

(j) $f(x) = 1 - \log_2(x+1)$

**3. Feladat.** Ábrázoljuk a következő transzformációs lépésekkel az $f(x) = -2\sqrt{2(x-2)} - 1$ függvényt.

(a) $f_0(x) = \sqrt{x}$

(b) $f_1(x) = \sqrt{x-2}$

(c) $f_2(x) = \sqrt{2 \cdot (x-2)}$

(d) $f_3(x) = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot (x-2)}$

(e) $f_4(x) = -2 \cdot \sqrt{2 \cdot (x-2)}$

(f) $f_5(x) = -2 \cdot \sqrt{2 \cdot (x-2)} - 1$

**4.* Feladat.** Az előző feladatban látott lépéseket követve ábrázoljuk a következő függvényeket.

(a) $f(x) = -\sqrt{6+x} - 3$

(b) $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4-2x}$

(c) $h(x) = 2 + \sqrt{\frac{1}{2}(x-1)}$

**5. Feladat.** Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonján az alábbi transzformációs lépéseket hajtottuk végre (mindig csak az egyiket). Határozzuk meg a transzformáció után keletkezett grafikonhoz tartozó $g$ függvény hozzárendelési szabályát, ha a transzformáció egy

(a) tengelyes tükrözés az $x$ tengelyre;

(b) tengelyes tükrözés az $y$ tengelyre;

(c) tengelyes tükrözés az $x = 3$ egyenesre;

(d) tengelyes tükrözés az $y = 2$ egyenesre;

(e) tengelyes tükrözés az $y = x$ egyenesre;

(f) középpontos tükrözés az origóra;

(g) középpontos tükrözés a $P(1; 2)$ pontra;

(h) eltolás a $\vec{v}(1; 2)$ vektorral;

(i) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre;

(j) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre;

(k) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre;

(l) $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre;

(m) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az $y$ tengelyre;

(n) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az $y$ tengelyre;

(o) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az $y$ tengelyre;

(p) $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az $y$ tengelyre.

**6. Feladat.** Az előző feladat transzformációs lépései közül melyek változtatták meg a függvény

(a) értelmezési tartományát,

(b) értékkészletét,

(c) zérushelyét?

**7.* Feladat.** Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonján az alábbi transzformációs lépéseket hajtottuk végre, az adott sorrendben. Határozzuk meg a transzformációk után keletkezett grafikonhoz tartozó $g$ függvény hozzárendelési szabályát, ha a transzformációk egy

(a) tükrözés az $x$ tengelyre, majd eltolás a $\vec{v}(0; 2)$ vektorral;

(b) eltolás a $\vec{v}(0; 2)$ vektorral, majd tükrözés az $x$ tengelyre;

(c) eltolás a $\vec{v}(1; 2)$ vektorral, majd eltolás az $\vec{v}(2; -1)$ vektorral;

(d) eltolás az $\vec{v}(2; -1)$ vektorral, majd eltolás a $\vec{v}(1; 2)$ vektorral;

(e) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre, majd eltolás a $\vec{v}(-3; 2)$ vektorral;

(f) eltolás a $\vec{v}(-3; 2)$ vektorral, majd $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre;

(g) középpontos tükrözés a $P(3;1)$ pontra, majd eltolás a $\vec{v}(-2;4)$ vektorral, majd tükrözés az $x$ tengelyre;

(h) középpontos tükrözés a $P(3;1)$ pontra, majd tükrözés az $x$ tengelyre, majd eltolás a $\vec{v}(-2;4)$ vektorral;

(i) eltolás a $\vec{v}(-2;4)$ vektorral, majd tükrözés az $x$ tengelyre, majd középpontos tükrözés a $P(3;1)$ pontra;

(j) eltolás a $\vec{v}(-2;4)$ vektorral, majd középpontos tükrözés a $P(3;1)$ pontra, majd tükrözés az $x$ tengelyre;

(k) tükrözés az $x$ tengelyre, majd eltolás a $\vec{v}(-2;4)$ vektorral, majd középpontos tükrözés a $P(3;1)$ pontra;

(l) tükrözés az $x$ tengelyre, majd középpontos tükrözés a $P(3;1)$ pontra, majd eltolás a $\vec{v}(-2;4)$ vektorral.

# Függvénytulajdonságok

**8. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét.

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

(b) $g(x) = 2f(x)$

(c) $h(x) = -f(x)$

(d) $i(x) = |f(x)|$

(e) $j(x) = 2\sqrt{x-2} + 1$

(f) $k(x) = \frac{1}{2} \cdot j(x)$

(g) $l(x) = -j(x)$

(h) $m(x) = j(x) + 2$

(i) $n(x) = j(x+3)$

(j) $o(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

(k) $p(x) = \frac{1}{o(x)}$

(l) $q(x) = \frac{2}{7} \cdot \sqrt[3]{x-1}$

(m) $r(x) = 2 \cdot (x-1)^{17}$

(n) $s(x) = \sin x \cdot \cos x$

(o) $t(x) = \sin x + \cos x$

(p) $u(x) = t^2(x)$

(q) $v(x) = -2^{x-1} + 1$

(r) $w(x) = 2^{\sin^2 x + \cos^2 x}$

(s) $z(x) = \log_2(x-1) + 1$

(t) $a(x) = \log_4(8^x)$

(u) $b(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$

(v) $c(x) = \operatorname{sgn}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$

(w) $d(x) = [2x]$

(x) $e(x) = 2 \cdot [x] + 3$

(y) $f_1(x) = \frac{5}{2} \cdot \{x+2\}$

(z) $f_2(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

**9. Feladat.** Adjunk meg egy olyan intervallumot ahol az alábbi függvények szigorú monoton növekedők.

(a) $f(x) = (2x-3)(x+2)$

(b) $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$

(c) $h(x) = \frac{x-2}{x+1}$

(d) $i(x) = \sin(2x)$

(e) $j(x) = x^3 - x$

(f) $k(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-5)$

**10. Feladat.** Válasszuk ki az alábbi függvények közül az invertálhatóakat. Határozzuk meg az inverzüket, valamint ábrázoljuk a függvényt és inverzét közös koordináta rendszerben.

(a) $f(x) = 2x - 1$

(b) $g(x) = \sqrt{x}$

(c) $h(x) = x^2$

(d) $i(x) = x(x-2)$ a $[-1; 3[$ intervallumon

(e) $j(x) = 2^{x-1}$

(f) $k(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

**11. Feladat.** Határozzuk meg az $f$ függvényt, amennyiben inverze a következő.

(a) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-3}{5}$

(b) $f^{-1}(x) = \log_3(1-x)$

(c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x+3} - 2$

(d) $f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{2x-3}$

(e) $f^{-1}(x) = (2x-1)^4 + 1$

**12. Feladat.** Mutasson példát olyan függvényre, amelynek inverze önmaga.

**13. Feladat.** Vizsgáljuk az alábbi függvények paritási tulajdonságait.

(a) $f(x) = x^2$

(b) $g(x) = 2 \cdot x^3$

(c) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{5}$

(d) $i(x) = -2x^4$

(e) $j(x) = -(2x)^4$

(f) $k(x) = \sqrt[4]{3x}$

(g) $l(x) = \sin(-x)$

(h) $m(x) = \cos(2x)$

(i) $n(x) = \operatorname{sgn} x$

(j) $o(x) = x \cdot \sin x$

(k) $p(x) = x^2 \cdot \sin x$

(l) $q(x) = x \cdot \cos x$

(m) $r(x) = x^2 \cdot \cos x$

(n) $s(x) = |x| - 7$

(o) $t(x) = \dfrac{1}{x} + x$

(p) $u(x) = 3^{2x} - 9^{-x}$

**14. Feladat.** Mutasson példát olyan függvényre amely páros és páratlan is.

**15. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi periodikus függvények (alap)periódusát.

(a) $f(x) = \sin x$

(b) $g(x) = \cos(2x)$

(c) $h(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$

(d) $i(x) = \sin^2 x$

(e) $j(x) = |\cos x|$

(f) $k(x) = 1 - \cos^2 x$

(g) $l(x) = 1 - 2\cos^2 x$

(h) $m(x) = \sin x \cdot \cos x$

(i) $n(x) = \sin x + \cos x$

(j) $o(x) = \{x\}$

(k) $p(x) = 1$

# Szélsőérték feladatok

**16. Feladat.** Egy ház fala mentén 100 m hosszú kerítéssel egy téglalap alakú részt szeretnénk lekeríteni. Mekkorának válasszuk a téglalap méreteit, hogy maximális területű lekerített részt kapjunk, ha a fal mentén nem kell kerítés? Mekkora az ily módon lekeríthető maximális terület?

**17. Feladat.** Határozzuk meg a 40 cm kerületű téglalapok közül a maximális területűt.

**18. Feladat.** Határozzuk meg a 100 egység területű téglalapok közül a minimális kerületűt.

**19.* Feladat.** Írjunk adott körbe maximális területű téglalapot.

**20.* Feladat.** Egy téglatest egyik lapjának területe 1 $\text{dm}^2$, az élek hosszának összege 20 dm. Mekkora ezen téglatestek felszínének maximuma?

**21.* Feladat.** Mekkorák a 10 cm oldalhosszúságú szabályos háromszögbe írható legnagyobb területű téglalap oldalai?

**22.* Feladat.** Egy trapéz egyik alapja 12 cm, a másik alap és a trapéz magasságának összege 30 cm. Hogyan kell megválasztani a trapéz magasságát, hogy területe maximális legyen?

**23. Feladat.** Legyen $a + b = 50, \ a; b \in \mathbb{R}^+$. Határozzuk meg az $a^2 + b^2$ kifejezés

(a) minimumát, (b) maximumát.

**24. Feladat.** Egy 50 cm hosszú szakaszt két részre osztunk, majd az egyes részek mint oldalak fölé egy-egy négyzetet emelünk. Határozzuk meg a négyzetek területösszegének

(a) minimumát, (b) maximumát.

**25. Feladat.** Hol vágjunk ketté egy 200 cm hosszú szalagot úgy, hogy az egyes részekből hajtható négyzetek területének összege minimális, illetve maximális legyen?

**26. Feladat.** Határozzuk meg az 50 cm kerületű egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyre minimális az oldalakra állítható négyzetek területének összege.

**27. Feladat.** Bontsuk fel a 10-et két pozitív szám összegére úgy, hogy a tagok

(a) szorzata
(b) négyzetösszege
(c) négyzetének különbsége
(d) köbeinek összege

szélsőértéket vegyen fel.

**28. Feladat.** Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Határozzuk meg a befogók hosszát úgy, hogy a

(a) háromszög területe
(b) befogók hosszának összege
(c) befogók hosszának négyzetösszege maximális legyen.

**29. Feladat.** Adottak a koordinátasíkon az $A(1; 6)$ és a $B(5; 9)$ pontok. Határozzuk meg az $x$ tengely azon $C$ pontját, melyre az $AC^2 + BC^2$ távolság-négyzetösszeg minimális.

# Megoldások

## Függvénytranszformációk

**1. Feladat.** Ábrázoljuk az alábbi függvényeket a lehető legbővebb halmazon.

(a) $f(x) = [x]$

(b) $f(x) = [2x]$

(c) $f(x) = 2 \cdot [x]$

(d) $f(x) = \{x\}$

(e) $f(x) = \left\{\dfrac{1}{2}x\right\}$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \{x\}$

(g) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

(h) $f(x) = \operatorname{sgn}(-2x)$

(i) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 5x + 6)$

(j) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$

(k) $f(x) = \operatorname{sgn}(|\cos x|)$

(l) $f(x) = \operatorname{sgn}(2^x)$

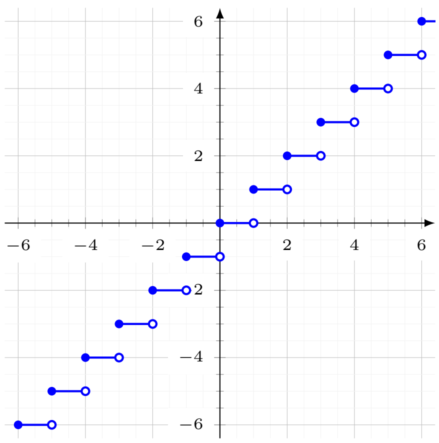
(m) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

(n) $f(x) = |||x - 1| - 2| - 3|$

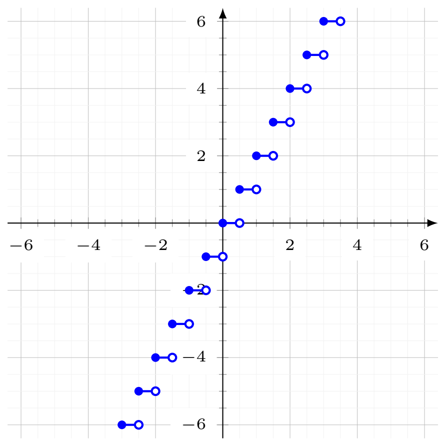
(o) $f(x) = \sqrt{|x|}$

(p) $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$

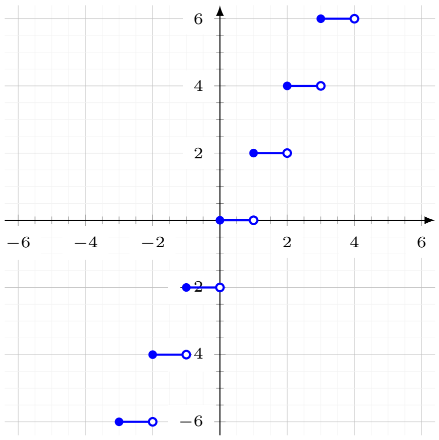
**Megoldás.**



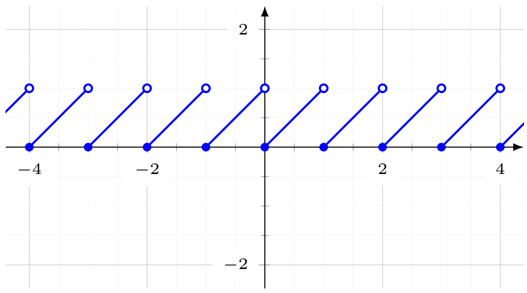

(a)



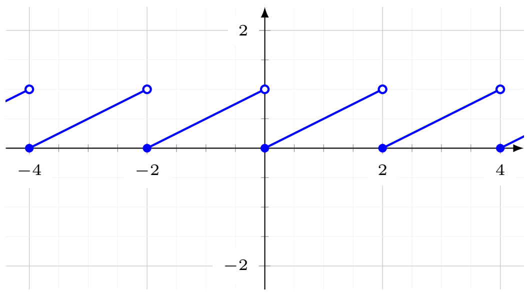

(b)



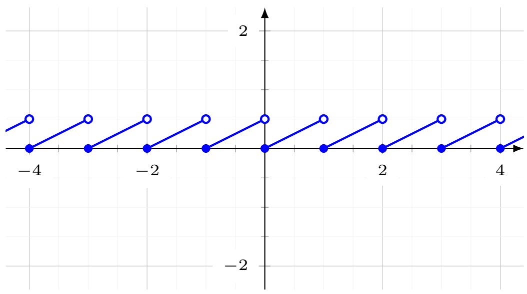

(c)



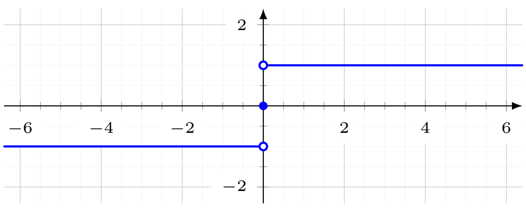

(d)



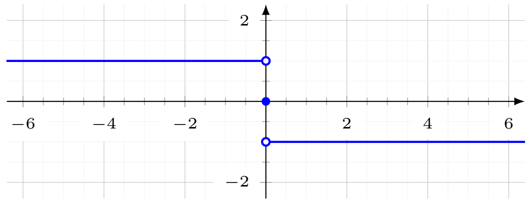

(e)



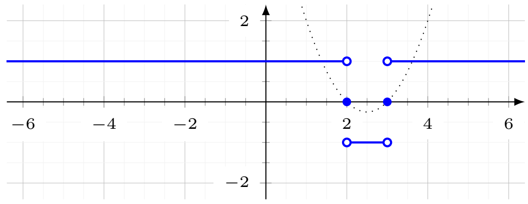

(f)



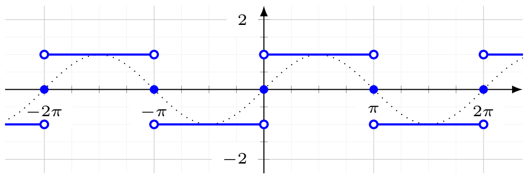

(g)



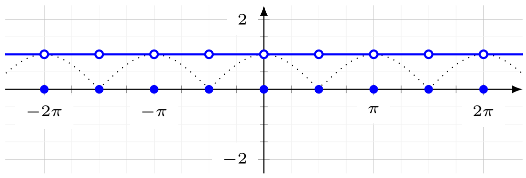

(h)



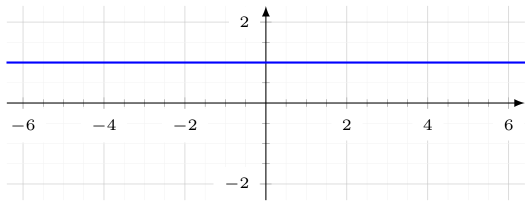

(i)



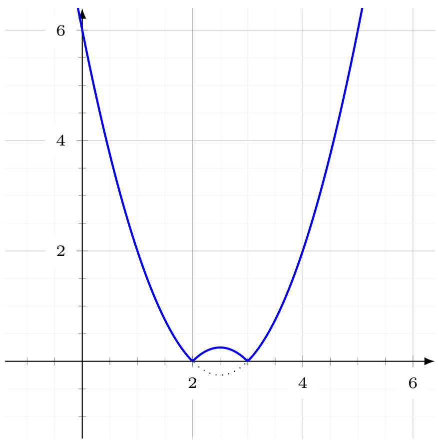

(j)



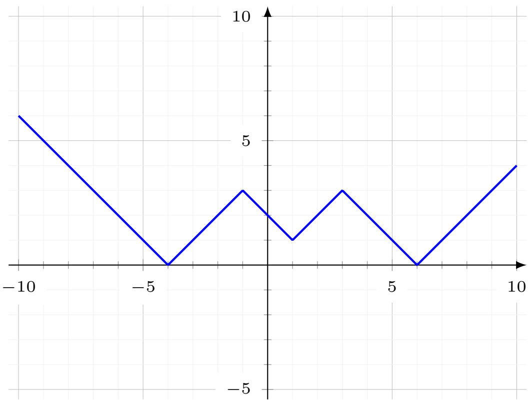

(k)



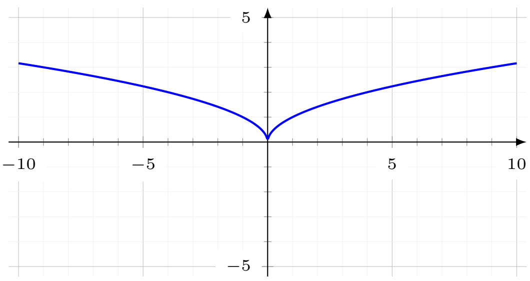

(l)



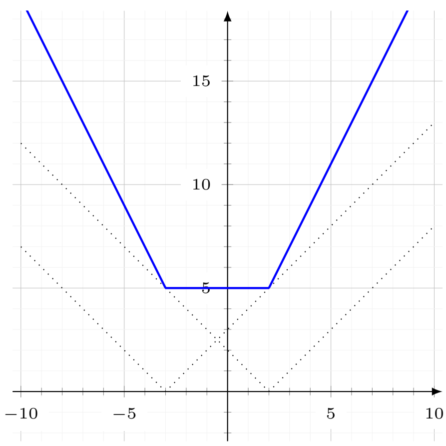

(m)




(n)




(o)




(p)

**2. Feladat.** Ábrázoljuk transzformációs lépésekkel az alábbi függvényeket.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 - 2$

(b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$

(c) $f(x) = -2\sqrt{x+3} + 1$

(d) $f(x) = \dfrac{(x-3)^3}{4}$

(e) $f(x) = -\sqrt[3]{x+3} + 1$

(f) $f(x) = \sin(2x) - 1$

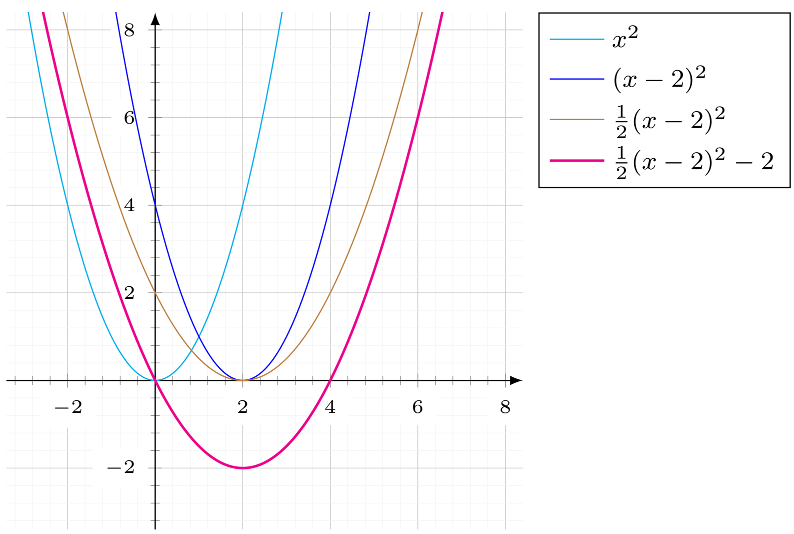
(g) $f(x) = \dfrac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

(h) $f(x) = |\operatorname{tg}(x)|$

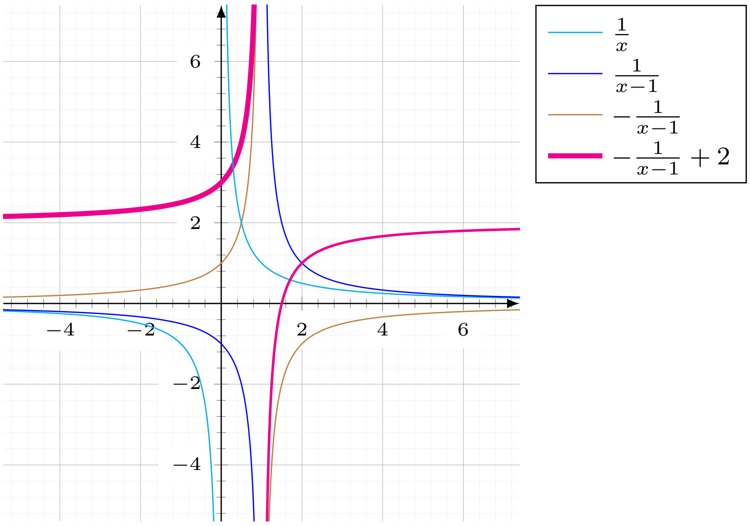
(i) $f(x) = 2 \cdot 3^{x-2} - 4$

(j) $f(x) = 1 - \log_2(x+1)$

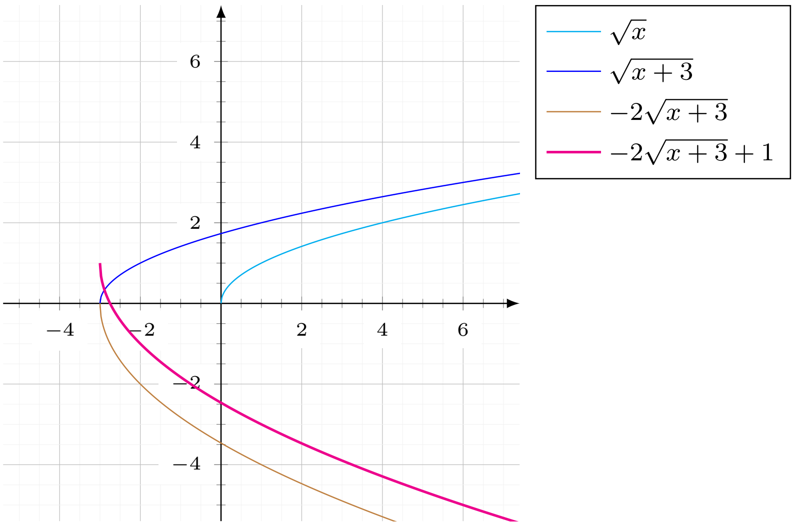
**Megoldás.**



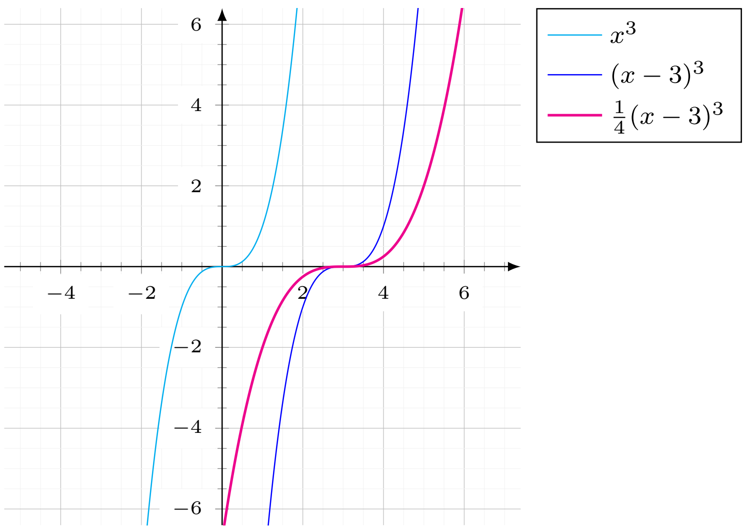

(a)


$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x-1}$
$-\frac{1}{x-1}$
$-\frac{1}{x-1}+2$

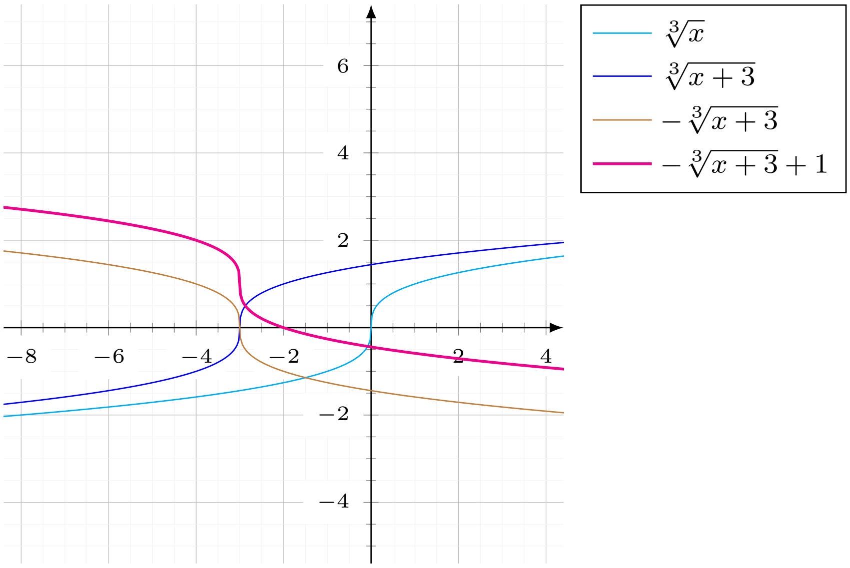
(b)


$\sqrt{x}$
$\sqrt{x+3}$
$-2\sqrt{x+3}$
$-2\sqrt{x+3}+1$

(c)

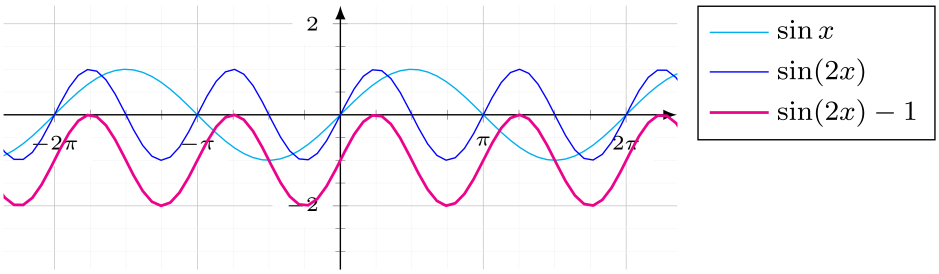

$x^3$
$(x-3)^3$
$\frac{1}{4}(x-3)^3$

(d)



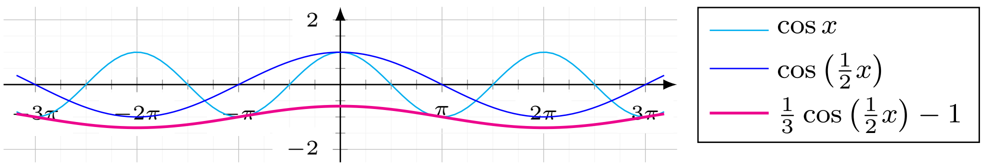
$\sqrt[3]{x}$
$\sqrt[3]{x+3}$
$-\sqrt[3]{x+3}$
$-\sqrt[3]{x+3}+1$

(e)



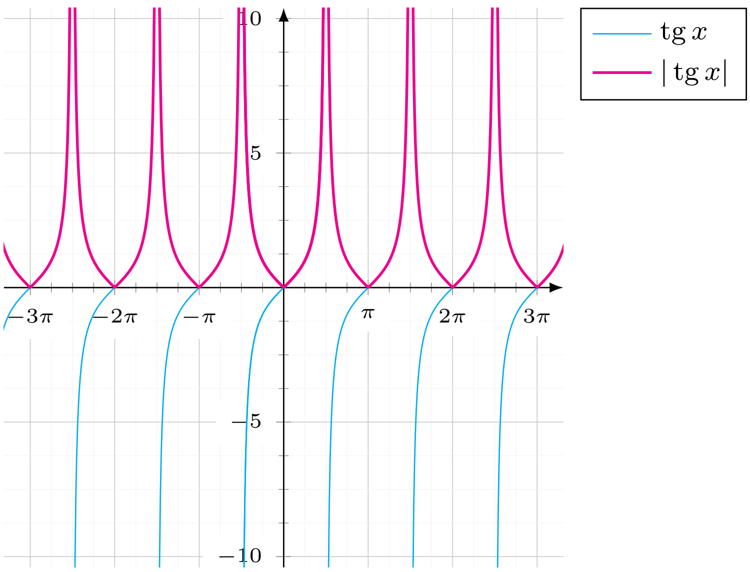
$\sin x$
$\sin(2x)$
$\sin(2x)-1$

(f)



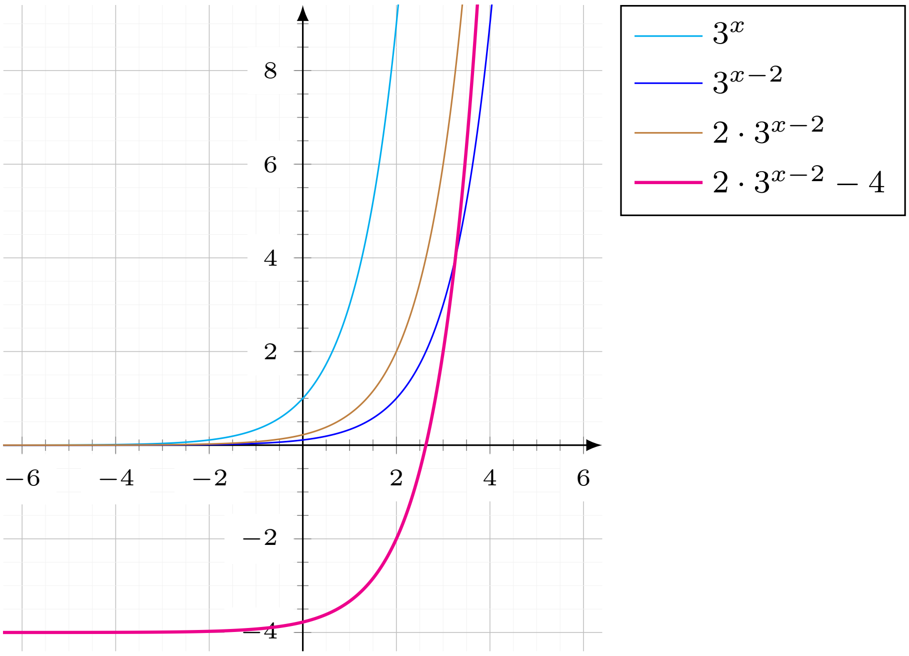
$\cos x$
$\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
$\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-1$

(g)

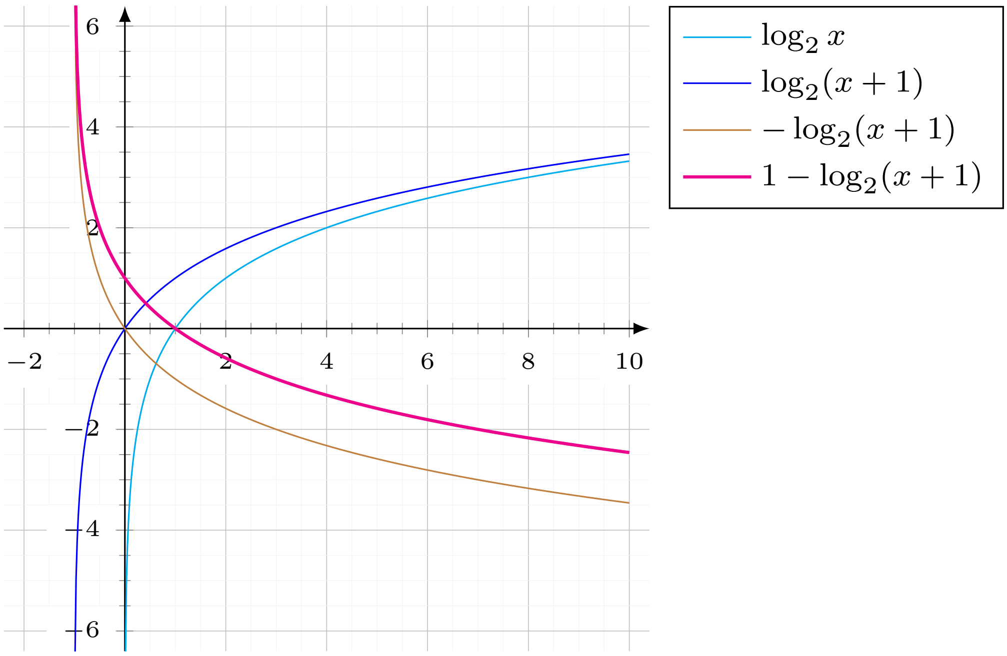


$\operatorname{tg} x$
$|\operatorname{tg} x|$

(h)




(i)




(j)

**3. Feladat.** Ábrázoljuk a következő transzformációs lépésekkel az $f(x) = -2\sqrt{2(x-2)} - 1$ függvényt.

(a) $f_0(x) = \sqrt{x}$

(b) $f_1(x) = \sqrt{x-2}$

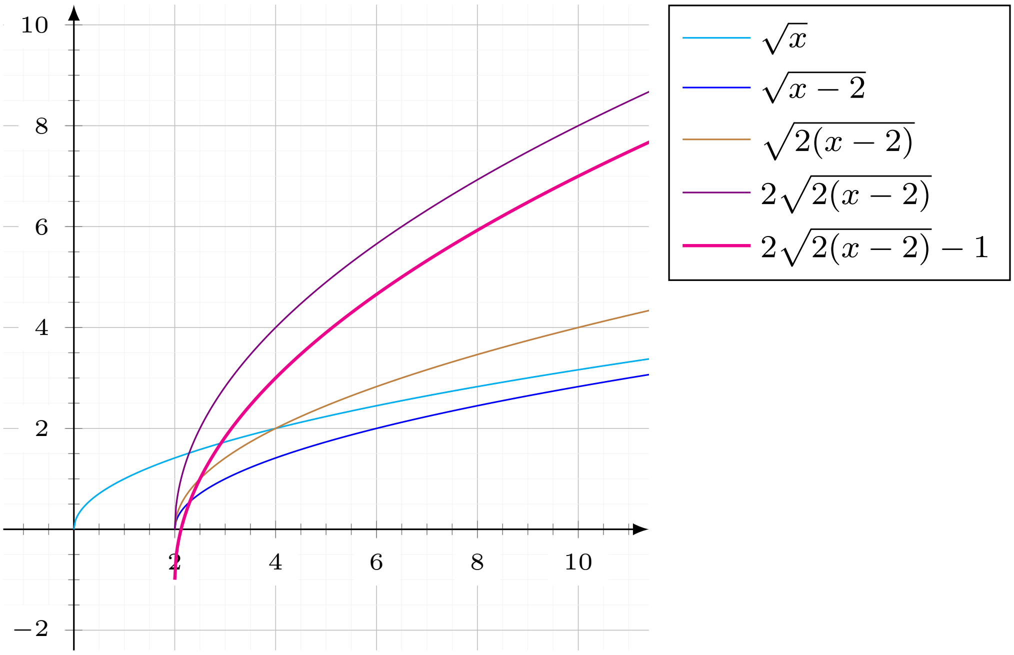
(c) $f_2(x) = \sqrt{2 \cdot (x-2)}$

(d) $f_3(x) = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot (x-2)}$

(e) $f_4(x) = -2 \cdot \sqrt{2 \cdot (x-2)}$

(f) $f_5(x) = -2 \cdot \sqrt{2 \cdot (x-2)} - 1$

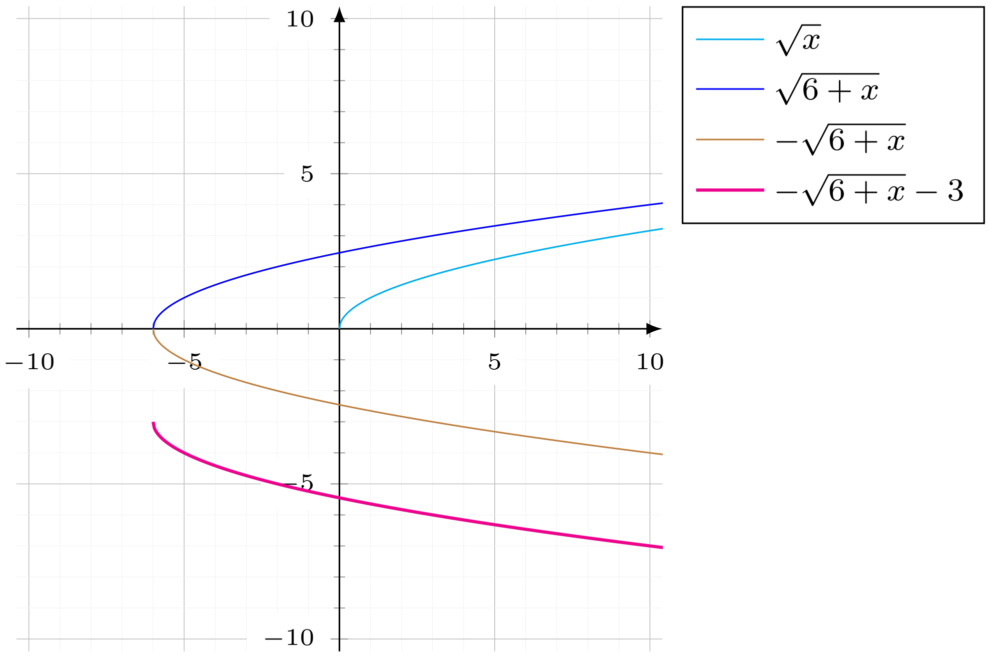
**Megoldás.**




**4.* Feladat.** Az előző feladatban látott lépéseket követve ábrázoljuk a következő függvényeket.

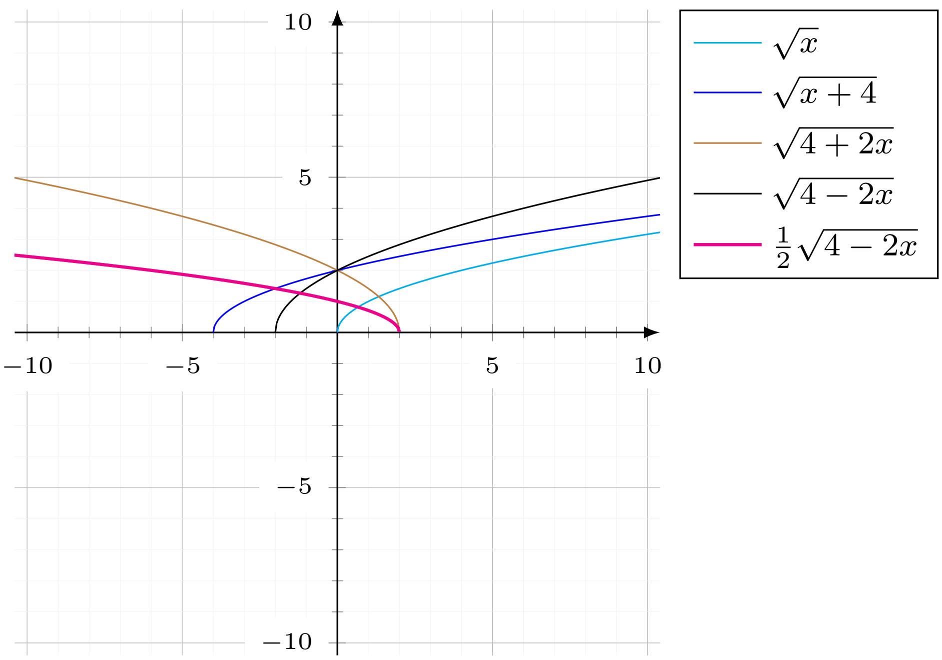
(a) $f(x) = -\sqrt{6+x} - 3$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{4-2x}$ (c) $h(x) = 2 + \sqrt{\dfrac{1}{2}(x-1)}$

**Megoldás.**

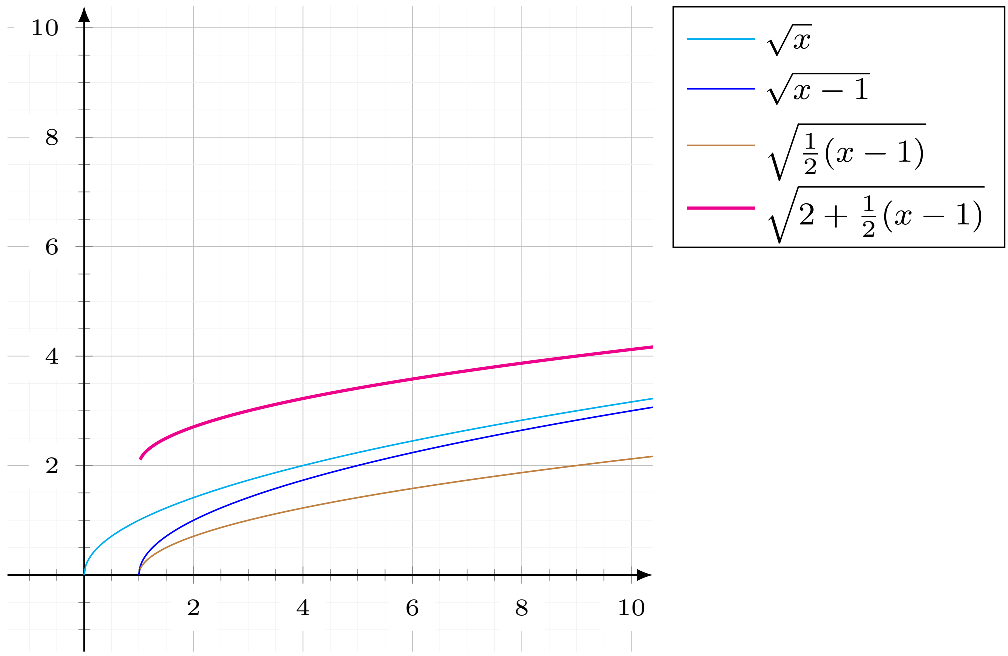



(a)

(b)




(c)




**5. Feladat.** Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonján az alábbi transzformációs lépéseket hajtottuk végre (mindig csak az egyiket). Határozzuk meg a transzformáció után keletkezett grafikonhoz tartozó $g$ függvény hozzárendelési szabályát, ha a transzformáció egy

(a) tengelyes tükrözés az $x$ tengelyre;

(b) tengelyes tükrözés az $y$ tengelyre;

(c) tengelyes tükrözés az $x = 3$ egyenesre;

(d) tengelyes tükrözés az $y = 2$ egyenesre;

(e) tengelyes tükrözés az $y = x$ egyenesre;

(f) középpontos tükrözés az origóra;

(g) középpontos tükrözés a $P(1; 2)$ pontra;

(h) eltolás a $\vec{v}(1; 2)$ vektorral;

(i) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre;

(j) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre;

(k) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre;

(l) $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre;

(m) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az $y$ tengelyre;

(n) $\lambda = -2$ arányú merőleges affinitás az $y$ tengelyre;

(o) $\lambda = \frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az $y$ tengelyre;

(p) $\lambda = -\frac{1}{2}$ arányú merőleges affinitás az $y$ tengelyre.

**Megoldás.**

(a) $g(x) = -\sqrt{x}$

(b) $g(x) = \sqrt{-x}$

(c) $g(x) = \sqrt{6 - x}$

(d) $g(x) = 4 - \sqrt{x}$

(e) $g(x) = x^2$, $x \geq 0$

(f) $g(x) = -\sqrt{-x}$

(g) $g(x) = -\sqrt{2 - x} + 4$

(h) $g(x) = \sqrt{x - 1} + 2$

(i) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$

(j) $g(x) = -2 \cdot \sqrt{x}$

(k) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}$

(l) $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x}$

(m) $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot x}$

(n) $g(x) = \sqrt{-\frac{1}{2} \cdot x}$

(o) $g(x) = \sqrt{2 \cdot x}$

(p) $g(x) = \sqrt{-2 \cdot x}$

**6. Feladat.** Az előző feladat transzformációs lépései közül melyek változtatták meg a függvény

(a) értelmezési tartományát,

(b) értékkészletét,

(c) zérushelyét?

**Megoldás.**

(a) Megváltozott: (b), (c), (f), (g), (h), (n), (p).

(b) Megváltozott: (a), (d), (f), (g), (h), (j), (l).

(c) Megváltozott: (c), (d), (g), (h).

**7.* Feladat.** Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonján az alábbi transzformációs lépéseket hajtottuk végre, az adott sorrendben. Határozzuk meg a transzformációk után keletkezett grafikonhoz tartozó $g$ függvény hozzárendelési szabályát, ha a transzformációk egy

(a) tükrözés az $x$ tengelyre, majd eltolás a $\vec{v}(0; 2)$ vektorral;

(b) eltolás a $\vec{v}(0; 2)$ vektorral, majd tükrözés az $x$ tengelyre;

(c) eltolás a $\vec{v}(1; 2)$ vektorral, majd eltolás az $\vec{v}(2; -1)$ vektorral;

(d) eltolás az $\vec{v}(2; -1)$ vektorral, majd eltolás a $\vec{v}(1; 2)$ vektorral;

(e) $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre, majd eltolás a $\vec{v}(-3; 2)$ vektorral;

(f) eltolás a $\vec{v}(-3; 2)$ vektorral, majd $\lambda = 2$ arányú merőleges affinitás az $x$ tengelyre;

(g) középpontos tükrözés a $P(3; 1)$ pontra, majd eltolás a $\vec{v}(-2; 4)$ vektorral, majd tükrözés az $x$ tengelyre;

(h) középpontos tükrözés a $P(3; 1)$ pontra, majd tükrözés az $x$ tengelyre, majd eltolás a $\vec{v}(-2; 4)$ vektorral;

(i) eltolás a $\vec{v}(-2; 4)$ vektorral, majd tükrözés az $x$ tengelyre, majd középpontos tükrözés a $P(3; 1)$ pontra;

(j) eltolás a $\vec{v}(-2; 4)$ vektorral, majd középpontos tükrözés a $P(3; 1)$ pontra, majd tükrözés az $x$ tengelyre;

(k) tükrözés az $x$ tengelyre, majd eltolás a $\vec{v}(-2; 4)$ vektorral, majd középpontos tükrözés a $P(3; 1)$ pontra;

(l) tükrözés az $x$ tengelyre, majd középpontos tükrözés a $P(3; 1)$ pontra, majd eltolás a $\vec{v}(-2; 4)$ vektorral.

**Megoldás.**

(a) $g(x) = -x^2 + 2$

(b) $g(x) = -x^2 - 2$

(c) $g(x) = (x - 3)^2 + 1$

(d) $g(x) = (x - 3)^2 + 1$

(e) $g(x) = 2 \cdot (x + 3)^2 + 2$

(f) $g(x) = 2 \cdot ((x + 3)^2 + 2)$

(g) $g(x) = (x - 4)^2 - 6$

(h) $g(x) = (x - 4)^2 + 2$

(i) $g(x) = (x - 8)^2 + 6$

(j) $g(x) = (x - 8)^2 + 2$

(k) $g(x) = (x - 8)^2 - 2$

(l) $g(x) = (x - 4)^2 + 6$

# Függvénytulajdonságok

**8. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét.

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

(b) $g(x) = 2f(x)$

(c) $h(x) = -f(x)$

(d) $i(x) = |f(x)|$

(e) $j(x) = 2\sqrt{x-2} + 1$

(f) $k(x) = \dfrac{1}{2} \cdot j(x)$

(g) $l(x) = -j(x)$

(h) $m(x) = j(x) + 2$

(i) $n(x) = j(x+3)$

(j) $o(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$

(k) $p(x) = \dfrac{1}{o(x)}$

(l) $q(x) = \dfrac{2}{7} \cdot \sqrt[3]{x-1}$

(m) $r(x) = 2 \cdot (x-1)^{17}$

(n) $s(x) = \sin x \cdot \cos x$

(o) $t(x) = \sin x + \cos x$

(p) $u(x) = t^2(x)$

(q) $v(x) = -2^{x-1} + 1$

(r) $w(x) = 2^{\sin^2 x + \cos^2 x}$

(s) $z(x) = \log_2(x-1) + 1$

(t) $a(x) = \log_4(8^x)$

(u) $b(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$

(v) $c(x) = \operatorname{sgn}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right)$

(w) $d(x) = [2x]$

(x) $e(x) = 2 \cdot [x] + 3$

(y) $f_1(x) = \dfrac{5}{2} \cdot \{x+2\}$

(z) $f_2(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

**Megoldás.**

(a) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1; \infty[$

(b) $D_g = \mathbb{R}$, $R_g = [-2; \infty[$

(c) $D_h = \mathbb{R}$, $R_f = ]-\infty; 1]$

(d) $D_i = \mathbb{R}$, $R_i = [0; \infty[$

(e) $D_j = [2; \infty[$, $R_j = [1; \infty[$

(f) $D_k = [2; \infty[$, $R_k = \left[\frac{1}{2}; \infty\right[$

(g) $D_l = [2; \infty[$, $R_l = ]-\infty; -1]$

(h) $D_m = [2; \infty[$, $R_m = [3; \infty[$

(i) $D_n = [-1; \infty[$, $R_n = [1; \infty[$

(j) $D_o = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $R_o = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(k) $D_p = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, $R_p = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

(l) $D_q = \mathbb{R}$, $R_q = \mathbb{R}$

(m) $D_r = \mathbb{R}$, $R_r = \mathbb{R}$

(n) $D_s = \mathbb{R}$, $R_s = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

(o) $D_t = \mathbb{R}$, $R_t = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

(p) $D_u = \mathbb{R}$, $R_u = [0; 2]$

(q) $D_v = \mathbb{R}$, $R_v = ]-\infty; 1[$

(r) $D_w = \mathbb{R}$, $R_w = \{2\}$

(s) $D_z = ]1, \infty[$, $R_z = \mathbb{R}$

(t) $D_a = \mathbb{R}$, $R_a = \mathbb{R}$

(u) $D_b = \mathbb{R}$, $R_b = \{-1, 0, 1\}$

(v) $D_c = \mathbb{R}$, $R_c = \{1\}$

(w) $D_d = \mathbb{R}$, $R_d = \mathbb{Z}$

(x) $D_e = \mathbb{R}$, $R_e = \{\text{páratlan számok}\}$

(y) $D_{f_1} = \mathbb{R}$, $R_{f_1} = \left[0; \frac{5}{2}\right)$

(z) $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $R_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

**9. Feladat.** Adjunk meg egy olyan intervallumot ahol az alábbi függvények szigorú monoton növekedők.

(a) $f(x) = (2x-3)(x+2)$

(b) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

(c) $h(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$

(d) $i(x) = \sin(2x)$

(e) $j(x) = x^3 - x$

(f) $k(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-5)$

**Megoldás.** Megfelelőek az alábbi halmazok tetszőleges részintervallumai.

(a) $\left[-\dfrac{1}{4}; \infty\right[$

(b) Nincs ilyen halmaz.

(c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(d) $\left[-\dfrac{\pi}{4} + k \cdot \pi; \dfrac{\pi}{4} k \cdot \pi\right], k \in \mathbb{Z}$

(e) $\left]-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right[$

(f) Nincs ilyen halmaz.

**10. Feladat.** Válasszuk ki az alábbi függvények közül az invertálhatóakat. Határozzuk meg az inverzüket, valamint ábrázoljuk a függvényt és inverzét közös koordináta rendszerben.

(a) $f(x) = 2x - 1$

(b) $g(x) = \sqrt{x}$

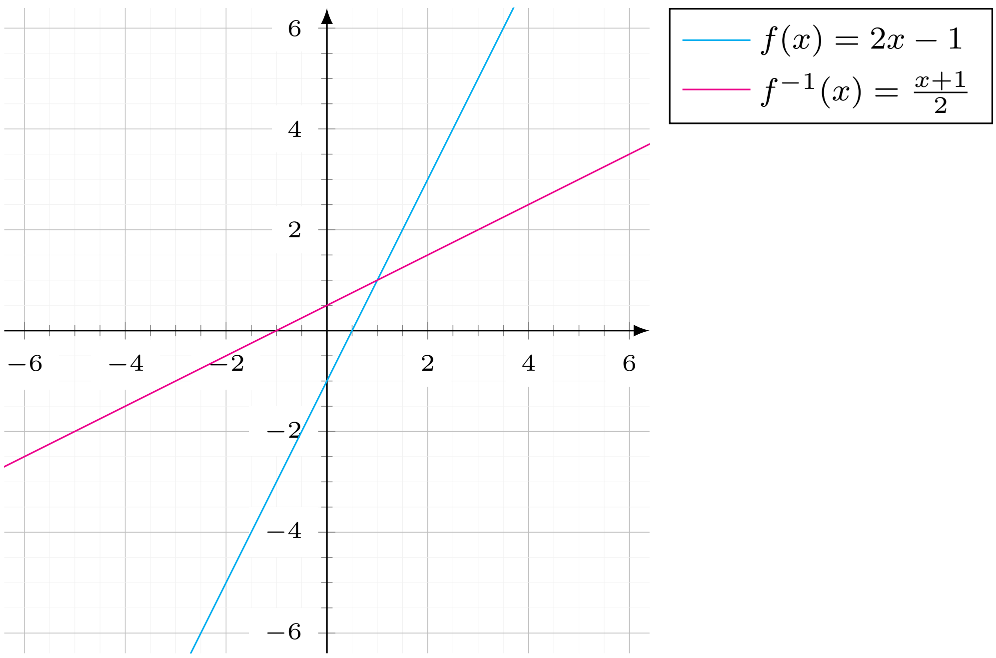
(c) $h(x) = x^2$

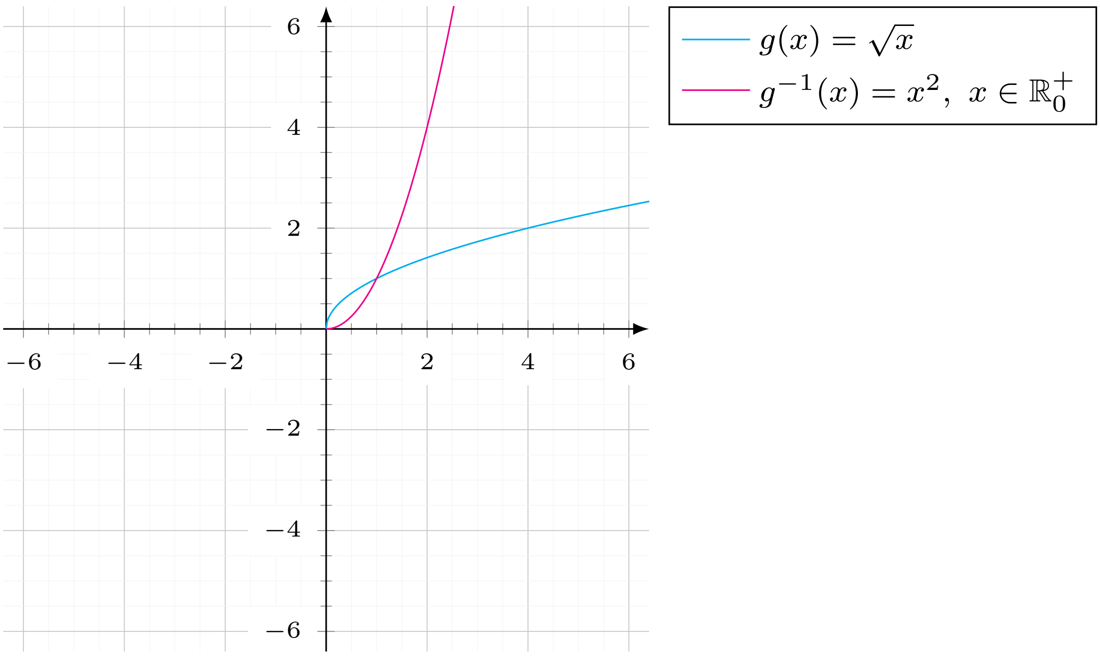
(d) $i(x) = x(x-2)$ a $[-1; 3[$ intervallumon

(e) $j(x) = 2^{x-1}$

(f) $k(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

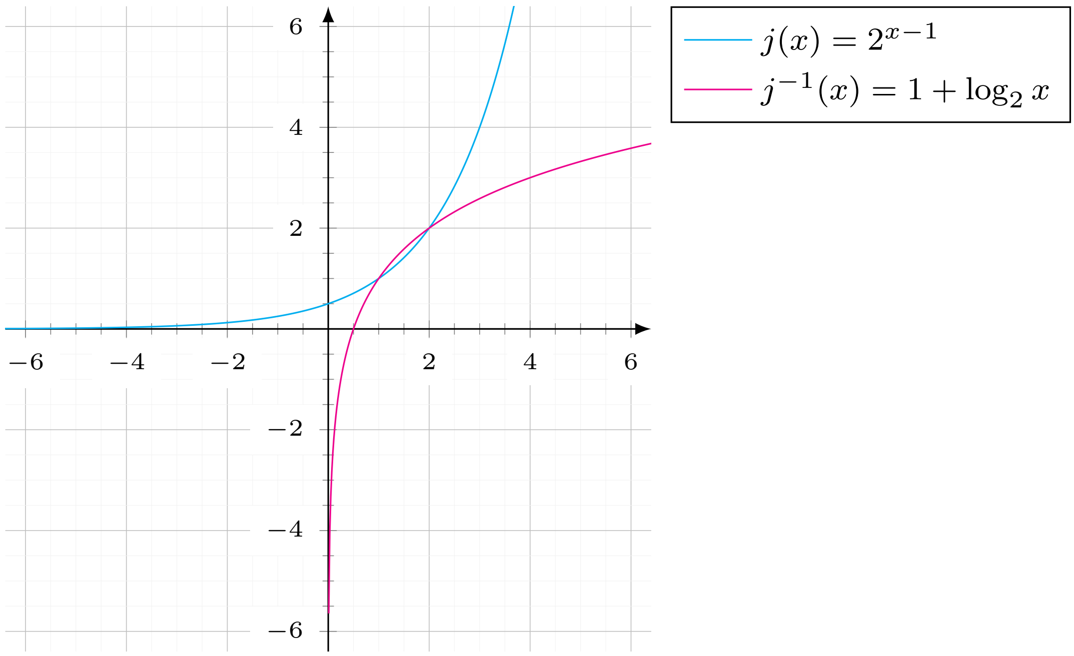
**Megoldás.**

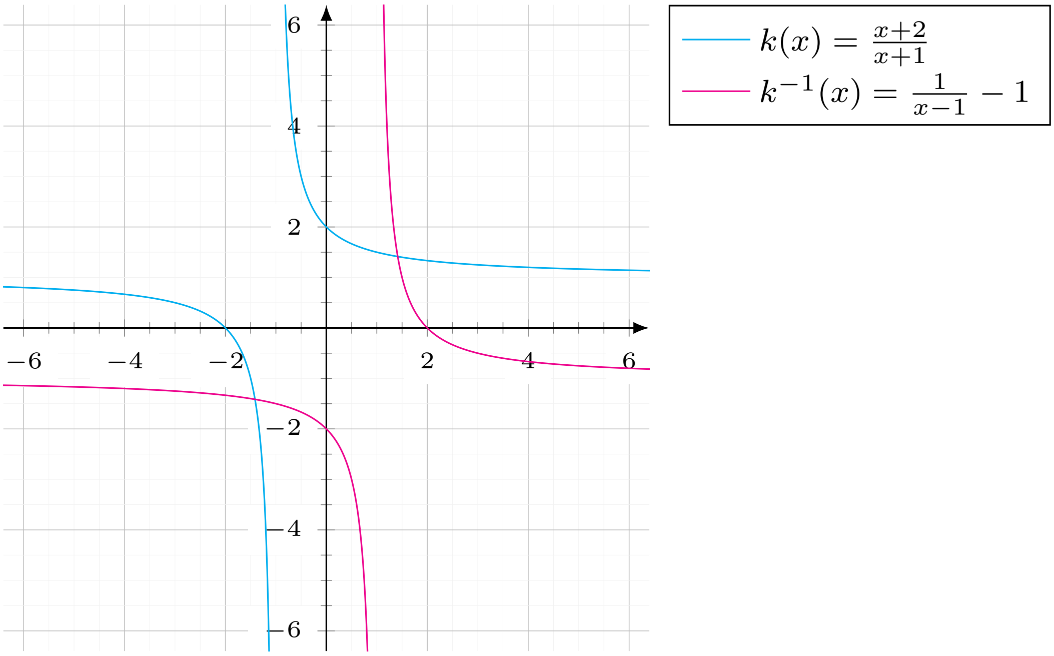
(a) 

(b) 


(c) Nem invertálható az egész értelmezési tartományán.

(d) Nem invertálható a megadott intervallumon.

(e) 

(f) 


**11. Feladat.** Határozzuk meg az $f$ függvényt, amennyiben inverze a következő.

(a) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-3}{5}$

(b) $f^{-1}(x) = \log_3(1-x)$

(c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x+3} - 2$

(d) $f^{-1}(x) = -\sqrt[4]{2x-3}$

(e) $f^{-1}(x) = (2x-1)^4 + 1$

**Megoldás.**

(a) $f(x) = \dfrac{5x+3}{2}$

(b) $f(x) = 1 - 3^x$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+2)^3 - \dfrac{3}{2}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{3}{2},\ x \leq 0$

(e) A függvény nem kölcsönösen egyértelmű, nem lehet inverzfüggvény.

**12. Feladat.** Mutasson példát olyan függvényre, amelynek inverze önmaga.

**Megoldás.**

$$f(x) = x, \qquad g(x) = -x, \qquad h(x) = \frac{a}{x},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

**13. Feladat.** Vizsgáljuk az alábbi függvények paritási tulajdonságait.

(a) $f(x) = x^2$
(b) $g(x) = 2 \cdot x^3$
(c) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{5}$
(d) $i(x) = -2x^4$
(e) $j(x) = -(2x)^4$
(f) $k(x) = \sqrt[4]{3x}$
(g) $l(x) = \sin(-x)$
(h) $m(x) = \cos(2x)$
(i) $n(x) = \operatorname{sgn} x$
(j) $o(x) = x \cdot \sin x$
(k) $p(x) = x^2 \cdot \sin x$
(l) $q(x) = x \cdot \cos x$
(m) $r(x) = x^2 \cdot \cos x$
(n) $s(x) = |x| - 7$
(o) $t(x) = \dfrac{1}{x} + x$
(p) $u(x) = 3^{2x} - 9^{-x}$

**Megoldás.**

(a) páros
(b) páratlan
(c) páratlan
(d) páros
(e) páros
(f) nincs paritása
(g) páratlan
(h) páros
(i) páratlan
(j) páros
(k) páratlan
(l) páratlan
(m) páros
(n) nincs paritása
(o) páratlan
(p) páratlan

**14. Feladat.** Mutasson példát olyan függvényre amely páros és páratlan is.

**Megoldás.** $f(x) = 0$

**15. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi periodikus függvények (alap)periódusát.

(a) $f(x) = \sin x$
(b) $g(x) = \cos(2x)$
(c) $h(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$
(d) $i(x) = \sin^2 x$
(e) $j(x) = |\cos x|$
(f) $k(x) = 1 - \cos^2 x$
(g) $l(x) = 1 - 2\cos^2 x$
(h) $m(x) = \sin x \cdot \cos x$
(i) $n(x) = \sin x + \cos x$
(j) $o(x) = \{x\}$
(k) $p(x) = 1$

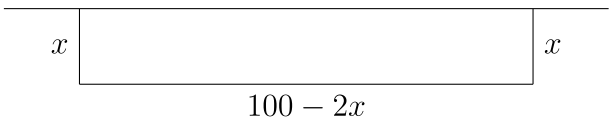
**Megoldás.**

(a) $2\pi$
(b) $\pi$
(c) $2\pi$
(d) $\pi$
(e) $\pi$
(f) $\pi$
(g) $\pi$
(h) $\pi$
(i) $2\pi$
(j) 1
(k) Periodikus, de nincs (alap)periódusa.

## Szélsőérték feladatok

**16. Feladat.** Egy ház fala mentén 100 m hosszú kerítéssel egy téglalap alakú részt szeretnénk lekeríteni. Mekkorának válasszuk a téglalap méreteit, hogy maximális területű lekerített részt kapjunk, ha a fal mentén nem kell kerítés? Mekkora az ily módon lekeríthető maximális terület?

**Megoldás.**




Az ábra jelöléseit alkalmazva a téglalap területe $t(x) = x \cdot (100 - 2x)$, ahol $0 < x < 50$. Keressük tehát az adott függvény szélsőértékeit (maximumát) az adott intervallumon. Ekkor

$$t(x) = x \cdot (100-2x) = -2x^2+100x = -2\cdot(x^2-50x) = -2\cdot((x-25)^2-625) = -2\cdot(x-25)^2+1250.$$

Mivel $(x - 25)^2 \geq 0$ és így $-2 \cdot (x - 25)^2 \leq 0$, és egyenlőség $x = 25$ esetén áll fenn, ezért $t(x)$ akkor maximális, ha $x = 25$. Ekkor a téglalap házfallal párhuzamos oldala 50 méter hosszú, míg a másik két oldala 25 méteres, a terület pedig 1250 m$^2$.

**17. Feladat.** Határozzuk meg a 40 cm kerületű téglalapok közül a maximális területűt.

**Megoldás.** Legyenek a téglalap oldalai $a$ és $b$. Ekkor $40 = 2a+2b$, azaz $b = \dfrac{(40 - 2a)}{2} = 20-a$. Keressük a $t(a) = a \cdot (20 - a)$ függvény maximumát, a $0 < a < 20$ intervallumon.

- *1. megoldás.* Ekkor

  $$t(a) = a \cdot (20 - a) \leq \left(\frac{a + 20 - a}{2}\right)^2 = 100,$$

  felhasználva a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $(a; 20 - a)$ tagokra. Így $t(a)$ pontosan akkor maximális, ha a fenti becslésben egyenlőség áll fenn, ami pontosan akkor van, ha $a = 20 - a$, vagyis $a = 10$. Ekkor $b = 10 = a$, vagyis a téglalap négyzet és $t(a) = 100$.

- *2. megoldás.* Ekkor

  $$t(a) = a \cdot (20 - a) = -a^2 + 20a = -(a - 10)^2 + 100.$$

  Mivel $-(a - 10)^2 \leq 0$, ezért $-(a - 10)^2$ és így $t(a)$ is pontosan akkor maximális, ha $-(a - 10)^2 = 0$, vagyis $a = 10$. Ekkor $b = 10 = a$, vagyis a téglalap négyzet és $t(a) = 100$.

(Ezzel tulajdonképpen beláttuk, hogy adott kerületű téglalapok között a négyzet területe a maximális.)

**18. Feladat.** Határozzuk meg a 100 egység területű téglalapok közül a minimális kerületűt.

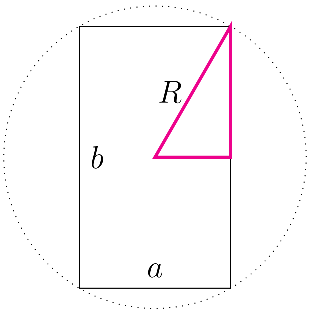
**Megoldás.** Legyenek a téglalap oldalai $a$ és $b$. Ekkor $t = ab$, vagyis $b = \dfrac{100}{a}$. Ekkor a $k(a) = 2\left(a + \dfrac{100}{a}\right)$ függvény minimumát keressük a $0 < a$ halmazon. Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $\left(a; \dfrac{100}{a}\right)$ tagokra. Ekkor

$$k(a) = 2\left(a + \frac{100}{a}\right) \geq 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{100}{a}} = 40.$$

Így $k(a)$ pontosan akkor minimális, ha a fenti becslésben egyenlőség áll fenn, ami pontosan akkor van, ha $a = \dfrac{100}{a}$, vagyis $a = 10$. Ekkor $b = \dfrac{100}{a} = 10 = a$, vagyis a téglalap négyzet. (Ezzel igazából beláttuk, hogy adott területű téglalapok között a négyzet kerülete a minimális.)

**19.* Feladat.** Írjunk adott körbe maximális területű téglalapot.

**Megoldás.**




Az ábra alapján

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}.$$

Jelölje a téglalap területét $t$. Ekkor $t = ab = a \cdot \sqrt{4R^2 - a^2} = \sqrt{(4R^2 - a^2) \cdot a^2}$. Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget a $(4R^2 - a^2; a^2)$ tagokra. Így

$$t = \sqrt{(4R^2 - a^2) \cdot a^2} \leq \frac{4R^2 - a^2 + a^2}{2} = 2R^2.$$

Ekkor $t$ pontosan akkor maximális, ha a fenti becslésben egyenlőség áll fenn, ami pontosan akkor van, ha $4R^2 - a^2 = a^2$, vagyis $a = \sqrt{2}R$. Ekkor $a = b$, vagyis a téglalap négyzet. (Ezzel tulajdonképpen beláttuk, hogy adott körbe írt téglalapok közül a négyzet területe a maximális.)

**20.* Feladat.** Egy téglatest egyik lapjának területe 1 dm$^2$, az élek hosszának összege 20 dm. Mekkora ezen téglatestek felszínének maximuma?

**Megoldás.** A szokásos jelölésekkel élve legyen a téglatest felszíne $A = 2(ab + bc + ca)$. Tudjuk, hogy $4a + 4b + 4c = 20$, ahonnan $a + b = 5 - c$, továbbá legyen $ab = 1$. Ekkor

$$A = 2(ab + bc + ca) = 2 + 2c(a + b) = 2 + 2c(5 - c) \leq 2 + 2\left(\frac{c + 5 - c}{2}\right)^2 = 2 + \frac{25}{2} = 14{,}5.$$

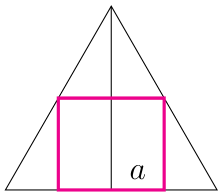
A becslés során a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmaztuk a $(c; 5-c)$ tagokra. A felszín pontosan akkor maximális, ha a fenti becslésben egyenlőség áll fenn, ami a $c = 5 - c$ egyenlet megoldásaként $c = a + b = 2{,}5$ esetén áll fenn. Az

$$\left.\begin{array}{rcl} ab & = & 1 \\ a+b & = & 2{,}5 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásaként ekkor $a = 2,\ b = \frac{1}{2}$, illetve $a = \frac{1}{2},\ b = 2$ adódik.

**21.* Feladat.** Mekkorák a 10 cm oldalhosszúságú szabályos háromszögbe írható legnagyobb területű téglalap oldalai?

**Megoldás.**



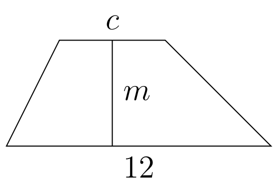

Az ábra jelöléseit használva a téglalap területe

$$t(a) = \sqrt{3}\cdot 2a\cdot(5-a) \le \sqrt{3}\cdot 2\cdot\left(\frac{a+5-a}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}\cdot 25}{2}.$$

A becslés során a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmaztuk az $(a; 5-a)$ tagokra. A terület pontosan akkor maximális, ha a fenti becslésben egyenlőség áll fenn, ami az $a = 5 - a$ egyenlet megoldásaként $a = 2{,}5$ esetén áll fenn.

**22.* Feladat.** Egy trapéz egyik alapja 12 cm, a másik alap és a trapéz magasságának összege 30 cm. Hogyan kell megválasztani a trapéz magasságát, hogy területe maximális legyen?

**Megoldás.**




Az ábra jelöléseit használva $m+c = 30$, azaz $c = 30-m$. Ekkor a téglalap területe $t = \frac{a+c}{2}\cdot m$, vagyis

$$t(m) = \frac{12+30-m}{2}\cdot m = \frac{1}{2}(42-m)m.$$

- *1. megoldás.*

$$t(m) = \frac{1}{2}(42-m)m = -\frac{1}{2}\left((m-21)^2 - 21^2\right) = -\frac{1}{2}(m-21)^2 + \frac{21^2}{2}$$

Ekkor $t(m)$ pontosan akkor maximális, ha $-\frac{1}{2}(m-21)^2$ maximális, vagyis $m = 21$.

- *2. megoldás.*

$$t(m) = \frac{1}{2}(42 - m)m \leq \frac{1}{2}\left(\frac{42 - m + m}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 21^2$$

A becslés során a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmaztuk az $(42 - m; m)$ tagokra. A terület pontosan akkor maximális, ha a fenti becslésben egyenlőség áll fenn, ami a $42 - m = m$ egyenlet megoldásaként $m = 21$ esetén áll fenn.

**23. Feladat.** Legyen $a + b = 50,\ \ a; b \in \mathbb{R}^+$. Határozzuk meg az $a^2 + b^2$ kifejezés

(a) minimumát, (b) maximumát.

**Megoldás.** A feltétel miatt

$$a^2 + b^2 = a^2 + (50 - a)^2 = 2a^2 - 100a + 2500 = 2\left(a^2 - 50a + 1250\right) = 2\left((a - 25)^2 + 625\right).$$

(a) A fenti kifejezés a minimumát az $a = 25$ pontban veszi fel, ekkor $a^2 + b^2 = 1250$.

(b) Maximum nincs.

**24. Feladat.** Egy 50 cm hosszú szakaszt két részre osztunk, majd az egyes részek mint oldalak fölé egy-egy négyzetet emelünk. Határozzuk meg a négyzetek területösszegének

(a) minimumát, (b) maximumát.

**Megoldás.** A megoldás ugyanaz, mint az előző feladatban, ha az egyik szakaszdarab hosszát $a$-val, a másik darab hosszát $b$-vel jelöljük.

**25. Feladat.** Hol vágjunk ketté egy 200 cm hosszú szalagot úgy, hogy az egyes részekből hajtható négyzetek területének összege minimális, illetve maximális legyen?

**Megoldás.** A megoldás ugyanaz, mint az előző feladatban.

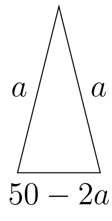
**26. Feladat.** Határozzuk meg az 50 cm kerületű egyenlő szárú háromszögek közül azt, amelyre minimális az oldalakra állítható négyzetek területének összege.

**Megoldás.**

A négyzetek területének összege

$$\begin{aligned} t(a) &= 2a^2 + (50 - a)^2 \\ &= 3a^2 - 100a + 2500 \\ &= 3\left(a^2 - \frac{100}{3}a + \frac{2500}{3}\right) \\ &= 3\left(\left(a - \frac{50}{3}\right)^2 + \frac{5000}{9}\right), \end{aligned}$$

ami pontosan akkor veszi fel a minimumát, ha $a = 50/3$.



**27. Feladat.** Bontsuk fel a 10-et két pozitív szám összegére úgy, hogy a tagok

(a) szorzata

(b) négyzetösszege

(c) négyzetének különbsége

(d) köbeinek összege

szélsőértéket vegyen fel.

**Megoldás.** Ha $x + y = 10$ és $x, y \in \mathbb{R}^+$, akkor

(a) az $xy$ kifejezés pontosan akkor maximális, ha $x = 5$, minimumát nem veszi fel;

(b) az $x^2 + y^2$ kifejezés pontosan akkor minimális, ha $x = 5$, maximumát nem veszi fel;

(c) az $x^2 - y^2$ kifejezés nem veszi fel sem a maximumát, sem a minimumát;

(d) az $x^3 + y^3$ kifejezés pontosan akkor minimális, ha $x = 5$, maximumát nem veszi fel.

**28. Feladat.** Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Határozzuk meg a befogók hosszát úgy, hogy a

(a) háromszög területe

(b) befogók hosszának összege

(c) befogók hosszának négyzetösszege maximális legyen.

**Megoldás.**

(a) A háromszög területe pontosan akkor maximális, ha a befogók $5\sqrt{2}$ cm hosszúak. Ekkor a terület 25 cm$^2$. A terület a minimumát nem veszi fel.

(b) A befogók összege pontosan akkor maximális, ha a befogók $5\sqrt{2}$ cm hosszúak.

(c) Bármely esetben a befogók hosszának négyzetösszege 100.

**29. Feladat.** Adottak a koordinátasíkon az $A(1; 6)$ és a $B(5; 9)$ pontok. Határozzuk meg az $x$ tengely azon $C$ pontját, melyre az $AC^2 + BC^2$ távolság-négyzetösszeg minimális.

**Megoldás.** A keresett pont koordinátáira a $c(x; 0)$ jelölést bevezetve az $(x-1)^2+36+(x-5)^2+81$ kifejezés minimumát keressük. Teljes négyzetté kiegészítve a $2(x - 3)^2 + 125$ alakot kapjuk, melynek minimuma $x = 2$ esetén van.

# Második zárthelyi dolgozat

A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos! Válaszait minden esetben részletesen indokolja, indoklás nélküli megoldásra nem jár pont. A feladatok megoldásához 100 perc áll rendelkezésre.

# Matematikai alapismeretek — 2. zh

Név: ______________________________

| Feladat: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max pont: | 14 | 16 | 14 | 16 | 20 | 20 | 100 |
| Elért pont: | | | | | | | |

1. Hány negatív egész megoldása van az alábbi egyenlőtlenségnek? [14]

$$\sqrt{x^2+2x+1}-x\leq 3$$

2. Oldja meg az alábbi logaritmusos egyenletet a valós számok halmazán. [16]

$$\log_x 8-\log_{2x}16=\log_{4x}8$$

3. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenletet a valós számok halmazán. [14]

$$\operatorname{ctg} x+3\cdot\operatorname{tg} x-5\cdot\frac{1}{\sin x}=0$$

4. Igazoljuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontjának a háromszög bármely oldalától vett távolsága feleakkora, mint az ugyanezen oldalhoz tartozó magasságnak a csúcs és a magasságpont közé eső szakasza. [16]

5. A síkság egy pontjából nézve két egymás mögötti hegy azonos irányban van. A közelebbi hegycsúcs $22°45'$, míg a távolabbi hegycsúcs $38°28'$ emelkedési szögben látszik. Ha 450 métert megyünk a hegyek felé, akkor a két hegycsúcs közös emelkedési szöge $47°24'$. Milyen magasan vannak a hegycsúcsok a síkság felett és mekkora a hegycsúcsok távolsága légvonalban? [20]

6. (a) Határozza meg az $f\colon [3;5]\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^2-6x+10$ függvény inverzének hozzárendelési szabályát, értelmezési tartományát, valamint értékkészletét. [10]

   (b) Határozza meg az $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$ függvény paritását. [5]

   (c) Adja meg az $f(x)=-2\cdot\operatorname{ctg}(-2x)$ függvény (legkisebb pozitív) periódusát. [5]

# Matematikai alapismeretek — 2. zh

Név: ____________________

| Feladat: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max pont: | 14 | 16 | 14 | 16 | 20 | 20 | 100 |
| Elért pont: | | | | | | | |

1. Hány negatív egész megoldása van az alábbi egyenlőtlenségnek? [14]

$$\sqrt{x^2+2x+1} - x \leq 3$$

**Megoldás.**

- $\sqrt{x^2+2x+1} = |x+1|$ 2 pont
- Ha $x \geq -1$, akkor $|x+1| = x+1$. 1 pont
- Ekkor egyenlőtlenségünk $x+1 \leq 3+x$ alakban írható. 1 pont
- Ez azonosság. 1 pont
- Innen $x \in [-1; \infty[$ . $(\star)$ 1 pont
- Ha $x < -1$, akkor $|x+1| = -x-1$. 1 pont
- Ekkor egyenlőtlenségünk a $-x-1 \leq 3+x$ alakba írható. 1 pont
- Innen $-2 \leq x$. 1 pont
- Ekkor az $x < -1$ és a $-2 \leq x$ halmazok metszetéből 1 pont
- $x \in [-2; -1[$ adódik $(\star\star)$. 1 pont
- Ekkor a $(\star)$ és $(\star\star)$ halmazok uniójából 1 pont
- $x \in [-2; \infty[$ adódik. 1 pont
- Így az egyenlőtlenségnek két negatív egész megoldása van. 1 pont

2. Oldja meg az alábbi logaritmusos egyenletet a valós számok halmazán. [16]

$$\log_x 8 - \log_{2x} 16 = \log_{4x} 8$$

**Megoldás.**

- Az egyenletben szereplő kifejezések értelmezési tartománya: $x > 0;\ x \neq 1$. 1 pont
- Térjünk át kettes alapú logaritmusra:

$$\frac{\log_2 8}{\log_2 x} - \frac{\log_2 16}{\log_2 2x} = \frac{\log_2 8}{\log_2 4x}.$$

2 pont

# Matematikai alapismeretek — 2. zh

- Átalakítva, a logaritmus megfelelő azonosságait felhasználva a
$$\frac{\log_2 8}{\log_2 x} - \frac{\log_2 16}{\log_2 2 + \log_2 x} = \frac{\log_2 8}{\log_2 4 + \log_2 x}$$
alakhoz jutunk. 2 pont
- Ekkor a $\log_2 x = a$ helyettesítéssel 1 pont
- a
$$\frac{3}{a} - \frac{4}{1+a} = \frac{3}{2+a}$$
egyenletet kapjuk. 1 pont
- A nevezőkkel beszorozva és a megfelelő átalakításokkal a $4a^2 + 2a - 6 = 0$ alakot kapjuk. 2 pont
- Ennek megoldásai $a_1 = 1$ és $a_2 = -\frac{3}{2}$. 2 pont
- Innen a $\log_2 x = 1$ egyenletből a logaritmus definícióját felhasználva $x_1 = 2$, 2 pont
- míg a $\log_2 x = -\frac{3}{2}$ egyenletből $x_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}$. 2 pont
- Behelyettesítéssel ellenőrizve mindkét érték megfelelő. 1 pont

3. Oldjuk meg az alábbi trigonometrikus egyenletet a valós számok halmazán. [14]
$$\operatorname{ctg} x + 3 \cdot \operatorname{tg} x - 5 \cdot \frac{1}{\sin x} = 0$$

**Megoldás.**

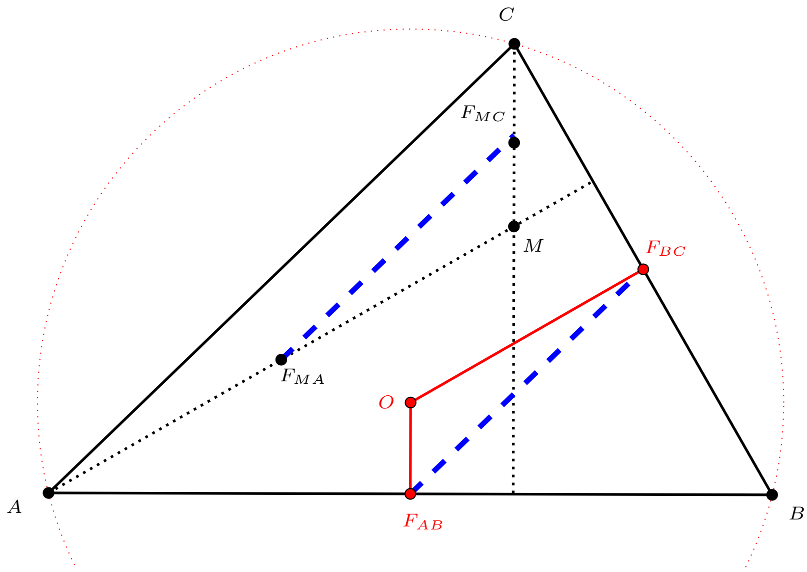
- Az egyenletben szereplő kifejezések értelmezési tartománya
$$x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \; x \neq l \cdot \pi, \quad k, l, \in \mathbb{Z}.$$
1 pont
- Mivel $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, illetve $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 1 pont
- ezért $\sin x \cdot \cos x$-szel beszorozva 1 pont
- a $\cos^2 x + 3 \cdot \sin^2 x - 5\cos x = 0$ alakhoz jutunk. 2 pont
- Ekkor, mivel $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, 1 pont
- a $-2\cos^2 x - 5 \cdot \sin^2 x + 3 = 0$ egyenletet kapjuk. 1 pont
- Innen a $\cos x = a$ helyettesítéssel 1 pont
- a $-2a^2 - 5a + 3 = 0$ másodfokú egyenlet 1 pont
- megoldásai $a_1 = -3$ és $a_2 = \frac{1}{2}$. 2 pont
- A $\cos x = -3$ egyenletnek nincs valós megoldása, 1 pont
- a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletből pedig $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2 \cdot m \cdot \pi, \; m \in \mathbb{Z}$ adódik. 1 pont
- Ezen értékek mindegyike megoldása az eredeti egyenletnek. 1 pont

## Matematikai alapismeretek — 2. zh

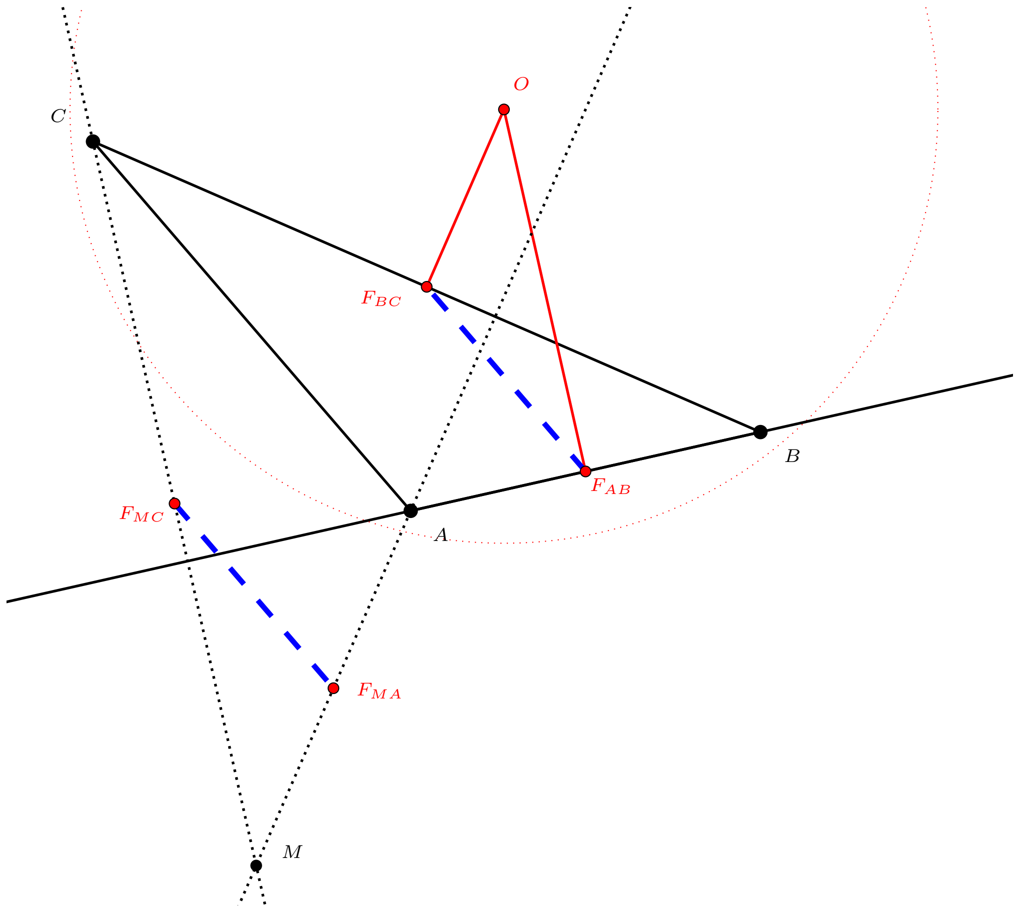
4. Igazoljuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontjának a háromszög bármely oldalától vett távolsága feleakkora, mint az ugyanezen oldalhoz tartozó magasságnak a csúcs és a magasságpont közé eső szakasza. [16]

**Megoldás.**

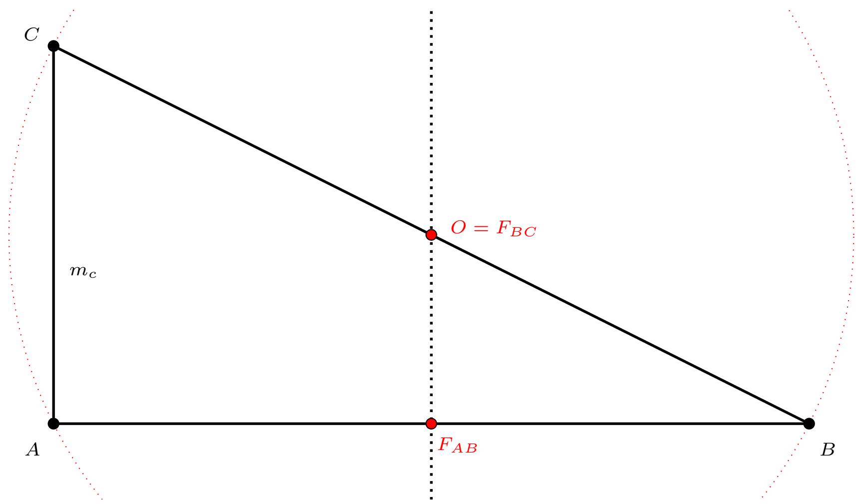
- Tekintsük az alábbi ábrát ahol $M$ a háromszög magasságpontja, $O$ a köré írt kör középpontja, $F_{XY}$ pedig a megfelelő $XY$ szakasz felezőpontját jelöli. 4 pont




- Az összefüggést az $AB$ oldalhoz tartozó magasságra bizonyítjuk, hasonlóan elvégezhető a többire is. Ekkor az $F_{MA}F_{MC}$ és az $F_{AB}F_{BC}$ szakaszok párhuzamosak és egyenlők, mert mindkettő az $AC$ oldalhoz tartozó középvonal az $AMC$, illetve $ABC$ háromszögben. 2 pont
- Így az $MF_{MA}F_{MC}$ és $OF_{AB}F_{BC}$ háromszögek egybevágóak, mert oldalaik párhuzamosak, és egy oldaluk azonos hosszúságú. 2 pont
- Így az egymásnak megfelelő oldalak hossza egyenlő, vagyis például $OF_{AB} = MF_{MC} = MC/2$. 2 pont
- A bizonyítás hasonlóan elvégezhető tompaszögű háromszögben is. 2 pont




- Derékszögű háromszög esetére pedig tekintsük a következő ábrát. 2 pont




- Ekkor egyszerűen látható, hogy $OF_{AB}$ középvonal az $ABC$ háromszögben, így

$$F_{AB}F_{BC} = AC/2 = \frac{m_c}{2}.$$

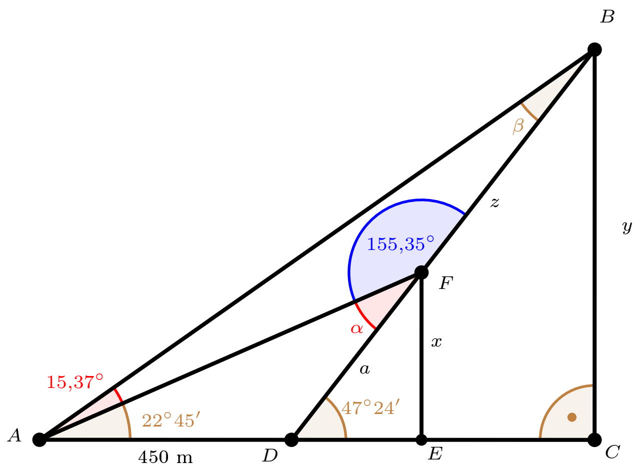
2 pont

## Matematikai alapismeretek — 2. zh

5. A síkság egy pontjából nézve két egymás mögötti hegy azonos irányban van. A közelebbi hegycsúcs $22°45'$, míg a távolabbi hegycsúcs $38°28'$ emelkedési szögben látszik. Ha 450 métert megyünk a hegyek felé, akkor a két hegycsúcs közös emelkedési szöge $47°24'$. Milyen magasan vannak a hegycsúcsok a síkság felett és mekkora a hegycsúcsok távolsága légvonalban? [20]

**Megoldás.**

- Tekintsük az alábbi ábrát. 4 pont




- A megadott szögekből $\alpha$, illetve $\beta$ egyszerűen meghatározható: 1 pont
- $\alpha = 24{,}65°$, $\beta = 8{,}94°$. 2 pont
- Az $ADF$ háromszögben felírt szinusztételből 1 pont
- $a \approx 417{,}24$ m. 2 pont
- A $DEF$ háromszögben a szinusz szögfüggvény definícióját felhasználva 1 pont
- $x \approx 307{,}13$ m, ez az első hegycsúcs magassága. 2 pont
- Az $ADB$ háromszögben felírt szinusztételből 1 pont
- $z = 1383{,}83$ m, ez a hegycsúcsok légvonalban mért távolsága. 2 pont
- A $DEF$ és $DCB$ háromszögek hasonlóságát felhasználva 2 pont
- $y = 1327$ m adódik, ez a másik hegycsúcs magassága. 2 pont

6. (a) Határozza meg az $f\colon [3;5] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 6x + 10$ függvény inverzének hozzárendelési szabályát, értelmezési tartományát, valamint értékkészletét. [10]

(b) Határozza meg az $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$ függvény paritását. [5]

(c) Adja meg az $f(x) = -2 \cdot \operatorname{ctg}(-2x)$ függvény (legkisebb pozitív) periódusát. [5]

**Megoldás.**

(a)
- Teljes négyzetté alakítás: $f(x) = x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$. 2 pont
- A $[3;5]$ halmazon ennek a függvénynek az értékkészlete $[1;5]$. 2 pont

## Matematikai alapismeretek — 2. zh

- Ezen a halmazon a függvény szigorú monoton növő, tehát van inverze. 2 pont
- Az inverz értelmezési tartománya: $D_{f^{-1}} = [1;5]$ . 2 pont
- Az inverz értékkészlete: $R_{f^{-1}} = [3;5]$ . 2 pont

(b)
- A függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ , ez a halmaz origóra szimmetrikus. 1 pont
- Tekintsük a függvény $-x$ helyen felvett helyettesítési értékét, ami

$$f(-x) = \frac{1}{-x+1} - \frac{1}{-x-1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = f(x).$$

3 pont

- Ebből következik, hogy a függvény páros. 1 pont

(c)
- A függvény periódusát a változóérték-transzformáció változtatja csak meg, 1 pont
- ami jelen esetben a felére csökkenti, 1 pont
- így a függvény periódusa $p = \dfrac{\pi}{2}$. 3 pont

# 9 | Számsorozatok

## Számsorozatok megadása, rekurzív és explicit alakok

**1. Feladat.** Folytassuk az alábbi sorozatokat néhány további taggal, illetve adjuk meg a sorozatok (egy lehetséges) általános tagját.

(a) $2;\ 2;\ 2;\ \dots$

(b) $3;\ 7;\ 11;\ 15;\ \dots$

(c) $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\dots$

(d) $5;\ 10;\ 20;\ 40;\ \dots$

(e) $7;\ 15;\ 31;\ 63;\ \dots$

(f) $2;\ 7;\ 2;\ 7;\ 2;\ 7;\ \dots$

(g) $2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ \dots$

(h) $0;\ 1;\ 4;\ 9;\ 16;\ \dots$

(i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$

(j) $16;\ -8;\ 4;\ -2;\ 1;\ \dots$

(k) $1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ \dots$

(l) $0;\ 10;\ 1110;\ 3110;\ \dots$

**2. Feladat.** Adjuk meg az alábbi sorozatok első néhány tagját.

(a) $a_n = 5n + 2$

(b) $b_n = 3^n - 7$

(c) $c_n = 2 \cdot (-1)^n$

(d) $d_n = \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{4}\right)$

(e) $f_n = n^2 + 3n - 1$

(f) $g_n = 10 \cdot (-1)^n - 15 \cdot (-1)^{n+1}$

(g) $h_n = \log_3(\sqrt[3]{3^n})$

(h) $i_n = \dfrac{n^2 - 25}{n + 5}$

(i) $j_n = 3$

(j) $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$

(k) $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x - 1$

(l) $e_1 = 1,\ e_2 = 2,\ e_3 = 4,\ e_{n+3} = 2e_n - e_{n+1} + 3e_{n+2},\ n \in \mathbb{Z}^+$

**3. Feladat.** Határozzuk meg az $A$ és $B$ paraméterek értékét, ha az $a_n = A \cdot n + B$ sorozat második tagja 7, hetedik tagja pedig 22.

**4. Feladat.** Adjuk meg általános tagjával azt a sorozatot melynek $n$. tagja az $n$. nemnegatív, 3-mal osztva kettő maradékot adó szám. Hányadik tagja a sorozatnak a 179? És a 256?

**5. Feladat.** Adjuk meg az alábbi sorozatok értékkészletét.

(a) $a_n = -2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot (-1)^{n+1}$

(b) $b_n = \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$

(c) $c_n = 12^n$ utolsó számjegye

(d) $d_n = \left[\dfrac{25}{2n}\right]$

**6.* Feladat.** Határozzuk meg az alábbi sorozatok általános tagjának (egy) explicit és rekurzív alakját.

(a) $5;\ 5;\ 5;\ 5;\ 5;\ \ldots$

(b) $-5;\ 5;\ -5;\ 5;\ -5;\ \ldots$

(c) $3;\ 5;\ 3;\ 5;\ 3;\ \ldots$

(d) $4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ \ldots$

(e) $1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots$

(f) $1;\ 2;\ 5;\ 10;\ 17;\ \ldots$ (A szomszédos tagok különbségei számtani sorozatot alkotnak.)

(g) $\sqrt{3};\ \sqrt{7};\ \sqrt{11};\ \sqrt{15};\ \ldots$ (Számtani sorozat tagjaiból vontunk négyzetgyököt.)

(h) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{11};\ \ldots$ (Számtani sorozat tagjainak reciprokai.)

**7.* Feladat.** Adjuk meg az alábbi explicit módon megadott sorozatok egy rekurzív alakját.

(a) $a_n = 2n - 5$

(b) $b_n = 2 \cdot 3^n$

(c) $c_n = n^2$

(d) $d_n = n!$

(e) $e_n = \frac{3n+1}{n}$

**8. Feladat.** Adjuk meg az alábbi rekurzív módon megadott sorozatok egy explicit alakját.

(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(b) $b_1 = 1,\ \frac{b_{n+1}}{b_n} = 3,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(c) $c_1 = 1,\ \frac{c_{n+1}}{c_n} = c_n,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(d) $d_1 = 2,\ d_2 = 3; d_{n+2} = \frac{(d_{n+1})^2}{d_n},\ n \in \mathbb{Z}^+$

# Számtani sorozatok

**9. Feladat.** Folytassuk az alábbi sorozatokat úgy, hogy számtani sorozatot kapjunk. Adjuk meg a számtani sorozat differenciáját is.

(a) $2;\ 2;\ \ldots$

(b) $2;\ 3;\ \ldots$

(c) $1;\ -1;\ \ldots$

(d) $\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \ldots$

(e) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots$

(f) $\sin\pi;\ \sin(2\pi);\ \ldots$

(g) $\lg 2;\ \lg 3;\ \ldots$

**10. Feladat.** Válasszuk ki az alábbi sorozatok közül a számtani sorozatokat.

(a) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n+1}$

(b) $b_n = \frac{n^2 + n}{n+1}$

(c) $c_n = 2^n - 2^{n-1}$

(d) $d_n = \frac{3n+2}{4}$

(e) $e_n = \frac{2n+1}{n}$

(f) $f_n = 8$

(g) $g_1 = 5,$
$g_{n+1} - g_n = 6,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(h) $h_n = \sin(n\pi) + 2$

**11. Feladat.** Igaz-e, hogy egy számtani sorozat minden $k$. tagja ($k \in \mathbb{Z}^+,\ k > 1$) is számtani sorozatot alkot?

**12. Feladat.** Miért „számtani” a számtani sorozat?

**13. Feladat.** Egy számtani sorozat ötödik tagja 44, tizedik tagja 79. Határozzuk meg a sorozat általános tagját.

**14. Feladat.** Egy számtani sorozat tizedik tagja 25, huszonötödik tagja 70. Adjuk meg a sorozat első tagját, differenciáját, századik tagját, első 125 tagjának az összegét, valamint határozzuk meg, hogy a sorozat hány tagja esik 1000 és 2000 közé (a határokat is beleértve).

**15. Feladat.** Igazoljuk, hogy minden számtani sorozat felírható $a_n = An+B$ alakban, alkalmas $A$ és $B$ valós számokkal.

**16. Feladat.** Iktassunk be a 7 és az 57 közé

(a) 9 (b) 4 (c) 1

tagot, hogy a megadottakkal együtt számtani sorozatot alkossanak.

**17. Feladat.**

(a) Töltsünk ki egy $3 \times 3$-as bűvös négyzetet a $3; 8; 13; 18; 23; 28; 33; 38; 43$ számokkal.

(b) Igazoljuk, hogy ha kilenc szám számtani sorozatot alkot, akkor azokkal mindig kitölthető egy $3 \times 3$-as bűvös négyzet.

**18. Feladat.** Egy számtani sorozat negyedik tagja 5. Határozzuk meg az első 7 tag összegét.

**19. Feladat.** Egy számtani sorozat első három tagjának összege 33, szorzatuk 1232. Határozzuk meg azt a három tagot.

**20. Feladat.** Egy számtani sorozat első két tagjának négyzetösszege 74, második és harmadik tagjának négyzetösszege 130. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a differenciát.

**21. Feladat.** Határozzuk meg az $S = 1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + \ldots - 2019$ összeget.

**22. Feladat.** Összeszoroztuk az 5 első 2019 pozitív egész kitevős hatványát. Hány jegyű számot kaptunk?

**23. Feladat.** Egy színház nézőtere trapéz alakú, az első sorban 12 szék van, majd minden továbbiban kettővel több, mint az előzőben.

(a) Hány fő befogadására alkalmas a nézőtér, ha összesen 20 sor van?

(b) Hány sor van, ha 1610 néző teljesen megtölti a nézőteret?

**24. Feladat.** Összeadtuk 3-tól kezdve a 3-mal osztható pozitív egész számokat. Legalább hány tagot adtunk össze, ha az összeg ötjegyű lett?

**25. Feladat.** Egy számtani sorozatban $a_1 = -74; a_n = 290$, a közbülső tagok összege 1404. Határozzuk meg $n$ értékét.

**26. Feladat.** Peti egy 1018 oldalas könyv olvasásba kezdett bele. Az első nap 17 oldalt olvas ki, majd minden nap 5-tel többet, mint az előzőn.

(a) Hány nap alatt olvassa ki a könyvet?

(b) Hány oldalt olvas az utolsó napon?

## Mértani sorozatok, alkalmazások

**27. Feladat.** Folytassuk az alábbi sorozatokat úgy, hogy mértani sorozatot kapjunk. Adjuk meg a mértani sorozat hányadosát is.

(a) $2;\ 2;\ \ldots$

(b) $2;\ 4;\ \ldots$

(c) $1;\ -1;\ \ldots$

(d) $7;\ 0;\ \ldots$

(e) $0;\ 6;\ \ldots$

(f) $\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \ldots$

(g) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots$

(h) $\frac{2}{3};\ -\frac{3}{2};\ \ldots$

(i) $\cos\pi;\ \cos 2\pi;\ \ldots$

(j) $\lg 2;\ \lg 3;\ \ldots$

**28. Feladat.** Válasszuk ki az alábbi sorozatok közül a mértani sorozatokat.

(a) $a_n = 2^n$

(b) $b_n = \dfrac{3^{2n}}{5^{n-1}}$

(c) $c_n = 2^n - 2^{n-1}$

(d) $d_n = \dfrac{3n+2}{4}$

(e) $e_n = \dfrac{1}{n}$

(f) $f_n = 8$

(g) $g_1 = 5,\ \dfrac{g_{n+1}}{g_n} = 6,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(h) $h_n = \cos n\pi$

**29. Feladat.** Igaz-e, hogy egy mértani sorozat minden $k$. tagja $(k \in \mathbb{Z}^+,\ k > 1)$ is mértani sorozatot alkot?

**30. Feladat.** Miért „mértani” a mértani sorozat?

**31. Feladat.** Egy mértani sorozat harmadik tagja 40, hatodik tagja 320. Határozzuk meg a sorozat általános tagját.

**32. Feladat.** Egy mértani sorozat harmadik tagja 6, kilencedik tagja 162. Adjuk meg a sorozat első tagját, hányadosát, huszonegyedik tagját, első húsz tagjának az összegét, valamint határozzuk meg, hogy a sorozat hány tagja esik 1000 és 2000 közé (a határokat is beleértve).

**33. Feladat.** Iktassunk be a $\frac{2}{9}$ és a 13122 közé

(a) 9

(b) 4

(c) 1

tagot, hogy a megadottakkal együtt mértani sorozatot alkossanak.

**34.* Feladat.** Kitöltöttünk egy ötöslottószelvényt (az 1-90 számok közül bejelöltünk 5-öt) úgy, hogy a bejelölt számok egy egynél nagyobb hányadosú mértani sorozatot alkotnak. Hányféleképpen tehettük ezt meg?

**35. Feladat.** Egy háromszög oldalainak hosszai egy mértani sorozat egymást követő elemei. Milyen határok közé eshet a sorozat hányadosa?

**36. Feladat.** Egy mértani sorozat negyedik tagja 5. Határozzuk meg az első 7 tag szorzatát.

**37. Feladat.** Egy mértani sorozatban az első két tag összege 8, a második és harmadik tag összege 24. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

**38. Feladat.** Egy mértani sorozatban az első és a harmadik tag összege 20, az ötödik és harmadik tag különbsége 144. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

**39. Feladat.** Egy mértani sorozatban a negyedik és az első tag különbsége 52, az második és az első tag különbsége 4. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

**40. Feladat.** Egy mértani sorozat első hét tagját tekintve az első három tag összege 26, míg az utolsó három összege 2106. Mennyi a hét tag összege?

**41. Feladat.** Egy mértani sorozat első három tagjának összege 26, az első három tag szorzata pedig 216. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

**42. Feladat.** Egy 60°-os szögtartományba a szögszárakat és egymást is érintő köröket írtunk. Határozzuk meg a szomszédos körök sugarainak arányát.

**43.* Feladat.** Adjunk (explicit) képletet az alábbi sorozatok általános tagjára.

(a) 1; 11; 111; 1111; ...

(b) 53; 553; 5553; ...

(c) 23; 2233; 222333; ...

**44. Feladat.** Három pozitív egész szám egyszerre egymás utáni három tagja egy számtani és egy mértani sorozatnak is. Határozzuk meg a hiányzó két számot, ha a három szám egyike a 6.

**45. Feladat.** Három szám számtani sorozatot egymás utáni három tagja, összegük 30. Ha az utolsót öttel megnöveljük, egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Határozzuk meg ezt a három számot.

**46. Feladat.** Három szám egy számtani sorozatot szomszédos elemei, összegük 51. Ha az elsőt kilenccel a másodikat eggyel megnöveljük, a harmadikat néggyel csökkentjük, egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Határozzuk meg ezt a három számot.

**47. Feladat.** Három szám mértani sorozatot alkot, összegük 26. Ha az elsőhöz egyet hozzáadunk, a harmadikból kilencet elveszünk, egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk. Határozzuk meg ezt a három számot.

**48.* Feladat.** Egy mértani sorozat első hat tagjának összege 728; az első hat tag közül ha a páros indexűek összegéből levonjuk a páratlan indexűek összegét 364-et kapunk. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a hányadosát.

**49.* Feladat.** Egy mértani sorozatban $a_1 + a_3 + a_5 = 182$, $a_2 + a_4 = 60$. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a hányadosát.

**50. Feladat.** Egy gyár termelése havonta 3%-kal nő.

(a) Hány százalékkal nő a termelés egy év alatt?

(b) Mennyi idő alatt háromszorozódik meg a termelés?

**51. Feladat.** Ha egy számítógépet megvásárolunk, értéke a kicsomagolás és az első használatbavétel okán 20%-kal csökken. Ezután a gép minden hónapban 5%-ot veszít értékéből.

(a) Hány százalékkal csökken az értéke egy év alatt?

(b) Hány év alatt csökken a gép értéke az eredeti értéke negyedére?

**52. Feladat.** Egy 10 literes oldat 80%-os. Kimerünk belőle 5 decilitert és a helyére vizet teszünk, majd elkeverjük. (A feladat megoldásánál a folyamat során bekövetkező térfogatcsökkenéstől eltekintünk.)

(a) A fenti eljárást tízszer végrehajtva hány százalékos oldatot kapjunk?

(b) Hányszor kell a fenti eljárást megismételnünk, hogy az oldat töménysége 10% alá csökkenjen?

# Megoldások

## Számsorozatok megadása, rekurzív és explicit alakok

**1. Feladat.** Folytassuk az alábbi sorozatokat néhány további taggal, illetve adjuk meg a sorozatok (egy lehetséges) általános tagját.

(a) $2;\ 2;\ 2;\ \ldots$

(b) $3;\ 7;\ 11;\ 15;\ \ldots$

(c) $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ldots$

(d) $5;\ 10;\ 20;\ 40;\ \ldots$

(e) $7;\ 15;\ 31;\ 63;\ \ldots$

(f) $2;\ 7;\ 2;\ 7;\ 2;\ 7;\ \ldots$

(g) $2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ \ldots$

(h) $0;\ 1;\ 4;\ 9;\ 16;\ \ldots$

(i) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \ldots$

(j) $16;\ -8;\ 4;\ -2;\ 1;\ \ldots$

(k) $1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ \ldots$

(l) $0;\ 10;\ 1110;\ 3110;\ \ldots$

**Megoldás.**

(a) $2;\ 2;\ 2;\ \ldots \qquad a_n = 2$

(b) $19;\ 23;\ 27;\ \ldots \qquad b_n = 4n - 1$

(c) $-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ \ldots \qquad c_n = (-1)^{n+1}$

(d) $80;\ 160;\ 320;\ \ldots \qquad d_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

(e) $127;\ 255;\ \ldots \qquad e_1 = 7,\ e_{n+1} = 2e_n + 1,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(f) $2;\ 7;\ 2;\ 7;\ 2;\ 7;\ \ldots \qquad f_{2k-1} = 2,\ f_{2k} = 7,\ k \in \mathbb{Z}^+$

(g) $19;\ 23;\ 29;\ 31;\ \ldots \qquad g_n$ az $n$. prímszám

(h) $25;\ 36;\ 49;\ \ldots \qquad h_n = (n-1)^2$

(i) $\frac{5}{6};\ \frac{6}{7};\ \frac{7}{8};\ \ldots \qquad j_n = \frac{n}{n+1}$

(j) $-\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \ldots \qquad j_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5} \cdot (-1)^{n+1}$

(k) $13;\ 21;\ 34;\ 55;\ \ldots \qquad i_1 = i_2 = 1,\ i_{n+2} = i_{n+1} + i_n,\ n \in \mathbb{Z}^+$ (Fibonacci-sorozat)

(l) $132110;\ 1113122110;\ \ldots$ Nézd és mondd sorozat: hány darab milyen jegyet látunk?

**2. Feladat.** Adjuk meg az alábbi sorozatok első néhány tagját.

(a) $a_n = 5n + 2$

(b) $b_n = 3^n - 7$

(c) $c_n = 2 \cdot (-1)^n$

(d) $d_n = \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{4}\right)$

(e) $f_n = n^2 + 3n - 1$

(f) $g_n = 10 \cdot (-1)^n - 15 \cdot (-1)^{n+1}$

(g) $h_n = \log_3(\sqrt[3]{3^n})$

(h) $i_n = \frac{n^2 - 25}{n + 5}$

(i) $j_n = 3$

(j) $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$

(k) $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x - 1$

(l) $e_1 = 1,\ e_2 = 2,\ e_3 = 4,\ e_{n+3} = 2e_n - e_{n+1} + 3e_{n+2},\ n \in \mathbb{Z}^+$

**Megoldás.**

(a) $7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ 32,\ \dots$

(b) $-4,\ 2,\ 20,\ 74,\ 236,\ 722,\ \dots$

(c) $-2,\ 2,\ -2,\ 2,\ -2,\ 2,\ \dots$

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \dots$

(e) $3,\ 9,\ 17,\ 27,\ 39,\ 53,\ 69,\ 87,\ 107,\ \dots$

(f) $-25,\ 25,\ -25,\ 25,\ -25,\ \dots$

(g) $\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2,\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{3},\ 3,\ \dots$

(h) $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots$

(i) $3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \dots$

(j) $0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ 48,\ 63,\ 80,\ \dots$

(k) $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127, 255, 511,\ \dots$

(l) $1,\ 2,\ 4,\ 12,\ 36,\ 104,\ 300,\ 868,\ \dots$

**3. Feladat.** Határozzuk meg az $A$ és $B$ paraméterek értékét, ha az $a_n = A \cdot n + B$ sorozat második tagja 7, hetedik tagja pedig 22.

**Megoldás.** $A = 3,\ B = 1$

**4. Feladat.** Adjuk meg általános tagjával azt a sorozatot melynek $n$. tagja az $n$. nemnegatív, 3-mal osztva kettő maradékot adó szám. Hányadik tagja a sorozatnak a 179? És a 256?

**Megoldás.** A sorozat általános tagja $a_n = 3n - 1$. A 179 a sorozat 60. tagja, a 256 pedig nem tagja a sorozatnak.

**5. Feladat.** Adjuk meg az alábbi sorozatok értékkészletét.

(a) $a_n = -2 \cdot (-1)^n + 2 \cdot (-1)^{n+1}$

(b) $b_n = \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$

(c) $c_n = 12^n$ utolsó számjegye

(d) $d_n = \left[\frac{25}{2n}\right]$

**Megoldás.**

(a) $\{4, -4\}$

(b) $\{1, 0, -1\}$

(c) $\{2, 4, 6\}$

(d) $\{12, 6, 4, 3, 2, 1, 0\}$

**6.* Feladat.** Határozzuk meg az alábbi sorozatok általános tagjának (egy) explicit és rekurzív alakját.

(a) $5;\ 5;\ 5;\ 5;\ 5;\ \ldots$

(b) $-5;\ 5;\ -5;\ 5;\ -5;\ \ldots$

(c) $3;\ 5;\ 3;\ 5;\ 3;\ \ldots$

(d) $4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ \ldots$

(e) $1;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots$

(f) $1;\ 2;\ 5;\ 10;\ 17;\ \ldots$ (A szomszédos tagok különbségei számtani sorozatot alkotnak.)

(g) $\sqrt{3};\ \sqrt{7};\ \sqrt{11};\ \sqrt{15};\ \ldots$ (Számtani sorozat tagjaiból vontunk négyzetgyököt.)

(h) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{11};\ \ldots$ (Számtani sorozat tagjainak reciprokai.)

**Megoldás.**

(a) $a_n = 5, \qquad a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(b) $b_n = (-1)^n \cdot 5, \qquad b_1 = -5,\ b_{n+1} = -b_n,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(c) $c_n = 4 + (-1)^n, \qquad c_1 = 3,\ c_{n+1} = c_n + 2 \cdot (-1)^{n+1},\ n \in \mathbb{Z}^+$

(d) $d_n = 2n + 2, \qquad d_1 = 4,\ d_{n+1} = d_n + 2,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(e) $e_n = 3^{n-1}, \qquad e_1 = 1,\ e_{n+1} = 3e_n,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(f) $f_n = (n-1)^2 + 1, \qquad f_1 = 1,\ f_{n+1} = 2n - 1 + f_n,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(g) Egyrészt $g_n = \sqrt{4n-1}$, illetve a $\dfrac{g_{n+1}}{g_n} = \sqrt{\dfrac{4n+3}{4n+1}}$ egyenletből

$$g_1 = \sqrt{3},\ g_{n+1} = g_n \cdot \sqrt{\frac{4n+3}{4n+1}},\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

(h) Egyrészt $h_n = \dfrac{1}{3n-1}$, illetve a $\dfrac{h_{n+1}}{h_n} = \dfrac{\frac{1}{3n+2}}{\frac{1}{3n-1}}$ egyenlőségből

$$h_1 = \frac{1}{2},\ h_{n+1} = h_n \cdot \frac{3n-1}{3n+2},\ n \in \mathbb{Z}^+.$$

**7.* Feladat.** Adjuk meg az alábbi explicit módon megadott sorozatok egy rekurzív alakját.

(a) $a_n = 2n - 5$

(b) $b_n = 2 \cdot 3^n$

(c) $c_n = n^2$

(d) $d_n = n!$

(e) $e_n = \dfrac{3n+1}{n}$

**Megoldás.**

(a) $a_1 = -3,\ a_{n+1} = a_n + 2,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(b) $b_1 = 6,\ b_{n+1} = 3b_n,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(c) $c_1 = 1,\ c_{n+1} = c_n + 2n + 1,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(d) $d_1 = 1,\ d_{n+1} = d_n(n+1),\ n \in \mathbb{Z}^+$

(e) Egyrészt $e_1 = 4$ és $e_{n+1} - e_n = \dfrac{3n+4}{n+1} - \dfrac{3n+1}{n}$ alapján $e_{n+1} = e_n - \dfrac{1}{n(n+1)},\ n \in \mathbb{Z}^+$.

**8. Feladat.** Adjuk meg az alábbi rekurzív módon megadott sorozatok egy explicit alakját.

(a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(b) $b_1 = 1,\ \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 3,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(c) $c_1 = 1,\ \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = c_n,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(d) $d_1 = 2,\ d_2 = 3; d_{n+2} = \dfrac{(d_{n+1})^2}{d_n},\ n \in \mathbb{Z}^+$

**Megoldás.**

(a) $a_n = 3n - 2$

(b) $b_n = 3^{n-1}$

(c) $c_n = 1$

(d) $d_1 = 2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

# Számtani sorozatok

**9. Feladat.** Folytassuk az alábbi sorozatokat úgy, hogy számtani sorozatot kapjunk. Adjuk meg a számtani sorozat differenciáját is.

(a) $2;\ 2;\ \ldots$

(b) $2;\ 3;\ \ldots$

(c) $1;\ -1;\ \ldots$

(d) $\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \ldots$

(e) $\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{3};\ \ldots$

(f) $\sin\pi;\ \sin(2\pi);\ \ldots$

(g) $\lg 2;\ \lg 3;\ \ldots$

**Megoldás.**

(a) $2;\ 2;\ \ldots \qquad d = 0$

(b) $4;\ 5;\ \ldots \qquad d = 1$

(c) $-3;\ -5;\ \ldots \qquad d = -2$

(d) $2\sqrt{3} - \sqrt{2};\ 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2};\ 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2};\ \ldots \qquad d = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

(e) $\frac{1}{6}$; $0$; $-\frac{1}{6}$; $\dots$ $\quad d = -\frac{1}{6}$

(f) $0$; $0$; $\dots$ $\quad d = 0$

(g) $2\lg 3 - \lg 2$; $3\lg 3 - 2\lg 2$; $4\lg 3 - 3\lg 2$; $\dots$ $\quad d = \lg 3 - \lg 2$

**10. Feladat.** Válasszuk ki az alábbi sorozatok közül a számtani sorozatokat.

(a) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n+1}$

(b) $b_n = \dfrac{n^2+n}{n+1}$

(c) $c_n = 2^n - 2^{n-1}$

(d) $d_n = \dfrac{3n+2}{4}$

(e) $e_n = \dfrac{2n+1}{n}$

(f) $f_n = 8$

(g) $g_1 = 5$,
$g_{n+1} - g_n = 6,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(h) $h_n = \sin(n\pi) + 2$

**Megoldás.** Számtani sorozatok: $a_n$, $b_n$, $d_n$, $f_n$, $g_n$, $h_n$.

**11. Feladat.** Igaz-e, hogy egy számtani sorozat minden $k$. tagja ($k \in \mathbb{Z}^+,\ k > 1$) is számtani sorozatot alkot?

**Megoldás.** Igen, a differencia az eredeti sorozat differenciájának $k$-szorosa.

**12. Feladat.** Miért „számtani” a számtani sorozat?

**Megoldás.** A tagjaira fennáll az

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

összefüggés, ha $n > 1$.

**13. Feladat.** Egy számtani sorozat ötödik tagja 44, tizedik tagja 79. Határozzuk meg a sorozat általános tagját.

**Megoldás.** $a_n = 7n + 9$.

**14. Feladat.** Egy számtani sorozat tizedik tagja 25, huszonötödik tagja 70. Adjuk meg a sorozat első tagját, differenciáját, századik tagját, első 125 tagjának az összegét, valamint határozzuk meg, hogy a sorozat hány tagja esik 1000 és 2000 közé (a határokat is beleértve).

**Megoldás.** Az $a_{10} = a_1 + 9d$ és $a_{25} = a_1 + 24d$ egyenletekbe történő behelyettesítéssel kapott egyenletrendszer adja: $a_1 = -2$, $d = 3$. Ekkor $a_{100} = 295$, $S_{125} = 23000$. Mivel $a_{335} = 1000$; $a_{668} = 1999$, ezért 1000 és 2000 közé a sorozat 334 tagja esik.

**15. Feladat.** Igazoljuk, hogy minden számtani sorozat felírható $a_n = An+B$ alakban, alkalmas $A$ és $B$ valós számokkal.

**Megoldás.** Az $a_1$ kezdőtagú, $d$ differenciájú számtani sorozat általános tagja

$$a_n = a_1 + (n-1)d = d \cdot n + a_1 - d,$$

így $A = d$ és $B = a_1 - d$ választás megfelelő.

**16. Feladat.** Iktassunk be a 7 és az 57 közé

(a) 9 (b) 4 (c) 1

tagot, hogy a megadottakkal együtt számtani sorozatot alkossanak.

**Megoldás.**

(a) $12; 17; 22; 27; 32; 37; 42; 47; 52$

(b) $17; 27; 37; 47$

(c) $32$

**17. Feladat.**

(a) Töltsünk ki egy $3 \times 3$-as bűvös négyzetet a $3; 8; 13; 18; 23; 28; 33; 38; 43$ számokkal.

(b) Igazoljuk, hogy ha kilenc szám számtani sorozatot alkot, akkor azokkal mindig kitölthető egy $3 \times 3$-as bűvös négyzet.

**Megoldás.**

(a)

| | | |
|---|---|---|
| 18 | 43 | 8 |
| 13 | 23 | 33 |
| 38 | 3 | 28 |

(b)

| | | |
|---|---|---|
| $a-d$ | $a+4d$ | $a-3d$ |
| $a-2d$ | $a$ | $a+2d$ |
| $a+3d$ | $a-4d$ | $a+d$ |

**18. Feladat.** Egy számtani sorozat negyedik tagja 5. Határozzuk meg az első 7 tag összegét.

**Megoldás.** 35

**19. Feladat.** Egy számtani sorozat első három tagjának összege 33, szorzatuk 1232. Határozzuk meg azt a három tagot.

**Megoldás.** $8,\ 11,\ 14$

**20. Feladat.** Egy számtani sorozat első két tagjának négyzetösszege 74, második és harmadik tagjának négyzetösszege 130. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a differenciát.

**Megoldás.** $a_1 = 5,\ d = 2$

**21. Feladat.** Határozzuk meg az $S = 1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + \ldots - 2019$ összeget.

**Megoldás.** A fenti összeg felbontható az

$$s_1 = 1 + 4 + \ldots + 2017 = \frac{1 + 2017}{2} \cdot 673 = 679057,$$
$$s_2 = 2 + 5 + \ldots + 2018 = \frac{2 + 2018}{2} \cdot 673 = 679730,$$
$$s_3 = 3 + 6 + \ldots + 2019 = \frac{3 + 2019}{2} \cdot 673 = 680403$$

összegekre, így $S = s_1 + s_2 - s_3 = 678384$.

**22. Feladat.** Összeszoroztuk az 5 első 2019 pozitív egész kitevős hatványát. Hány jegyű számot kaptunk?

**Megoldás.** A szorzat

$$5 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 5^{2019} = 5^{1+2+\ldots+2019} = 5^{\frac{1+2019}{2} \cdot 2020} = 5^{2039190}.$$

Ha ennek vesszük a 10-es alapú logaritmusát, akkor megkapjuk a számjegyeinek számát. Mivel

$$\lg(5^{2039190}) = 2039190 \cdot \lg 5 \approx 1425332{,}64,$$

ezért a szám 1425333 jegyű.

**23. Feladat.** Egy színház nézőtere trapéz alakú, az első sorban 12 szék van, majd minden továbbiban kettővel több, mint az előzőben.

(a) Hány fő befogadására alkalmas a nézőtér, ha összesen 20 sor van?

(b) Hány sor van, ha 1610 néző teljesen megtölti a nézőteret?

**Megoldás.**

(a) $S_{20} = \dfrac{2 \cdot 12 + 19 \cdot 2}{2} \cdot 20 = 620$

(b) Mivel

$$S_n = 1610 = \frac{2 \cdot 12 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n,$$

így az $n_1 = 35$ és $n_2 = -46$ megoldások adódnak, tehát a nézőtéren 35 sor van.

**24. Feladat.** Összeadtuk 3-tól kezdve a 3-mal osztható pozitív egész számokat. Legalább hány tagot adtunk össze, ha az összeg ötjegyű lett?

**Megoldás.** A 3 kezdőtagú, 3 differenciájú számtani sorozat első $n$ tagjának összege

$$S_n = \frac{2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n.$$

Az $S_n \geq 10000$ egyenlőtlenséget megoldva, a megoldáshalmaz pozitív számokból álló részhalmazából kapjuk, hogy legalább 82 tagot adtunk össze.

**25. Feladat.** Egy számtani sorozatban $a_1 = -74; a_n = 290$, a közbülső tagok összege 1404. Határozzuk meg $n$ értékét.

**Megoldás.** Az $S_n = -74 + 1404 + 290 = \dfrac{-74+290}{2} \cdot n$ egyenletből $n = 15$ adódik.

**26. Feladat.** Peti egy 1018 oldalas könyv olvasásba kezdett bele. Az első nap 17 oldalt olvas ki, majd minden nap 5-tel többet, mint az előzőn.

(a) Hány nap alatt olvassa ki a könyvet?

(b) Hány oldalt olvas az utolsó napon?

**Megoldás.**

(a) Az
$$S_n = \frac{2 \cdot 17 + (n-1) \cdot 5}{2} \cdot n \geq 1018$$
egyenlőtlenség legkisebb pozitív megoldása 18, így a könyvet 18 nap alatt olvassa ki.

(b) Mivel $S_{17} = 969$, így az utolsó napon $1018 - 969 = 49$ oldalt olvas el.

# Mértani sorozatok, alkalmazások

**27. Feladat.** Folytassuk az alábbi sorozatokat úgy, hogy mértani sorozatot kapjunk. Adjuk meg a mértani sorozat hányadosát is.

(a) $2;\ 2;\ \ldots$

(b) $2;\ 4;\ \ldots$

(c) $1;\ -1;\ \ldots$

(d) $7;\ 0;\ \ldots$

(e) $0;\ 6;\ \ldots$

(f) $\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \ldots$

(g) $\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots$

(h) $\frac{2}{3};\ -\frac{3}{2};\ \ldots$

(i) $\cos\pi;\ \cos 2\pi;\ \ldots$

(j) $\lg 2;\ \lg 3;\ \ldots$

**Megoldás.**

(a) $2;\ 2;\ \ldots \qquad q = 1$

(b) $8;\ 16;\ \ldots \qquad q = 2$

(c) $1;\ -1;\ \ldots \qquad q = -1$

(d) $0;\ 0;\ \ldots \qquad q = 0$

(e) Nem lehet mértani sorozat.

(f) $\dfrac{3}{\sqrt{2}};\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2};\ \ldots \qquad q = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(g) $\dfrac{2}{3^2};\ \dfrac{2^2}{3^3};\ \ldots \qquad q = \dfrac{2}{3}$

(h) $\dfrac{3^3}{2^3};\ -\dfrac{3^5}{2^5};\ \ldots \qquad q = -\dfrac{9}{4}$

(i) $-1;\ 1;\ \ldots \qquad q = -1$

(j) $\dfrac{(\lg 3)^2}{\lg 2};\ \dfrac{(\lg 3)^3}{(\lg 2)^2};\ \ldots \qquad q = \dfrac{\lg 3}{\lg 2}$

**28. Feladat.** Válasszuk ki az alábbi sorozatok közül a mértani sorozatokat.

(a) $a_n = 2^n$

(b) $b_n = \dfrac{3^{2n}}{5^{n-1}}$

(c) $c_n = 2^n - 2^{n-1}$

(d) $d_n = \dfrac{3n+2}{4}$

(e) $e_n = \dfrac{1}{n}$

(f) $f_n = 8$

(g) $g_1 = 5,\ \dfrac{g_{n+1}}{g_n} = 6,\ n \in \mathbb{Z}^+$

(h) $h_n = \cos n\pi$

**Megoldás.** Mértani sorozatok: $a_n,\ b_n,\ c_n,\ f_n,\ g_n,\ h_n$.

**29. Feladat.** Igaz-e, hogy egy mértani sorozat minden $k$. tagja ($k \in \mathbb{Z}^+,\ k > 1$) is mértani sorozatot alkot?

**Megoldás.** Igen, a hányados az eredeti sorozat hányadosának $k$-adik hatványa.

**30. Feladat.** Miért „mértani” a mértani sorozat?

**Megoldás.** A tagjaira fennáll az

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

összefüggés (nemnegatív tagok esetén).

**31. Feladat.** Egy mértani sorozat harmadik tagja 40, hatodik tagja 320. Határozzuk meg a sorozat általános tagját.

**Megoldás.** $a_n = 5 \cdot 2^n$

**32. Feladat.** Egy mértani sorozat harmadik tagja 6, kilencedik tagja 162. Adjuk meg a sorozat első tagját, hányadosát, huszonegyedik tagját, első húsz tagjának az összegét, valamint határozzuk meg, hogy a sorozat hány tagja esik 1000 és 2000 közé (a határokat is beleértve).

**Megoldás.** Az $a_3 = a_1 \cdot q^2$, $a_9 = a_1 \cdot q^8$ egyenletekbe történő behelyettesítéssel kapott egyenletrendszer két megoldást ad: $a_1 = 2,\ q = \pm\sqrt{3}$. (Tehát két, a feladat feltételeinek eleget tevő sorozat létezik.) Mindkét esetben $a_{21} = 118098$ valamint

$$S_{20} = 2 \cdot \frac{(\sqrt{3})^{20} - 1}{\sqrt{3} - 1} \approx 161322{,}1361,\ \text{ha } q = \sqrt{3},$$

és

$$S_{20} = 2 \cdot \frac{(-\sqrt{3})^{20} - 1}{-\sqrt{3} - 1} \approx -43226{,}1361,\ \text{ha } q = -\sqrt{3}.$$

Mivel $|a_{12}| \approx 841{,}77$, $a_{13} = 1458$ és $|a_{14}| \approx 2525{,}33$, ezért 1000 és 2000 közé a sorozat egyetlen tagja esik.

**33. Feladat.** Iktassunk be a $\frac{2}{9}$ és a 13122 közé

(a) 9 (b) 4 (c) 1

tagot, hogy a megadottakkal együtt mértani sorozatot alkossanak.

**Megoldás.**

(a) $\frac{2}{3}$; 2; 6; 18; 54; 162; 486; 1458; 4347 vagy $-\frac{2}{3}$; 2; $-6$; 18; $-54$; 162; $-486$; 1458; $-4347$

(b) 2; 18; 162; 1458

(c) 54 vagy $-54$

**34.* Feladat.** Kitöltöttünk egy ötöslottószelvényt (az 1-90 számok közül bejelöltünk 5-öt) úgy, hogy a bejelölt számok egy egynél nagyobb hányadosú mértani sorozatot alkotnak. Hányféleképpen tehettük ezt meg?

**Megoldás.** Ha az első szám 1, a hányados lehet 2, 3, de 4 már nem mert $1 \cdot 4^4 = 256 > 90$. Így eggyel kezdődő sorozat összesen kettő van. Ha a legkisebb bejelölt szám 2, akkor a $2 \cdot 2^4 = 32$, $2 \cdot 3^4 = 162$ összefüggések miatt csak egy helyes kitöltés van. Ugyanígy látható, hogy nagyobb kezdőtagokra is csak kettő lehet a hányados. Mivel $3 \cdot 2^4 = 48$, $4 \cdot 2^4 = 64$, $5 \cdot 2^4 = 80$ és $6 \cdot 2^4 = 96$, ezért csak három további sorozat van. Összesen tehát hat, a feladat feltételeinek megfelelő kitöltés lehetséges.

**35. Feladat.** Egy háromszög oldalainak hosszai egy mértani sorozat egymást követő elemei. Milyen határok közé eshet a sorozat hányadosa?

**Megoldás.** Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a sorozat hányadosára $q \geq 1$, valamint, hogy a háromszög legrövidebb oldala 1 hosszúságú. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján felírt $0 > q^2 - q - 1$ egyenlőtlenségből adódik a megoldás:

$$1 \leq q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

**36. Feladat.** Egy mértani sorozat negyedik tagja 5. Határozzuk meg az első 7 tag szorzatát.

**Megoldás.** $5^7 = 78125$

**37. Feladat.** Egy mértani sorozatban az első két tag összege 8, a második és harmadik tag összege 24. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

**Megoldás.** $a_1 = 2,\ q = 3$

**38. Feladat.** Egy mértani sorozatban az első és a harmadik tag összege 20, az ötödik és harmadik tag különbsége 144. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

**Megoldás.** $a_1 = 2,\ q = \pm 3$

**39. Feladat.** Egy mértani sorozatban a negyedik és az első tag különbsége 52, az második és az első tag különbsége 4. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

**Megoldás.** $a_1 = 2,\ q = 3$ vagy $a_1 = -\dfrac{4}{5},\ q = -4$

**40. Feladat.** Egy mértani sorozat első hét tagját tekintve az első három tag összege 26, míg az utolsó három összege 2106. Mennyi a hét tag összege?

**Megoldás.** A feladat feltételeinek két sorozat tesz eleget.

- Ha $q = 3$ és $a_1 = 2$, akkor $S_7 = 2186$.
- Ha $q = -3$ és $a_1 = \dfrac{26}{7}$, akkor $S_7 = \dfrac{14222}{7}$.

**41. Feladat.** Egy mértani sorozat első három tagjának összege 26, az első három tag szorzata pedig 216. Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát.

**Megoldás.** $a_1 = 2,\ q = 3$ vagy $a_1 = 18,\ q = \dfrac{1}{3}$

**42. Feladat.** Egy 60°-os szögtartományba a szögszárakat és egymást is érintő köröket írtunk. Határozzuk meg a szomszédos körök sugarainak arányát.

**Megoldás.** 3

**43.* Feladat.** Adjunk (explicit) képletet az alábbi sorozatok általános tagjára.

(a) 1; 11; 111; 1111; ...

(b) 53; 553; 5553; ...

(c) 23; 2233; 222333; ...

**Megoldás.**

(a) $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$

(b) $b_n = 5 \cdot \dfrac{10^{n+1} - 1}{9} - 2$

(c) $c_n = 3 \cdot \dfrac{10^n - 1}{9} + 10^n \cdot 2 \cdot \dfrac{10^n - 1}{9}$

**44. Feladat.** Három pozitív egész szám egyszerre egymás utáni három tagja egy számtani és egy mértani sorozatnak is. Határozzuk meg a hiányzó két számot, ha a három szám egyike a 6.

**Megoldás.** Csak a konstans sorozat tesz eleget a feltételnek, így a hiányzó két szám is a 6.

**45. Feladat.** Három szám számtani sorozatot egymás utáni három tagja, összegük 30. Ha az utolsót öttel megnöveljük, egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Határozzuk meg ezt a három számot.

**Megoldás.** 5; 10; 15 vagy 20; 10; 0

**46. Feladat.** Három szám egy számtani sorozatot szomszédos elemei, összegük 51. Ha az elsőt kilenccel a másodikat eggyel megnöveljük, a harmadikat néggyel csökkentjük, egy mértani sorozat három szomszédos elemét kapjuk. Határozzuk meg ezt a három számot.

**Megoldás.** 3; 17; 31 vagy 18; 17; 16

**47. Feladat.** Három szám mértani sorozatot alkot, összegük 26. Ha az elsőhöz egyet hozzáadunk, a harmadikból kilencet elveszünk, egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk. Határozzuk meg ezt a három számot.

**Megoldás.** 2; 6; 18 vagy 18; 6; 2

**48.* Feladat.** Egy mértani sorozat első hat tagjának összege 728; az első hat tag közül ha a páros indexűek összegéből levonjuk a páratlan indexűek összegét 364-et kapunk. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a hányadosát.

**Megoldás.** Legyen $A = a_1 + a_3 + a_5$. Ekkor $a_2 + a_4 + a_6 = Aq$, amiből $Aq + A = 728$ és $Aq - A = 364$ adódik. Ezek alapján $A = 182$ és $q = 3$ és a sorozat első tagja $a_1 = 2$.

**49.* Feladat.** Egy mértani sorozatban $a_1 + a_3 + a_5 = 182$, $a_2 + a_4 = 60$. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a hányadosát.

**Megoldás.** Mivel $182 = a_3 \cdot \left(\frac{1}{q^2} + 1 + q^2\right)$ és $60 = a_3 \cdot \left(\frac{1}{q} + q\right)$, így az $x = \left(\frac{1}{q} + q\right)$ helyettesítéssel a $182 = a_3 \cdot (x^2 - 1)$, $60 = a_3 \cdot x$ egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletek hányadosát véve adódik, hogy $x_1 = \frac{10}{3}$ és $x_2 = -\frac{3}{10}$.

- Ha $x = \frac{10}{3}$, akkor $q_1 = 3$ és $q_2 = \frac{1}{3}$ adódik.
- Ha $x = -\frac{3}{10}$, akkor nem kapunk valós megoldást.

Ha $q = 3$ akkor $a_1 = 2$; ha $q = \frac{1}{3}$, akkor $a_1 = 486$.

**50. Feladat.** Egy gyár termelése havonta 3%-kal nő.

(a) Hány százalékkal nő a termelés egy év alatt?

(b) Mennyi idő alatt háromszorozódik meg a termelés?

**Megoldás.**

(a) Mivel $1{,}03^{12} \approx 1{,}4258$, ezért körülbelül 42,58%-kal nő a termelés egy év alatt.

(b) Az $1{,}03^n = 3$ egyenlet megoldásából $n \approx 37{,}16$, azaz a termelés a 38. hónapban háromszorozódik meg.

**51. Feladat.** Ha egy számítógépet megvásárolunk, értéke a kicsomagolás és az első használatbavétel okán 20%-kal csökken. Ezután a gép minden hónapban 5%-ot veszít értékéből.

(a) Hány százalékkal csökken az értéke egy év alatt?

(b) Hány év alatt csökken a gép értéke az eredeti értéke negyedére?

**Megoldás.**

(a) Mivel $0{,}8 \cdot 0{,}95^{12} \approx 0{,}4323$, ezért körülbelül 56,77%-kal csökken a gép értéke.

(b) A $0{,}8 \cdot 0{,}95^n = 0{,}25$ egyenlet megoldásából $n \approx 22{,}68$, azaz a gép értéke a 23. hónap során csökken az eredeti értékének negyedére.

**52. Feladat.** Egy 10 literes oldat 80%-os. Kimerünk belőle 5 decilitert és a helyére vizet teszünk, majd elkeverjük. (A feladat megoldásánál a folyamat során bekövetkező térfogatcsökkenéstől eltekintünk.)

(a) A fenti eljárást tízszer végrehajtva hány százalékos oldatot kapjunk?

(b) Hányszor kell a fenti eljárást megismételnünk, hogy az oldat töménysége 10% alá csökkenjen?

**Megoldás.**

(a) Mivel $0{,}8 \cdot 0{,}95^{10} \approx 0{,}479$, az oldat kb. $47,9\%$-os lesz.

(b) A $0{,}8 \cdot 0{,}95^n = 0{,}1$ egyenlet megoldásából $n \approx 40{,}54$, így legalább 41-szer kell az eljárást megismételni.

# 10 | Koordinátageometria

## Vektorok a koordináta-rendszerben; távolság; osztópontok

**1. Feladat.** Adottak a síkon az (origóból induló) $\overrightarrow{a} = (3; 4)$ és $\overrightarrow{b} = (-1; 5)$ helyvektorok. Határozzuk meg

(a) az $\overrightarrow{a}$ vektor hosszát,

(b) a $2\overrightarrow{a}$ vektor koordinátáit,

(c) a $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ vektor koordinátáit,

(d) az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok skaláris szorzatát,

(e) az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok hajlásszögét.

**2. Feladat.** Határozzuk meg $x$ értékét, ha $\overrightarrow{a} = (2x - 1; 4)$, $\overrightarrow{b} = (1; -3)$ és

(a) $|\overrightarrow{a}| = 5$,

(b) az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok merőlegesek egymásra,

(c) az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok párhuzamosak egymással.

**3. Feladat.** Adottak a síkon az $A(6; 10)$ és $B(14; -20)$ pontok.

(a) Határozzuk meg az $AB$ szakasz felezőpontjának koordinátáit.

(b) Határozzuk meg az $AB$ szakaszra illeszkedő $P$ pont koordinátáit, ha $AP : PB = 3 : 7$.

(c) Határozzuk meg az $A$ pont $B$-re vett középpontos tükrözéssel kapott $A'$ képének koordinátáit.

**4. Feladat.** Adottak a síkon az $A(2; 2)$, $B(6; -1)$ és $C(14; 7)$ pontok. Határozzuk meg az $ABC$ háromszög

(a) $\overrightarrow{AB}$ oldalvektorának koordinátáit,

(b) $S$ súlypontjának koordinátáit,

(c) $A$ csúcsból induló súlyvonalvektorának koordinátáit,

(d) kerületét,

(e) legnagyobb szögének nagyságát.

**5. Feladat.** Határozzuk meg az $ABC$ háromszög csúcsainak koordinátáit, ha a háromszög oldalfelező pontjainak koordinátái $F_{AB}(6; 0)$, $F_{BC}(7; 2)$, $F_{CA}(4; 4)$.

**6. Feladat.** Határozzuk meg az $ABC$ háromszög csúcsainak koordinátáit, ha a háromszög két oldalfelező pontjainak koordinátái $F_{AB}(6;-1)$, $F_{BC}(10;0,5)$, súlypontjának koordinátái pedig $S(7;1)$.

**7. Feladat.** Igazoljuk, hogy az $A(3;7)$, $B(6;2)$, $C(8;11)$, $D(11;6)$ pontok paralelogrammát határoznak meg.

**8. Feladat.** Egy paralelogramma két szomszédos csúcsának koordinátái $A(2;1)$ és $B(4;3)$. A paralelogramma középpontjának koordinátái $K(4;0)$. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit.

**9. Feladat.** Egy paralelogramma három csúcsának koordinátái $(3;7)$, $(6;2)$ és $(8;11)$. Határozzuk meg a negyedik csúcs koordinátáit.

**10. Feladat.** Egy négyzet egyik oldalfelező pontjának koordinátái $F(5,5;4,5)$, középpontjának koordinátái $K(7;3)$. Határozzuk meg a négyzet csúcsainak koordinátáit.

**11. Feladat.** Az $ABCD$ rombusz $AC$ átlója háromszor olyan hosszú, mint a $BD$ átló. Tudjuk, hogy $A(2;1)$ és a rombusz középpontja pedig $K(3,5;2,5)$. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit.

# Az egyenes és a kör koordinátageometriája

**12. Feladat.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek tengelymetszetei

(a) $(2;0)$ és $(0;4)$, (b) $(-4;0)$ és $(0;2)$, (c) $(4;0)$ és $(0;0)$.

**13. Feladat.** Igazoljuk, hogy az $A$, $B$, $C$ pontok egy egyenesre illeszkednek. Írjuk is fel az egyenes egyenletét, adjuk meg egy irányvektorát, normálvektorát, meredekségét, irányszögét, valamint határozzuk meg a tengelymetszeteket.

(a) $A(-2;6)$, $B(4;-3)$, $C(-4;9)$

(b) $A(-5;-4)$, $B(10;2)$, $C(-10;-6)$

(c) $A(2;4)$, $B(2;2)$, $C(2;-6)$

**14. Feladat.** Írjuk fel azon, $A$ ponton átmenő egyenes egyenletét, amely az $ABC$ háromszög területét felezi, ha $A(2;2), B(4;-3), C(8;3)$.

**15. Feladat.** Adjuk meg a $2x+3y=8$ egyenes azon pontjának koordinátáit amelynek

(a) abszcisszája és ordinátája egyenlő;

(b) abszcisszája fele akkora, mint az ordinátája;

(c) abszcisszájának és ordinátájának összege 0;

(d) távolsága az $x$ tengelytől 2.

**16. Feladat.** Egy rombusz átlói a koordinátatengelyekre illeszkednek, hosszuk 10, illetve 12 egység. Írjuk fel a rombusz oldalegyeneseinek egyenleteit.

**17. Feladat.** Határozzuk meg annak a háromszögnek a területét, amelyet a koordinátatengelyek és az $e$ egyenes zárnak közre.

(a) $e\colon 5x + 10 = 2y$

(b) $e\colon x + 2y = 6$

(c) $e\colon y = \frac{2}{5}x - 2$

(d) $e\colon y = 3$

**18. Feladat.** A koordinátatengelyek mely pontjai vannak egyenlő távolságra az $A$ és $B$ pontoktól?

(a) $A(2;5)$, $B(8;1)$

(b) $A(-1;5)$, $B(6;-2)$

(c) $A(2;5)$, $B(5;2)$

**19. Feladat.** Határozzuk meg az egyenlő szárú háromszög harmadik csúcsának koordinátáit, ha alapjának két végpontja $A(2;3)$ és $B(9;-2)$, valamint a harmadik csúcs illeszkedik az $e:$ $x + 4y = -9$ egyenletű egyenesre.

**20. Feladat.** Határozzuk meg azon $P$ pontok mértani helyét melyekre $PA^2 - PB^2 = 30$, ha $A(2;2)$ és $B(8;4)$.

**21. Feladat.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $A(3;5)$ ponton, és amelynek a koordinátatengelyek közé eső szakaszát az $A$ pont felezi.

**22. Feladat.** Az $ABC$ háromszög egyik oldalegyenesének egyenlete $e\colon -3x+5y = 14$. Erre az oldalegyenesre eső két csúcsának ordinátái $y_1 = 1, y_2 = 4$. Határozzuk meg az $ABC$ háromszög csúcsainak koordinátáit, hiányzó oldalegyeneseinek egyenletét, valamint szögeinek nagyságát, ha a háromszög súlypontja $S\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

**23. Feladat.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $e\colon 2x + 3y = 12$ és $f\colon y = x - 1$ egyenesek metszéspontján és

(a) irányvektora $\overrightarrow{v}(2;3)$,

(b) normálvektora $\overrightarrow{n}(1;6)$,

(c) egy további pontja $B(4;1)$,

(d) merőleges a $g : 3x - 5y = 2$ egyenesre,

(e) párhuzamos a $h : -2x + 3y = 8$ egyenessel.

**24. Feladat.** Hogyan kell megválasztanunk az $m$ paraméter értékét, hogy az $mx - 3y = 7$ egyenletű egyenes

(a) áthaladjon a $P(2;-1)$ ponton

(b) párhuzamos legyen az $0 = 2x - y - 3$ egyenletű egyenessel

(c) merőleges legyen a $2x + 3y = 15$ egyenletű egyenesre

(d) áthaladjon az $e : x + 2y = 17$ és $f : 2y - x = 7$ egyenesek metszéspontján?

**25. Feladat.** Határozzuk meg az egymásra merőleges $AM$ és $BM$ egyenesek egyenletét, ha $A(3;2)$, $B(8;1)$ az $M$ pont ordinátája $-1$.

**26. Feladat.** Egy derékszögű háromszög átfogóegyenesének egyenlete $c : 7y - x = 27$. Egyik befogóegyenesének egyenlete $b : 3x + 4y = 19$. Az ezen oldallal szemközti csúcs ordinátája 5. Határozzuk meg a háromszög

(a) átfogóhoz tartozó magasságának egyenletét,

(b) magasságpontjának koordinátáit,

(c) köré írt köre sugarának hosszát.

**27. Feladat.** Írjuk fel a $k$ kör egyenletét, ha

(a) középpontja az origó, és sugara $r = 5$;

(b) középpontja $C(3; -5)$, sugara $r = \sqrt{19}$;

(c) középpontja $C(2; -1)$ és áthalad az $A(5; -2)$ ponton;

(d) átmérőjének két végpontja $A(7; -3), B(5; 1)$;

(e) áthalad az $A(-1; 1), B(7; -3), C(8; 4)$ pontokon;

(f) középpontja $C(4; 1)$ és egy érintője a $4x + 3y = 44$ egyenletű egyenes;

(g) áthalad az $A(3; 2)$ és $B(8; 3)$ pontokon és sugara $r = \sqrt{13}$;

(h) koncentrikus az $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ egyenletű körrel és sugara fele akkora.

**28. Feladat.** Az alábbi alakzatok közül válasszuk ki azokat, amelyek egy kört határoznak meg. Ha körről van szó, adjuk meg a középpontjának koordinátáit, és sugarának hosszát.

(a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 10$

(b) $x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 8y - 100 = 0$

(c) $2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 0$

(d) $x^2 - y^2 + 2x + 8y - 10 = 0$

(e) $x^2 + y^2 = 4x + 3y - 5$

(f) $x^2 + 6x + y^2 + 10y + 100 = 0$

**29. Feladat.** Határozzuk meg a derékszögű háromszög derékszögű csúcsának koordinátáit, valamint a köré írt körének egyenletét, ha átfogójának végpontjai $A(5; 2)$, $B(11; 0)$ és egyik befogója párhuzamos a $-x + y = 2$ egyenletű egyenessel.

**30. Feladat.** Határozzuk meg az $A(2; 4)$ ponton áthaladó, az $x$ tengelyt azon $P$ pontban érintő kör egyenletét, melyre $AP = \sqrt{32}$.

**31. Feladat.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört a $P(3; 4)$ pontjában érinti, és sugara 10 egység.

**32. Feladat.** Számítsuk ki, hogy az $e\colon x + y = 8$ egyenesből milyen hosszú húrt metsz ki a $k\colon (x - 3,5)^2 + (y - 3,5)^2 = 8,5$ egyenletű kör.

**33. Feladat.** Határozzuk meg a $k\colon x^2 - 8x + y^2 - 6y = -7$ egyenletű kör $P(5;6)$ ponton áthaladó legrövidebb és leghosszabb húregyenesének egyenletét.

**34. Feladat.** Írjuk fel a $k : x^2 + y^2 + 4x - 4y = 10$ egyenletű körhöz a $P$ pontból húzható érintő(k) egyenletét.

(a) $P(-5;5)$ (b) $P(4;2)$ (c) $P(-3;6)$

**35. Feladat.** Milyen helyzetűek egymáshoz képest az alábbi körök?

(a) $k_1\colon x^2 + y^2 - 6x + 4y = -3, \quad k_2\colon x^2 + y^2 - 12x - 8y = -27$

(b) $k_1\colon (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8, \quad k_2\colon (x+2)^2 + (y+2)^2 = 8$

(c) $k_1\colon x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0, \quad k_2\colon x^2 + y^2 - 18x + 4y = -83$

(d) $k_1\colon x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0, \quad k_2\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$

(e) $k_1\colon (x-4)^2 + (y-3)^2 = 18, \quad k_2\colon x^2 + y^2 - 12x - 2y = -35$

(f) $k_1\colon (x+2)^2 + (y+3)^2 = 9, \quad k_2\colon x^2 + y^2 + 4x + 6y = -4$

**36. Feladat.** Határozzuk meg a $k_1\colon x^2 + y^2 - 6x + 4y = -3$ és $k_2\colon (x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$ körök közös húregyenesének egyenletét, valamint a metszéspontok koordinátáit.

**37. Feladat.** Határozzuk meg az $m$ paraméter értékét úgy, hogy az $e\colon mx + y = 7$ egyenes a $k\colon (x+3)^2 + (y-3)^2 = 20$ kör érintője legyen.

**38.* Feladat.** Írjuk fel a $k\colon (x+4)^2+(y-3)^2 = 29$ egyenletű kör $m = \dfrac{2}{5}$ meredekségű érintőinek egyenletét.

**39.* Feladat.** Az $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 10$ egyenletű körből egy origón áthaladó egyenes egy $\sqrt{20}$ egység hosszú húrt metsz ki. Határozzuk meg az egyenes egyenletét és a metszéspontok koordinátáit.

**40. Feladat.** Az $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 12$ egyenletű körhöz olyan érintőket húzunk, amelyek

(a) párhuzamosak (b) merőlegesek

az $e\colon 2x + 5y = 17$ egyenletű egyenessel. Határozzuk meg az érintők egyenletét.

**41. Feladat.** Határozzuk meg a $k\colon x^2 + y^2 - 10x - 6y = -21$ kör azon pontjait, melyek a $P(15;1)$ ponttól $\sqrt{65}$ egység távolságra vannak.

**42. Feladat.** Határozzuk meg annak a $k$ körnek az egyenletét, amely áthalad a $k_1\colon (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8$ és $k_2\colon (x-6)^2 + (y-3)^2 = 4$ körök közös pontjain, valamint a $P(-4;5)$ ponton.

**43.* Feladat.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét amelynek középpontja $C(-3;-1)$, és a $k : x^2 + y^2 - 10x - 10y = -25$ kör

(a) belülről (b) kívülről

érinti.

# Megoldások

## Vektorok a koordináta-rendszerben; távolság; osztópontok

**1. Feladat.** Adottak a síkon az (origóból induló) $\overrightarrow{a} = (3;4)$ és $\overrightarrow{b} = (-1;5)$ helyvektorok. Határozzuk meg

(a) az $\overrightarrow{a}$ vektor hosszát,

(b) a $2\overrightarrow{a}$ vektor koordinátáit,

(c) a $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ vektor koordinátáit,

(d) az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok skaláris szorzatát,

(e) az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok hajlásszögét.

**Megoldás.**

(a) $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

(b) $2\overrightarrow{a} = (6;8)$

(c) $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} = (11;2)$

(d) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 = 17$

(e) A skaláris szorzat kétféle módon történő felírásából kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 17 = 5 \cdot \sqrt{26} \cdot \cos\alpha,$$

ahol $\alpha$ a vektorok hajlásszöge. Innen $\alpha \approx 48{,}18°$.

**2. Feladat.** Határozzuk meg $x$ értékét, ha $\overrightarrow{a} = (2x-1;4)$, $\overrightarrow{b} = (1;-3)$ és

(a) $|\overrightarrow{a}| = 5$,

(b) az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok merőlegesek egymásra,

(c) az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorok párhuzamosak egymással.

**Megoldás.**

(a) A $(2x-1)^2 + 4^2 = 5^2$ egyenlet megoldásaiból $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$ adódik.

(b) A $(2x-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-3) = 0$ egyenlet megoldásaként $x = 6{,}5$ adódik.

(c) A $\dfrac{2x-1}{1} = \dfrac{4}{-3}$ egyenletből $x = -\dfrac{1}{6}$ adódik.

**3. Feladat.** Adottak a síkon az $A(6;10)$ és $B(14;-20)$ pontok.

(a) Határozzuk meg az $AB$ szakasz felezőpontjának koordinátáit.

(b) Határozzuk meg az $AB$ szakaszra illeszkedő $P$ pont koordinátáit, ha $AP : PB = 3 : 7$.

(c) Határozzuk meg az $A$ pont $B$-re vett középpontos tükrözéssel kapott $A'$ képének koordinátáit.

**Megoldás.**

(a) $F_{AB}(10;-5)$

(b) $P\left(\dfrac{7\cdot 6+3\cdot 14}{10};\dfrac{7\cdot 10+3\cdot(-20)}{10}\right)=P(8{,}4;1)$

(c) $A'(22;-50)$

**4. Feladat.** Adottak a síkon az $A(2;2)$, $B(6;-1)$ és $C(14;7)$ pontok. Határozzuk meg az $ABC$ háromszög

(a) $\overrightarrow{AB}$ oldalvektorának koordinátáit,

(b) $S$ súlypontjának koordinátáit,

(c) $A$ csúcsból induló súlyvonalvektorának koordinátáit,

(d) kerületét,

(e) legnagyobb szögének nagyságát.

**Megoldás.**

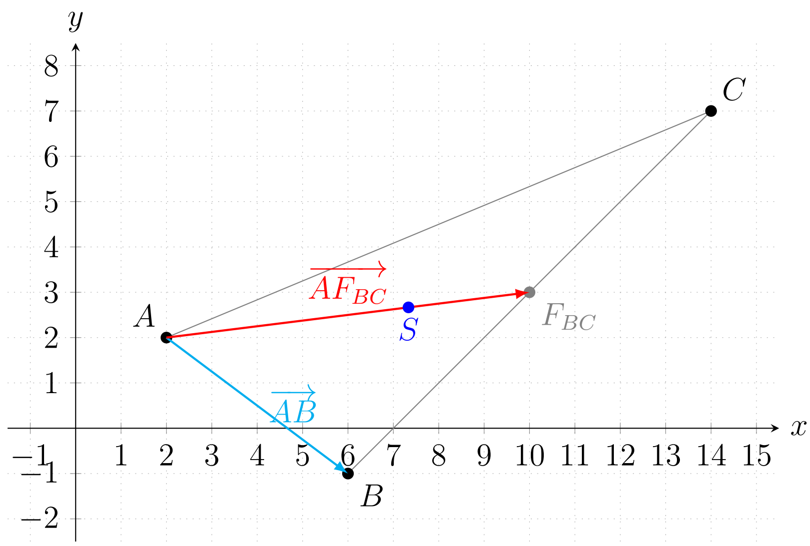
(a) $\overrightarrow{AB}=(6-2;-1-2)=(4;-3)$

(b) $S\left(\dfrac{2+6+14}{3};\dfrac{2-1+7}{3}\right)=S\left(\dfrac{22}{3};\dfrac{8}{3}\right)$

(c) Ha $F_{BC}$ a $BC$ oldal felezőpontja, akkor $F_{BC}=(10;3)$ és a súlyvonalvektor $\overrightarrow{AF_{BC}}=(8;1)$.

(d) $k=|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{128}+13+5\approx 29{,}31$

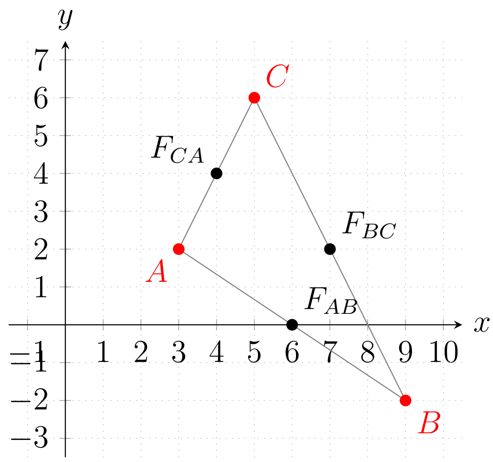
(e) $\beta\approx 98{,}13°$



**5. Feladat.** Határozzuk meg az $ABC$ háromszög csúcsainak koordinátáit, ha a háromszög oldalfelező pontjainak koordinátái $F_{AB}(6;0)$, $F_{BC}(7;2)$, $F_{CA}(4;4)$.

**Megoldás.**

$A(3;2),\ B(9;-2),\ C(5;6)$



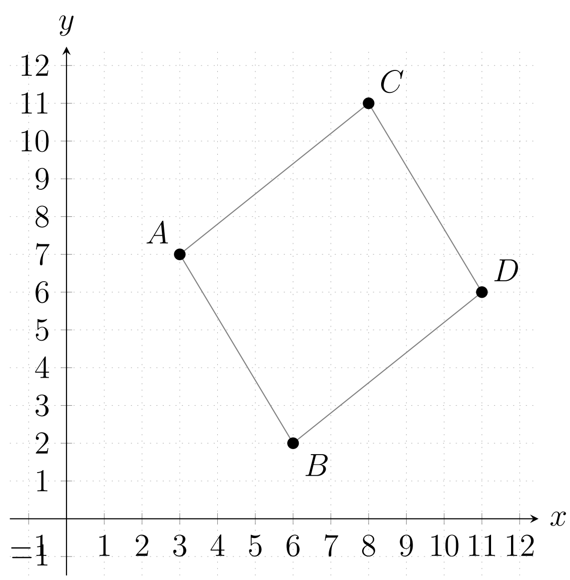

**6. Feladat.** Határozzuk meg az $ABC$ háromszög csúcsainak koordinátáit, ha a háromszög két oldalfelező pontjainak koordinátái $F_{AB}(6;-1)$, $F_{BC}(10;0,5)$, súlypontjának koordinátái pedig $S(7;1)$.

**Megoldás.** $A(1;2)$, $B(11;-4)$, $C(9;5)$

**7. Feladat.** Igazoljuk, hogy az $A(3;7)$, $B(6;2)$, $C(8;11)$, $D(11;6)$ pontok paralelogrammát határoznak meg.

**Megoldás.**

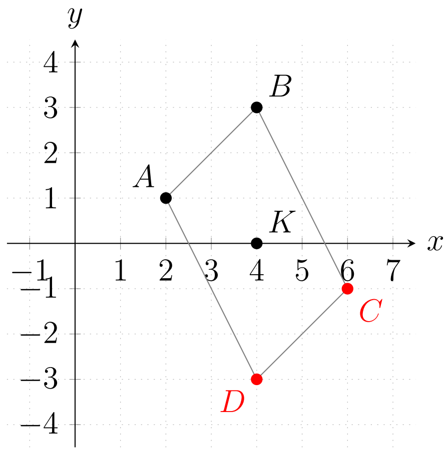
Mivel
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = (5;4)$$
és
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (3;-5),$$
ezért az $ACDB$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlőek. (És a négy pont nincs egy egyenesen.)



**8. Feladat.** Egy paralelogramma két szomszédos csúcsának koordinátái $A(2;1)$ és $B(4;3)$. A paralelogramma középpontjának koordinátái $K(4;0)$. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit.

**Megoldás.**

$C(6;-1),\ D(4;-3)$



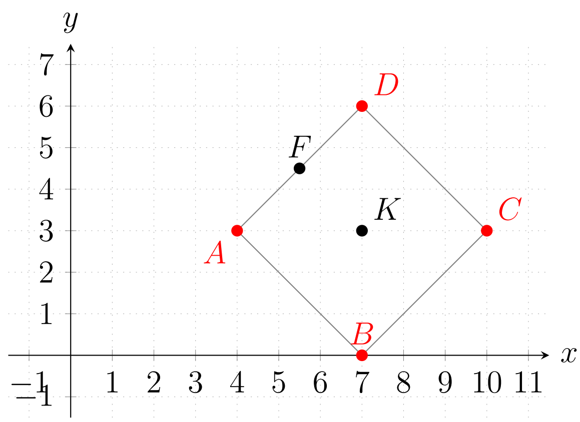

**9. Feladat.** Egy paralelogramma három csúcsának koordinátái $(3;7)$, $(6;2)$ és $(8;11)$. Határozzuk meg a negyedik csúcs koordinátáit.

**Megoldás.** A hiányzó csúcs az adott három csúcs bármelyikével lehet a paralelogramma szemközti csúcsa. Így három megoldás van: $P_1(11;6),\ P_2(5;16),\ P_3(1;-2)$.

**10. Feladat.** Egy négyzet egyik oldalfelező pontjának koordinátái $F(5,5;4,5)$, középpontjának koordinátái $K(7;3)$. Határozzuk meg a négyzet csúcsainak koordinátáit.

**Megoldás.**

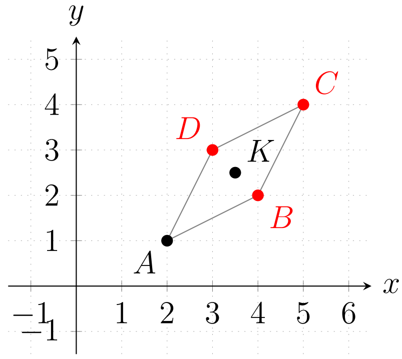
$A(4;3),\ B(7;0),\ C(10;3),\ D(7;6)$




**11. Feladat.** Az $ABCD$ rombusz $AC$ átlója háromszor olyan hosszú, mint a $BD$ átló. Tudjuk, hogy $A(2;1)$ és a rombusz középpontja pedig $K(3,5;2,5)$. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit.

**Megoldás.**

$$B(4;2),\ C(5;4),\ D(3;3)$$



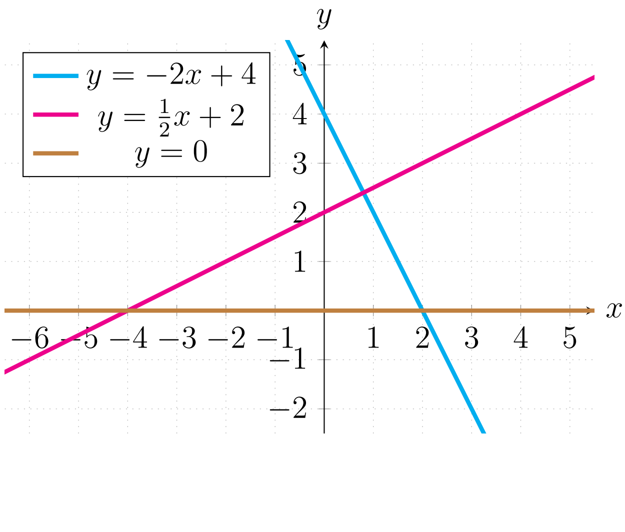

## Az egyenes és a kör koordinátageometriája

**12. Feladat.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek tengelymetszetei

(a) $(2;0)$ és $(0;4)$, (b) $(-4;0)$ és $(0;2)$, (c) $(4;0)$ és $(0;0)$.

**Megoldás.**

(a) $2x + y = 4$ (b) $-x + 2y = 4$ (c) $y = 0$




**13. Feladat.** Igazoljuk, hogy az $A$, $B$, $C$ pontok egy egyenesre illeszkednek. Írjuk is fel az egyenes egyenletét, adjuk meg egy irányvektorát, normálvektorát, meredekségét, irányszögét, valamint határozzuk meg a tengelymetszeteket.

(a) $A(-2;6)$, $B(4;-3)$, $C(-4;9)$

(b) $A(-5;-4)$, $B(10;2)$, $C(-10;-6)$

(c) $A(2;4)$, $B(2;2)$, $C(2;-6)$

**Megoldás.** Bármely két ponton átmenő egyenes egyenletét felírva, abba a harmadik pont koordinátáit behelyettesítve adódik, hogy a pontok egy egyenesen vannak.

(a) Az egyenes egyenlete $e\colon 3x+2y=6$, egy irányvektora $\overrightarrow{v}=(2;-3)$, egy normálvektora $\overrightarrow{n}=(3;2)$, meredeksége $m=-1{,}5$, irányszöge $\alpha\approx 123,69°$, tengelymetszetei: $P_1(2;0)$ és $P_2(0;3)$.

(b) Az egyenes egyenlete $e\colon 2x-5y=10$, egy irányvektora $\overrightarrow{v}=(5;2)$, egy normálvektora $\overrightarrow{n}=(2;-5)$, meredeksége $m=\dfrac{2}{5}$, irányszöge $\alpha\approx 21,8°$, tengelymetszetei $P_1(5;0)$ és $P_2(0;-2)$.

(c) Az egyenes egyenlete $e\colon x=2$, egy irányvektora $\overrightarrow{v}=(0;1)$, egy normálvektora $\overrightarrow{n}=(1;0)$, meredeksége nincs, irányszöge $\alpha=90°$, tengelymetszete $P_1(2;0)$.

**14. Feladat.** Írjuk fel azon, $A$ ponton átmenő egyenes egyenletét, amely az $ABC$ háromszög területét felezi, ha $A(2;2), B(4;-3), C(8;3)$.

**Megoldás.** A keresett egyenes az $A$ csúcsból induló súlyvonal egyenlete, ami $s_a\colon x+2y=6$.

**15. Feladat.** Adjuk meg a $2x+3y=8$ egyenes azon pontjának koordinátáit amelynek

(a) abszcisszája és ordinátája egyenlő;

(b) abszcisszája fele akkora, mint az ordinátája;

(c) abszcisszájának és ordinátájának összege 0;

(d) távolsága az $x$ tengelytől 2.

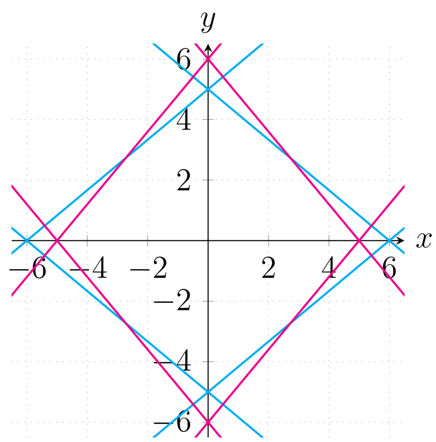
**Megoldás.**

(a) $(1{,}6;1{,}6)$ (b) $(1;2)$ (c) $(-8;8)$ (d) $(1;2)$, $(7;-2)$

**16. Feladat.** Egy rombusz átlói a koordinátatengelyekre illeszkednek, hosszuk 10, illetve 12 egység. Írjuk fel a rombusz oldalegyeneseinek egyenleteit.

**Megoldás.** Két megoldás van.

- Ha a rombusz hosszabbik átlója illeszkedik az abszcisszatengelyre, akkor az oldalegyenesek egyenlete $5x-6y=30$, $5x-6y=-30$, $5x+6y=30$ valamint $5x+6y=-30$.
- Ha a rövidebb átló illeszkedik az abszcisszatengelyre, akkor az oldalegyenesek egyenlete $6x-5y=30$, $6x-5y=-30$, $6x+5y=30$ és $6x+5y=-30$.



**17. Feladat.** Határozzuk meg annak a háromszögnek a területét, amelyet a koordinátatengelyek és az $e$ egyenes zárnak közre.

(a) $e\colon 5x + 10 = 2y$

(b) $e\colon x + 2y = 6$

(c) $e\colon y = \frac{2}{5}x - 2$

(d) $e\colon y = 3$

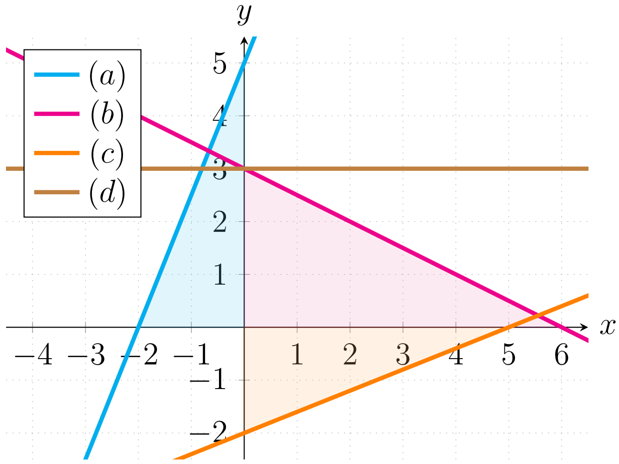
**Megoldás.**

(a) $t = 5$

(b) $t = 9$

(c) $t = 5$

(d) Nem jön létre háromszög.




**18. Feladat.** A koordinátatengelyek mely pontjai vannak egyenlő távolságra az $A$ és $B$ pontoktól?

(a) $A(2;5),\ B(8;1)$

(b) $A(-1;5),\ B(6;-2)$

(c) $A(2;5),\ B(5;2)$

**Megoldás.**

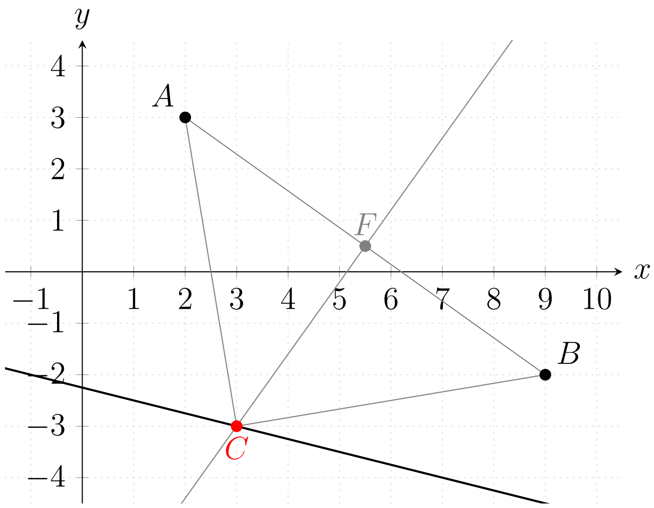
(a) $P_1(3;0),\ P_2(0;-4{,}5)$

(b) $P_1(1;0),\ P_2(0;-1)$

(c) $P(0;0)$

**19. Feladat.** Határozzuk meg az egyenlő szárú háromszög harmadik csúcsának koordinátáit, ha alapjának két végpontja $A(2;3)$ és $B(9;-2)$, valamint a harmadik csúcs illeszkedik az $e: x + 4y = -9$ egyenletű egyenesre.

**Megoldás.** A keresett csúcs az $AB$ szakasz $f$ szakaszfelező merőleges egyenesének és a megadott $e$ egyenesnek a metszéspontja. Az $AB$ szakasz $F$ felezőpontja $F(5{,}5;0{,}5)$ a keresett $f$ egyenes egy normálvektora $\overrightarrow{n_f} = \overrightarrow{AB} = (7;-5)$. Így az egyenes egyenlete $f\colon 7x - 5y = 36$. Az $e$ és $f$ egyenesek egyenletéből álló lineáris egyenletrendszer megoldása pedig $x = 3$ és $y = -3$. Így a háromszög harmadik csúcsa a $C(3;-3)$ pont.




**20. Feladat.** Határozzuk meg azon $P$ pontok mértani helyét melyekre $PA^2 - PB^2 = 30$, ha $A(2; 2)$ és $B(8; 4)$.

**Megoldás.** A keresett $P(x; y)$ pontra $(x-2)^2 + (y-2)^2 - ((x-8)^2 + (y-4)^2) = 30$, így a keresett pontok mértani helye a $6x + 2y = 51$ egyenletű egyenes.

**21. Feladat.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $A(3; 5)$ ponton, és amelynek a koordinátatengelyek közé eső szakaszát az $A$ pont felezi.

**Megoldás.** Tükrözzük az $x$ tengelyt az $A$ pontra, így az $y = 10$ egyenletű egyenest kapjuk, a keresett egyenes egy másik pontja tehát $B(0; 10)$. Az $A$ és $B$ pontokon átmenő egyenes egyenlete pedig: $e\colon 5x + 3y = 30$.

**22. Feladat.** Az $ABC$ háromszög egyik oldalegyenesének egyenlete $e\colon -3x+5y = 14$. Erre az oldalegyenesre eső két csúcsának ordinátái $y_1 = 1, y_2 = 4$. Határozzuk meg az $ABC$ háromszög csúcsainak koordinátáit, hiányzó oldalegyeneseinek egyenletét, valamint szögeinek nagyságát, ha a háromszög súlypontja $S\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

**Megoldás.** A háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3; 1)$, $B(3; -4)$ és $C(2; 4)$. Az oldalegyenesek egyenlete $f\colon 8x + y = 20$ és $g\colon 5x + 6y = -9$. A szögek nagysága $\alpha \approx 70{,}77°, \beta \approx 43{,}07°, \gamma \approx 66{,}16°$.

**23. Feladat.** Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $e\colon 2x + 3y = 12$ és $f\colon y = x - 1$ egyenesek metszéspontján és

(a) irányvektora $\overrightarrow{v}(2; 3)$,

(b) normálvektora $\overrightarrow{n}(1; 6)$,

(c) egy további pontja $B(4; 1)$,

(d) merőleges a $g : 3x - 5y = 2$ egyenesre,

(e) párhuzamos a $h : -2x + 3y = 8$ egyenessel.

**Megoldás.**

(a) $3x - 2y = 5$

(b) $x + 6y = 15$

(c) $x + y = 5$

(d) $5x + 3y = 21$

(e) $-2x + 3y = 0$

**24. Feladat.** Hogyan kell megválasztanunk az $m$ paraméter értékét, hogy az $mx - 3y = 7$ egyenletű egyenes

(a) áthaladjon a $P(2; -1)$ ponton

(b) párhuzamos legyen az $0 = 2x - y - 3$ egyenletű egyenessel

(c) merőleges legyen a $2x + 3y = 15$ egyenletű egyenesre

(d) áthaladjon az $e : x + 2y = 17$ és $f : 2y - x = 7$ egyenesek metszéspontján?

**Megoldás.**

(a) $m = 2$

(b) $m = 6$

(c) $m = 4{,}5$

(d) $m = 5$

**25. Feladat.** Határozzuk meg az egymásra merőleges $AM$ és $BM$ egyenesek egyenletét, ha $A(3; 2)$, $B(8; 1)$ az $M$ pont ordinátája $-1$.

**Megoldás.** Az $M(x; -1)$ pontra az $\overrightarrow{AM} = (x - 3; -3)$ és $\overrightarrow{BM} = (x - 8; -2)$ vektorok merőlegesek egymásra, vagyis skaláris szorzatuk 0. Az $(x - 3)(x - 8) + (-3) \cdot (-2) = 0$ egyenlet megoldása $x_1 = 5$ és $x_2 = 6$.

- Ha $x_1 = 5$, azaz $M(5; -1)$, akkor az $AM$ egyenes $3x+2y = 13$, a $BM$ egyenes $2x-3y = 13$.
- Ha $x_2 = 6$, azaz $M(6; -1)$, akkor az $AM$ egyenes $x + y = 5$, a $BM$ egyenes $x - y = 7$.

**26. Feladat.** Egy derékszögű háromszög átfogóegyenesének egyenlete $c : 7y - x = 27$. Egyik befogóegyenesének egyenlete $b : 3x + 4y = 19$. Az ezen oldallal szemközti csúcs ordinátája 5. Határozzuk meg a háromszög

(a) átfogóhoz tartozó magasságának egyenletét,

(b) magasságpontjának koordinátáit,

(c) köré írt köre sugarának hosszát.

**Megoldás.**

(a) $7x + y = 36$

(b) $M(5; 1)$

(c) $R = \dfrac{\sqrt{50}}{2}$

**27. Feladat.** Írjuk fel a $k$ kör egyenletét, ha

(a) középpontja az origó, és sugara $r = 5$;
(b) középpontja $C(3; -5)$, sugara $r = \sqrt{19}$;
(c) középpontja $C(2; -1)$ és áthalad az $A(5; -2)$ ponton;
(d) átmérőjének két végpontja $A(7; -3), B(5; 1)$;
(e) áthalad az $A(-1; 1), B(7; -3), C(8; 4)$ pontokon;
(f) középpontja $C(4; 1)$ és egy érintője a $4x + 3y = 44$ egyenletű egyenes;
(g) áthalad az $A(3; 2)$ és $B(8; 3)$ pontokon és sugara $r = \sqrt{13}$;
(h) koncentrikus az $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ egyenletű körrel és sugara fele akkora.

**Megoldás.**

(a) $k\colon x^2 + y^2 = 25$
(b) $k\colon (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 19$
(c) $k\colon (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$
(d) $k\colon (x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 5$
(e) $k\colon (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$
(f) $k\colon (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 25$
(g) $k\colon (x - 6)^2 + y^2 = 13$
(h) $k\colon (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$

**28. Feladat.** Az alábbi alakzatok közül válasszuk ki azokat, amelyek egy kört határoznak meg. Ha körről van szó, adjuk meg a középpontjának koordinátáit, és sugarának hosszát.

(a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 10$
(b) $x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 8y - 100 = 0$
(c) $2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y = 0$
(d) $x^2 - y^2 + 2x + 8y - 10 = 0$
(e) $x^2 + y^2 = 4x + 3y - 5$
(f) $x^2 + 6x + y^2 + 10y + 100 = 0$

**Megoldás.**

(a) Kör: $C(2; -3)$, $r = \sqrt{23}$.
(b) Nem kör.
(c) Kör: $C(-0{,}5; -0{,}5)$, $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
(d) Nem kör.
(e) Kör: $C(2; 1{,}5)$, $r = \sqrt{\frac{5}{4}}$.
(f) Nem kör.

**29. Feladat.** Határozzuk meg a derékszögű háromszög derékszögű csúcsának koordinátáit, valamint a köré írt körének egyenletét, ha átfogójának végpontjai $A(5; 2)$, $B(11; 0)$ és egyik befogója párhuzamos a $-x + y = 2$ egyenletű egyenessel.

**Megoldás.** $C_1(7; 4), C_2(9; -2),\ k\colon (x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 10$

**30. Feladat.** Határozzuk meg az $A(2; 4)$ ponton áthaladó, az $x$ tengelyt azon $P$ pontban érintő kör egyenletét, melyre $AP = \sqrt{32}$.

**Megoldás.** $(x-6)^2+(y-4)^2=16$ vagy $(x+2)^2+(y-4)^2=16$

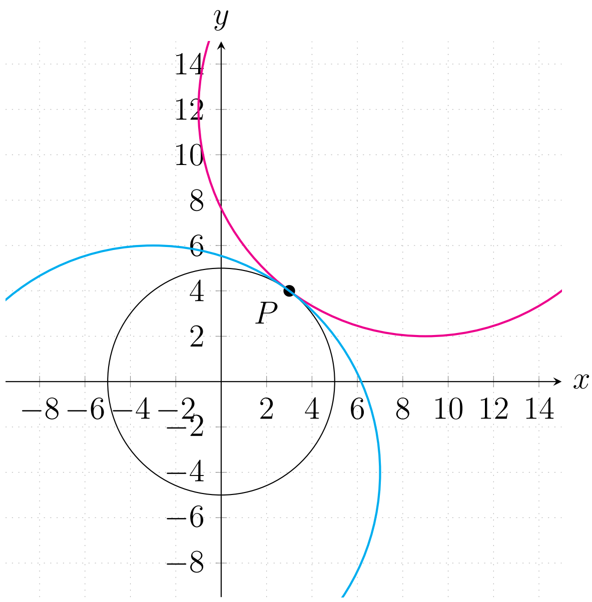
**31. Feladat.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2+y^2=25$ egyenletű kört a $P(3;4)$ pontjában érinti, és sugara 10 egység.

**Megoldás.**

$k_1\colon (x-9)^2+(y-12)^2=100$

vagy

$k_2\colon (x+3)^2+(y+4)^2=100$




**32. Feladat.** Számítsuk ki, hogy az $e\colon x+y=8$ egyenesből milyen hosszú húrt metsz ki a $k\colon (x-3,5)^2+(y-3,5)^2=8,5$ egyenletű kör.

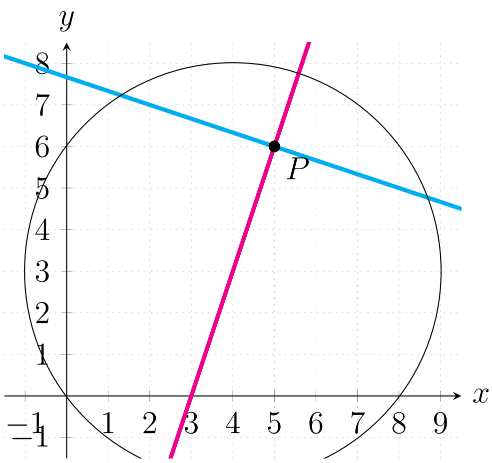
**Megoldás.** $h=\sqrt{32}$

**33. Feladat.** Határozzuk meg a $k\colon x^2-8x+y^2-6y=-7$ egyenletű kör $P(5;6)$ ponton áthaladó legrövidebb és leghosszabb húregyenesének egyenletét.

**Megoldás.**

(a) $x+3y=23$

(b) $3x-y=9$



**34. Feladat.** Írjuk fel a $k : x^2 + y^2 + 4x - 4y = 10$ egyenletű körhöz a $P$ pontból húzható érintő(k) egyenletét.

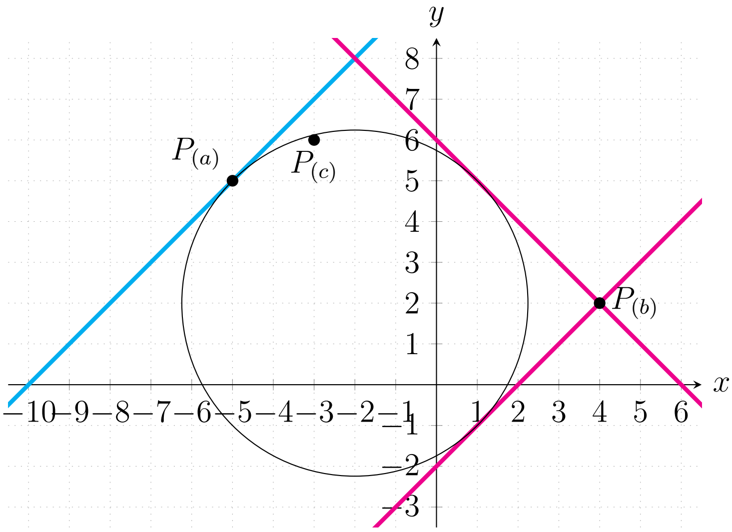
(a) $P(-5; 5)$ (b) $P(4; 2)$ (c) $P(-3; 6)$

**Megoldás.**

(a) $e\colon y - x - 10 = 0$

(b) $e_1\colon x + y = 6,\ e_2\colon x - y = 2$

(c) Nem húzható(k) érintő(k), a pont a kör belsejében van.




**35. Feladat.** Milyen helyzetűek egymáshoz képest az alábbi körök?

(a) $k_1\colon x^2 + y^2 - 6x + 4y = -3, \quad k_2\colon x^2 + y^2 - 12x - 8y = -27$

(b) $k_1\colon (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8, \quad k_2\colon (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$

(c) $k_1\colon x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0, \quad k_2\colon x^2 + y^2 - 18x + 4y = -83$

(d) $k_1\colon x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0, \quad k_2\colon (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$

(e) $k_1\colon (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 18, \quad k_2\colon x^2 + y^2 - 12x - 2y = -35$

(f) $k_1\colon (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9, \quad k_2\colon x^2 + y^2 + 4x + 6y = -4$

**Megoldás.**

(a) A két körnek 2 metszéspontja van.

(b) A körök kívülről érintik egymást.

(c) Nincs közös pontjuk, elkerülik egymást.

(d) Nincs közös pontjuk, $k_2$ a $k_1$ belsejében van.

(e) A $k_2$ belülről érinti $k_1$-et.

(f) A két kör megegyezik.

**36. Feladat.** Határozzuk meg a $k_1\colon x^2 + y^2 - 6x + 4y = -3$ és $k_2\colon (x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$ körök közös húregyenesének egyenletét, valamint a metszéspontok koordinátáit.

**Megoldás.** A körök egyenleteit egymásból kivonva adódik a húregyenes egyenlete $e\colon x+2y = 4$. A körök egyenleteiből álló egyenletrendszert, vagy bármely kör és az $e$ egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert megoldva pedig a metszéspontok koordinátáit: $A(2;1)$ és $B(6;-1)$.

**37. Feladat.** Határozzuk meg az $m$ paraméter értékét úgy, hogy az $e\colon mx + y = 7$ egyenes a $k\colon (x+3)^2 + (y-3)^2 = 20$ kör érintője legyen.

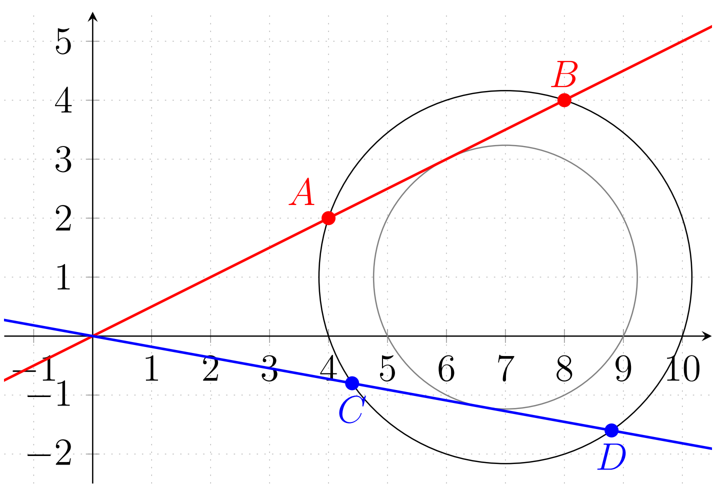
**Megoldás.** $m_1 = 2,\ m_2 = \dfrac{2}{11}$

**38.* Feladat.** Írjuk fel a $k\colon (x+4)^2+(y-3)^2 = 29$ egyenletű kör $m = \dfrac{2}{5}$ meredekségű érintőinek egyenletét.

**Megoldás.** Az érintő egyenletét $e\colon y = \dfrac{2}{5}x + b$ alakban keresve az $e$ és $k$ egyenletéből álló egyenletrendszernek csak egy megoldása lehet. Vagyis az egyenletrendszer megoldása során adódó másodfokú, $b$-ben paraméteres egyenletben a diszkrimináns nulla kell, hogy legyen. Innen $e_1\colon 2x - 5y = -52$ és $e_2\colon 2x - 5y = 6$.

**39.* Feladat.** Az $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 10$ egyenletű körből egy origón áthaladó egyenes egy $\sqrt{20}$ egység hosszú húrt metsz ki. Határozzuk meg az egyenes egyenletét és a metszéspontok koordinátáit.

**Megoldás.** A húrok a kör középpontjától $\sqrt{5}$ egységnyire haladnak, ez egyszerű Pitagorasz-tételből adódik. Így a $(7;1)$ középpontú, $\sqrt{5}$ egység sugarú körhöz és az $mx = y$ origón áthaladó egyeneshez tartozó egyenletrendszerhez keressük azon $m$ paraméterértékeket, amelyre csak egy megoldás van. Ebből $m_1 = \dfrac{1}{2}$ és $m_2 = -\dfrac{2}{11}$ adódik. Vagyis a keresett egyenesek és a metszéspontok $e\colon x = 2y$, $A(4;2)$, $B(8;4)$ és $f\colon 2x + 11y = 0$, $C(4{,}4;-0{,}8)$, $D(8{,}8;-1{,}6)$.



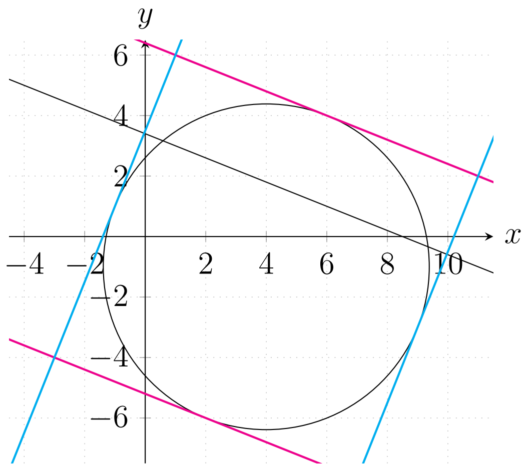
**40. Feladat.** Az $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 12$ egyenletű körhöz olyan érintőket húzunk, amelyek

(a) párhuzamosak (b) merőlegesek

az $e\colon 2x + 5y = 17$ egyenletű egyenessel. Határozzuk meg az érintők egyenletét.

**Megoldás.**

(a) $f_1\colon 2x + 5y = 32,\ f_2\colon 2x + 5y = -26$ (b) $g_1\colon -5x + 2y = 7,\ g_2\colon 5x - 2y = 51$

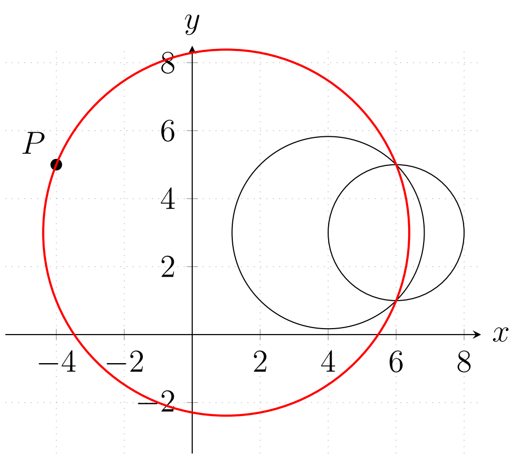



**41. Feladat.** Határozzuk meg a $k\colon x^2 + y^2 - 10x - 6y = -21$ kör azon pontjait, melyek a $P(15; 1)$ ponttól $\sqrt{65}$ egység távolságra vannak.

**Megoldás.** A $k$ és a $P$ középpontú, $\sqrt{65}$ egység sugarú körök metszéspontjait keressük, ezek koordinátái a körök egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásaiként adódnak: $A(7; 0)$ és $B(8; 5)$.

**42. Feladat.** Határozzuk meg annak a $k$ körnek az egyenletét, amely áthalad a $k_1\colon (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8$ és $k_2\colon (x-6)^2 + (y-3)^2 = 4$ körök közös pontjain, valamint a $P(-4; 5)$ ponton.

**Megoldás.** $k\colon (x-1)^2 + (y-3)^2 = 29$



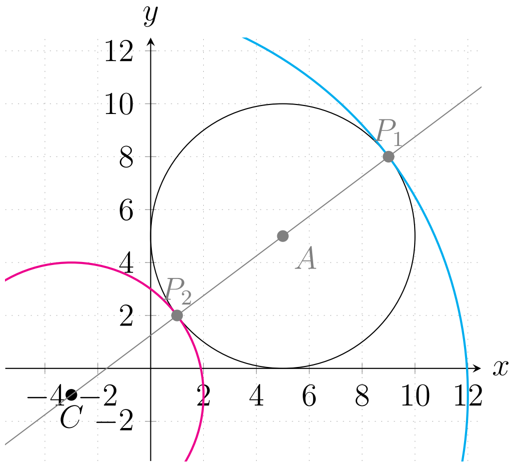
**43.* Feladat.** Írjuk fel annak a körnek az egyenletét amelynek középpontja $C(-3;-1)$, és a $k: x^2+y^2-10x-10y=-25$ kör

(a) belülről (b) kívülről

érinti.

**Megoldás.** Az adott $k$ kör középpontja $A(5;5)$. Az $AC$ egyenes egyenlete $-3x+4y=5$. Ennek $k$-val vett metszéspontjai $P_1(9;8)$ és $P_2(1;2)$. A megoldásokat a $C$ középpontú, ezen pontokon (külön-külön) áthaladó körök adják.

(a) $k_1: (x+3)^2+(y+1)^2=225$ (b) $k_2: (x+3)^2+(y+1)^2=25$



# 11 | Kombinatorika, gráfok

## Összeszámlálások

**1. Feladat.** Hányféleképp állíthatja sorba Hófehérke a hét törpét, ha

(a) nem szabunk semmilyen feltételt,
(b) Szundi áll középen,
(c) Morgó a sor szélén áll,
(d) Morgó és Hapci áll a sor két szélén,
(e) Kuka és Hapci nem szomszédos,
(f) Szende közvetlenül Tudor és Vidor között áll,
(g) ábécérendben állnak,
(h) Morgó a sor szélén áll és Szende és Szundi szomszédosak,
(i) Morgó a sor szélén áll vagy Szende és Szundi szomszédosak,
(j) vagy Morgó áll a sor szélén, vagy Szende és Szundi szomszédosak,
(k) Morgó a sor szélén áll és Szende és Szundi nem szomszédosak.

**2. Feladat.** Hányféleképp ülhet le Artúr király és a hét lovagja a kerekasztal mellé, ha

(a) nincs semmilyen extra feltétel,
(b) Galahad nem szeretne Parszifal mellé ülni.

Két ültetést akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy valaki, akinek a két ültetésben legalább az egyik szomszédja különbözik.

**3. Feladat.** A hét törpét meglátogatja a hét lovag. Hófehérke leülteti őket egy egyenes asztal ugyanazon oldalára. Hányféleképp teheti ezt meg úgy, hogy

(a) törpe mellett vezér, vezér mellett törpe üljön felváltva,
(b) a törpék ülnek az első hét helyen,
(c) a lovagok mindannyian szomszédosak?

**4. Feladat.** Az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyek mindegyikének felhasználásával hány olyan ötjegyű pozitív egész szám képezhető, mely

(a) páros,

(b) öttel osztható,

(c) tízzel osztható,

(d) hárommal osztható,

(e) hattal osztható,

(f) 20 000-nél nagyobb páratlan szám,

(g) 20 000-nél kisebb, vagy öttel osztható,

(h) négyzetszám.

**5. Feladat.** A $0, 1, 2, 3, 4$ számjegyek felhasználásával hány olyan ötjegyű pozitív egész szám képezhető, ami

(a) tetszőleges,

(b) páros,

(c) öttel osztható,

(d) tízzel osztható,

(e) hárommal osztható,

(f) hattal osztható?

**6. Feladat.** Hány olyan sorrendje (permutációja) van az $1, 2, 3, 4, 5$ elemeknek, amelyben az eredeti, 12345 sorrendhez képest

(a) az 1, 2 elemek helyet cseréltek,

(b) az 1 fixen maradt,

(c) az 1 és 2 is fixen maradt,

(d) az 1 fixen maradt, de a 2 nem,

(e) az 1 vagy a 2 fixen maradt,

(f) pontosan 2 elem maradt fixen,

(g) pontosan 3 elem maradt fixen,

(h) pontosan 4 elem maradt fixen?

**7. Feladat.** Hány olyan kölcsönösen egyértelmű függvény van, amely értelmezési tartománya az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaz, értékkészlete pedig

(a) $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,

(b) $B = \{a; b; c; d; e; f\}$,

(c) $B = \{a; b; c; d; e; f; g\}$?

**8. Feladat.** Hány sorrendje van a MATEMATIKA szó betűinek, amelyben

(a) nem szabunk extra feltételt,

(b) M az első betű,

(c) A az utolsó betű,

(d) a három A nem szomszédos,

(e) M az első betű és a három A szomszédos,

(f) a magánhangzók elől állnak.

**9. Feladat.** Hányféleképp olvasható ki az alábbi táblázatból a MATEMATIKA szó, ha a bal felső sarokból indulunk és csak jobbra vagy lefele haladhatunk?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| M | A | T | E | M |
| A | T | E | M | A |
| T | E | M | A | T |
| E | M | A | T | I |
| M | A | T | I | K |
| A | T | I | K | A |

**10. Feladat.** Egy úszóversenyen nyolcan indultak. Hányféleképpen alakulhatott a dobogósok sorrendje, ha nem volt holtverseny?

**11. Feladat.** Hányféle négyjegyű pozitív egész szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek legfeljebb egyszeri felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,

(b) a szám nem tartalmazza az 1-et,

(c) a számban szerepel a 7-es számjegy,

(d) a szám öttel osztható,

(e) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,

(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et, és a számban szerepel a 7-es számjegy,

(g) a szám öttel osztható vagy szerepel benne a 7-es számjegy,

(h) a szám vagy osztható 5-tel, vagy nem tartalmazza az 1-et,

(i) a szám csak páratlan számjegyekből állhat,

(j) a szám páratlan,

(k) a szám csak páros számjegyekből állhat,

(l) a szám páros,

(m) a számban a számjegyek szorzata páros,

(n) a számban a számjegyek összege páros.

**12. Feladat.** Hányféle ötjegyű pozitív egész szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek legfeljebb egyszeri felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,

(b) a szám nem tartalmazza az 1-et,

(c) a számban szerepel a 7-es számjegy,

(d) a számban szerepel a 4-es számjegy,

(e) a szám öttel osztható,

(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,

(g) a szám páratlan,

(h) a számban nagyobb, mint 34220.

**13. Feladat.** Egy szabályos pénzérmét tízszer feldobva tíz hosszúságú fej-írás sorozatot kapunk. Hány különböző sorozat van? Hány olyan sorozat van,

(a) amely írással kezdődik,
(b) amely írással kezdődik, és fejjel végződik,
(c) amelyben a fejek és írások felváltva követik egymást,
(d) amelyben ugyanannyi írás van, mint fej,
(e) amelyben több írás van, mint fej,
(f) amelyben a fejek és írások száma is páros,
(g) amelyben a fejek és írások száma is prímszám,
(h) amely palindrom (tehát visszafele olvasva is ugyanaz),
(i) amelyben nincs két írás amely szomszédos lenne?

**14. Feladat.** Egy szabályos dobókockát ötször feldobva, a dobások eredményét egymás mellé leírva ötjegyű pozitív egész számokat kaptunk. Ezek között hány olyan van,

(a) amelyre vonatkozóan nem szabunk feltételt,
(b) amelyben van ismétlődő számjegy,
(c) amely öttel osztható,
(d) amely 30000-nél kisebb,
(e) amely 34000-nél nagyobb,
(f) amelyben nem szerepel prím számjegy,
(g) amelyben a számjegyek szorzata prím,
(h) amelyben a számjegyek szorzata 3600-zal osztható,
(i) amelyben az első két számjegy nem 6-os, de a harmadik igen,
(j) amely palindrom, tehát visszafele olvasva is ugyanaz,
(k) egy egész szám tizedik hatványa?

**15. Feladat.** Hányféle négyjegyű pozitív egész szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek (akár többszöri) felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,
(b) van olyan számjegy, amely legalább kétszer szerepel,
(c) a szám nem tartalmazza az 1-et,
(d) a számban szerepel a 7-es számjegy,
(e) a szám öttel osztható,
(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,
(g) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et, és a számban szerepel a 7-es számjegy,
(h) a szám öttel osztható vagy szerepel benne a 7-es számjegy,

(i) a szám vagy osztható 5-tel, vagy nem tartalmazza az 1-et,

(j) a szám csak páratlan számjegyekből állhat,

(k) a szám páratlan,

(l) a szám csak páros számjegyekből állhat,

(m) a szám páros,

(n) a számban a számjegyek szorzata páros,

(o) a számban a számjegyek összege páros.

**16. Feladat.** Hányféle ötjegyű pozitív egész szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek (akár többszöri) felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,

(b) a szám nem tartalmazza az 1-et,

(c) a számban szerepel a 7-es számjegy,

(d) a számban szerepel a 4-es számjegy,

(e) a szám öttel osztható,

(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,

(g) a szám páratlan,

(h) a szám nagyobb, mint 34220.

**17. Feladat.** Hányféleképp olvasható ki az alábbi táblázatból a MATEMATIKA szó, ha a bal felső sarokból indulunk és csak jobbra vagy lefele haladhatunk?

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | A | T | E | M | A | T | I | K | A |
| A | T | E | M | A | T | I | K | A | |
| T | E | M | A | T | I | K | A | | |
| E | M | A | T | I | K | A | | | |
| M | A | T | I | K | A | | | | |
| A | T | I | K | A | | | | | |
| T | I | K | A | | | | | | |
| I | K | A | | | | | | | |
| K | A | | | | | | | | |
| A | | | | | | | | | |

**18. Feladat.** Hány

(a) 4 (b) 6 (c) $n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)

jegyű pozitív egész szám van a

(i) 10-es (ii) 2-es (iii) $k$-as ($k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2$)

alapú számrendszerben?

**19. Feladat.** Hány legfeljebb

(a) 4 (b) 6 (c) $n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$

jegyű pozitív egész szám van a

(i) 10-es (ii) 2-es (iii) $k$-as $(k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2)$

alapú számrendszerben?

**20. Feladat.** Hányféle nyolcjegyű pozitív egész szám képezhető csak a 2 és 7 számjegyek felhasználásával, ha

(a) semmilyen feltételt nem szabunk,
(b) a számnak mindkét számjegyet tartalmaznia kell legalább egyszer,
(c) a számnak 9-cel oszthatónak kell lennie,
(d) a számnak 18-cal oszthatónak kell lennie,
(e) a számnak 36-tal oszthatónak kell lennie.

**21. Feladat.** Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fog pontosan egyszer. Hány kézfogásra kerül sor, ha a társaság

(a) 4 (b) 10 (c) $n$

főből áll?

**22. Feladat.** Hány

(a) 2, (b) 3, (c) $k$ $(k \in \mathbb{N}, k \leq 6)$

elemű részhalmaza van az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaznak?

**23. Feladat.** Hány általános helyzetű egyenest vettünk fel a síkon, ha összesen

(a) 3 (b) 10 (c) 91

metszéspontjuk van? Egyeneseket általános helyzetűnek nevezünk, ha semelyik kettő nem párhuzamos (vagy esik egybe), illetve semelyik három nem megy át egy ponton.

**24. Feladat.** Egy úszóversenyen nyolcan indultak. Holtverseny nem volt és az első 4 helyezett jutott tovább a következő fordulóba. Hányféleképp alakulhatott a továbbjutók csoportja?

**25. Feladat.** Hányféleképp tölthető ki egy lottószelvény (ahol az 1-90 számok közül kell beikszelnünk ötöt), ha

(a) semmilyen feltételt nem szabunk,
(b) a szelvényen nincs nyerő szám beikszelve,
(c) a szelvény egy találatos,
(d) a szelvény négy találatos,
(e) a szelvény telitalálatos?

**26. Feladat.** Egy gyár napi termelése során az 500 elkészített végtermék 12 százaléka selejtes lesz. Hányféleképp lehet 12-t kiválasztani (egyszerre, visszatevés nélkül) a termékek közül úgy, hogy a kiválasztottak között

(a) ne legyen selejtes,

(b) pontosan két selejtes legyen,

(c) legyen két selejtes,

(d) ugyanannyi sejtes legyen, mint hibátlan,

(e) kétszer annyi hibátlan legyen, mint selejtes?

**27. Feladat.** Hányféleképp lehet kiosztani a 32 lapos magyar kártya csomagot 8 játékos között úgy, hogy mindenki 4 lapot kap?

**28. Feladat.** Egy 32 lapos magyar kártya csomagból kiválasztunk egyszerre, visszatevés nélkül 8 lapot. (A magyar kártyában 4 szín van, mindegyikből 8-8 lap. Ezek: hetes, nyolcas, kilences, tízes, alsó, felső, király, ász.) Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a kiválasztott lapok között

(a) ne legyen ász,

(b) ott legyen a piros hetes,

(c) csak zöld legyen,

(d) csak ász és hetes legyen,

(e) csak ász és zöld legyen,

(f) csak zöld és makk legyen, de legyen mindkét színből legalább egy,

(g) pontosan két színből valók legyenek,

(h) csak figura legyen,

(i) legalább három figura legyen.

**29. Feladat.** Hány olyan hatjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szigorú monoton

(a) növekvő

(b) csökkenő

sorrendben követik egymást?

**30. Feladat.** Egy 32 fős osztály, melybe 14 lány és 18 fiú jár választ egy bizottsági elnököt és 5 (egyenrangú) bizottsági tagot. (Az elnök nem lehet tag is.) Hányféleképp tehetik ezt meg, ha

(a) semmilyen feltételt nem szabunk,

(b) az elnöknek lánynak kell lennie,

(c) a tagok csak fiúk lehetnek,

(d) a bizottság nem állhat csupa azonos nemű személyből,

(e) a tagok többségének az elnökkel ellenkező neműnek kell lennie.

**31. Feladat.** Igazoljuk a binomiális együtthatók következő tulajdonságait, összefüggéseit.

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

(c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

**32.* Feladat.** Leírtuk a pozitív egész számokat egymás mellé 1-től 2019-ig.

(a) Hány számjegyet írtunk le?

(b) Hányszor írtuk le az 1-es számjegyet?

(c) Melyik a 2019. számjegye a leírt számnak?

**33. Feladat.** Hány

(a) hatjegyű,

(b) hétjegyű

tükörszám (palindorm szám) van a tízes számrendszerben? És a négyesben?

# Gráfok

Ebben a fejezetben gráf alatt minden esetben véges, egyszerű, irányítás nélküli gráfot értünk.

**34. Feladat.** Egy hat tagú vendégségben, a házigazda aki mindenkit ismer, megkérdezte, ki hány jelenlévőt ismer (az ismeretségek kölcsönösek). A következő válaszokat kapta: $1, 4, 2, 3$. Az utolsó választ nem hallotta, mégis ki tudta találni. Mennyi volt az utolsó válasz, és hogyan gondolkodott a házigazda?

**35. Feladat.** Rajzoljon olyan öt csúcsú gráfot amelynek 6 éle van, és

(a) van benne olyan csúcs, amelynek fokszáma 3,

(b) nem összefüggő,

(c) pontosan két olyan csúcsa van, amelynek fokszáma 4.

**36. Feladat.** Rajzoljon olyan öt csúcsú gráfot, amelynek fokszámsorozata

(a) 4, 4, 4, 4, 4,

(b) 4, 4, 4, 3, 3,

(c) 3, 3, 2, 2, 2,

(d) 2, 1, 1, 0, 0,

(e) 5, 4, 3, 3, 2,

(f) 4, 4, 3, 2, 1,

(g) 4, 3, 2, 1, 0,

(h) 4, 3, 3, 2, 1.

**37. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely társaságban van legalább két olyan ember, akinek ugyanannyi ismerőse van a jelenlévők között.

**38. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely poliédernek van legalább két, azonos oldalszámú lapja.

**39. Feladat.** Egy informatikus azt a feladatot kapta, hogy kössön össze 2019 számítógépet úgy, hogy mindegyik 365 másikkal legyen összekötve. Hogyan végezze el a feladatát?

**40. Feladat.** Adjuk meg a hiányzó fokszámot/fokszámokat a következő fokszámsorozatokban. Ha több lehetséges megoldás is van, akkor adjuk meg az összes megoldást.

(a) 5, 5, 5, 5, 5, X

(b) 5, 5, 3, 3, 3, X

(c) 5, 5, 5, 5, X, Y

(d) 5, 2, 1, 1, X, Y

(e) 5, 5, 3, 2, X, Y

(f) 5, 5, 3, 1, X, Y

**41. Feladat.** Nyolc csapat egyfordulós körmérkőzést játszik egymással.

(a) Hány meccset játszanak összesen?

(b) Ha eddig minden csapat három mérkőzésén van túl, akkor hány meccs van még hátra?

(c) Eddig már 17 mérkőzést lejátszottak. Igazolja, hogy van olyan csapat amely már 5 mérkőzést játszott.

(d) Legalább hány lejátszott mérkőzés után állíthatjuk biztosan azt, hogy van olyan csapat, amely már legalább 6 mérkőzést lejátszott?

**42. Feladat.** Rajzoljunk olyan 5 csúcsú gráfot amelynek

(a) 11 éle van,

(b) 3 éle van és összefüggő.

**43. Feladat.** Hány éle van egy

(a) 3,

(b) 6,

(c) $n$

csúcsú teljes gráfnak?

**44. Feladat.** Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelynek élszáma

(a) 15,

(b) 171,

(c) 195?

**45. Feladat.** Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelyben az élek száma több, mint a csúcsok számának ötszöröse, de kevesebb, mint a hatszorosa?

**46. Feladat.** Egy fába 435 élt behúzva teljes gráfot kapunk.

(a) Hány csúcsa van ennek a gráfnak?

(b) Legfeljebb hány élt tudunk kitörölni az élek behúzásával kapott a teljes gráfból úgy, hogy a kapott gráf még összefüggő legyen?

(c) Maximum hány élt tudunk kitörölni ebből a teljes gráfból úgy, hogy a kapott gráfban még legyen kör?

(d) Legfeljebb hány élt tudunk kitörölni ebből a teljes gráfból úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen, és legyen benne kör?

**47. Feladat.** Miből van több, olyan 7 csúcsú gráfból, amelynek 10, vagy amelynek 11 éle van?

**48. Feladat.** Miből van több, olyan

(a) 7,

(b) 8

csúcsú gráfból, amelyben minden pont foka 3, vagy amelyikben minden pont foka 4?

**49. Feladat.** Hány olyan 5 csúcsú gráf van, amelynek

(a) 10 éle van, (b) 9 éle van, (c) 8 éle van, (d) 7 éle van,

ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

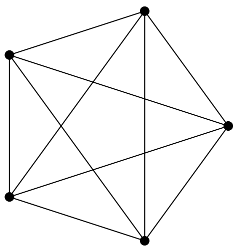
**50. Feladat.** Hány olyan $n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) csúcsú gráf van, amelynek

(a) 0, (b) 1, (c) 2

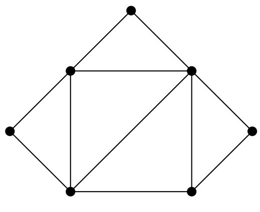
éle van, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

**51. Feladat.** Megrajzolhatók-e az alábbi gráfok „egyetlen vonallal”?

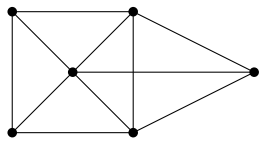
(a)



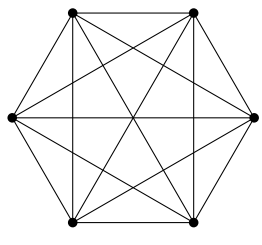
(b)



(c)



(d)



**52. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely 6 tagú társaságban van 3 ember akik páronként ismerik, vagy páronként nem ismerik egymást.

**53.* Feladat.** Egy 17 csúcsú gráf minden élét egyszínűre, vagy kékre, vagy pirosra, vagy sárgára festettük. Igazoljuk, hogy van a gráfban egyszínű háromszög.

**54.* Feladat.** Egy ország 32 települése között telefonvonalakat építenek ki. Egy telefonvonal pontosan két települést köt össze, és két település között legfeljebb egy közvetlen vonal épül. Bizonyítsuk be, hogy ha már 466 vonalat kiépítettek, akkor bármely településről bármely településre lehet telefonálni vagy közvetlen vonalon, vagy több, már kiépített vonal összekapcsolásával. (OKTV, 1997-1998. II. kat. 1. forduló, 4. feladat)

# Megoldások

## Összeszámlálások

**1. Feladat.** Hányféleképp állíthatja sorba Hófehérke a hét törpét, ha

(a) nem szabunk semmilyen feltételt,

(b) Szundi áll középen,

(c) Morgó a sor szélén áll,

(d) Morgó és Hapci áll a sor két szélén,

(e) Kuka és Hapci nem szomszédos,

(f) Szende közvetlenül Tudor és Vidor között áll,

(g) ábécérendben állnak,

(h) Morgó a sor szélén áll és Szende és Szundi szomszédosak,

(i) Morgó a sor szélén áll vagy Szende és Szundi szomszédosak,

(j) vagy Morgó áll a sor szélén, vagy Szende és Szundi szomszédosak,

(k) Morgó a sor szélén áll és Szende és Szundi nem szomszédosak.

**Megoldás.**

(a) $7!$

(b) $6!$

(c) $2 \cdot 6!$

(d) $2 \cdot 5!$

(e) $7! - 2 \cdot 6!$

(f) $2 \cdot 5!$

(g) $1$

(h) $2 \cdot 2 \cdot 5!$

(i) $2 \cdot 6! + 2 \cdot 6! - 2 \cdot 2 \cdot 5!$

(j) $2 \cdot 6! + 2 \cdot 6! - 2 \cdot 2 \cdot 5! - 2 \cdot 2 \cdot 5!$

(k) $2 \cdot (6! - 2 \cdot 5!)$

**2. Feladat.** Hányféleképp ülhet le Artúr király és a hét lovagja a kerekasztal mellé, ha

(a) nincs semmilyen extra feltétel,

(b) Galahad nem szeretne Parszifal mellé ülni.

Két ültetést akkor tekintünk különbözőnek, ha van legalább egy valaki, akinek a két ültetésben legalább az egyik szomszédja különbözik.

**Megoldás.**

(a) $7!$

(b) $7! - 2 \cdot 6!$

**3. Feladat.** A hét törpét meglátogatja a hét lovag. Hófehérke leülteti őket egy egyenes asztal ugyanazon oldalára. Hányféleképp teheti ezt meg úgy, hogy

(a) törpe mellett vezér, vezér mellett törpe üljön felváltva,

(b) a törpék ülnek az első hét helyen,

(c) a lovagok mindannyian szomszédosak?

**Megoldás.**

(a) $2 \cdot 7! \cdot 7!$

(b) $7! \cdot 7!$

(c) $8! \cdot 7!$

**4. Feladat.** Az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyek mindegyikének felhasználásával hány olyan ötjegyű pozitív egész szám képezhető, mely

(a) páros,

(b) öttel osztható,

(c) tízzel osztható,

(d) hárommal osztható,

(e) hattal osztható,

(f) 20 000-nél nagyobb páratlan szám,

(g) 20 000-nél kisebb, vagy öttel osztható,

(h) négyzetszám.

**Megoldás.**

(a) $2 \cdot 4!$

(b) $4!$

(c) $0$

(d) $5!$

(e) $2 \cdot 4!$

(f) $24 + 36$

(g) $24 + 18 = 42$

(h) $0$

**5. Feladat.** A $0, 1, 2, 3, 4$ számjegyek felhasználásával hány olyan ötjegyű pozitív egész szám képezhető, ami

(a) tetszőleges,

(b) páros,

(c) öttel osztható,

(d) tízzel osztható,

(e) hárommal osztható,

(f) hattal osztható?

**Megoldás.**

(a) $4 \cdot 4!$

(b) $4! + 2 \cdot 3 \cdot 3!$

(c) $4! \cdot 1$

(d) $4!$

(e) $0$

(f) $0$

**6. Feladat.** Hány olyan sorrendje (permutációja) van az $1, 2, 3, 4, 5$ elemeknek, amelyben az eredeti, 12345 sorrendhez képest

(a) az 1, 2 elemek helyet cseréltek,

(b) az 1 fixen maradt,

(c) az 1 és 2 is fixen maradt,

(d) az 1 fixen maradt, de a 2 nem,

(e) az 1 vagy a 2 fixen maradt,

(f) pontosan 2 elem maradt fixen,

(g) pontosan 3 elem maradt fixen,

(h) pontosan 4 elem maradt fixen?

**Megoldás.**

(a) $3!$

(b) $4!$

(c) $3!$

(d) $3 \cdot 3!$

(e) $2 \cdot 4! - 3!$

(f) $\binom{5}{2} \cdot 2$

(g) $\binom{5}{3}$

(h) $0$

**7. Feladat.** Hány olyan kölcsönösen egyértelmű függvény van, amely értelmezési tartománya az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaz, értékkészlete pedig

(a) $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,

(b) $B = \{a; b; c; d; e; f\}$,

(c) $B = \{a; b; c; d; e; f; g\}$?

**Megoldás.**

(a) $6!$

(b) $6!$

(c) $0$

**8. Feladat.** Hány sorrendje van a MATEMATIKA szó betűinek, amelyben

(a) nem szabunk extra feltételt,

(b) M az első betű,

(c) A az utolsó betű,

(d) a három A nem szomszédos,

(e) M az első betű és a három A szomszédos,

(f) a magánhangzók elől állnak.

**Megoldás.**

(a) $\dfrac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!}$

(b) $\dfrac{9!}{2! \cdot 3!}$

(c) $\dfrac{9!}{2! \cdot 2!}$

(d) $\dfrac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} - \dfrac{8!}{2! \cdot 2!}$

(e) $\dfrac{7!}{2!}$

(f) $\dfrac{5!}{3!} \cdot \dfrac{5!}{2! \cdot 2!}$

**9. Feladat.** Hányféleképp olvasható ki az alábbi táblázatból a MATEMATIKA szó, ha a bal felső sarokból indulunk és csak jobbra vagy lefele haladhatunk?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| M | A | T | E | M |
| A | T | E | M | A |
| T | E | M | A | T |
| E | M | A | T | I |
| M | A | T | I | K |
| A | T | I | K | A |

**Megoldás.** $\dfrac{9!}{5! \cdot 4!}$

**10. Feladat.** Egy úszóversenyen nyolcan indultak. Hányféleképpen alakulhatott a dobogósok sorrendje, ha nem volt holtverseny?

**Megoldás.** $8 \cdot 7 \cdot 6$

**11. Feladat.** Hányféle négyjegyű pozitív egész szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek legfeljebb egyszeri felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,

(b) a szám nem tartalmazza az 1-et,

(c) a számban szerepel a 7-es számjegy,

(d) a szám öttel osztható,

(e) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,

(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et, és a számban szerepel a 7-es számjegy,

(g) a szám öttel osztható vagy szerepel benne a 7-es számjegy,

(h) a szám vagy osztható 5-tel, vagy nem tartalmazza az 1-et,

(i) a szám csak páratlan számjegyekből állhat,

(j) a szám páratlan,

(k) a szám csak páros számjegyekből állhat,

(l) a szám páros,

(m) a számban a számjegyek szorzata páros,

(n) a számban a számjegyek összege páros.

**Megoldás.**

(a) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

(b) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

(c) $4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

(d) $6 \cdot 5 \cdot 4$

(e) $5 \cdot 4 \cdot 3$

(f) $3 \cdot 4 \cdot 3$

(g) $6 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \cdot 4$

(h) $3 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

(i) $4!$

(j) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4$

(k) $0$

(l) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

(m) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 4!$

(n) $4! + \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4!$

**12. Feladat.** Hányféle ötjegyű pozitív egész szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek legfeljebb egyszeri felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,

(b) a szám nem tartalmazza az 1-et,

(c) a számban szerepel a 7-es számjegy,

(d) a számban szerepel a 4-es számjegy,

(e) a szám öttel osztható,

(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,

(g) a szám páratlan,

(h) a számban nagyobb, mint 34220.

**Megoldás.**

(a) $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

(b) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

(c) $0$

(d) $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

(e) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

(f) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

(g) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$

(h) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

**13. Feladat.** Egy szabályos pénzérmét tízszer feldobva tíz hosszúságú fej-írás sorozatot kapunk. Hány különböző sorozat van? Hány olyan sorozat van,

(a) amely írással kezdődik,

(b) amely írással kezdődik, és fejjel végződik,

(c) amelyben a fejek és írások felváltva követik egymást,

(d) amelyben ugyanannyi írás van, mint fej,

(e) amelyben több írás van, mint fej,

(f) amelyben a fejek és írások száma is páros,

(g) amelyben a fejek és írások száma is prímszám,

(h) amely palindrom (tehát visszafele olvasva is ugyanaz),

(i) amelyben nincs két írás amely szomszédos lenne?

**Megoldás.** Összesen $2^{10}$ különböző sorozat van.

(a) $2^9$

(b) $2^8$

(c) $2$

(d) $\binom{10}{5}$

(e) $\binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$

(f) $2 \cdot \left(\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4}\right) = 2^9$

(g) $2 \cdot \binom{10}{3} + \binom{10}{5}$

(h) $2^5$

(i) $1 + 10 + \binom{9}{7} + \binom{8}{5} + \binom{7}{3} + \binom{6}{1}$

**14. Feladat.** Egy szabályos dobókockát ötször feldobva, a dobások eredményét egymás mellé leírva ötjegyű pozitív egész számokat kaptunk. Ezek között hány olyan van,

(a) amelyre vonatkozóan nem szabunk feltételt,

(b) amelyben van ismétlődő számjegy,

(c) amely öttel osztható,

(d) amely 30000-nél kisebb,

(e) amely 34000-nél nagyobb,

(f) amelyben nem szerepel prím számjegy,

(g) amelyben a számjegyek szorzata prím,

(h) amelyben a számjegyek szorzata 3600-zal osztható,

(i) amelyben az első két számjegy nem 6-os, de a harmadik igen,

(j) amely palindrom, tehát visszafele olvasva is ugyanaz,

(k) egy egész szám tizedik hatványa?

**Megoldás.**

(a) $6^5$

(b) $6^5 - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

(c) $6^4$

(d) $2 \cdot 6^4$

(e) $3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^4$

(f) $3^5$

(g) $3 \cdot 5$

(h) $\frac{5!}{2! \cdot 2!}$ (Csak a 4, 6, 6, 5, 5 számjegyek megfelelőek.)

(i) $5^2 \cdot 6^2$

(j) $6^3$

(k) 0 (A $\sqrt[10]{11111}$ és $\sqrt[10]{66666}$ közé az egész számok közül csak a 3 esik, viszont $3^{10} = 59049$ nem lehet ilyen dobássorozat eredménye.)

**15. Feladat.** Hányféle négyjegyű pozitív egész szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek (akár többszöri) felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,

(b) van olyan számjegy, amely legalább kétszer szerepel,

(c) a szám nem tartalmazza az 1-et,

(d) a számban szerepel a 7-es számjegy,

(e) a szám öttel osztható,

(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,

(g) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et, és a számban szerepel a 7-es számjegy,

(h) a szám öttel osztható vagy szerepel benne a 7-es számjegy,

(i) a szám vagy osztható 5-tel, vagy nem tartalmazza az 1-et,

(j) a szám csak páratlan számjegyekből állhat,

(k) a szám páratlan,

(l) a szám csak páros számjegyekből állhat,

(m) a szám páros,

(n) a számban a számjegyek szorzata páros,

(o) a számban a számjegyek összege páros.

**Megoldás.**

(a) $7^4$

(b) $7^4 - 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

(c) $6^4$

(d) $7^4 - 6^4$

(e) $7^3$

(f) $6^3$

(g) $6^3 - 5^3$

(h) $7^3 + (7^4 - 6^4) - (7^3 - 6^3)$

(i) $(7^3 - 6^3) + 5 \cdot 6^3$

(j) $4^4$

(k) $7^3 \cdot 4$

(l) $3^4$

(m) $7^3 \cdot 3$

(n) $7^4 - 4^4$

(o) $3^4 + 4^4 + \binom{3}{2}\binom{4}{2}4!$

**16. Feladat.** Hányféle ötjegyű pozitív egész szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek (akár többszöri) felhasználásával, ha

(a) nem szabunk feltételt,
(b) a szám nem tartalmazza az 1-et,
(c) a számban szerepel a 7-es számjegy,
(d) a számban szerepel a 4-es számjegy,
(e) a szám öttel osztható,
(f) a szám öttel osztható, és nem tartalmazza az 1-et,
(g) a szám páratlan,
(h) a szám nagyobb, mint 34220.

**Megoldás.**

(a) $6 \cdot 7^4$
(b) $5 \cdot 6^4$
(c) 0
(d) $6 \cdot 7^4 - 5 \cdot 6^4$
(e) $6 \cdot 7^3 \cdot 2$
(f) $5 \cdot 6^3 \cdot 2$
(g) $6 \cdot 7^3 \cdot 3$
(h) $6 + 4 \cdot 7 + 4 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^4$

**17. Feladat.** Hányféleképp olvasható ki az alábbi táblázatból a MATEMATIKA szó, ha a bal felső sarokból indulunk és csak jobbra vagy lefele haladhatunk?

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | A | T | E | M | A | T | I | K | A |
| A | T | E | M | A | T | I | K | A | |
| T | E | M | A | T | I | K | A | | |
| E | M | A | T | I | K | A | | | |
| M | A | T | I | K | A | | | | |
| A | T | I | K | A | | | | | |
| T | I | K | A | | | | | | |
| I | K | A | | | | | | | |
| K | A | | | | | | | | |
| A | | | | | | | | | |

**Megoldás.** $2^9$

**18. Feladat.** Hány

(a) 4 (b) 6 (c) $n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$

jegyű pozitív egész szám van a

(i) 10-es (ii) 2-es (iii) $k$-as $(k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2)$

alapú számrendszerben?

**Megoldás.**

(i) (a) $9 \cdot 10^3$
(b) $9 \cdot 10^5$
(c) $9 \cdot 10^{n-1}$

(ii) (a) $1 \cdot 2^3$
(b) $1 \cdot 2^5$
(c) $1 \cdot 2^{n-1}$

(iii) (a) $(k-1) \cdot k^3$
(b) $(k-1) \cdot k^5$
(c) $(k-1) \cdot k^{n-1}$

**19. Feladat.** Hány legfeljebb

(a) 4 (b) 6 (c) $n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$

jegyű pozitív egész szám van a

(i) 10-es (ii) 2-es (iii) $k$-as $(k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2)$

alapú számrendszerben?

**Megoldás.**

(i) (a) $10^4 - 1$
(b) $10^6 - 1$
(c) $10^n - 1$

(ii) (a) $2^4 - 1$
(b) $2^6 - 1$
(c) $2^n - 1$

(iii) (a) $k^4 - 1$
(b) $k^6 - 1$
(c) $k^n - 1$

**20. Feladat.** Hányféle nyolcjegyű pozitív egész szám képezhető csak a 2 és 7 számjegyek felhasználásával, ha

(a) semmilyen feltételt nem szabunk,
(b) a számnak mindkét számjegyet tartalmaznia kell legalább egyszer,
(c) a számnak 9-cel oszthatónak kell lennie,
(d) a számnak 18-cal oszthatónak kell lennie,
(e) a számnak 36-tal oszthatónak kell lennie.

**Megoldás.**

(a) $2^8$ (b) $2^8 - 2$ (c) $\frac{8!}{4! \cdot 4!}$ (d) $\frac{7!}{3! \cdot 4!}$ (e) $\frac{6!}{3! \cdot 3!}$

**21. Feladat.** Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fog pontosan egyszer. Hány kézfogásra kerül sor, ha a társaság

(a) 4 (b) 10 (c) $n$

főből áll?

**Megoldás.**

(a) 6

(b) $\dfrac{10 \cdot 9}{2}$

(c) $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$

**22. Feladat.** Hány

(a) 2,

(b) 3,

(c) $k$ $(k \in \mathbb{N}, k \leq 6)$

elemű részhalmaza van az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmaznak?

**Megoldás.**

(a) $\dbinom{6}{2} = 15$

(b) $\dbinom{6}{3} = 20$

(c) $\dbinom{6}{k}$

**23. Feladat.** Hány általános helyzetű egyenest vettünk fel a síkon, ha összesen

(a) 3

(b) 10

(c) 91

metszéspontjuk van? Egyeneseket általános helyzetűnek nevezünk, ha semelyik kettő nem párhuzamos (vagy esik egybe), illetve semelyik három nem megy át egy ponton.

**Megoldás.** A síkon $n$ általános helyzetű egyenes esetében bármely kettő metszi egymást minden más metszéspontból különböző pontban, így annyi metszéspont van, ahányféleképpen kiválasztható kettő az $n$ egyenes közül.

(a) Az $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = 3$ egyenlet pozitív egész megoldása $n = 3$.

(b) Az $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = 10$ egyenlet pozitív egész megoldása $n = 5$.

(c) Az $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = 91$ egyenlet pozitív egész megoldása $n = 14$.

**24. Feladat.** Egy úszóversenyen nyolcan indultak. Holtverseny nem volt és az első 4 helyezett jutott tovább a következő fordulóba. Hányféleképp alakulhatott a továbbjutók csoportja?

**Megoldás.** $\dbinom{8}{4} = 70$

**25. Feladat.** Hányféleképp tölthető ki egy lottószelvény (ahol az 1-90 számok közül kell beikszelnünk ötöt), ha

(a) semmilyen feltételt nem szabunk,

(b) a szelvényen nincs nyerő szám beikszelve,

(c) a szelvény egy találatos,

(d) a szelvény négy találatos,

(e) a szelvény telitalálatos?

**Megoldás.**

(a) $\binom{90}{5} = 43949268$

(b) $\binom{85}{5} = 32801517$

(c) $\binom{5}{1} \cdot \binom{85}{4} = 10123925$

(d) $\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} = 425$

(e) $\binom{5}{5} \cdot \binom{85}{0} = 1$

**26. Feladat.** Egy gyár napi termelése során az 500 elkészített végtermék 12 százaléka selejtes lesz. Hányféleképp lehet 12-t kiválasztani (egyszerre, visszatevés nélkül) a termékek közül úgy, hogy a kiválasztottak között

(a) ne legyen selejtes,

(b) pontosan két selejtes legyen,

(c) legyen két selejtes,

(d) ugyanannyi sejtes legyen, mint hibátlan,

(e) kétszer annyi hibátlan legyen, mint selejtes?

**Megoldás.**

(a) $\binom{440}{12}$

(b) $\binom{60}{2} \cdot \binom{440}{10}$

(c) $\binom{500}{12} - \left(\binom{440}{12} + \binom{60}{1} \cdot \binom{440}{11}\right)$

(d) $\binom{60}{6} \cdot \binom{440}{6}$

(e) $\binom{60}{4} \cdot \binom{440}{8}$

**27. Feladat.** Hányféleképp lehet kiosztani a 32 lapos magyar kártya csomagot 8 játékos között úgy, hogy mindenki 4 lapot kap?

**Megoldás.** $\binom{32}{4} \cdot \binom{28}{4} \cdot \binom{24}{4} \cdot \binom{20}{4} \cdot \binom{16}{4} \cdot \binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$

**28. Feladat.** Egy 32 lapos magyar kártya csomagból kiválasztunk egyszerre, visszatevés nélkül 8 lapot. (A magyar kártyában 4 szín van, mindegyikből 8-8 lap. Ezek: hetes, nyolcas, kilences, tízes, alsó, felső, király, ász.) Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a kiválasztott lapok között

(a) ne legyen ász,

(b) ott legyen a piros hetes,

(c) csak zöld legyen,

(d) csak ász és hetes legyen,

(e) csak ász és zöld legyen,

(f) csak zöld és makk legyen, de legyen mindkét színből legalább egy,

(g) pontosan két színből valók legyenek,

(h) csak figura legyen,

(i) legalább három figura legyen.

**Megoldás.**

(a) $\binom{28}{8}$

(b) $\binom{31}{7}$

(c) 1

(d) 1

(e) $\binom{11}{8}$

(f) $\binom{16}{8} - 2$

(g) $\binom{4}{2} \cdot \left(\binom{16}{8} - 2\right)$

(h) $\binom{16}{8}$

(i) $\binom{32}{8} - \binom{16}{8} \cdot \binom{16}{0} - \binom{16}{7} \cdot \binom{16}{1} - \binom{16}{6} \cdot \binom{16}{2}$

**29. Feladat.** Hány olyan hatjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szigorú monoton

(a) növekvő

(b) csökkenő

sorrendben követik egymást?

**Megoldás.**

(a) $\binom{9}{6}$

(b) $\binom{10}{6}$

**30. Feladat.** Egy 32 fős osztály, melybe 14 lány és 18 fiú jár választ egy bizottsági elnököt és 5 (egyenrangú) bizottsági tagot. (Az elnök nem lehet tag is.) Hányféleképp tehetik ezt meg, ha

(a) semmilyen feltételt nem szabunk,

(b) az elnöknek lánynak kell lennie,

(c) a tagok csak fiúk lehetnek,

(d) a bizottság nem állhat csupa azonos nemű személyből,

(e) a tagok többségének az elnökkel ellenkező neműnek kell lennie.

**Megoldás.**

(a) $\binom{32}{1} \cdot \binom{31}{5}$

(b) $\binom{14}{1} \cdot \binom{31}{5}$

(c) $\binom{18}{5} \cdot 27$

(d) $32 \cdot \binom{31}{5} - 14 \cdot \binom{13}{5} - 18 \cdot \binom{17}{5}$

(e) $14\left(\binom{18}{5} + \binom{18}{4}\binom{13}{1} + \binom{18}{3}\binom{13}{2}\right) + 18\left(\binom{14}{5} + \binom{14}{4}\binom{17}{1} + \binom{14}{3}\binom{17}{2}\right)$

**31. Feladat.** Igazoljuk a binomiális együtthatók következő tulajdonságait, összefüggéseit.

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

(c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

**Megoldás.**

(a) Ha egy $n$ elemű halmazból kiválasztunk egy $k$ elemű részhalmazt, akkor ezzel egyszerre kiválasztjuk (a ki nem választott elemek halmazaként) egy $n-k$ elemű részhalmazát is.

(b) Képzeljük el, hogy egy $n$ tagú társaság $k$ tagú küldöttséget választ. Számoljuk össze a küldöttségeket úgy is, hogy a társaság egy adott tagja benne van-e a küldöttségben, vagy sem.

(c) Mindkét oldalon egy $n$ elemű halmaz összes részhalmazának száma áll.

**32.* Feladat.** Leírtuk a pozitív egész számokat egymás mellé 1-től 2019-ig.

(a) Hány számjegyet írtunk le?

(b) Hányszor írtuk le az 1-es számjegyet?

(c) Melyik a 2019. számjegye a leírt számnak?

**Megoldás.**

(a) $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + (2019 - 999) \cdot 4 = 6969$

(b)
- Az egy jegyű számok között csak 1 darabot írunk le.
- A kétjegyű számok esetén 10-szer írunk 1-est a tízes helyi értékre és $9 \cdot 1$-szer az egyesek helyére. Ez 19 darab 1-es.
- A háromjegyűeknél 100 darab van a százas helyi értéken, továbbá 9-szer annyi, mint amennyi az eddigiekben összeszámoltunk, azaz összesen $100 + 9 \cdot (1 + 19) = 280$.
- A négyjegyűek közül leírtuk az összes 1-essel kezdődőt. Ezek $1000 + (280 + 19 + 1)$ darab 1-est tartalmaznak, összesen 1300-at. Továbbá még leírtuk a 2001, 2010, 2011, $\ldots$, 2019 számokat, melyek újabb 12 darab 1-est tartalmaznak.

Tehát összesen $1 + 19 + 280 + 1300 + 12 = 1612$ darab 1-es számjegyet írtunk le.

(c) Az egy- és kétjegyű számokkal összesen $9 + 180 = 189$ számjegyet írtunk le, így $2019 - 189 = 1830$ számjegyet kell még leírnunk. Mivel $1830 = 610 \cdot 3$, ez azt jelenti, hogy a 610. háromjegyű szám utolsó számjegye lesz a 2019. leírt számjegy, ami a 709 utolsó számjegyeként a 9.

**33. Feladat.** Hány

(a) hatjegyű,

(b) hétjegyű

tükörszám (palindorm szám) van a tízes számrendszerben? És a négyesben?

**Megoldás.**

(a) Tízes számrendszerben $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Négyes számrendszerben pedig $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

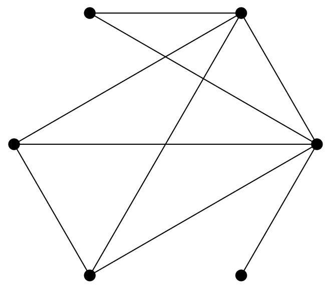
(b) Tízes számrendszerben $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$. Négyes számrendszerben pedig $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$.

# Gráfok

Ebben a fejezetben gráf alatt minden esetben véges, egyszerű, irányítás nélküli gráfot értünk.

**34. Feladat.** Egy hat tagú vendégségben, a házigazda aki mindenkit ismer, megkérdezte, ki hány jelenlévőt ismer (az ismeretségek kölcsönösek). A következő válaszokat kapta: $1, 4, 2, 3$. Az utolsó választ nem hallotta, mégis ki tudta találni. Mennyi volt az utolsó válasz, és hogyan gondolkodott a házigazda?

**Megoldás.** Az utolsó is 3 embert ismert. Könnyen felrajzolható a társaság ismertségi gráfja.



**35. Feladat.** Rajzoljon olyan öt csúcsú gráfot amelynek 6 éle van, és

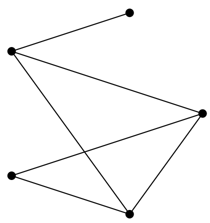
(a) van benne olyan csúcs, amelynek fokszáma 3,

(b) nem összefüggő,

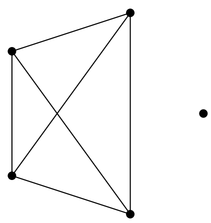
(c) pontosan két olyan csúcsa van, amelynek fokszáma 4.

**Megoldás.**

(a)



(b)



(c) Nincs ilyen gráf. A két 4 fokú csúcs össze van kötve a másik három csúccsal, ez rögtön 6 élt jelent, viszont egymással is össze vannak kötve, tehát egy ilyen gráfnak legalább 7 éle kell, hogy legyen.

**36. Feladat.** Rajzoljon olyan öt csúcsú gráfot, amelynek fokszámsorozata

(a) 4, 4, 4, 4, 4,

(b) 4, 4, 4, 3, 3,

(c) 3, 3, 2, 2, 2,

(d) 2, 1, 1, 0, 0,

(e) 5, 4, 3, 3, 2,

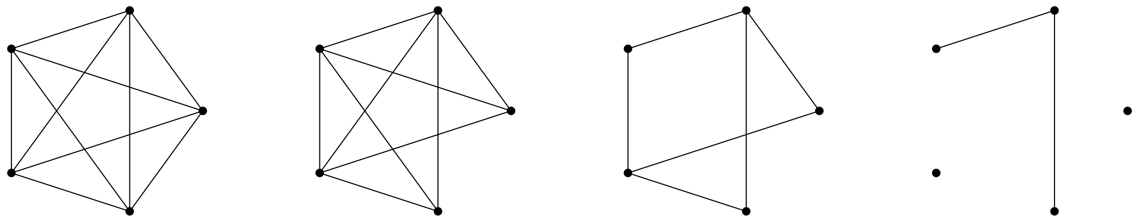
(f) 4, 4, 3, 2, 1,

(g) 4, 3, 2, 1, 0,

(h) 4, 3, 3, 2, 1.

**Megoldás.**

(a) (b) (c) (d)



(e) Nincs ilyen gráf, egy 5 fokú gráfban nem lehet 5 fokú csúcs.

(f) Nincs ilyen gráf, ha van két 4 fokú csúcs, akkor nem lehet 1 fokú is a gráfban.

(g) Nincs ilyen gráf, a 4 fokú csúcs kizárja a 0 fokú csúcs létezését.

(h) Nincs ilyen gráf, a fokszámösszeg nem lehet páratlan.

**37. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely társaságban van legalább két olyan ember, akinek ugyanannyi ismerőse van a jelenlévők között.

**Megoldás.** Bármely véges egyszerű gráfban van két azonos fokú csúcs. Ha egy $n$ csúcsú gráfban minden fokszám különböző lenne, akkor $0, 1, 2, \ldots, n-1$ lenne a fokszámsorozat, de a 0 és az $n-1$ együtt lehetetlen.

**38. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely poliédernek van legalább két, azonos oldalszámú lapja.

**Megoldás.** Feleltessük meg a poliédernek azt a gráfot amelynek csúcsai a poliéder lapjai, és két csúcs pontosan akkor van összekötve éllel, ha a nekik megfelelő lapoknak van közös élük, majd használjuk, hogy bármely véges egyszerű gráfban van két azonos fokú csúcs.

**39. Feladat.** Egy informatikus azt a feladatot kapta, hogy kössön össze 2019 számítógépet úgy, hogy mindegyik 365 másikkal legyen összekötve. Hogyan végezze el a feladatát?

**Megoldás.** Hozzá sem kell kezdeni, mert bármely egyszerű gráfban a páratlan fokú csúcsok száma páros, és itt páratlan lenne a feladat feltételei szerint.

**40. Feladat.** Adjuk meg a hiányzó fokszámot/fokszámokat a következő fokszámsorozatokban. Ha több lehetséges megoldás is van, akkor adjuk meg az összes megoldást.

(a) 5, 5, 5, 5, 5, X

(b) 5, 5, 3, 3, 3, X

(c) 5, 5, 5, 5, X, Y

(d) 5, 2, 1, 1, X, Y

(e) 5, 5, 3, 2, X, Y

(f) 5, 5, 3, 1, X, Y

**Megoldás.**

(a) $X = 5$

(b) $X = 3$

(c) $X = Y = 4$ vagy $X = Y = 5$

(d) $X = 1, Y = 2$ vagy $X = 2, Y = 1$ vagy $X = 2, Y = 3$ vagy $X = 3, Y = 2$

(e) $X = 2, Y = 3$ vagy $X = 3, Y = 2$ vagy $X = 3, Y = 4$ vagy $X = 4, Y = 3$

(f) Nincs megoldás, mert a két ötödfokú csúcs miatt minden csúcsa foka legalább 2.

**41. Feladat.** Nyolc csapat egyfordulós körmérkőzést játszik egymással.

(a) Hány meccset játszanak összesen?

(b) Ha eddig minden csapat három mérkőzésén van túl, akkor hány meccs van még hátra?

(c) Eddig már 17 mérkőzést lejátszottak. Igazolja, hogy van olyan csapat amely már 5 mérkőzést játszott.

(d) Legalább hány lejátszott mérkőzés után állíthatjuk biztosan azt, hogy van olyan csapat, amely már legalább 6 mérkőzést lejátszott?

**Megoldás.**

(a) 28

(b) 16

(c) Ha mindenki csak legfeljebb négy mérkőzést játszott volna, akkor legfeljebb $\dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16$ mérkőzés lehetett volna. Mivel már 17 mérkőzésen vannak túl, kell, hogy legyen olyan csapat, amely legalább 5 mérkőzést már lejátszott.

(d) Az előző gondolatmenet alapján, ha mindenki csak legfeljebb 5 mérkőzést játszott volna, akkor legfeljebb $\dfrac{8 \cdot 5}{2} = 20$ mérkőzés történt volna. Tehát 21 mérkőzés esetén már biztos van egy csapat, aki 6 mérkőzést játszott.

**42. Feladat.** Rajzoljunk olyan 5 csúcsú gráfot amelynek

(a) 11 éle van,

(b) 3 éle van és összefüggő.

**Megoldás.**

(a) Nincs megoldás, mert egy öt csúcsú egyszerű gráfnak legfeljebb 10 éle lehet.

(b) Nincs megoldás, mert egy öt csúcsú összefüggő gráfnak legalább 4 éle van.

**43. Feladat.** Hány éle van egy

(a) 3, (b) 6, (c) $n$

csúcsú teljes gráfnak?

**Megoldás.**

(a) 3 (b) 15 (c) $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$

**44. Feladat.** Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelynek élszáma

(a) 15, (b) 171, (c) 195?

**Megoldás.** Mindhárom esetben az $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2} = x$ egyenlet pozitív egész megoldásait keressük, ahol $x$ a megadott élek száma.

(a) 6 (b) 9 (c) nincs megoldás

**45. Feladat.** Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelyben az élek száma több, mint a csúcsok számának ötszöröse, de kevesebb, mint a hatszorosa?

**Megoldás.** Az

$$5n < \frac{n \cdot (n-1)}{2} < 6n$$

egyenlőtlenség(ek)et kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán. Innen $n = 12$.

**46. Feladat.** Egy fába 435 élt behúzva teljes gráfot kapunk.

(a) Hány csúcsa van ennek a gráfnak?

(b) Legfeljebb hány élt tudunk kitörölni az élek behúzásával kapott a teljes gráfból úgy, hogy a kapott gráf még összefüggő legyen?

(c) Maximum hány élt tudunk kitörölni ebből a teljes gráfból úgy, hogy a kapott gráfban még legyen kör?

(d) Legfeljebb hány élt tudunk kitörölni ebből a teljes gráfból úgy, hogy a kapott gráf összefüggő legyen, és legyen benne kör?

**Megoldás.**

(a) Legyen a gráf csúcsainak száma $n$. Egy $n$ csúcsú fának $n-1$, egy $n$ csúcsú teljes gráfnak pedig $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$ éle van. A fentiek alapján az

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} - (n-1) = 435$$

egyenletet kapjuk. Ezen másodfokú egyenletet átrendezve és megoldva: $n^2 - 3n - 868 = 0$, $n_1 = -28, n_2 = 31$. A gráfnak 31 csúcsa van.

(b) Mivel a fa épp a minimális összefüggő gráf, ezért 435 él törölhető.

(c) A gráfnak nem kell összefüggőnek lennie, ezért egyetlen 3 hosszúságú kör kivételével az összes él törölhető. Az összes élek száma $\frac{31 \cdot 30}{2} = 465$ Így $465 - 3 = 462$ él törölhető.

(d) Mivel a fa épp a minimális összefüggő gráf és egyben maximális körmentes gráf is, ezért 434 él törölhető.

**47. Feladat.** Miből van több, olyan 7 csúcsú gráfból, amelynek 10, vagy amelynek 11 éle van?

**Megoldás.** Gondoljunk a komplementer gráfra. Egy hét csúcsú teljes gráfnak 21 éle van, így ha egy hét csúcsú gráfnak 10 éle van, akkor a komplementerének 11, vagyis a 7 csúcsú 10, illetve 11 élű gráfok párba állíthatók egymással, számuk megegyezik.

**48. Feladat.** Miből van több, olyan

(a) 7,

(b) 8

csúcsú gráfból, amelyben minden pont foka 3, vagy amelyikben minden pont foka 4?

**Megoldás.**

(a) Mivel egy minden gráfban páros a páratlan fokú csúcsok száma, ezért nincs olyan 7 csúcsú gráf, amelyben minden pont foka 3. Olyan viszont, amelyben minden pont foka 4, könnyen kreálható, így ez utóbbiból van több.

(b) Gondoljunk a komplementer gráfra. Ha egy 8 csúcsú gráfban minden pont foka 3, akkor a komplementerében 4, így ezen gráfok párba állíthatók egymással, számuk megegyezik.

**49. Feladat.** Hány olyan 5 csúcsú gráf van, amelynek

(a) 10 éle van, (b) 9 éle van, (c) 8 éle van, (d) 7 éle van,

ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

**Megoldás.** Vizsgáljuk a komplementer gráfokat.

(a) 1 (b) 1 (c) 2 (d) 4

**50. Feladat.** Hány olyan $n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) csúcsú gráf van, amelynek

(a) 0, (b) 1, (c) 2

éle van, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

**Megoldás.**

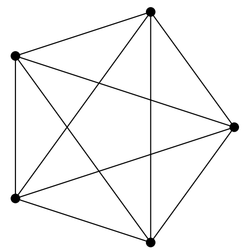
(a) Tetszőleges $n$-re egy megoldás van, az üres gráf.

(b) Ha $n = 1$, nincs megoldás. Különben egy megoldás van, az a gráf amelyben két, egymással összekötött csúcs fokszáma 1, a többi csúcs izolált.

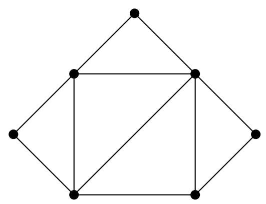
(c) Ha $n = 1, 2$, nincs megoldás. Ha $n = 3$, akkor egy megoldás van, az a gráf, amelyben a két elsőfokú csúcs van összekötve az egyetlen másodfokúval. Ha $n \geq 4$, akkor két megoldás van. Az egyik az a gráf amit úgy kapunk, hogy az $n = 3$ eset gráfját megfelelő számú izolált csúccsal egészítjük ki, a másik pedig az a gráf amely két élének nincs közös csúcsa.

**51. Feladat.** Megrajzolhatók-e az alábbi gráfok „egyetlen vonallal”?

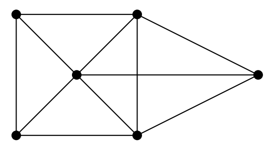
(a)



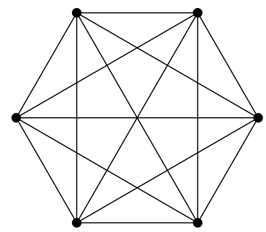
(b)



(c)



(d)



**Megoldás.** Pontosan akkor rajzolható le egy gráf egyetlen vonallal, ha vagy nincs, vagy ha pontosan két páratlan fokú csúcsa van.

(a) igen

(b) igen

(c) nem

(d) nem

**52. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely 6 tagú társaságban van 3 ember akik páronként ismerik, vagy páronként nem ismerik egymást.

**Megoldás.** A társaság egyik tagját tekintve neki vagy van legalább 3 ismerőse, vagy van legalább 3 ember akit nem ismer. Tekintsük ezt a (legalább) 3 embert. Az első esetben, ha közülük bármely kettő ismeri egymást, akkor az eredeti emberrel együtt ők hárman páronként ismerik egymást. Ha közülük semelyik kettő nem ismeri egymást, akkor ők hárman páronként nem ismerik egymást. A második esetben hasonlóképpen gondolkodhatunk.

**53.* Feladat.** Egy 17 csúcsú gráf minden élét egyszínűre, vagy kékre, vagy pirosra, vagy sárgára festettük. Igazoljuk, hogy van a gráfban egyszínű háromszög.

**Megoldás.** Mivel egy 17 csúcsú teljes gráfban minden csúcs foka 16, és $16 > 5 \cdot 3$, ezért van olyan csúcs, amelyből legalább 6 azonos színű (pl. piros) él indul ki. Tekintsük ezen (legalább) 6 él másik végpontjait. Ha ezen hat csúcs között van piros él, akkor van a gráfban piros háromszög. Ha nincs, akkor tekintsük azt a teljes részgráfot, amit ez a hat csúcs határoz meg. Ebben minden csúcsból öt, ezen hat csúcs valamelyikéhez futó él indul ki. Mivel $5 > 2 \cdot 2$, ezért a 6 csúcs valamelyikéből legalább 3 azonos színű él (pl. kék) indul a többibe. Ha ezen 3 él végpontjainak bármelyike között van kék él, akkor van a gráfban kék háromszög, ha nincs, akkor az a fentiek alapján azt jelenti, hogy a 3 csúcs között csak sárga élek futhatnak, sárga háromszöget alkotva.

**54.* Feladat.** Egy ország 32 települése között telefonvonalakat építenek ki. Egy telefonvonal pontosan két települést köt össze, és két település között legfeljebb egy közvetlen vonal épül. Bizonyítsuk be, hogy ha már 466 vonalat kiépítettek, akkor bármely településről bármely településre lehet telefonálni vagy közvetlen vonalon, vagy több, már kiépített vonal összekapcsolásával. (OKTV, 1997-1998. II. kat. 1. forduló, 4. feladat)

**Megoldás.**

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Ekkor a gráf legalább két komponensből áll. Legyen ezek csúcsainak száma $n$, illetve $32 - n$, ahol $0 < n < 32, n \in \mathbb{N}$. Ekkor a két komponensben összesen legfeljebb

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(32-n)(31-n)}{2}$$

él húzható. Teljes négyzetté kiegészítve kapjuk, hogy az élek száma $(n-16)^2 + 240$. Ekkor $n$ lehetséges értékeit figyelembe véve kapjuk, hogy $|n-16| \leq 15$, így $(n-16)^2+240 \leq 15^2+240 = 465$, ami ellentmond annak, hogy legalább 466 vonalat már kiépítettek. Így a gráf összefüggő, tehát bármely településről bármely településre lehet telefonálni.

# 12 | Valószínűségszámítás és leíró statisztika

## Valószínűség: klasszikus valószínűségi mező; geometriai modell

**1. Feladat.** Egy csomag francia kártyából egy lapot kihúzva tekintsük a következő eseményeket.

$A$: A kihúzott lap figura.

$B$: A kihúzott lap király.

$C$: A kihúzott lap pikk.

Fogalmazzuk meg mit jelentenek az alábbi események.

(a) $AB$
(b) $A - B$
(c) $A + C$
(d) $\overline{A}$
(e) $\overline{A}B$
(f) $BC$
(g) $\overline{C} - B$

**2. Feladat.** Egy szabályos dobókockát egyszer feldobunk. Tekintsük a következő eseményeket.

$A$: A dobott szám páros.

$B$: A dobott szám prím.

$C$: A dobott szám hárommal osztható.

$D$: A dobott szám legfeljebb hat.

$E$: A dobott szám kétjegyű.

Határozzuk meg a következő eseményeket alkotó elemi események halmazát.

(a) $AB$
(b) $B + C$
(c) $\overline{C}$
(d) $AC + B$
(e) $(A + D)E$
(f) $\overline{CB}$
(g) $\overline{B} + C$
(h) $\overline{\overline{D}}$

Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket.

(i) $P(A)$
(ii) $P(B)$
(iii) $P(C)$
(iv) $P(D)$
(v) $P(E)$
(vi) $P(AB)$
(vii) $P(B + C)$
(viii) $P(\overline{C})$
(ix) $P(AC + B)$
(x) $P((A + D)E)$
(xi) $P(\overline{CB})$
(xii) $P(\overline{B} + C)$
(xiii) $P(\overline{\overline{D}})$

**3. Feladat.** Egy szabályos dobókockát kétszer feldobtunk. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

$A$: A dobott számok szorzata prím.

$B$: A dobott számok szorzata öttel osztható.

$C$: A dobott számok szorzata páros.

$D$: A dobott számok szorzata legalább 12.

$E$: A dobott számok szorzata egyjegyű.

$F$: A dobott számok összege prím.

$G$: A dobott számok összege öttel osztható.

$H$: A dobott számok összege páros.

$I$: A dobott számok összege legalább 12.

$J$: A dobott számok összege egyjegyű.

$K$: Az első szám nagyobb, mint a második.

$L$: A második dobás eredménye megegyezik az első dobás eredményével.

$M$: Elsőre háromszor annyit dobtunk, mint másodikra.

$N$: A dobott számok relatív prímek.

$O$: A dobott számok szorzata vagy összege páros.

$P$: A dobott számok szorzata és összege is páros.

$Q$: A dobott számok szorzata és összege is páratlan.

**4. Feladat.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy dobókockát hatszor feldobva

(a) minden lehetséges érték pontosan egyszer jelenik meg;

(b) pontosan kétféle számot dobunk;

(c) a dobott számok szorzata páratlan;

(d) a dobott számok szorzata páros;

(e) a dobott számok összege hárommal osztható;

(f) a dobott számok szorzata osztható 4096-tal;

(g) először a harmadik dobásra dobunk hatost;

(h) a dobott számok szorzata prím.

**5. Feladat.** Egy szabályos pénzérmét tízszer feldobtunk. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Az első dobás eredménye fej.

(b) Az első és utolsó dobás eredménye különböző.

(c) Ugyanannyi fejet dobtunk, mint írást.

(d) Legalább nyolc fejet dobtunk.

(e) Legfeljebb 9 írást dobtunk.

(f) Több írást dobunk, mint fejet.

**6. Feladat.** Egy pakli 32 lapos magyar kártyából kihúzunk nyolc lapot (visszatevés nélkül, a sorrendre való tekintet nélkül). Határozzuk meg a következő események valószínűségét.

(a) Nálunk van a piros ász.
(b) Csak zöldet húzunk.
(c) Húzunk figurát is.
(d) Nem húzunk makkot.
(e) Nem húzunk makkot és figurát sem.
(f) Pontosan három király van nálunk.
(g) Több piros van nálunk, mint az összes többi színből együttvéve.
(h) Pontosan két színből valók a lapjaink.

**7. Feladat.** Az ötös lottón az első 90 pozitív egész szám közül húznak ötöt. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Nem húzzák ki a 43-ast.
(b) A középső kihúzott szám a 43.
(c) A kihúzott számok szorzata páratlan.
(d) A legnagyobb kihúzott szám a 43.
(e) A legkisebb kihúzott szám a 43.
(f) Minden kihúzott szám 34 és 43 között van, beleértve a határokat is.
(g) A legkisebb kihúzott száma a 34, a legnagyobb a 43.
(h) A számok nagyság szerint növekvő sorrendben kerülnek kihúzásra.
(i) Egy szelvényt kitöltve azzal nyerünk (tehát legalább két találatunk van).

**8. Feladat.** Egy 36 fős osztályba 20 lány és 16 fiú jár. Az osztály öt tagú küldöttséget választ, amelynek egy elnöke és négy tagja van. (Egy ember több tisztséget nem viselhet.) Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Andor lesz az elnök.
(b) Andor az elnök és Balázs a tagok között van.
(c) Andor és Balázs sem szerepel a küldöttségben.
(d) A küldöttség csak lányokból áll.
(e) Az elnök lány, de a tagok mindegyike fiú.
(f) Az elnök fiú és a tagok között többségben vannak a lányok.
(g) Az elnök ellenkező nemű, mint az azonos nemű tagság.

**9. Feladat.** Egy gyár 5000 terméket gyárt naponta, amelynek 2%-a selejtes. Egy munkanap végén minőségellenőrzést hajt végre náluk a fogyasztóvédelem. Vizsgálat céljából véletlenszerűen kiválasztanak 50 terméket. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) A véletlen mintában nincs selejtes termék.

(b) Csak selejtes terméket vizsgált meg a fogyasztóvédelem.

(c) Legalább két selejtes terméket talált ak ellenőrzéskor.

(d) A kiválasztott termékek között a selejtesek aránya pontosan 2%.

**10. Feladat.** Anna, Bea, Cili, Dóra és Edina moziba mennek, és leülnek egymás mellé. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Edina ül középen.

(b) Anna és Bea szomszédosak.

(c) Cili a sor (valamelyik) szélén ül.

(d) Edina ül középen és Anna és Bea szomszédosak.

(e) Edina ül középen és Cili a sor (valamelyik) szélén ül.

(f) Edina ül középen és Anna és Bea szomszédosak és Cili a sor (valamelyik) szélén ül.

**11. Feladat.** Az első 9 pozitív egész számot véletlenszerű sorrendben egymás mellé írjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapott kilencjegyű szám osztható

(a) 2-vel; (b) 4-gyel; (c) 5-tel; (d) 9-cel; (e) 18-cal?

**12. Feladat.** Feldobunk egy szabályos pénzérmét. Ha a dobás fej, akkor egy, ha írás, akkor két szabályos dobókockával dobunk egyszer. Mi annak a valószínűsége, hogy mindeközben nem dobunk ötöst?

**13. Feladat.** Egy versenyen minden ejtőernyős egy 10 méter sugarú körben landol. Különdíjat akkor kap egy ugró, ha a körben elhelyezett 2 méter oldalhosszúságú négyzetben landol. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ugrás különdíjas lesz?

**14. Feladat.** Egy 1 méter hosszú pálcát kettétörünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a töréspont közelebb van a pálca valamelyik végéhez, mint a közepéhez?

**15. Feladat.** Egy 1 méter hosszú pálcát kettétörünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a töréspont legalább kétszer akkora távolságra van a pálca közepétől, mint valamelyik szélétől?

# Leíró statisztika: véges számsokaságok jellemzői; táblázatok; diagramok

**16. Feladat.** Adjunk meg egy pozitív egészekből álló öt tagú adatsokaságot, amelynek

(a) módusza 3;
(b) mediánja 4;
(c) módusza 3 és mediánja 4;
(d) szórása 0;
(e) átlaga 5;
(f) szórása 0 és átlaga 5;
(g) módusza 3 és átlaga 5;
(h) mediánja 4 és átlaga 5;
(i) módusza 3, mediánja 4 és átlaga 5.

**17. Feladat.** Egy ötelemű mintáról tudjuk, hogy két módusza 2 és 3, mediánja 3, terjedelme 5. Sorolja fel a minta elemeit.

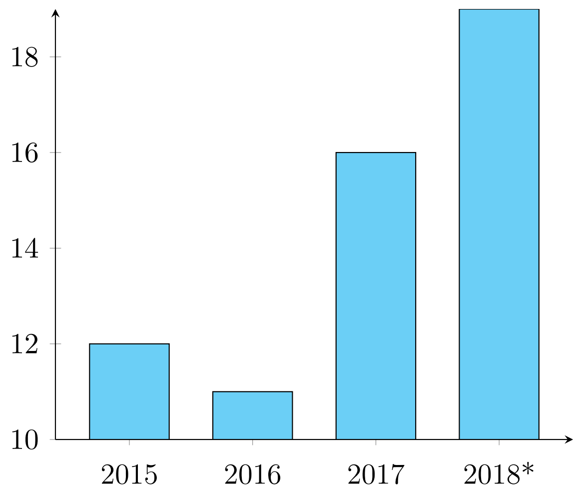
**18. Feladat.** Egy ötelemű mintáról tudjuk, hogy módusza 3, átlaga, mediánja és terjedelme pedig 5. Adjuk meg a minta elemeit.

**19. Feladat.** Egy osztályban a matematika dolgozatok átlaga 3,32, a jegyek összege 83 lett. Legfeljebb hány

(a) jeles
(b) elégtelen

dolgozat születhetett?

**20. Feladat.** Egy cég eladási adataira vonatkozóan a 2017-es tulajdonosváltást követően a következő adatok tűntek fel egy újságcikkben 2018 novemberében.




(a) Mit sugall a grafikon?
(b) Mit jelenthet a * jelölés?
(c) Készítsen helyes ábrázolást.

**21. Feladat.** Egy dobókockát ötvenszer feldobva, a dobott számokról az alábbi gyakorisági táblázatot készítettük.

| Dobás | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gyakoriság | 10 | 7 | 6 | 12 | 8 | 7 |

(a) Határozza meg az egyes dobott értékek relatív gyakoriságát.

(b) Határozza meg a dobott számok móduszát.

(c) Határozza meg a dobott számok mediánját.

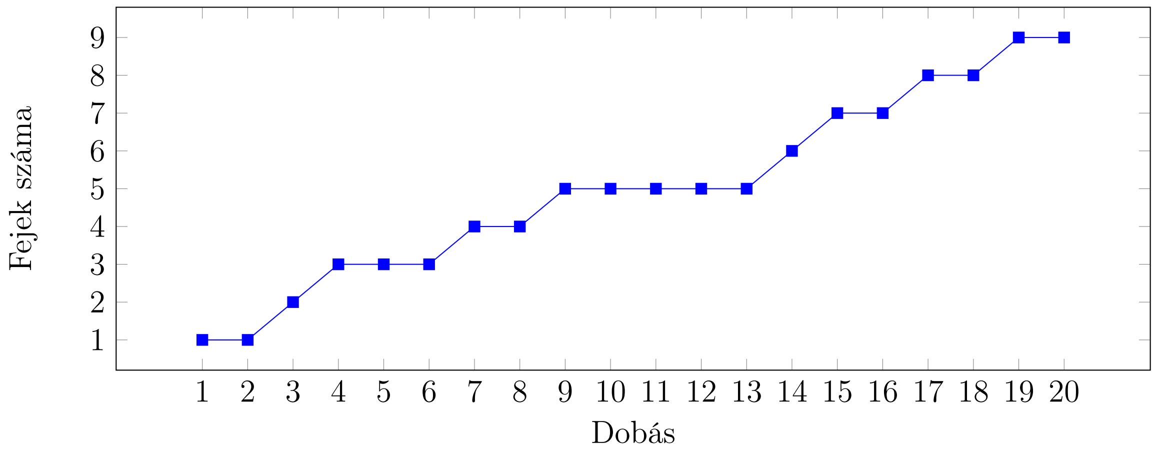
(d) Határozza meg a dobott számok átlagát.

(e) Határozza meg a dobott számok szórását.

(f) Ábrázolja a fenti adatokat oszlopdiagramon.

(g) Ábrázolja a fenti adatokat kördiagramon.

**22. Feladat.** Egy érmét hússzor feldobva a dobott fejek számát a következő grafikon ábrázolja.




(a) Miért nem szerencsés az ábrázolásnak ez a módja?

(b) Hány írást dobtunk összesen?

(c) Milyen hosszú volt a leghosszabb, kizárólag fejekből álló dobássorozat?

(d) Mennyi volt a dobások során a fejek és írások száma közötti legnagyobb eltérés?

**23. Feladat.** Az alábbi táblázat a magyarországi kukoricatermelés területi átlagait mutatja 2015-ben. (Forrás: KSH, AKI )

| Megye, régió | Termésátlag (kg/ha) |
|---|---|
| Budapest | 5460 |
| Pest | 5490 |
| Fejér | 8380 |
| Komárom-Esztergom | 6830 |
| Veszprém | 6970 |
| Győr-Moson-Sopron | 5610 |
| Vas | 6110 |
| Zala | 6330 |
| Baranya | 6520 |
| Somogy | 6900 |
| Tolna | 7460 |
| Borsod-Abaúj-Zemplén | 4930 |
| Heves | 4020 |
| Nógrád | 3480 |
| Hajdú-Bihar | 6070 |
| Jász-Nagykun-Szolnok | 4120 |
| Szabolcs-Szatmár-Bereg | 3610 |
| Bács-Kiskun | 5050 |
| Békés | 5760 |
| Csongrád | 5130 |

(a) Készítsünk oszlopdiagramot.

(b) Határozzuk meg az átlagot, mediánt, szórást.

(c) Hány megye, régió termésátlaga esik az átlag egy szórás sugarú környezetén kívül?

**24. Feladat.** Egy farmon automatikusan mérik a tojások tömegét. Egy napon az első 100 tojás esetében a következő adatokat kapták:
`80, 79, 49, 87, 46, 72, 54, 47, 84, 79, 54, 84, 81, 56, 56, 73, 68, 73, 56, 58, 79, 87, 47, 63, 46, 81, 46, 81, 49, 90, 77, 54, 83, 59, 45, 66, 87, 61, 47, 47, 90, 60, 51, 58, 52, 66, 79, 63, 49, 90, 48, 49, 66, 62, 49, 70, 56, 63, 62, 84, 66, 49, 75, 76, 83, 86, 58, 79, 66, 86, 63, 70, 46, 89, 74, 77, 88, 67, 88, 64, 49, 56, 77, 88, 76, 51, 78, 87, 59, 53, 79, 87, 75, 74, 74, 79, 47, 83, 52, 76.`

A tojások méret szerinti besorolása a következőképp táblázat alapján történik.

| Osztály | S | M | L | XL |
|---|---|---|---|---|
| Tömeg | 53 g-nál kisebb | 53-63 g | 64-73 g | 73 g-nál nagyobb |

(a) Soroljuk az adatokat a fenti osztályba. (Értelmezzük a fentieket balról nyitott, jobbról zárt intervallumnak, az utolsó kivételével.)

(b) Számítsuk ki az adatok átlagát.

(c) Számítsuk ki a csoportosított adatok szórását.

**25. Feladat.** Egy weboldal az év első 150 napjáról látogatottsági statisztikát készített. A következő látogatószámokat tapasztalták.

3604, 5494, 2050, 2854, 2387, 2587, 6452, 6007, 4083, 6386, 1738, 1618, 5524, 6305, 2301, 5012, 5986, 3953, 6324, 4079, 5124, 6297, 2334, 5347, 5266, 4059, 4038, 2919, 6147, 5091, 2609, 3858, 5193, 2258, 4810, 6266, 2099, 5079, 6157, 4896, 3551, 2049, 3138, 3449, 5668, 2885, 5692, 4677, 3647, 2918, 6297, 4522, 4158, 4217, 3610, 3702, 4833, 6253, 3778, 2424, 2465, 4168, 2097, 4203, 4021, 4014, 3913, 4268, 5954, 2141, 3521, 2566, 5807, 5801, 5672, 2758, 5969, 2628, 4328, 4842, 1928, 3387, 5343, 3984, 5247, 2073, 4387, 6285, 2973, 5087, 2787, 4211, 5474, 1897, 1936, 3809, 1573, 2364, 4072, 1932, 6466, 1733, 3959, 4030, 5160, 3029, 2390, 3417, 3389, 4663, 5343, 3391, 4369, 4649, 5668, 1597, 5292, 2605, 2908, 2972, 1638, 4419, 5511, 4367, 2976, 4844, 2571, 5719, 2376, 4829, 3433, 4810, 6114, 2069, 5564, 3299, 4126, 1964, 5196, 5112, 1789, 3170, 1567, 3501, 4674, 1646, 1918, 5231, 6288, 4571

(a) Határozzuk meg a minta terjedelmét.

(b) Sorolja az adatokat (1500-tól kezdődően) 500 széles osztályközökbe.

(c) Ábrázolja a kapott osztályok gyakoriságát oszlopdiagramon.

(d) Számítsuk ki a csoportosított adatok átlagát.

(e) Számítsuk ki a csoportosított adatok szórását.

# Megoldások

## Valószínűség: klasszikus valószínűségi mező; geometriai modell

**1. Feladat.** Egy csomag francia kártyából egy lapot kihúzva tekintsük a következő eseményeket.

$A$: A kihúzott lap figura.

$B$: A kihúzott lap király.

$C$: A kihúzott lap pikk.

Fogalmazzuk meg mit jelentenek az alábbi események.

(a) $AB$
(b) $A - B$
(c) $A + C$
(d) $\overline{A}$
(e) $\overline{A}B$
(f) $BC$
(g) $\overline{C} - B$

**Megoldás.**

(a) $AB$: A kihúzott lap figura és király, azaz a kihúzott lap király.
(b) $A - B$: A kihúzott lap figura de nem király.
(c) $A + C$: A kihúzott lap figura vagy pikk.
(d) $\overline{A}$: A kihúzott lap nem figura.
(e) $\overline{A}B$: A kihúzott lap nem figura de király.
(f) $BC$: A kihúzott lap király és pikk, azaz a kihúzott lap a pikk király.
(g) $\overline{C} - B$: A kihúzott lap nem pikk és nem király.

**2. Feladat.** Egy szabályos dobókockát egyszer feldobunk. Tekintsük a következő eseményeket.

$A$: A dobott szám páros.

$B$: A dobott szám prím.

$C$: A dobott szám hárommal osztható.

$D$: A dobott szám legfeljebb hat.

$E$: A dobott szám kétjegyű.

Határozzuk meg a következő eseményeket alkotó elemi események halmazát.

(a) $AB$
(b) $B+C$
(c) $\overline{C}$
(d) $AC+B$
(e) $(A+D)E$
(f) $\overline{CB}$
(g) $\overline{B}+C$
(h) $\overline{\overline{D}}$

Határozzuk meg az alábbi valószínűségeket.

(i) $P(A)$
(ii) $P(B)$
(iii) $P(C)$
(iv) $P(D)$
(v) $P(E)$
(vi) $P(AB)$
(vii) $P(B+C)$
(viii) $P(\overline{C})$
(ix) $P(AC+B)$
(x) $P((A+D)E)$
(xi) $P(\overline{CB})$
(xii) $P(\overline{B}+C)$
(xiii) $P(\overline{\overline{D}})$

**Megoldás.**

(a) $AB=\{2\}$
(b) $B+C=\{2;3;5;6\}$
(c) $\overline{C}=\{1;2;4;5\}$
(d) $AC+B=\{2;3;5;6\}$
(e) $(A+D)E=\{\}$
(f) $\overline{CB}=\{1;2;4;5;6\}$
(g) $\overline{B}+C=\{1;3;4;6\}$
(h) $\overline{\overline{D}}=\{1;2;3;4;5;6\}$

(i) $P(A)=\dfrac{3}{6}$
(ii) $P(B)=\dfrac{3}{6}$
(iii) $P(C)=\dfrac{2}{6}$
(iv) $P(D)=1$
(v) $P(E)=0$
(vi) $P(AB)=\dfrac{1}{6}$
(vii) $P(B+C)=\dfrac{4}{6}$
(viii) $P(\overline{C})=\dfrac{4}{6}$
(ix) $P(AC+B)=\dfrac{4}{6}$
(x) $P((A+D)E)=0$
(xi) $P(\overline{CB})=\dfrac{5}{6}$
(xii) $P(\overline{B}+C)=\dfrac{4}{6}$
(xiii) $P(\overline{\overline{D}})=1$

**3. Feladat.** Egy szabályos dobókockát kétszer feldobtunk. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

$A$: A dobott számok szorzata prím.
$B$: A dobott számok szorzata öttel osztható.
$C$: A dobott számok szorzata páros.
$D$: A dobott számok szorzata legalább 12.
$E$: A dobott számok szorzata egyjegyű.
$F$: A dobott számok összege prím.
$G$: A dobott számok összege öttel osztható.
$H$: A dobott számok összege páros.
$I$: A dobott számok összege legalább 12.
$J$: A dobott számok összege egyjegyű.
$K$: Az első szám nagyobb, mint a második.
$L$: A második dobás eredménye megegyezik az első dobás eredményével.

$M$: Elsőre háromszor annyit dobtunk, mint másodikra.

$N$: A dobott számok relatív prímek.

$O$: A dobott számok szorzata vagy összege páros.

$P$: A dobott számok szorzata és összege is páros.

$Q$: A dobott számok szorzata és összege is páratlan.

**Megoldás.**

(a) $P(A) = \frac{6}{36}$

(b) $P(B) = \frac{11}{36}$

(c) $P(C) = \frac{27}{36}$

(d) $P(D) = \frac{17}{36}$

(e) $P(E) = \frac{17}{36}$

(f) $P(F) = \frac{15}{36}$

(g) $P(G) = \frac{7}{36}$

(h) $P(H) = \frac{18}{36}$

(i) $P(I) = \frac{1}{36}$

(j) $P(J) = \frac{30}{36}$

(k) $P(K) = \frac{15}{36}$

(l) $P(L) = \frac{6}{36}$

(m) $P(M) = \frac{2}{36}$

(n) $P(N) = \frac{22}{36}$

(o) $P(O) = 1$

(p) $P(P) = \frac{9}{36}$

(q) $P(Q) = 0$

**4. Feladat.** Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy dobókockát hatszor feldobva

(a) minden lehetséges érték pontosan egyszer jelenik meg;

(b) pontosan kétféle számot dobunk;

(c) a dobott számok szorzata páratlan;

(d) a dobott számok szorzata páros;

(e) a dobott számok összege hárommal osztható;

(f) a dobott számok szorzata osztható 4096-tal;

(g) először a harmadik dobásra dobunk hatost;

(h) a dobott számok szorzata prím.

**Megoldás.**

(a) $p = \frac{6!}{6^6}$

(b) $p = \frac{\binom{6}{2} \cdot (2^6 - 2)}{6^6}$

(c) $p = \frac{3^6}{6^6}$

(d) $p = 1 - \frac{3^6}{6^6}$

(e) $p = \frac{2}{6}$

(f) $p = \frac{1}{6^6}$

(g) $p = \frac{5 \cdot 5 \cdot 1}{6^3}$

(h) $p = \frac{3 \cdot 6}{6^6}$

**5. Feladat.** Egy szabályos pénzérmét tízszer feldobtunk. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Az első dobás eredménye fej.

(b) Az első és utolsó dobás eredménye különböző.

(c) Ugyanannyi fejet dobtunk, mint írást.

(d) Legalább nyolc fejet dobtunk.

(e) Legfeljebb 9 írást dobtunk.

(f) Több írást dobunk, mint fejet.

**Megoldás.**

(a) $p = \dfrac{1}{2}$

(b) $p = \dfrac{2}{2^2}$

(c) $p = \dfrac{\binom{10}{5}}{2^{10}}$

(d) $p = \dfrac{\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}}{2^{10}}$

(e) $p = 1 - \dfrac{1}{2^{10}}$

(f) $p = \dfrac{1 - \dfrac{\binom{10}{5}}{2^{10}}}{2}$

**6. Feladat.** Egy pakli 32 lapos magyar kártyából kihúzunk nyolc lapot (visszatevés nélkül, a sorrendre való tekintet nélkül). Határozzuk meg a következő események valószínűségét.

(a) Nálunk van a piros ász.

(b) Csak zöldet húzunk.

(c) Húzunk figurát is.

(d) Nem húzunk makkot.

(e) Nem húzunk makkot és figurát sem.

(f) Pontosan három király van nálunk.

(g) Több piros van nálunk, mint az összes többi színből együttvéve.

(h) Pontosan két színből valók a lapjaink.

**Megoldás.**

(a) $p = \dfrac{\binom{31}{7}}{\binom{32}{8}}$

(b) $p = \dfrac{\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}}$

(c) $p = 1 - \dfrac{\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}}$

(d) $p = \dfrac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$

(e) $p = \dfrac{\binom{12}{8}}{\binom{32}{8}}$

(f) $p = \dfrac{\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{5}}{\binom{32}{8}}$

(g) $p = \dfrac{\binom{8}{5}\binom{24}{3} + \binom{8}{6}\binom{24}{2} + \binom{8}{7}\binom{24}{1} + \binom{8}{8}\binom{24}{0}}{\binom{32}{8}}$

(h) $p = \dfrac{\binom{4}{2} \cdot \left(\binom{16}{8} - 2\right)}{\binom{32}{8}} = \dfrac{\binom{4}{2} \left(\binom{8}{1}\binom{8}{7} + \ldots + \binom{8}{7}\binom{8}{1}\right)}{\binom{32}{8}}$

**7. Feladat.** Az ötös lottón az első 90 pozitív egész szám közül húznak ötöt. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Nem húzzák ki a 43-ast.

(b) A középső kihúzott szám a 43.

(c) A kihúzott számok szorzata páratlan.

(d) A legnagyobb kihúzott szám a 43.

(e) A legkisebb kihúzott szám a 43.

(f) Minden kihúzott szám 34 és 43 között van, beleértve a határokat is.

(g) A legkisebb kihúzott száma a 34, a legnagyobb a 43.

(h) A számok nagyság szerint növekvő sorrendben kerülnek kihúzásra.

(i) Egy szelvényt kitöltve azzal nyerünk (tehát legalább két találatunk van).

**Megoldás.**

(a) $p = \dfrac{\binom{89}{5}}{\binom{90}{5}}$

(b) $p = \dfrac{\binom{42}{2} \cdot \binom{47}{2}}{\binom{90}{5}}$

(c) $p = \dfrac{\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}}$

(d) $p = \dfrac{\binom{42}{4}}{\binom{90}{5}}$

(e) $p = \dfrac{\binom{47}{4}}{\binom{90}{5}}$

(f) $p = \dfrac{\binom{10}{5}}{\binom{90}{5}}$

(g) $p = \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{90}{5}}$

(h) $p = \dfrac{1}{5!}$

(i) $p = \dfrac{\binom{5}{5}\binom{85}{0} + \binom{5}{4}\binom{85}{1} + \binom{5}{3}\binom{85}{2} + \binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$

**8. Feladat.** Egy 36 fős osztályba 20 lány és 16 fiú jár. Az osztály öt tagú küldöttséget választ, amelynek egy elnöke és négy tagja van. (Egy ember több tisztséget nem viselhet.) Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Andor lesz az elnök.

(b) Andor az elnök és Balázs a tagok között van.

(c) Andor és Balázs sem szerepel a küldöttségben.

(d) A küldöttség csak lányokból áll.

(e) Az elnök lány, de a tagok mindegyike fiú.

(f) Az elnök fiú és a tagok között többségben vannak a lányok.

(g) Az elnök ellenkező nemű, mint az azonos nemű tagság.

**Megoldás.**

(a) $p = \dfrac{1 \cdot \binom{35}{4}}{36 \cdot \binom{35}{4}} = \dfrac{1}{36}$

(b) $p = \dfrac{1 \cdot \binom{34}{3}}{36 \cdot \binom{35}{4}}$

(c) $p = \dfrac{34 \cdot \binom{33}{4}}{36 \cdot \binom{35}{4}}$

(d) $p = \dfrac{20 \cdot \binom{19}{4}}{36 \cdot \binom{35}{4}}$

(e) $p = \dfrac{20 \cdot \binom{16}{4}}{36 \cdot \binom{35}{4}}$

(f) $p = \dfrac{16 \cdot \left(\binom{20}{4} + \binom{20}{3} \cdot \binom{15}{1}\right)}{36 \cdot \binom{35}{4}}$

(g) $p = \dfrac{20 \cdot \binom{16}{4} + 16 \cdot \binom{20}{4}}{36 \cdot \binom{35}{4}}$

**9. Feladat.** Egy gyár 5000 terméket gyárt naponta, amelynek 2%-a selejtes. Egy munkanap végén minőségellenőrzést hajt végre náluk a fogyasztóvédelem. Vizsgálat céljából véletlenszerűen kiválasztanak 50 terméket. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) A véletlen mintában nincs selejtes termék.

(b) Csak selejtes terméket vizsgált meg a fogyasztóvédelem.

(c) Legalább két selejtes terméket talált ak ellenőrzéskor.

(d) A kiválasztott termékek között a selejtesek aránya pontosan 2%.

**Megoldás.**

(a) $p = \dfrac{\binom{4900}{50}}{\binom{5000}{50}}$

(b) $p = \dfrac{\binom{100}{50}}{\binom{5000}{50}}$

(c) $p = 1 - \dfrac{\binom{4900}{50}\binom{100}{0} + \binom{4900}{49}\binom{100}{1}}{\binom{5000}{50}}$

(d) $p = \dfrac{\binom{4900}{49} \cdot \binom{100}{1}}{\binom{5000}{50}}$

**10. Feladat.** Anna, Bea, Cili, Dóra és Edina moziba mennek, és leülnek egymás mellé. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét.

(a) Edina ül középen.

(b) Anna és Bea szomszédosak.

(c) Cili a sor (valamelyik) szélén ül.

(d) Edina ül középen és Anna és Bea szomszédosak.

(e) Edina ül középen és Cili a sor (valamelyik) szélén ül.

(f) Edina ül középen és Anna és Bea szomszédosak és Cili a sor (valamelyik) szélén ül.

**Megoldás.**

(a) $p = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$

(b) $p = \frac{2 \cdot 4!}{5!} = \frac{2}{5}$

(c) $p = \frac{2 \cdot 4!}{5!} = \frac{2}{5}$

(d) $p = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5!}$

(e) $p = \frac{2 \cdot 3!}{5!}$

(f) $p = \frac{4}{5!}$

**11. Feladat.** Az első 9 pozitív egész számot véletlenszerű sorrendben egymás mellé írjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapott kilencjegyű szám osztható

(a) 2-vel; (b) 4-gyel; (c) 5-tel; (d) 9-cel; (e) 18-cal?

**Megoldás.**

(a) $p = \frac{4}{9}$ (b) $p = \frac{16}{8 \cdot 9}$ (c) $p = \frac{1}{9}$ (d) $p = 1$ (e) $p = \frac{4}{9}$

**12. Feladat.** Feldobunk egy szabályos pénzérmét. Ha a dobás fej, akkor egy, ha írás, akkor két szabályos dobókockával dobunk egyszer. Mi annak a valószínűsége, hogy mindeközben nem dobunk ötöst?

**Megoldás.**

- Annak a valószínűsége, hogy egy kockával dobunk $p = 1/2$. Annak valószínűsége, hogy egy kockával dobva a dobott szám nem öt $q = 5/6$. Mivel ezen események függetlenek, annak valószínűsége, hogy így nem dobunk ötöst $p_1 = 1/2 \cdot 5/6 = 5/12$.
- Annak a valószínűsége, hogy két kockával dobunk $p' = 1/2$. Annak valószínűsége, hogy két kockával dobva a dobott számok egyike sem ötös $q' = (5/6)^2 = 25/36$. Mivel ezen események függetlenek, annak valószínűsége, hogy így nem dobunk ötöst $p_2 = 1/2 \cdot 25/36 = 25/72$.

A $p_1$ és $p_2$ valószínűségű események olyan egymást kizáró események, melyek összege a keresett valószínűségű esemény. Így a keresett valószínűség

$$P = p_1 + p_2 = \frac{55}{72} \approx 0{,}7639.$$

**13. Feladat.** Egy versenyen minden ejtőernyős egy 10 méter sugarú körben landol. Különdíjat akkor kap egy ugró, ha a körben elhelyezett 2 méter oldalhosszúságú négyzetben landol. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ugrás különdíjas lesz?

**Megoldás.** $p = \frac{2^2}{10^2 \cdot \pi}$

**14. Feladat.** Egy 1 méter hosszú pálcát kettétörünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a töréspont közelebb van a pálca valamelyik végéhez, mint a közepéhez?

**Megoldás.** $p = \dfrac{1}{2}$

**15. Feladat.** Egy 1 méter hosszú pálcát kettétörünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a töréspont legalább kétszer akkora távolságra van a pálca közepétől, mint valamelyik szélétől?

**Megoldás.** $p = \dfrac{1}{3}$

## Leíró statisztika: véges számsokaságok jellemzői; táblázatok; diagramok

**16. Feladat.** Adjunk meg egy pozitív egészekből álló öt tagú adatsokaságot, amelynek

(a) módusza 3;
(b) mediánja 4;
(c) módusza 3 és mediánja 4;
(d) szórása 0;
(e) átlaga 5;
(f) szórása 0 és átlaga 5;
(g) módusza 3 és átlaga 5;
(h) mediánja 4 és átlaga 5;
(i) módusza 3, mediánja 4 és átlaga 5.

**Megoldás.**

(a) 1; 2; 3; 3; 3
(b) 1; 2; 4; 5; 5
(c) 3; 3; 4; 5; 6
(d) 2; 2; 2; 2; 2
(e) 4; 4; 5; 6; 6
(f) 5; 5; 5; 5; 5
(g) 3; 3; 4; 7; 8
(h) 3; 3; 4; 7; 8
(i) 3; 3; 4; 7; 8

**17. Feladat.** Egy ötelemű mintáról tudjuk, hogy két módusza 2 és 3, mediánja 3, terjedelme 5. Sorolja fel a minta elemeit.

**Megoldás.** 2; 2; 3; 3; 7

**18. Feladat.** Egy ötelemű mintáról tudjuk, hogy módusza 3, átlaga, mediánja és terjedelme pedig 5. Adjuk meg a minta elemeit.

**Megoldás.** 3; 3; 5; 6; 8

**19. Feladat.** Egy osztályban a matematika dolgozatok átlaga 3,32, a jegyek összege 83 lett. Legfeljebb hány

(a) jeles

(b) elégtelen

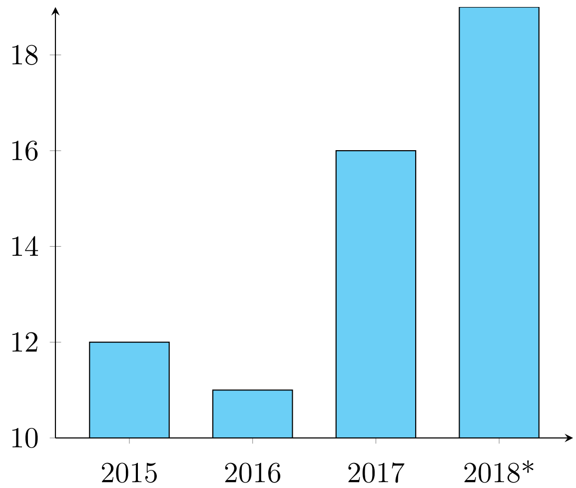
dolgozat születhetett?

**Megoldás.** A jegyek összegéből és átlagából megállapítható, hogy $\frac{83}{3{,}32} = 25$ fő írt dolgozatot.

(a) Ha mindenki jelesre írta volna a dolgozatot, akkor $25 \cdot 5 = 125$ lenne a jegyek összege. Ha egy ötöst kicserélünk egy egyesre, néggyel csökken a jegyek összege. Mivel $\frac{125 - 83}{4} = 10{,}5$, ezért legalább 11 ötöst kell más jegyre változtatnunk, így legfeljebb 14 jeles születhetett. Ezek összege $14 \cdot 5 = 70$, ha ehhez hozzávesszünk még 10 egyest, és 1 hármast, akkor a jegyek összege éppen 83 lesz. Így legfeljebb 14 jeles lehetett.

(b) Ha mindenki egyesre írta volna a dolgozatot, akkor $25 \cdot 1 = 25$ lenne a jegyek összege. Ha egy egyest kicserélünk egy ötösre, néggyel nő a jegyek összege. Mivel $\frac{83 - 25}{4} = 14{,}5$, ezért legalább 15 egyest kell más jegyre változtatnunk, így legfeljebb 10 egyes születhetett. Ezek összege $10 \cdot 1 = 10$, ha ehhez hozzávesszünk még 14 jelest, és 1 hármast, akkor a jegyek összege éppen 83 lesz. Így legfeljebb 10 egyes lehetett.

**20. Feladat.** Egy cég eladási adataira vonatkozóan a 2017-es tulajdonosváltást követően a következő adatok tűntek fel egy újságcikkben 2018 novemberében.




(a) Mit sugall a grafikon?

(b) Mit jelenthet a * jelölés?

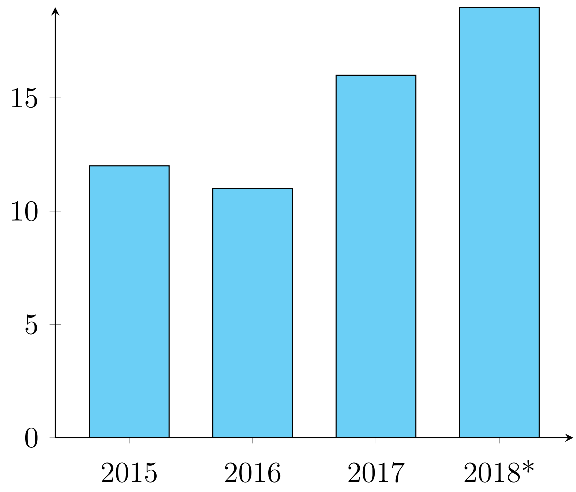
(c) Készítsen helyes ábrázolást.

**Megoldás.**

(a) Azt, hogy a bevételek 2017-ben pl. a 2015-ös szint háromszorosára emelkedtek, pedig az emelkedés csak $33,33\%$ körüli.

(b) Például azt, hogy csak becsült adatokról van szó, lévén a grafikon publikálásakor az év még nem ért véget, végleges adat nem lehetett.

(c)




**21. Feladat.** Egy dobókockát ötvenszer feldobva, a dobott számokról az alábbi gyakorisági táblázatot készítettük.

| Dobás | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gyakoriság | 10 | 7 | 6 | 12 | 8 | 7 |

(a) Határozza meg az egyes dobott értékek relatív gyakoriságát.

(b) Határozza meg a dobott számok móduszát.

(c) Határozza meg a dobott számok mediánját.

(d) Határozza meg a dobott számok átlagát.

(e) Határozza meg a dobott számok szórását.

(f) Ábrázolja a fenti adatokat oszlopdiagramon.

(g) Ábrázolja a fenti adatokat kördiagramon.

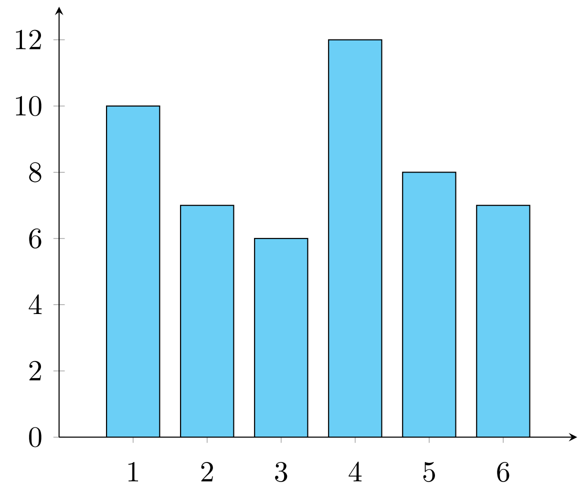
**Megoldás.**

(a)

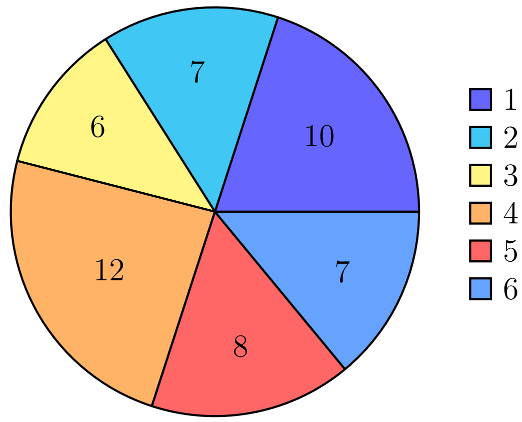
| Dobás | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Relatív gyakoriság | $\frac{10}{50}$ | $\frac{7}{50}$ | $\frac{6}{50}$ | $\frac{12}{50}$ | $\frac{8}{50}$ | $\frac{7}{50}$ |

(b) 4 (c) 5 (d) 3,44 (e) $\dfrac{2\sqrt{902}}{35}$

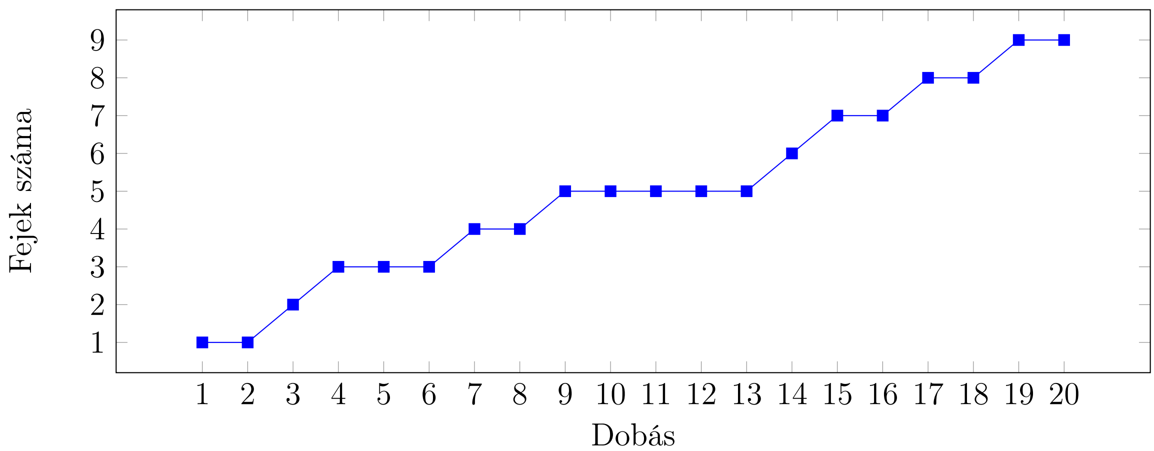
(f)




(g)




**22. Feladat.** Egy érmét hússzor feldobva a dobott fejek számát a következő grafikon ábrázolja.




(a) Miért nem szerencsés az ábrázolásnak ez a módja?

(b) Hány írást dobtunk összesen?

(c) Milyen hosszú volt a leghosszabb, kizárólag fejekből álló dobássorozat?

(d) Mennyi volt a dobások során a fejek és írások száma közötti legnagyobb eltérés?

**Megoldás.**

(a) A pontokat összekötő szakaszok (a vonaldiagram folytonossága) nem értelmezhető, pontdiagram lett volna szerencsés (azaz a dobásokat jelölő pontok, összekötés nélkül).

(b) Összesen 9 fejet, azaz 11 írást dobtunk.

(c) A leghosszabb fej-sorozat 2 hosszú volt, mert a függvény legnagyobb „ugrása” kettő.

(d) A 13. dobásnál volt a legnagyobb a különbség, mégpedig 3.

**23. Feladat.** Az alábbi táblázat a magyarországi kukoricatermelés területi átlagait mutatja 2015-ben. (Forrás: KSH, AKI )

| Megye, régió | Termésátlag (kg/ha) |
|---|---|
| Budapest | 5460 |
| Pest | 5490 |
| Fejér | 8380 |
| Komárom-Esztergom | 6830 |
| Veszprém | 6970 |
| Győr-Moson-Sopron | 5610 |
| Vas | 6110 |
| Zala | 6330 |
| Baranya | 6520 |
| Somogy | 6900 |
| Tolna | 7460 |
| Borsod-Abaúj-Zemplén | 4930 |
| Heves | 4020 |
| Nógrád | 3480 |
| Hajdú-Bihar | 6070 |
| Jász-Nagykun-Szolnok | 4120 |
| Szabolcs-Szatmár-Bereg | 3610 |
| Bács-Kiskun | 5050 |
| Békés | 5760 |
| Csongrád | 5130 |

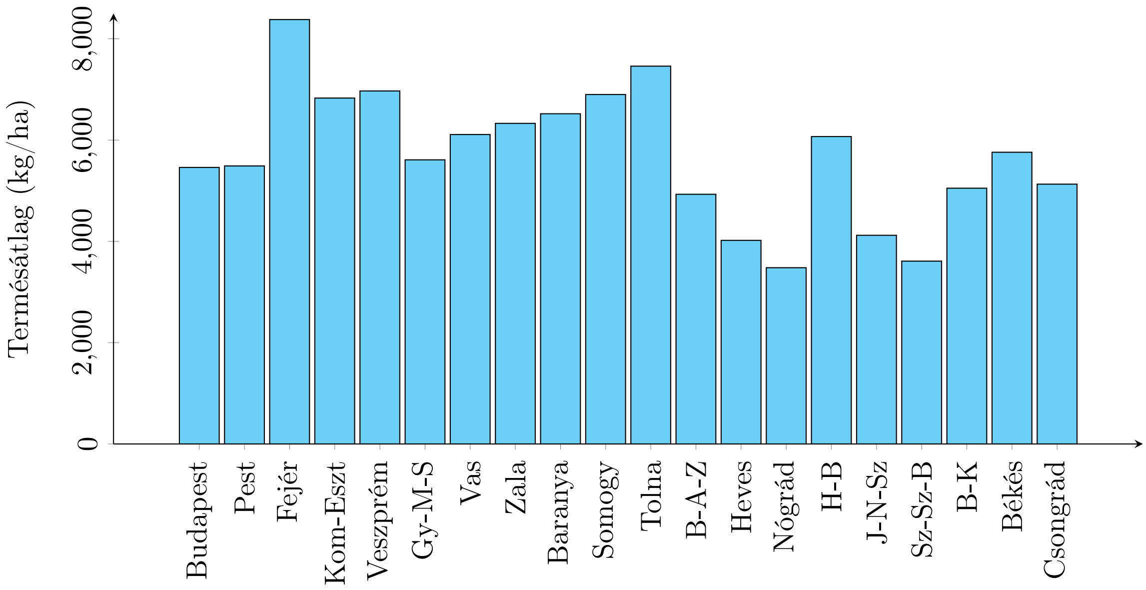
(a) Készítsünk oszlopdiagramot.

(b) Határozzuk meg az átlagot, mediánt, szórást.

(c) Hány megye, régió termésátlaga esik az átlag egy szórás sugarú környezetén kívül?

**Megoldás.**

(a)



(b) Átlag: 5711,5. Medián: 5685. Szórás: $\sqrt{\dfrac{32050455}{19}}$.

(c) Hat: Fejér, Tolna, Heves, Nógrád, Jász-Nagykun-Szolnok, Szabolcs-Szatmár-Bereg.

**24. Feladat.** Egy farmon automatikusan mérik a tojások tömegét. Egy napon az első 100 tojás esetében a következő adatokat kapták:

```
80, 79, 49, 87, 46, 72, 54, 47, 84, 79, 54, 84, 81, 56, 56, 73, 68, 73, 56,
58, 79, 87, 47, 63, 46, 81, 46, 81, 49, 90, 77, 54, 83, 59, 45, 66, 87, 61,
47, 47, 90, 60, 51, 58, 52, 66, 79, 63, 49, 90, 48, 49, 66, 62, 49, 70, 56,
63, 62, 84, 66, 49, 75, 76, 83, 86, 58, 79, 66, 86, 63, 70, 46, 89, 74, 77,
88, 67, 88, 64, 49, 56, 77, 88, 76, 51, 78, 87, 59, 53, 79, 87, 75, 74, 74,
79, 47, 83, 52, 76.
```

A tojások méret szerinti besorolása a következőképp táblázat alapján történik.

| Osztály | S | M | L | XL |
|---|---|---|---|---|
| Tömeg | 53 g-nál kisebb | 53-63 g | 64-73 g | 73 g-nál nagyobb |

(a) Soroljuk az adatokat a fenti osztályba. (Értelmezzük a fentieket balról nyitott, jobbról zárt intervallumnak, az utolsó kivételével.)

(b) Számítsuk ki az adatok átlagát.

(c) Számítsuk ki a csoportosított adatok szórását.

**Megoldás.**

(a) XL, XL, S, XL, S, S, M, S, XL, XL, M, XL, XL, M, M, S, S, S, M, M, XL, XL, S, M, S, XL, S, XL, S, XL, XL, M, XL, M, S, S, XL, M, S, S, XL, M, S, M, S, S, XL, M, S, XL, S, S, S, M, S, S, M, M, M, XL, S, S, XL, XL, XL, XL, M, XL, S, XL, M, S, S, XL, XL, XL, XL, S, XL, S, S, M, XL, XL, XL, S, XL, XL, M, M, XL, XL, XL, XL, XL, XL, S, XL, S, XL

(b) $\dfrac{1687}{25} = 67{,}48$

(c) $\dfrac{\sqrt{\frac{506974}{11}}}{15} \approx 14{,}3122$

**25. Feladat.** Egy weboldal az év első 150 napjáról látogatottsági statisztikát készített. A következő látogatószámokat tapasztalták.
3604, 5494, 2050, 2854, 2387, 2587, 6452, 6007, 4083, 6386, 1738, 1618, 5524, 6305, 2301, 5012, 5986, 3953, 6324, 4079, 5124, 6297, 2334, 5347, 5266, 4059, 4038, 2919, 6147, 5091, 2609, 3858, 5193, 2258, 4810, 6266, 2099, 5079, 6157, 4896, 3551, 2049, 3138, 3449, 5668, 2885, 5692, 4677, 3647, 2918, 6297, 4522, 4158, 4217, 3610, 3702, 4833, 6253, 3778, 2424, 2465, 4168, 2097, 4203, 4021, 4014, 3913, 4268, 5954, 2141, 3521, 2566, 5807, 5801, 5672, 2758, 5969, 2628, 4328, 4842, 1928, 3387, 5343, 3984, 5247, 2073, 4387, 6285, 2973, 5087, 2787, 4211, 5474, 1897, 1936, 3809, 1573, 2364, 4072, 1932, 6466, 1733, 3959, 4030, 5160, 3029, 2390, 3417, 3389, 4663, 5343, 3391, 4369, 4649, 5668, 1597, 5292, 2605, 2908, 2972, 1638, 4419, 5511, 4367, 2976, 4844, 2571, 5719, 2376, 4829, 3433, 4810, 6114, 2069, 5564, 3299, 4126, 1964, 5196, 5112, 1789, 3170, 1567, 3501, 4674, 1646, 1918, 5231, 6288, 4571

(a) Határozzuk meg a minta terjedelmét.

(b) Sorolja az adatokat (1500-tól kezdődően) 500 széles osztályközökbe.

(c) Ábrázolja a kapott osztályok gyakoriságát oszlopdiagramon.

(d) Számítsuk ki a csoportosított adatok átlagát.

(e) Számítsuk ki a csoportosított adatok szórását.

**Megoldás.**

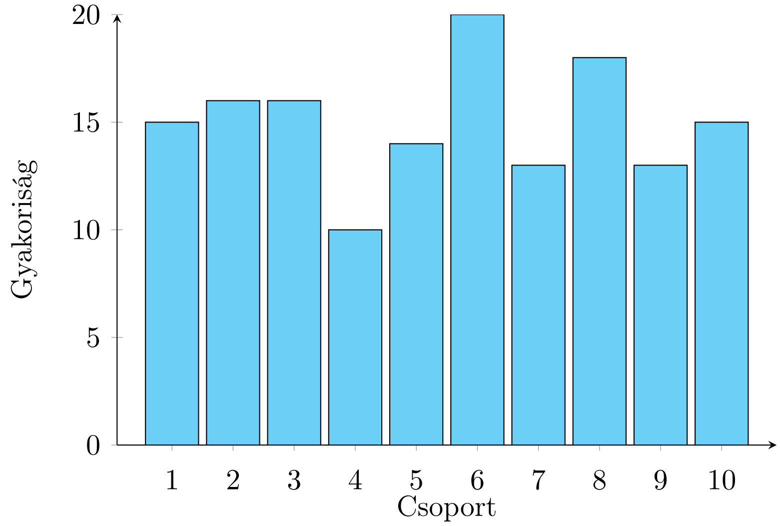
(a) A minta terjedelme 4899.

(b) Az adatokat a következő szabály szerint osztottuk csoportokba:

$$\text{csoport} = \left[\frac{\text{adat}}{500}\right] - 2,$$

azaz 2000-nél kisebb adat az 1-es csoportba került, 2000 és 2500 közti adat a 2-es csoportba, és így tovább. Az csoportokba osztott adatok a következők.
5, 8, 2, 3, 2, 3, 10, 10, 6, 10, 1, 1, 9, 10, 2, 8, 9, 5, 10, 6, 8, 10, 2, 8, 8, 6, 6, 3, 10, 8, 3, 5, 8, 2, 7, 10, 2, 8, 10, 7, 5, 2, 4, 4, 9, 3, 9, 7, 5, 3, 10, 7, 6, 6, 5, 5, 7, 10, 5, 2, 2, 6, 2, 6, 6, 6, 5, 6, 9, 2, 5, 3, 9, 9, 9, 3, 9, 3, 6, 7, 1, 4, 8, 5, 8, 2, 6, 10, 3, 8, 3, 6, 8, 1, 1, 5, 1, 2, 6, 1, 10, 1, 5, 6, 8, 4, 2, 4, 4, 7, 8, 4, 6, 7, 9, 1, 8, 3, 3, 3, 1, 6, 9, 6, 3, 7, 3, 9, 2, 7, 4, 7, 10, 2, 9, 4, 6, 1, 8, 8, 1, 4, 1, 5, 7, 1, 1, 8, 10, 7

(c)




(d) Az osztályközepek átlaga $\dfrac{12020}{3} \approx 4006{,}6667$.

(e) Az osztályközepek szórása $50\sqrt{\dfrac{370642}{447}} \approx 1439{,}77145$.

# 13 | Matematikai logika, bizonyítási módszerek

## Matematikai logika

A következő feladatokban az igazmondók/lovagok mindig igazat mondanak, a hazugmondók/lókötők mindig hazudnak.

**1. Feladat.** Egy szigeten lovagok és lókötők élnek. Az első járókelőtől megkérdezzük: –*Ön lovag?* Mit fog válaszolni?

**2. Feladat.** Egy szigeten lovagok és lókötők élnek. A lovagok minden kérdésre tudják a helyes választ, és azt is mondják. A lókötők minden kérdésre hamis választ gondolnak jónak, de amikor megszólalnak, ennek ellenkezőjét mondják. Egy utazó a szigetre érvén szeretné megkülönböztetni a lovagokat a lókötőktől, de csak eldöntendő kérdéseket tehet fel nekik. Az utazó a következőképpen gondolkozik. „Ha azt kérdezem, hogy $2 \cdot 2 = 5$ igaz-e, akkor a lovag azt gondolja, és azt is mondja, hogy nem, míg a lókötő azt gondolja, hogy igen, és így ő is azt válaszolja, hogy nem. Ha azt kérdezem, hogy $2 \cdot 2 = 4$ igaz-e, akkor egy lovag az gondolja, és azt is válaszolja, hogy igen, míg egy lókötő azt gondolja, hogy nem, és így ő is azt válaszolja, hogy igen. Így tehát bármely kérdésre azonos választ adnak, tehát nem tudom eldönteni, hogy ki lovag és ki lókötő." Igaza van-e a vándornak?

**3. Feladat.** Egy útkereszteződésben két út ágazik el, az egyik a városba, a másik a szakadékba vezet. A kereszteződésnél egy ház áll, amelyben egy ikerpár él. Az egyikük igazmondó, a másikuk hazugmondó. Csak az egyikük van otthon, nem tudni melyikük. Mit kérdezzünk tőle, hogy megtudjuk, melyik út vezet a városba?

**4. Feladat.** Seholsincs szigeten járunk, ahol két város van: Hazugburg városa és Igazpolis. (A városok neve az ott élő emberek viselkedésére utal.) A városlakók azonban átjárogatnak egymáshoz látogatóba. Mit kérdezzen a vándor, ha meg akarja tudni, melyik városban van?

**5. Feladat.** Egy asztalon 4 kártyát látunk, tudjuk, hogy minden kártya egyik oldalán egy betű, a másikon egy szám van. Mely kártyákat kell megfordítanunk, hogy le tudjuk ellenőrizni a következő állítást?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | M | A | 7 |

*Minden páros szám túloldalán magánhangzó van.*

**6. Feladat.** Egy szigeten fura szabály vonatozik a szigetlakókra. Csak az ehet kasszavagyökeret, akinek a hátán tetoválás van. Négy szigetlakó áll előttünk, ketten szemben, az egyikük kasszavagyökeret eszik, a másik nem. Az ő hátukat nem látjuk. Ketten viszont háttal állnak, így nem látjuk, hogy esznek-e kasszavagyökeret vagy sem, viszont azt látjuk, hogy az egyikük háta tetovált, a másikuké nem. Mely szigetlakókat kell megkérnünk, hogy forduljanak meg, ha ellenőrizni szeretnénk, hogy mindenki betartja-e a törvényt?

**7. Feladat.** Fogalmazzuk meg az alábbi állítások tagadását.

(a) Minden prímszám páros.
(b) Van konkáv deltoid.
(c) Nem minden arany, ami fénylik.
(d) Nincs fehér holló.
(e) Nincs nem fehér holló.
(f) Nem mindennek van meg a maga ideje.
(g) Nincs az a szerelem, ami soha el nem múlik.
(h) Van olyan hárommal osztható szám, ami nem páros.
(i) Egyetlen páros szám sem osztható 11-gyel.
(j) Moziban megyek, és esik az eső.
(k) Ha esik az eső, akkor moziba megyek.
(l) Moziba megyek, vagy esik az eső.

**8. Feladat.** Mely állítások tagadásai a következők?

(a) Nem minden állítás hamis.
(b) Nincs igaz ember.
(c) Minden madár társat választ.
(d) Minden $\varepsilon$-hoz van olyan $\delta$, hogy $\varepsilon > \delta$.
(e) Van olyan prím, amely páros.
(f) Van olyan $k$, hogy minden $n$-re $k \neq n^2$.

**9. Feladat.** Egy városban három barátnő megalapította az elvált nők klubját. Vezetéknevük Kiss, Nagy és Szép, keresztnevük Anna, Kata és Sára Továbbá 5, 10 vagy 15 éve váltak el férjeiktől. Állapítsuk meg, kinek mi a teljes neve, ki mióta elvált és hogy melyikük a cukrász, kémikus illetve pilóta, ha tudjuk a következő állításokat. Van-e felesleges információ az alábbiak között?

(a) Sára, aki cukrász, régebb óta elvált, mint Kiss.
(b) Kata nem kémikus.
(c) Szép pilóta egy kisebb légitársaságnál és az ő válása a legfrissebb.
(d) Nagy több mint nyolc éve vált el.
(e) A többiek Annát választották meg elnöknek. (Logika, 2012/9. alapján)

**10. Feladat.** Egy iskolai rajzverseny első négy helyezettje, Fanni, Kolos, Péter és Zita ötödik, hatodik, hetedik vagy nyolcadik osztályos, minden évfolyamra pontosan egyikük jár. Tudjuk még a következőket is.

(a) A Szőlőszürettel nevező Kolos nem hatodikos.

(b) Nem a negyedik helyet megszerző tanuló műve az Erdei állatok.

(c) A győztes Levélhullás című rajz nem a nyolcadikos Fanni alkotása.

(d) Az ötödikes induló Kirándulás című rajza nem a harmadik helyet szerezte meg.

(e) Fanni nem harmadik, Zita pedig nem negyedik lett.

Döntsük el, ki melyik osztályba jár, milyen témájú rajzzal indult, és hányadik lett a versenyen.
(Kresz Károly rejtvénye, Kis Füles, 2016/3.)

**11.* Feladat.** Egy városban öt férfi klubot alapított. Vezetéknevük Ács, Boda, Csáki, Tóth és Végh. Mindannyian elváltak, 6, 12, 16, 24 vagy 28 éve. Keresztneveik Béla, Géza, Ottó, Pál és Tibor, foglalkozásuk biológus, hentes, mérnök, orvos vagy tanár. Állapítsuk meg mindannyiuk teljes nevét, fogalakozását és azt, hogy hány éve váltak el, ha tudjuk a következő információkat.

(a) Ottó, aki biológus, nem 16 éve vált el.

(b) Tibor, aki 6 éve vált el, nem Tóth, a hentes.

(c) A 24 éve elvált férfi nem azonos a tanárként dolgozó Bodával.

(d) A klubot Végh Géza alapította.

(e) Nem Béla vált el a legrégebben, hanem a hentes.

(f) A 24 éve elvált férfi nem a hentes, és nem is Csáki.

(g) Az orvos keresztneve nem Béla.

(h) A mérnök nem 12 éve vált el.

(i) Ács válása a legfrissebb, Pálé történt a legrégebben. (Logika, 2012/9.)

**12. Feladat.** Tekintsük a következő (pím)ítéleteket.

$A$ : Esik az eső.

$B$ : Süt a nap.

$C$ : Fúj a szél.

$D$ : Moziba megyek.

$E$ : Kitakarítom a garázst.

Segítségükkel formalizáljuk a következő mondatokat, és készítsük el az igazságtáblájukat is.

(a) Nem esik az eső.

(b) Süt a nap, vagy fúj a szél.

(c) Ha fúj a szél, akkor nem megyek moziba.

(d) Pontosan akkor megyek a moziba, ha kitakarítom a garázst.

(e) Esik az eső vagy süt a nap és moziba megyek.

(f) Ha nem esik az eső és nem fúj a szél, akkor kitakarítom a garázst, vagy moziba megyek.

**13. Feladat.** Tekintsük a következő (pím)ítéleteket.

$A$ : Pom Pom hazakíséri Picúrt.

$B$ : A Radírpók megregulázza a Civakodó Cipőikreket.

$C$ : A Bátor Tintanyúl megijeszti a Lesbőltámadó Ruhaszárítókötelet.

$D$ : Madárvédő Golyókapkodó megvédi Gombóc Artúrt.

$E$ : Festéktüsszentő Hapci Benő beszínezi a Szomorú Szamovárt.

Állapítsuk meg, mely mondatokat formalizáltuk a következőképpen?

(a) $\neg A$

(b) $A \wedge B$

(c) $C \vee D$

(d) $D \rightarrow (\neg C)$

(e) $D \leftrightarrow E$

(f) $(B \vee C) \wedge E$

(g) $(A \rightarrow B) \wedge C$

(h) $A \rightarrow (B \wedge C)$

(i) $(\neg C) \wedge (\neg D)$

(j) $\neg(C \vee D)$

# Bizonyítási módszerek

## Indirekt bizonyítások

**14. Feladat.** Igazoljuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.

**15.* Feladat.** Igazoljuk, hogy minden irracionális szám tizedestört alakjában legalább egy számjegy végtelen sokszor szerepel.

**16.* Feladat.** Igazoljuk, hogy egy irracionális szám tizedestört alakjában legalább két számjegy végtelen sokszor szerepel.

**17. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely (legalább két főt számláló) társaságban van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van.

**18.* Feladat.** Egy konvex négyszög oldali fölé Thalész-köröket írunk. Igazoljuk, hogy a négyszög minden belső pontja le van fedve legalább egy körrel.

## Skatulya-elv

A következő születési feladatokban számoljunk 365 nappal, illetve 52 héttel egy évben.

**19. Feladat.** Legalább hányan vannak abban a társaságban, ahol a tagok ismerete nélkül biztosan kijelenthetjük, hogy van legalább

(a) 2 ember, aki a hét ugyanazon napján született;

(b) 3 ember, aki a hét ugyanazon napján született;

(c) 2 ember, aki ugyanazon hónapban született;

(d) 3 ember, aki ugyanazon hónapban született;

(e) 2 ember, aki az év ugyanazon napján született;

(f) 3 ember, aki az év ugyanazon napján született?

**20. Feladat.** Egy iskolának van 870 diákja, 92 tanára és 28 osztálya. Döntsük el, melyik igaz, illetve hamis az alábbi állítások közül.

(a) Van olyan osztály, amelyikbe legalább 30-an járnak.

(b) Van két diák, aki az év ugyanazon napján született.

(c) Van három diák, aki az év ugyanazon napján született.

(d) Van négy diák, aki az év ugyanazon napján született.

(e) Van nyolc tanár, aki ugyanabban a hónapban született.

(f) Van egy olyan diák, aki ugyanabban a hónapban született mint valamelyik tanár.

(g) Van olyan osztály, amelyikben legalább öt tanár tanít.

**21.* Feladat.** Igazoljuk, hogy 12 különböző kétjegyű szám közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége azonos számjegyekből áll.

**22.* Feladat.** Legyen adott $n$ darab természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy mindig kiválasztható közülük néhány (legalább egy) úgy, hogy azok összege osztható $n$-nel.

**23.* Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész számnak van olyan többszöröse, amely (a tízes számrendszerben felírva) csak a 0 és az 1 számjegyekből áll.

**24.* Feladat.** Igazoljuk, hogy az 2019-nek van olyan többszöröse, amely (a tízes számrendszerben felírva) csak az 1 számjegyből áll.

**25.* Feladat.** Egy gulyában két falu 65 tehene legel, vörösek, fehérek, feketék, tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincs öt különböző korú, azonos színű tehén, akkor van három azonos színű, egyidős tehén ugyanabból a faluból.

**26.* Feladat.** Egy tíztagú társaságban mindenki legalább hét másikat ismer. Bizonyítsuk be, hogy bármely három embernek van közös ismerőse.
(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny haladók II. ford. (szki) 1986.)

**27.* Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely poliédernek van két, azonos oldalszámú lapja.

**28.* Feladat.** Igazoljuk, hogy ha adott a koordinátasíkon 5 rácspont, akkor van közöttük kettő, melyeket összekötő szakasz a belsejében is tartalmaz rácspontot. (KöMaL P.53)

**29. Feladat.** Adott egy négyzet, melynek átlója 2 egység. Melyik az a legkisebb $d$ szám, amelyre igaz, hogy a négyzetben öt pontot felvéve mindig lesz kettő, melyek távolsága nem nagyobb mint $d$?

**30. Feladat.** Egy egységkocka minden pontját három szín valamelyikével színezzük. Igazoljuk, hogy mindig van két azonos színű pont, melyek távolsága legalább 1,4.

**31. Feladat.** Egy egységsugarú körvonalon hét pontot elhelyezve igazoljuk, hogy van két pont, melyek távolsága nem nagyobb mint 1.

**32.* Feladat.** Egy $3 \times 6$ cm-es téglalapban elhelyeztünk nyolc pontot. Mutassuk meg, hogy a pontok között található két olyan, amelyek távolsága nem nagyobb $\sqrt{5}$ cm-nél.

**33.* Feladat.** Száz kavicsot 50 kupacba rendezünk úgy, hogy egyik kupac sem üres. Igazoljuk, hogy a kupacok két csoportba tolhatók úgy, hogy a két csoportban 50-50 kavics van.

(KöMaL Gy.2304.)

**34. Feladat.** Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjére ráírjuk az $1, 2, 3$ számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

(Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 1995. 10. osztály 1. feladat)

## Logikai szita (Szita-formula)

**35. Feladat.** Az iskolában az első évfolyamról harmincan indultak háziversenyen matematikából. A versenyzőknek három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladatot tizenkilencen, a másodikat tizenöten, a harmadikat tizennyolcan oldották meg hibátlanul. Az első és második feladatot heten, az első és harmadik feladatot kilencen, a másodikat és harmadikat pedig tízen oldották meg jól. Mindhárom feladat megoldása három tanuló dolgozatában volt kifogástalan. Hány tanulónak nem sikerült egyetlen feladatra sem hibátlanul válaszolni?

(Forrás: Természet Világa)

**36. Feladat.** Egy osztály 30 tanulója közül a matematikát 12-en, a fizikát 14-en, a kémiát 13-an szeretik. 5 tanuló a matematikát és a fizikát, 4 a matematikát és a kémiát is, 7 a fizikát és a kémiát is szereti. Hárman mindhárom tárgyat szeretik. Hányan nem szeretik egyik tárgyat sem?

**37. Feladat.** Egy osztály a tanév folyamán három kirándulást szervezett. Az elsőn az osztály 70%-a vett részt, a másodikon 80%-a, a harmadikon 90%-a. Így 12 tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult. Hányan vannak az osztályban?

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1985/1986 9. évfolyam 1. kategória 2. forduló)

**38. Feladat.** Hány olyan kétjegyű szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal?

**39.* Feladat.** Egy konvex $n$-szög csúcsai közül hányféleképp választható ki 3, hogy azok páronként nemszomszédosak legyenek?

**40. Feladat.** Hány olyan 8 jegyű pozitív egész szám van, amely csak az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

**41.* Feladat.** A 45 tagú Majmok Tudományos Akadémiája ülést tartott. Ezen az ülésen három kérdést tűztek napirendre, mely fölött szavazással óhajtottak dönteni. A kérdések a következők voltak.

1. Okosabb-e a majom, mint az ember?
2. Szebb-e a majom, mint az ember?
3. Igaz-e, hogy az ember a majom őse?

Hányan szavaztak mindhárom kérdésre nemmel, ha az alábbi megállapításokat közölték a sajtóban?

- A szavazás után kiderült, hogy az 1. és a 3. kérdésre egyaránt 23-23 igen szavazat érkezett, míg a 2. kérdésre csak 17.
- Az első kérdésre igennel válaszolók közül 13-an a másodikra, 12-en pedig a harmadik kérdésre feleltek nemmel.
- Igent mondott a 2. és a 3. kérdésre 6 „akadémikus”, de közülük ketten az első kérdésre nemmel szavaztak.

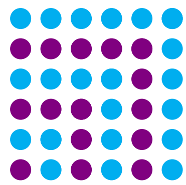
(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1981/1982 9. évf. 1. kat. 1. ford. 4. fel.)

## Teljes indukció

**42. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

**43. Feladat.** Az alábbi ábra segítségével fogalmazzunk meg észrevételt az egymást követő páratlan pozitív egész számok összegére, és lássuk is azt be.



**44. Feladat.** Fogalmazzunk meg észrevételt az $n$-edik köbszám egy lehetséges előállítására vonatkozóan az

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1^3 \\ 2+4+2 & = & 2^3 \\ 3+6+9+6+3 & = & 3^3 \\ 4+8+12+16+12+8+4 & = & 4^3 \\ & \vdots & \end{array}$$

egyenletek kapcsán és lássuk is be azt.

**45. Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív természetes számra fennálnak a következő összefüggések.

(a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(b) $(2+1) \cdot (2^2+1) \cdot \ldots \cdot (2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}} - 1$

(c) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2$

(d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(e) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(f) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(g) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$

(h) $\dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

(i) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

(j) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

**46. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha

$$a_1=\sqrt{2},\ a_n=\sqrt{2+a_{n-1}},\quad (n\geq 2),$$

akkor $1<a_n<2$ és a sorozat szigorú monoton nő.

**47. Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $n\in\mathbb{N}_0$ számokra teljesülnek az alábbi összefüggések.

(a) $6 \mid n^3-n$
(b) $6 \mid (n^2+5)n$
(c) $5 \mid 2^{4n+1}+3$
(d) $4 \mid 7^n+3^{n+1}$
(e) $9 \mid 7^n+3n-1$

**48.* Feladat.** Bizonyítsa be, hogy $9^n-8n-1$ osztható 64-gyel, ahol $n$ nemnegatív egész szám.
(Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 2004. 11. osztály 1. feladat)

**49. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $n$ egy 1-nél nagyobb természetes szám, akkor

(a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$,
(b) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

**50. Feladat.** Igazoljuk, hogy minden pozitív természetes számra fennállnak a következő egyenlőtlenségek.

(a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$
(b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$

**51. Feladat.** Azt állítjuk, hogy minden ló ugyanolyan színű, és ezt be is látjuk. Egy egyetlen lóból álló ménesre (halmazra) igaz, hogy abban minden ló azonos színű. Tegyük fel, hogy az állítás igaz tetszőleges, legfeljebb $n$ lóból álló ménesre, és tekintsünk egy $n+1$ lóból álló ménest. Ha ebből kiveszünk egy lovat, egy $n$ lóból álló ménest kapunk, amelyben a feltételezésnek megfelelően már minden ló ugyanolyan színű. Már csak azt kell megmutatni, hogy a kivett ló is ugyanilyen színű. Ezt a következőképpen tesszük: tegyük vissza a kiválasztott lovat a többi közé, vegyünk ki egy másikat, és újra alkalmazzuk az indukciós feltevést; az így kapott ménesben is ugyanolyan színű minden ló, beleértve az eredetileg kiválasztott lovat is, amelynek tehát ugyanolyan színűnek kell lennie, mint az összes többinek. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges $n+1$ lóból álló ménesben is minden ló ugyanolyan színű. A teljes indukció elvének megfelelően ezzel beláttuk az eredeti állításunkat: minden ló ugyanolyan színű. Hol a hiba a gondolatmenetben?
(Ló-paradoxon Pólya Györgytől (1887-1985).)

## Invariáns tulajdonságok

**52. Feladat.** Egy táblára felírtuk az $1,2,\ldots 10$ számokat. Egy-egy alkalommal kettőt letörlünk, és helyettük a különbségüket írjuk. Előfordulhat-e, hogy az utolsó megmaradt szám a 0?

**53. Feladat.** Egy táblán 2019 darab nulla és 2019 darab egyes számjegy van. Egy-egy alkalommal kettőt letörlünk. Ha ezek azonosak voltak akkor egy egyest, ha különbözők, akkor egy nullát írunk vissza. Milyen szám marad utoljára?

**54. Feladat.** Egy papírlapunk van, amelyet egy lépésben 6, vagy 11 részre téphetünk, majd a kapott darabok közül akárhánnyal akárhányszor ugyanígy járhatunk el. Elérhető-e, hogy a végén 2019 papírlapot kapjunk?

**55. Feladat.** Egy kocka csúcsaiba számokat írunk, az egyikbe egyest, a többibe nullát. Egy alkalommal egy él két végpontjában lévő számokat eggyel-eggyel megnöveljük. Elérhető-e így, hogy minden csúcsban azonos szám álljon?

**56.**$^*$ **Feladat.** Két kupacban gyufák vannak. Egy alkalommal az egyik kupacból valamennyit leveszünk, és a másikhoz kétszer annyit hozzáteszünk. Elérhető-e, hogy néhány lépés után mindkét kupacban ugyanannyi gyufa legyen, ha kezdetben a két kupacban 2019 és 2018 szál gyufa volt?

**57. Feladat.** Egy kör alakú asztal körül 10 törpe áll. Minden alkalommal az egyik törpe egyet jobbra, egy másik egyet balra lép. Elérhetik-e hogy ugyanazon a helyen álljanak?

## Egyéb módszerek, trükkök

### A kétoldali összeszámlálás módszere

**58.**$^*$ **Feladat.** Mutassuk meg, hogy szoros kapcsolat van az

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{10}{9}$$

összefüggés, és a következő Kalmár Lászlótól származó feladat között. „Régen árultak olyan csokoládét, amely papírjában egy szelvény volt, s tíz szelvényért egy újabb tábla csokoládét lehetett kapni. Valójában hány tábla elfogyasztható csokoládét ért 1 tábla?”

**59. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a következő feladat kétféle megoldásával. „Képzeljünk el egy táblát, amelyik $n-k+1$ lépés hosszú ($0\le k\le n$) és $k+1$ lépés széles. Jelenleg a bal alsó sarokban egy egér ül, a tábla jobb felső sarkában egy darab sajt van. Egerünk csak felfelé vagy jobbra léphet, mindig szomszédos mezőre. Hányféleképp juthat el egerünk a sajthoz?”

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | S |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| E | | | | | | |

**60. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}.$$

**61.**$^*$ **Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$1+2+\ldots+n=\binom{n+1}{2}.$$

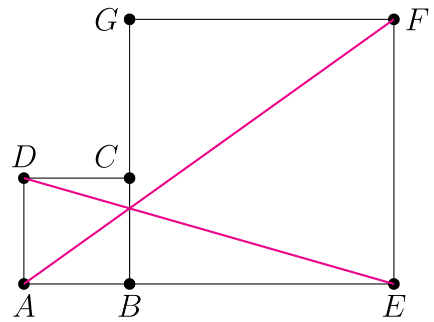
**62.* Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

**63.* Feladat.** Bizonyítsuk be az alábbi összefüggést.

$$2^n \cdot \binom{n}{0} + 2^{n-1}\binom{n}{1} + 2^{n-2}\binom{n}{2} + \ldots + 2\binom{n}{n-1} + 1\binom{n}{n} = 3^n.$$

**64.* Feladat.** Az ábrán látható $ABCD$ és $BEFG$ négyzetek $AE$ és $DF$ csúcsait összekötöttük. Igazoljuk, hogy az összekötő szakaszok a $BG$ oldalon metszik egymást.




### A legrosszabb eset módszere

**65. Feladat.** Egy dobozban háromféle golyó van 14 piros, 17 kék és 21 zöld. Legkevesebb hány golyót kell visszatevés nélkül kihúzni, hogy a kihúzott golyók között legyen

(a) legalább kettő azonos színű,
(b) mindhárom színből legalább egy,
(c) legalább két zöld,
(d) három piros?

**66. Feladat.** Egy dobozban háromféle golyó van 4 piros, 7 kék és 11 zöld. Véletlenszerűen kivettünk 5 golyót. A következők közül melyek igazak biztosan a dobozban maradt golyókra?

(a) Nincs köztük piros.
(b) Mindhárom színből maradt.
(c) Maradt kék.
(d) Legalább kétféle színű maradt.

**67. Feladat.** Egy ládában 10 piros, 20 sárga, 30 kék és 40 barna golyó van. Legfeljebb hányat lehet közülük bekötött szemmel kihúzni úgy, hogy a ládában biztosan maradjon

(a) 2 különböző színű; (b) 2 egyforma színű; (c) több sárga, mint piros?

(Bonifert Domonkos Nemzetközi Matematikaverseny, 2018, 8. osztály, döntő)

**68. Feladat.** Egy dobozban van néhány papírcetli. Egy darabon az 1 áll, kettőn a 2, és így tovább, 100 darabonon az áll, hogy 100. Legalább hány cetlit kell kihúzni ahhoz (csukott szemmel, visszatevés nélkül), hogy legyen tíz cetlink, amire ugyanaz van írva?

**69. Feladat.** Egy dobozban többféle golyó van, mindegyikből ugyanannyi, összesen 30. Hányféle golyó van a dobozban, ha ahhoz, hogy biztosan legyen három egyforma a kezünkben, legalább 11-et kell elővenni?

**70. Feladat.** Egy dobozban többféle golyó van, mindegyikből ugyanannyi, összesen 30. Hányféle golyó van a dobozban, ha ahhoz, hogy biztosan legyen három különböző a kezünkben, legalább 11-et kell elővenni?

**71.* Feladat.** Egy zsákban fehér, piros és kék golyók vannak, összesen 100. Kékből éppen kétszer annyi mint fehérből. Mennyi van az egyes színekből, ha ahhoz, hogy biztosan legyen nálunk kék, 47 golyót kell kihúznunk?

### „A bölcs olykor a végén kezdi" módszer

**72. Feladat.** Három vándor érkezett a fogadóba és egy tál gombócot rendelt. Mire a vendéglős megfőzte a vacsorát, a vándorok az asztalnál a fáradtságtól elszunnyadtak. A vendéglős eléjük tolta a gombócos tálat, és elment. Felébredt az egyik vándor, megszámolta a gombócokat, megette azok egyharmadát, majd ismét elaludt. Ezután felébredt a második, ő is elfogyasztotta a tálon maradt mennyiség egyharmadát, majd tovább aludt. Később felébredt a harmadik, megette a maradék harmadrészét, mire a tálon 8 gombóc maradt. Hány gombócot főzött a vendéglős? (Természet Világa)

**73.* Feladat.** Hogyan lehet egy folyóról pontosan 6 liter vizet felhozni, ha csak egy 4 és egy 9 literes edényünk van? (Természet Világa)

**74. Feladat.** Négy játékos megegyezett, hogy a vesztes minden játszma után megkétszerezi a többi játékos pénzét. Összesen 4 játékot játszottak. Mindenki egyszer vesztett, a játék befejeztével mindegyik játékos megszámolta a pénzét, és úgy találta, hogy mindegyiküknek 16 forintja van. Mennyi pénze volt a játékosoknak a játék kezdetekor?

**75.* Feladat.** Egy asztalon 27 gyufaszál hever. Az első játékos tetszése szerint elvehet ebből 1, 2 vagy 3 gyufaszálat, majd a 2. a maradékból úgyszintén 1-et, 2-t vagy 3-at választhat. Ezután ismét az első vesz, és így tovább, felváltva. Az nyer, aki utolsóként vesz gyufaszálat a halomból. A kezdő játékos tudja-e biztosítani, hogy nyerjen? (Természet Világa)

# Megoldások

## Matematikai logika

A következő feladatokban az igazmondók/lovagok mindig igazat mondanak, a hazugmondók/lókötők mindig hazudnak.

**1. Feladat.** Egy szigeten lovagok és lókötők élnek. Az első járókelőtől megkérdezzük: *–Ön lovag?* Mit fog válaszolni?

**Megoldás.** Természetesen azt, hogy igen.

**2. Feladat.** Egy szigeten lovagok és lókötők élnek. A lovagok minden kérdésre tudják a helyes választ, és azt is mondják. A lókötők minden kérdésre hamis választ gondolnak jónak, de amikor megszólalnak, ennek ellenkezőjét mondják. Egy utazó a szigetre érvén szeretné megkülönböztetni a lovagokat a lókötőktől, de csak eldöntendő kérdéseket tehet fel nekik. Az utazó a következőképpen gondolkozik. „Ha azt kérdezem, hogy $2 \cdot 2 = 5$ igaz-e, akkor a lovag azt gondolja, és azt is mondja, hogy nem, míg a lókötő azt gondolja, hogy igen, és így ő is azt válaszolja, hogy nem. Ha azt kérdezem, hogy $2 \cdot 2 = 4$ igaz-e, akkor egy lovag az gondolja, és azt is válaszolja, hogy igen, míg egy lókötő azt gondolja, hogy nem, és így ő is azt válaszolja, hogy igen. Így tehát bármely kérdésre azonos választ adnak, tehát nem tudom eldönteni, hogy ki lovag és ki lókötő." Igaza van-e a vándornak?

**Megoldás.** Nincs. Arra a kérdésre, hogy *lovag-e* a lovag igent, míg a lókötő nemet felel.

**3. Feladat.** Egy útkereszteződésben két út ágazik el, az egyik a városba, a másik a szakadékba vezet. A kereszteződésnél egy ház áll, amelyben egy ikerpár él. Az egyikük igazmondó, a másikuk hazugmondó. Csak az egyikük van otthon, nem tudni melyikük. Mit kérdezzünk tőle, hogy megtudjuk, melyik út vezet a városba?

**Megoldás.**

(1) A testvéred melyik utat mutatná a város felé? (Erre mindketten a szakadékba vezető utat mutatják.)

(2) Melyik utat szoktad mutatni, amikor megkérdezik, hogy merre van a város? (Erre mindketten a városba vezető utat mutatják.)

**4. Feladat.** Seholsincs szigeten járunk, ahol két város van: Hazugburg városa és Igazpolis. (A városok neve az ott élő emberek viselkedésére utal.) A városlakók azonban átjárogatnak egymáshoz látogatóba. Mit kérdezzen a vándor, ha meg akarja tudni, melyik városban van?

**Megoldás.** *Idevalósi Ön?* Erre az igazmondók városában igen, a hazugmondók városában nem választ fog kapni.

**5. Feladat.** Egy asztalon 4 kártyát látunk, tudjuk, hogy minden kártya egyik oldalán egy betű, a másikon egy szám van. Mely kártyákat kell megfordítanunk, hogy le tudjuk ellenőrizni a következő állítást?

$$\boxed{2}\ \boxed{M}\ \boxed{A}\ \boxed{7}$$

*Minden páros szám túloldalán magánhangzó van.*

**Megoldás.** Ellenőrizni kell, hogy a 2-es hátán magánhangzó van-e, illetve hogy az $M$ hátán páratlan szám van-e. A többit kártya nem tudja megszegni az állítást, akármi is legyen a másik oldalán.

**6. Feladat.** Egy szigeten fura szabály vonatozik a szigetlakókra. Csak az ehet kasszavagyökeret, akinek a hátán tetoválás van. Négy szigetlakó áll előttünk, ketten szemben, az egyikük kasszavagyökeret eszik, a másik nem. Az ő hátukat nem látjuk. Ketten viszont háttal állnak, így nem látjuk, hogy esznek-e kasszavagyökeret vagy sem, viszont azt látjuk, hogy az egyikük háta tetovált, a másikuké nem. Mely szigetlakókat kell megkérnünk, hogy forduljanak meg, ha ellenőrizni szeretnénk, hogy mindenki betartja-e a törvényt?

**Megoldás.** Aki szemben áll velünk és eszik, annak látnunk kell a tetoválást a hátán. Aki háttal van nekünk és nincs tetoválása, az nem ehet. Nekik kell megfordulniuk.

**7. Feladat.** Fogalmazzuk meg az alábbi állítások tagadását.

(a) Minden prímszám páros.

(b) Van konkáv deltoid.

(c) Nem minden arany, ami fénylik.

(d) Nincs fehér holló.

(e) Nincs nem fehér holló.

(f) Nem mindennek van meg a maga ideje.

(g) Nincs az a szerelem, ami soha el nem múlik.

(h) Van olyan hárommal osztható szám, ami nem páros.

(i) Egyetlen páros szám sem osztható 11-gyel.

(j) Moziban megyek, és esik az eső.

(k) Ha esik az eső, akkor moziba megyek.

(l) Moziba megyek, vagy esik az eső.

**Megoldás.**

(a) Van páratlan prímszám
(b) Minden deltoid konvex.
(c) Minden arany, ami fénylik.
(d) Van fehér holló.
(e) Van nem fehér holló.
(f) Mindennek megvan a maga ideje.
(g) Van olyan szerelem, ami soha el nem múlik.
(h) Nincs olyan hárommal osztható szám, ami nem páros.
(i) Van olyan páros szám, ami osztható 11-gyel.
(j) Nem megyek moziba, vagy nem esik az eső.
(k) Esik az eső, de nem megyek moziba.
(l) Nem megyek moziba, és nem esik az eső.

**8. Feladat.** Mely állítások tagadásai a következők?

(a) Nem minden állítás hamis.
(b) Nincs igaz ember.
(c) Minden madár társat választ.
(d) Minden $\varepsilon$-hoz van olyan $\delta$, hogy $\varepsilon > \delta$.
(e) Van olyan prím, amely páros.
(f) Van olyan $k$, hogy minden $n$-re $k \neq n^2$.

**Megoldás.**

(a) Minden állítás hamis.
(b) Van igaz ember.
(c) Nem minden madár választ társat.
(d) Létezik olyan $\varepsilon$, hogy minden $\delta$ esetén $\varepsilon \leq \delta$.
(e) Minden prím páratlan.
(f) Minden $k$-hoz van olyan $n$, hogy $k = n^2$.

**9. Feladat.** Egy városban három barátnő megalapította az elvált nők klubját. Vezetéknevük Kiss, Nagy és Szép, keresztnevük Anna, Kata és Sára Továbbá 5, 10 vagy 15 éve váltak el férjeiktől. Állapítsuk meg, kinek mi a teljes neve, ki mióta elvált és hogy melyikük a cukrász, kémikus illetve pilóta, ha tudjuk a következő állításokat. Van-e felesleges információ az alábbiak között?

(a) Sára, aki cukrász, régebb óta elvált, mint Kiss.

(b) Kata nem kémikus.

(c) Szép pilóta egy kisebb légitársaságnál és az ő válása a legfrissebb.

(d) Nagy több mint nyolc éve vált el.

(e) A többiek Annát választották meg elnöknek. (Logika, 2012/9. alapján)

**Megoldás.** Az utolsó állítás felesleges.

| Vezetéknév | Keresztnév | Foglalkozás | Válás |
|---|---|---|---|
| Kiss | Anna | kémikus | 10 |
| Szép | Kata | pilóta | 5 |
| Nagy | Sára | cukrász | 15 |

**10. Feladat.** Egy iskolai rajzverseny első négy helyezettje, Fanni, Kolos, Péter és Zita ötödik, hatodik, hetedik vagy nyolcadik osztályos, minden évfolyamra pontosan egyikük jár. Tudjuk még a következőket is.

(a) A Szőlőszürettel nevező Kolos nem hatodikos.

(b) Nem a negyedik helyet megszerző tanuló műve az Erdei állatok.

(c) A győztes Levélhullás című rajz nem a nyolcadikos Fanni alkotása.

(d) Az ötödikes induló Kirándulás című rajza nem a harmadik helyet szerezte meg.

(e) Fanni nem harmadik, Zita pedig nem negyedik lett.

Döntsük el, ki melyik osztályba jár, milyen témájú rajzzal indult, és hányadik lett a versenyen. (Kresz Károly rejtvénye, Kis Füles, 2016/3.)

**Megoldás.**

| Helyezés | Név | Osztály | Cím |
|---|---|---|---|
| 1. | Zita | 6. | Levélhullás |
| 2. | Fanni | 8. | Erdei állatok |
| 3. | Kolos | 7. | Szőlőszüret |
| 4. | Péter | 5. | Kirándulás |

**11.* Feladat.** Egy városban öt férfi klubot alapított. Vezetéknevük Ács, Boda, Csáki, Tóth és Végh. Mindannyian elváltak, 6, 12, 16, 24 vagy 28 éve. Keresztneveik Béla, Géza, Ottó, Pál és Tibor, foglalkozásuk biológus, hentes, mérnök, orvos vagy tanár. Állapítsuk meg mindannyiuk teljes nevét, fogalakozását és azt, hogy hány éve váltak el, ha tudjuk a következő információkat.

(a) Ottó, aki biológus, nem 16 éve vált el.

(b) Tibor, aki 6 éve vált el, nem Tóth, a hentes.

(c) A 24 éve elvált férfi nem azonos a tanárként dolgozó Bodával.

(d) A klubot Végh Géza alapította.

(e) Nem Béla vált el a legrégebben, hanem a hentes.

(f) A 24 éve elvált férfi nem a hentes, és nem is Csáki.

(g) Az orvos keresztneve nem Béla.

(h) A mérnök nem 12 éve vált el.

(i) Ács válása a legfrissebb, Pálé történt a legrégebben. (Logika, 2012/9.)

**Megoldás.**

| Vezetéknév | Keresztnév | Foglalkozás | Válás |
|---|---|---|---|
| Ács | Tibor | orvos | 6 éve |
| Boda | Béla | tanár | 16 éve |
| Csáki | Ottó | biológus | 12 éve |
| Tóth | Pál | hentes | 28 éve |
| Végh | Géza | mérnök | 24 éve |

**12. Feladat.** Tekintsük a következő (pím)ítéleteket.

$A$ : Esik az eső.

$B$ : Süt a nap.

$C$ : Fúj a szél.

$D$ : Moziba megyek.

$E$ : Kitakarítom a garázst.

Segítségükkel formalizáljuk a következő mondatokat, és készítsük el az igazságtáblájukat is.

(a) Nem esik az eső.

(b) Süt a nap, vagy fúj a szél.

(c) Ha fúj a szél, akkor nem megyek moziba.

(d) Pontosan akkor megyek a moziba, ha kitakarítom a garázst.

(e) Esik az eső vagy süt a nap és moziba megyek.

(f) Ha nem esik az eső és nem fúj a szél, akkor kitakarítom a garázst, vagy moziba megyek.

**Megoldás.**

(a) $\neg A$

(b) $B \vee C$

(c) $C \to (\neg D)$

(d) $D \leftrightarrow E$

(e) $A \vee (B \wedge D)$

(f) $(\neg A \wedge \neg C) \to (E \vee D)$

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| $i$ | $h$ |
| $h$ | $i$ |

| $B$ | $C$ | $B \vee C$ |
|---|---|---|
| $i$ | $i$ | $i$ |
| $i$ | $h$ | $i$ |
| $h$ | $i$ | $i$ |
| $h$ | $h$ | $h$ |

| $C$ | $D$ | $C \to (\neg D)$ |
|---|---|---|
| $i$ | $i$ | $h$ |
| $i$ | $h$ | $i$ |
| $h$ | $i$ | $i$ |
| $h$ | $h$ | $h$ |

| $D$ | $E$ | $D \leftrightarrow E$ |
|---|---|---|
| $i$ | $i$ | $i$ |
| $i$ | $h$ | $h$ |
| $h$ | $i$ | $h$ |
| $h$ | $h$ | $i$ |

| $A$ | $B$ | $D$ | $B \wedge D$ | $A \vee (B \wedge D)$ |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $i$ | $i$ | $i$ | $i$ |
| $i$ | $i$ | $h$ | $h$ | $i$ |
| $i$ | $h$ | $i$ | $h$ | $i$ |
| $i$ | $h$ | $h$ | $h$ | $i$ |
| $h$ | $i$ | $i$ | $i$ | $i$ |
| $h$ | $i$ | $h$ | $h$ | $h$ |
| $h$ | $h$ | $i$ | $h$ | $h$ |
| $h$ | $h$ | $h$ | $h$ | $h$ |

**13. Feladat.** Tekintsük a következő (pím)ítéleteket.

$A$ : Pom Pom hazakíséri Picúrt.

$B$ : A Radírpók megregulázza a Civakodó Cipőikreket.

$C$ : A Bátor Tintanyúl megijeszti a Lesbőltámadó Ruhaszárítókötelet.

$D$ : Madárvédő Golyókapkodó megvédi Gombóc Artúrt.

$E$ : Festéktüsszentő Hapci Benő beszínezi a Szomorú Szamovárt.

Állapítsuk meg, mely mondatokat formalizáltuk a következőképpen?

(a) $\neg A$

(b) $A \wedge B$

(c) $C \vee D$

(d) $D \rightarrow (\neg C)$

(e) $D \leftrightarrow E$

(f) $(B \vee C) \wedge E$

(g) $(A \rightarrow B) \wedge C$

(h) $A \rightarrow (B \wedge C)$

(i) $(\neg C) \wedge (\neg D)$

(j) $\neg(C \vee D)$

**Megoldás.**

(a) Pom Pom nem kíséri haza Picúrt.

(b) Pom Pom hazakíséri Picúrt és a Radírpók megregulázza a Civakodó Cipőikreket.

(c) A Bátor Tintanyúl megijeszti a Lesbőltámadó Ruhaszárítókötelet vagy Madárvédő Golyókapkodó megvédi Gombóc Artúrt.

(d) Ha Madárvédő Golyókapkodó megvédi Gombóc Artúrt, akkor a Bátor Tintanyúl nem ijeszti meg a Lesbőltámadó Ruhaszárítókötelet.

(e) A Madárvédő Golyókapkodó akkor és csak akkor védi meg Gombóc Artúrt, ha Festéktüsszentő Hapci Benő beszínezi a Szomorú Szamovárt.

(f) A Radírpók megregulázza a Civakodó Cipőikreket vagy a Bátor Tintanyúl megijeszti a Lesbőltámadó Ruhaszárítókötelet és Festéktüsszentő Hapci Benő beszínezi a Szomorú Szamovárt.

(g) Ha Pom Pom hazakíséri Picúrt akkor a Radírpók megregulázza a Civakodó Cipőikreket, és a Bátor Tintanyúl megijeszti a Lesbőltámadó Ruhaszárítókötelet.

(h) Ha Pom Pom hazakíséri Picúrt, akkor a Radírpók megregulázza a Civakodó Cipőikreket és a Bátor Tintanyúl megijeszti a Lesbőltámadó Ruhaszárítókötelet.

(i) A Bátor Tintanyúl nem ijeszti meg a Lesbőltámadó Ruhaszárítókötelet és a Madárvédő Golyókapkodó nem védi meg Gombóc Artúrt

(j) Nem történik meg, hogy a Bátor Tintanyúl megijeszti Lesbőltámadó Ruhaszárítókötelet vagy Madárvédő Golyókapkodó megvédi Gombóc Artúrt.

# Bizonyítási módszerek

## Indirekt bizonyítások

**14. Feladat.** Igazoljuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.

**Megoldás.** Tegyük fel, hogy a bizonyítandó állítás hamis, vagyis $\sqrt{2}$ racionális szám. Ekkor léteznek olyan $p, q \in \mathbb{Z}^+$ számok melyekre $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ és $(p; q) = 1$. (Ez a $\sqrt{2}$ redukált tört alakja.) Ekkor négyzetre emelve és átrendezve a $2p^2 = q^2$ egyenlethez jutunk. Ekkor látható, hogy $q$ páros, így viszont a jobboldal (és akkor persze a baloldal is) osztható néggyel is. Ehhez viszont $p$-nek is párosnak kell lennie, ami ellentmond a $(p; q) = 1$ feltételnek.

**15.* Feladat.** Igazoljuk, hogy minden irracionális szám tizedestört alakjában legalább egy számjegy végtelen sokszor szerepel.

**Megoldás.** Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, azaz van olyan irracionális szám, amely tizedestört alakjában minden számjegy véges sokszor szerepel. Ekkor azonban a tekintett szám tizedestört alakja véges, vagyis a szám racionális. Ezzel ellentmondásra jutottunk, vagyis igaz a feladat állítása.

**16.* Feladat.** Igazoljuk, hogy egy irracionális szám tizedestört alakjában legalább két számjegy végtelen sokszor szerepel.

**Megoldás.** Az előzőhöz hasonló indirekt feltevéssel élve ellentmondásra juthatunk; ha ugyanis feltesszük, hogy nem igaz a feladat állítása, vagyis van olyan irracionális szám amelynek tizedestört alakjában legfeljebb egy számjegy szerepel végtelen sokszor, akkor azt kapjuk, hogy ezen szám tizedestört alakja vagy véges, vagy végtelen szakaszos (hiszen egy idő után csak az egy, végtelen sokszor előforduló számjegy tud ismétlődni), azaz a szám racionális, ami ellentmondás. Így a feladat állítása igaz.

**17. Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely (legalább két főt számláló) társaságban van két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van.

**Megoldás.** Tegyük fel, hogy ez nincs így. Ha a társaság $n$ főből áll, akkor a lehetséges ismerősszámok: $0, 1, \dots n-1$, és mivel nincs két ember, akinek ugyanannyi ismerőse van, ezért minden érték elő is fordul, mégpedig pontosan egyszer. Ez azonban azt jelenti, hogy van olyan a társaságban, aki senkit nem ismer (0 ismerőse van), és van olyan is, aki mindenkit ismer ($n-1$ ismerőse van), ez pedig ellentmondás.

**18.*Feladat.** Egy konvex négyszög oldali fölé Thalész-köröket írunk. Igazoljuk, hogy a négyszög minden belső pontja le van fedve legalább egy körrel.

**Megoldás.** Tegyük fel, hogy van olyan belső pontja a négyszögnek, amelyet egyetlen Thalész-kör sem fed le. Ekkor ebből a pontból minden oldal hegyesszög alatt látszik; négy hegyesszög összege viszont nem lehet 360°.

## Skatulya-elv

A következő születési feladatokban számoljunk 365 nappal, illetve 52 héttel egy évben.

**19. Feladat.** Legalább hányan vannak abban a társaságban, ahol a tagok ismerete nélkül biztosan kijelenthetjük, hogy van legalább

(a) 2 ember, aki a hét ugyanazon napján született;

(b) 3 ember, aki a hét ugyanazon napján született;

(c) 2 ember, aki ugyanazon hónapban született;

(d) 3 ember, aki ugyanazon hónapban született;

(e) 2 ember, aki az év ugyanazon napján született;

(f) 3 ember, aki az év ugyanazon napján született?

**Megoldás.**

(a) 8

(b) 15

(c) 13

(d) 25

(e) $365 + 1$

(f) $2 \cdot 365 + 1$

**20. Feladat.** Egy iskolának van 870 diákja, 92 tanára és 28 osztálya. Döntsük el, melyik igaz, illetve hamis az alábbi állítások közül.

(a) Van olyan osztály, amelyikbe legalább 30-an járnak.

(b) Van két diák, aki az év ugyanazon napján született.

(c) Van három diák, aki az év ugyanazon napján született.

(d) Van négy diák, aki az év ugyanazon napján született.

(e) Van nyolc tanár, aki ugyanabban a hónapban született.

(f) Van egy olyan diák, aki ugyanabban a hónapban született mint valamelyik tanár.

(g) Van olyan osztály, amelyikben legalább öt tanár tanít.

**Megoldás.**

(a) $28 \cdot 29 = 812 < 870$, igaz.

(b) Igaz.

(c) Igaz.

(d) Nem igaz, $3 \cdot 365 + 1 = 1096 > 870$.

(e) $7 \cdot 12 + 1 = 85 < 92$, igaz.

(f) Nem igaz, és nincs olyan létszám, aminél biztosan igaz lenne.

(g) $4 \cdot 28 + 1 = 113$ tanár esetén lenne igaz, így most nem igaz.

**21.* Feladat.** Igazoljuk, hogy 12 különböző kétjegyű szám közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy azok különbsége azonos számjegyekből áll.

**Megoldás.** Vizsgáljuk a 11-gyel vett osztási maradékokat. Mivel 12 számunk van, és csak 11 lehetséges 11-es maradék, a skatulya-elv értelmében lesz (legalább) két szám melyek 11-gyel vett osztási maradéka megegyezik, tehát különbségük osztható 11-gyel, így mivel a különbség kétjegyű, azonos jegyekből áll.

**22.* Feladat.** Legyen adott $n$ darab természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy mindig kiválasztható közülük néhány (legalább egy) úgy, hogy azok összege osztható $n$-nel.

**Megoldás.** Jelölje a számokat $a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n$. Ekkor, ha az $a_1;\ a_1+a_2;\ a_1+a_2+a_3;\ \ldots;\ a_1+a_2+\ldots+a_n$ számok közül van ami $n$-nel osztható, kész vagyunk. Ha nincs, akkor ezen $n$ szám mindegyike mindegyike $n$-nel osztva csak az $1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ maradékok valamelyikét adhatja. Így mivel $n$ szám és csak $n-1$ lehetséges maradék van, a skatulya-elv alapján lesz két szám, amely $n$-nel osztva ugyanazt a maradékot adja. Ezek különbsége megfelel a feladat feltételeinek, és osztható $n$-nel.

**23.* Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész számnak van olyan többszöröse, amely (a tízes számrendszerben felírva) csak a 0 és az 1 számjegyekből áll.

**Megoldás.** Jelölje $k$ a tetszőleges pozitív egész számot. Az

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{111\ldots1}_{k+1\text{ db}}$$

számok között biztos van kettő, amelyik ugyanazt a maradékot adja $k$-val osztva. Ezen két szám különbsége megfelelő.

**24.* Feladat.** Igazoljuk, hogy az 2019-nek van olyan többszöröse, amely (a tízes számrendszerben felírva) csak az 1 számjegyből áll.

**Megoldás.** A gondolatmenet eleje az előző feladatban látottakkal megegyezik. A különbség $1\ldots10\ldots0$ alakú, és mivel a $(10;2019)=1$, ezért a végéről a nullák elhagyhatók.

**25.* Feladat.** Egy gulyában két falu 65 tehene legel, vörösek, fehérek, feketék, tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincs öt különböző korú, azonos színű tehén, akkor van három azonos színű, egyidős tehén ugyanabból a faluból.

**Megoldás.** Biztos van 17 azonos színű tehén. Ezek között biztos van 5 azonos korú (legfeljebb négy kor van) tehén, s ezek között biztos van 3, amelyik ugyanabból a faluból való.

**26.* Feladat.** Egy tíztagú társaságban mindenki legalább hét másikat ismer. Bizonyítsuk be, hogy bármely három embernek van közös ismerőse.

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny haladók II. ford. (szki) 1986.)

**Megoldás.** Három ember írja fel egy listára az ismerőseit. Így legalább 21 név lesz a három listán, ami tíz ember közül kerül ki. Így biztos van olyan, aki mindhárom listán szerepel.

**27.* Feladat.** Igazoljuk, hogy bármely poliédernek van két, azonos oldalszámú lapja.

**Megoldás.** Feleltessünk meg a poliédernek egy gráfot. A gráf csúcsai legyenek a poliéder lapjai, és két csúcsot pontosan akkor kössön össze él a gráfban, ha a nekik megfelelő lapok (él)szomszédosak. A(z egyik) legnagyobb oldalszámú lap oldalszáma legyen $k$. Az ezzel szomszédos $k$ lap között biztos van két azonos oldalszámú, mert az oldalszám minden lap esetében 3 és $k$ között van.

**28.* Feladat.** Igazoljuk, hogy ha adott a koordinátasíkon 5 rácspont, akkor van közöttük kettő, melyeket összekötő szakasz a belsejében is tartalmaz rácspontot. (KöMaL P.53)

**Megoldás.** A végpontok koordinátáinak paritásvizsgálatával könnyedén igazolhatjuk az állítást. A végpont koordinátái paritásaik alapján a (páros; páros), (páros; páratlan), (páratlan; páros), (páratlan; páratlan) skatulyák valamelyikébe esnek. Mivel négy skatulya és öt pont van, lesz olyan skatulya, amelyikbe legalább két pont esik. Ezen két pontot összekötő szakasz felezőpontja is rácspont.

**29. Feladat.** Adott egy négyzet, melynek átlója 2 egység. Melyik az a legkisebb $d$ szám, amelyre igaz, hogy a négyzetben öt pontot felvéve mindig lesz kettő, melyek távolsága nem nagyobb mint $d$?

**Megoldás.** 1

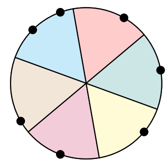
**30. Feladat.** Egy egységkocka minden pontját három szín valamelyikével színezzük. Igazoljuk, hogy mindig van két azonos színű pont, melyek távolsága legalább 1,4.

**Megoldás.** Mindig van (legalább) 3 azonos színű csúcs. Ezek között pedig biztosan van kettő, melyek nincsenek éllel összekötve. Ezek távolsága legalább $\sqrt{2} > 1{,}4$.

**31. Feladat.** Egy egységsugarú körvonalon hét pontot elhelyezve igazoljuk, hogy van két pont, melyek távolsága nem nagyobb mint 1.

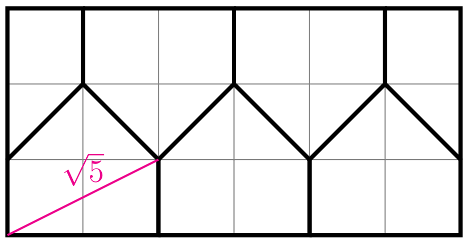
**Megoldás.**

Osszuk fel a körlapot (körvonalat) 6 egybevágó körcikkre. Ekkor van olyan körív, amelyre legalább két pont esik. Ezek távolsága legfeljebb 1.



**32.* Feladat.** Egy $3 \times 6$ cm-es téglalapban elhelyeztünk nyolc pontot. Mutassuk meg, hogy a pontok között található két olyan, amelyek távolsága nem nagyobb $\sqrt{5}$ cm-nél.

**Megoldás.** Tekintsük a téglalap következő lefedését.




Az egyes cellákon belül a lehető legnagyobb távolság nyilván valamely átló vagy oldal mentén elhelyezkedő két csúcsra fog fellépni. Ez Pithagorasz tétele miatt minden cellában éppen $\sqrt{5}$ cm. Viszont ha nyolc pontot szeretnék elhelyezni a téglalapban, akkor legalább egy cellába legalább két pont kerül, és ezek távolsága a fentiek alapján nem lehet nagyobb $\sqrt{5}$ cm-nél.

**33.* Feladat.** Száz kavicsot 50 kupacba rendezünk úgy, hogy egyik kupac sem üres. Igazoljuk, hogy a kupacok két csoportba tolhatók úgy, hogy a két csoportban 50-50 kavics van.

(KöMaL Gy.2304.)

**Megoldás.** Ha minden kupacban egyenlő számú kavics van, akkor készen vagyunk. Ha van két nem egyenlő számú kavicsot tartalmazó kupac $(a_1, a_2)$, akkor tekintsük az 51 darab $a_1, a_2, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_{50}$ számokat. Ezek között van kettő, melyek 50-es maradéka ugyanaz. Mivel mind legfeljebb 100, ez csak úgy lehet, ha különbségük éppen 50. Így a különbségben szereplő kupacok jók lesznek az egyik csoportnak.

**34. Feladat.** Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjére ráírjuk az $1, 2, 3$ számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

(Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 1995. 10. osztály 1. feladat)

**Megoldás.** A sorösszegek között a minimális az $n$, a legnagyobb pedig a $3n$. E két érték között csak $2n + 1$ van. Az $n$ darab sor és oszlop, valamint a két átló összesen $2n + 2$ darab összeget jelent, azaz a kért beírás nem megvalósítható.

## Logikai szita (Szita-formula)

**35. Feladat.** Az iskolában az első évfolyamról harmincan indultak háziversenyen matematikából. A versenyzőknek három feladatot kellett megoldaniuk. Az első feladatot tizenkilencen, a másodikat tizenöten, a harmadikat tizennyolcan oldották meg hibátlanul. Az első és második feladatot heten, az első és harmadik feladatot kilencen, a másodikat és harmadikat pedig tízen oldották meg jól. Mindhárom feladat megoldása három tanuló dolgozatában volt kifogástalan. Hány tanulónak nem sikerült egyetlen feladatra sem hibátlanul válaszolni?

(Forrás: Természet Világa)

**Megoldás.** Ha mindhárom feladatot három tanuló oldotta meg hibátlanul, akkor $7 - 3 = 4$ olyan tanuló volt, aki csak az első és második feladatra adott jó megoldást, csak az első és harmadik feladatra $9 - 3 = 6$ diák felelt jól, csak a második és harmadik feladat megoldása pedig $10 - 3 = 7$ tanulónak sikerült. Hasonlóan gondolkodva kapjuk, hogy csak az első feladatra $19 - 4 - 3 - 6 = 6$; csak a másodikra $15 - 4 - 3 - 7 = 1$; csak a harmadikra $18 - 6 - 3 - 7 = 2$ diák válaszolt kifogástalanul. Tehát $30 - 3 - 4 - 6 - 7 - 6 - 1 - 2 = 1$ olyan tanuló volt, akinek egy feladat megoldása sem sikerült.

**36. Feladat.** Egy osztály 30 tanulója közül a matematikát 12-en, a fizikát 14-en, a kémiát 13-an szeretik. 5 tanuló a matematikát és a fizikát, 4 a matematikát és a kémiát is, 7 a fizikát és a kémiát is szereti. Hárman mindhárom tárgyat szeretik. Hányan nem szeretik egyik tárgyat sem?

**Megoldás.** 4

**37. Feladat.** Egy osztály a tanév folyamán három kirándulást szervezett. Az elsőn az osztály 70%-a vett részt, a másodikon 80%-a, a harmadikon 90%-a. Így 12 tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult. Hányan vannak az osztályban?

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1985/1986 9. évfolyam 1. kategória 2. forduló)

**Megoldás.** 30

**38. Feladat.** Hány olyan kétjegyű szám van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal?

**Megoldás.** $90 - 45 - 30 + 15 = 30$

**39.* Feladat.** Egy konvex $n$-szög csúcsai közül hányféleképp választható ki 3, hogy azok páronként nemszomszédosak legyenek?

**Megoldás.** $\binom{n}{3} - n(n-2) + n$

**40. Feladat.** Hány olyan 8 jegyű pozitív egész szám van, amely csak az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

**Megoldás.** $3^8 - 3 \cdot 2^8 + 3 = 1932$

**41.* Feladat.** A 45 tagú Majmok Tudományos Akadémiája ülést tartott. Ezen az ülésen három kérdést tűztek napirendre, mely fölött szavazással óhajtottak dönteni. A kérdések a következők voltak.

1. Okosabb-e a majom, mint az ember?
2. Szebb-e a majom, mint az ember?
3. Igaz-e, hogy az ember a majom őse?

Hányan szavaztak mindhárom kérdésre nemmel, ha az alábbi megállapításokat közölték a sajtóban?

- A szavazás után kiderült, hogy az 1. és a 3. kérdésre egyaránt 23-23 igen szavazat érkezett, míg a 2. kérdésre csak 17.
- Az első kérdésre igennel válaszolók közül 13-an a másodikra, 12-en pedig a harmadik kérdésre feleltek nemmel.
- Igent mondott a 2. és a 3. kérdésre 6 „akadémikus", de közülük ketten az első kérdésre nemmel szavaztak.

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 1981/1982 9. évf. 1. kat. 1. ford. 4. fel.)

**Megoldás.** $45 - (23 + 17 + 23) + (10 + 11 + 6) - 4 = 5$

## Teljes indukció

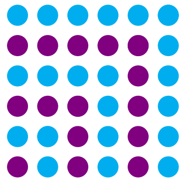
**42. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

**Megoldás.**

- Az állítás $n = 1$-re igaz, $1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$.
- (Indukciós feltevés.) Tegyük fel, hogy az állítás valamely $k \in \mathbb{N}^+$ értékre igaz, azaz
$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}.$$
- Az indukciós hipotézis segítségével kell igazolnunk, hogy az állítás $n = k + 1$-re is igaz, azaz fennáll, hogy
$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}.$$
Viszont
$$1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2},$$
azaz bizonyítottuk az állítást.

**43. Feladat.** Az alábbi ábra segítségével fogalmazzunk meg észrevételt az egymást követő páratlan pozitív egész számok összegére, és lássuk is azt be.



**Megoldás.** Az észrevételünk az, hogy, minden pozitív természetes számra

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Használjunk teljes indukciót.

- Az állítás $n = 1$-re igaz, $1 = 1^2$.
- Tegyük fel, hogy az állítás valamely $k \in \mathbb{N}^+$ értékre igaz, azaz

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

- Az indukciós hipotézis segítségével kell igazolnunk, hogy az állítás $n = k + 1$-re is igaz, azaz fennáll, hogy

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

  Azonban

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2,$$

  ami pontosan az igazolandó összefüggés.

**44. Feladat.** Fogalmazzunk meg észrevételt az $n$-edik köbszám egy lehetséges előállítására vonatkozóan az

$$\begin{aligned} 1 &= 1^3 \\ 2 + 4 + 2 &= 2^3 \\ 3 + 6 + 9 + 6 + 3 &= 3^3 \\ 4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4 &= 4^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

egyenletek kapcsán és lássuk is be azt.

**Megoldás.** Igazolandó lehet például, hogy minden pozitív egész $n$ esetén

$$n(1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1) = n^3.$$

Az állítás teljes indukcióval könnyen igazolható.

**45. Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív természetes számra fennálnak a következő összefüggések.

(a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(b) $(2+1) \cdot (2^2+1) \cdot \ldots \cdot (2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}} - 1$

(c) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2$

(d) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(e) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(f) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

(g) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$

(h) $\dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

(i) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

(j) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

**Megoldás.** Az állítások mindegyike egyszerűen igazolható teljes indukcióval.

**46. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha

$$a_1 = \sqrt{2}, \; a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad (n \geq 2),$$

akkor $1 < a_n < 2$ és a sorozat szigorú monoton nő.

**Megoldás.** Először a monotonitást igazoljuk, ezzel az alsó korlátra vonatkozó egyenlőtlenséget is belátjuk.

- Az állítás $n = 1$-re igaz; $a_1 = \sqrt{2} < a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.
- Tegyük fel, hogy az állítás valamely $k \in \mathbb{N}^+$ értékre igaz, azaz $a_k < a_{k+1}$, vagyis
$$\sqrt{2 + a_{k-1}} < \sqrt{2 + a_k}.$$
- Ennek segítségével kell igazolnunk, hogy az állítás $n = k + 1$-re is igaz, azaz fennáll, hogy $a_{k+1} < a_{k+2}$. Az indukciós feltevés következő ekvivalens átalakításaival a bizonyítandó állítást kapjuk.
$$\begin{array}{rcl} a_k & < & a_{k+1} \\ \sqrt{2 + a_{k-1}} & < & \sqrt{2 + a_k} \\ 2 + \sqrt{2 + a_{k-1}} & < & 2 + \sqrt{2 + a_k} \\ \sqrt{2 + \sqrt{2 + a_{k-1}}} & < & \sqrt{2 + \sqrt{2 + a_k}} \\ a_{k+1} & < & a_{k+2} \end{array}$$
Ezzel a monotonitásra vonatkozó állítást beláttuk, és mivel $1 < a_1 = \sqrt{2}$, az alsó korlátra vonatkozót is.

A felső korlátra vonatkozó állítást szintén teljes indukcióval igazoljuk.

- Az állítás $n = 1$-re igaz; $a_1 = \sqrt{2} < 2$.
- Tegyük fel, hogy az állítás valamely $k \in \mathbb{N}^+$ értékre igaz, azaz $a_k < 2$.
- Ennek segítségével kell igazolnunk, hogy az állítás $n = k + 1$-re is igaz, azaz fennáll, hogy $a_{k+1} < 2$. Az indukciós feltevés következő ekvivalens átalakításaival a bizonyítandó állítást kapjuk.

$$\begin{aligned} a_k &< 2 \\ 2 + a_k &< 4 \\ \sqrt{2 + a_k} &< \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

**47. Feladat.** Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ számokra teljesülnek az alábbi összefüggések.

(a) $6 \mid n^3 - n$

(b) $6 \mid (n^2 + 5)n$

(c) $5 \mid 2^{4n+1} + 3$

(d) $4 \mid 7^n + 3^{n+1}$

(e) $9 \mid 7^n + 3n - 1$

**Megoldás.** Csak az első állítást látjuk be, a többi bizonyítása hasonló.

(a)
- Az állítás $n = 0$-ra igaz, $6 \mid 0^3 - 0 = 0$.
- Tegyük fel, hogy az állítás valamely $k \in \mathbb{N}^+$ értékre igaz, azaz $6|k^3 - k$.
- Ennek segítségével kell igazolnunk, hogy az állítás $n = k + 1$-re is igaz, azaz fennáll, hogy
$$6 \mid (k + 1)^3 - (k + 1).$$
Viszont
$$(k + 1)^3 - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 2k = k^3 - k + 3k^2 + 3k = (k^3 - k) + 3k(k + 1).$$
Itt az első zárójeles tag az indukciós feltevés miatt osztható 6-tal, a második pedig 3-nak és két egymást követő egész számnak a szorzata. Ez utóbbi biztos páros, így a szorzat itt is osztható 6-tal. Két 6-tal osztható tag összege pedig szintén osztható 6-tal, ezzel az állítást beláttuk.

**48.* Feladat.** Bizonyítsa be, hogy $9^n - 8n - 1$ osztható 64-gyel, ahol $n$ nemnegatív egész szám.
(Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 2004. 11. osztály 1. feladat)

**Megoldás.** A bizonyítást a teljes (matematikai) indukció módszerével végezzük.

- Az állítás $n = 1$-re igaz.
- Tegyük fel, hogy igaz $n = k$-ra, vagyis $9^k - 8k - 1$ osztható 64-gyel.
- Bebizonyítjuk, hogy ebben az esetben igaz $n = k + 1$-re is, azaz $9^{k+1} - 8\,(k + 1) - 1$ osztható 64-gyel.
$$9^{k+1} - 8\,(k + 1) - 1 = 9 \cdot 9^k - 8k - 8 - 1 = 9\left(9^k - 8k - 1\right) + 64k$$
Az első összeadandó osztható 64-gyel az indukciós feltételezés alapján, a második 64 többszöröse. Tehát, az összeg is osztható 64-gyel, azaz az állítás bebizonyíttatott.

**49. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha $n$ egy 1-nél nagyobb természetes szám, akkor

(a) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}$, (b) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

**Megoldás.**

(a) Teljes indukcióval bizonyítunk.

- Az állítás $n=2$-re igaz, hiszen
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}>\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$
- Tegyük fel, hogy az állítás valamely $k\in\mathbb{N}^+, k\geq 2$ értékre igaz, azaz
$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}>\frac{1}{2}-\frac{1}{k}.$$
- Ennek segítségével kell igazolnunk, hogy az állítás $n=k+1$-re is igaz, azaz fennáll, hogy
$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}.$$
Ekkor
$$\begin{aligned}\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2} &=\\ \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2} &>\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2} &> \frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$
Itt az első becslésnél felhasználtuk az indukciós feltevést, a második pedig azért állítható, mert
$$-\frac{1}{k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}>0.$$

(b) A második egyenlőtlenség belátható indukció nélkül is, egyszerű becsléssel. A bal oldali összegben minden tagot cseréljünk ki a legkisebbre, azaz
$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

**50. Feladat.** Igazoljuk, hogy minden pozitív természetes számra fennállnak a következő egyenlőtlenségek.

(a) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}>\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ (b) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}>\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

**Megoldás.** Mindkét állítás egyszerűen belátható teljes indukcióval.

**51. Feladat.** Azt állítjuk, hogy minden ló ugyanolyan színű, és ezt be is látjuk. Egy egyetlen lóból álló ménesre (halmazra) igaz, hogy abban minden ló azonos színű. Tegyük fel, hogy az állítás igaz tetszőleges, legfeljebb $n$ lóból álló ménesre, és tekintsünk egy $n+1$ lóból álló ménest. Ha ebből kiveszünk egy lovat, egy $n$ lóból álló ménest kapunk, amelyben a feltételezésnek megfelelően már minden ló ugyanolyan színű. Már csak azt kell megmutatni, hogy a kivett ló is ugyanilyen színű. Ezt a következőképpen tesszük: tegyük vissza a kiválasztott lovat a többi közé, vegyünk ki egy másikat, és újra alkalmazzuk az indukciós feltevést; az így kapott ménesben is ugyanolyan színű minden ló, beleértve az eredetileg kiválasztott lovat is, amelynek tehát ugyanolyan színűnek kell lennie, mint az összes többinek. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges $n+1$ lóból álló ménesben is minden ló ugyanolyan színű. A teljes indukció elvének megfelelően ezzel beláttuk az eredeti állításunkat: minden ló ugyanolyan színű. Hol a hiba a gondolatmenetben?

(Ló-paradoxon Pólya Györgytől (1887-1985).)

**Megoldás.** Van egy ki nem mondott feltételezés, mégpedig az, hogy két különböző, $n$-tagú lócsoportnak van közös eleme. Ez $n = 1$-re nem igaz, tehát annak igazolása, hogy az elsőre kiválasztott ló is ugyanolyan színű, hibás.

## Invariáns tulajdonságok

**52. Feladat.** Egy táblára felírtuk az $1, 2, \ldots 10$ számokat. Egy-egy alkalommal kettőt letörlünk, és helyettük a különbségüket írjuk. Előfordulhat-e, hogy az utolsó megmaradt szám a 0?

**Megoldás.** Nem, az összeg paritása nem változik, és az kezdetben páratlan.

**53. Feladat.** Egy táblán 2019 darab nulla és 2019 darab egyes számjegy van. Egy-egy alkalommal kettőt letörlünk. Ha ezek azonosak voltak akkor egy egyest, ha különbözők, akkor egy nullát írunk vissza. Milyen szám marad utoljára?

**Megoldás.** A nullák számának paritása nem változik, ezért nulla marad a legvégén.

**54. Feladat.** Egy papírlapunk van, amelyet egy lépésben 6, vagy 11 részre téphetünk, majd a kapott darabok közül akárhánnyal akárhányszor ugyanígy járhatunk el. Elérhető-e, hogy a végén 2019 papírlapot kapjunk?

**Megoldás.** Nem. A papírlapok száma mindig $5k + 1$ alakú.

**55. Feladat.** Egy kocka csúcsaiba számokat írunk, az egyikbe egyest, a többibe nullát. Egy alkalommal egy él két végpontjában lévő számokat eggyel-eggyel megnöveljük. Elérhető-e így, hogy minden csúcsban azonos szám álljon?

**Megoldás.** Nem. A számok összegének paritása nem változik.

**56.* Feladat.** Két kupacban gyufák vannak. Egy alkalommal az egyik kupacból valamennyit leveszünk, és a másikhoz kétszer annyit hozzáteszünk. Elérhető-e, hogy néhány lépés után mindkét kupacban ugyanannyi gyufa legyen, ha kezdetben a két kupacban 2019 és 2018 szál gyufa volt?

**Megoldás.** Tekintsük a két kupacban lévő gyufák számának különbségét. Ennek 3-mal vett osztási maradéka nem változik, s mivel ez jelenleg egy, nem lehet a két kupac egyenlő, mert akkor ez a különbség nulla lenne.

**57. Feladat.** Egy kör alakú asztal körül 10 törpe áll. Minden alkalommal az egyik törpe egyet jobbra, egy másik egyet balra lép. Elérhetik-e hogy ugyanazon a helyen álljanak?

**Megoldás.** Nem. Sakktáblaszerűen színezve, pl. a fehéren lévő törpék számának paritása nem változik; mivel most öt így nem lehet nulla.

## Egyéb módszerek, trükkök

### A kétoldali összeszámlálás módszere

**58.* Feladat.** Mutassuk meg, hogy szoros kapcsolat van az

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{10}{9}$$

összefüggés, és a következő Kalmár Lászlótól származó feladat között. „Régen árultak olyan csokoládét, amely papírjában egy szelvény volt, s tíz szelvényért egy újabb tábla csokoládét lehetett kapni. Valójában hány tábla elfogyasztható csokoládét ért 1 tábla?”

**Megoldás.**

- Minden tábla csokoládéban van egy szelvény, amely a szabályok értelmében egy tized csokoládét ér. De ebben a tized csokoládéban is rejlik egy tized cédula, amely szintén ér valamennyi csokoládét, stb. Így egy tábla csokoládé valójában

  $$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots$$

  csokoládét ér.
- Nézzük most kicsit más szemmel a csokoládénkat. Pisti 9 cédula birtokában bemegy a boltba, és megkéri az eladónőt, akivel jóban van, hiszen gyakran vásárol nála csokoládét, hogy egy pillanatra adjon oda neki a polcról egy csokit, s ő kisvártatva ki fogja azt fizetni. Pisti, amint megkapta a csokit, kibontja azt, s kiveszi belőle a fizetéshez hiányzó, tizedik szelvényt, majd a tíz szelvénnyel ki is fizeti a csokoládéját. Így 9 csoki áráért 10-et kapott, vagyis egy csoki valójában $\frac{10}{9}$ csokoládét ér.

Ezzel beláttuk, hogy

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{10}{9}.$$

**59. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a következő feladat kétféle megoldásával. „Képzeljünk el egy táblát, amelyik $n - k + 1$ lépés hosszú ($0 \leq k \leq n$) és $k + 1$ lépés széles. Jelenleg a bal alsó sarokban egy egér ül, a tábla jobb felső sarkában egy darab sajt van. Egerünk csak felfelé vagy jobbra léphet, mindig szomszédos mezőre. Hányféleképp juthat el egerünk a sajthoz?”

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | S |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| E | | | | | | |

**Megoldás.** Először nézzük meg, hogy hány lépésre van szüksége egerünknek. Mivel az első sor első mezőjében van jelenleg, még $(n - k)$-t kell jobbra, és $k$ mezőt kell felfelé lépnie. Okos egerünk kétféle módon is gondolkodhat.

- Mivel összesen $n - k$ jobbra, és $k$ felfele lépésre van szüksége, készít magának $n$ számú kártyát, s ezek közül $(n - k)$-ra $\rightarrow$ jelet, $k$-ra pedig $\uparrow$ jelet rajzol. Ahányféleképp ezeket a nyilakat sorba tudja tenni, annyiféleképp tud a sajthoz is eljutni. Ezen sorbarendezések száma pedig éppen
$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$
hiszen $n$ számú kártyája van, amelyekből $k$ illetve $n - k$ egyforma.
- Egerünk ezt végiggondolva túlságosan fárasztónak érzi, ezért így gondolkodik. Ha lépéseit egytől $n$-ig megszámozza, és kiválasztja azokat, amelyeket fölfelé kíván megtenni, egyértelmű, hogy a ki nem választott lépéseket jobbra kell megtennie. Így annyi út létezik a sajthoz, ahányféleképp ki tudok választani az $1, 2, \ldots, n$ számok közül $k$-t, ezen kiválasztások száma pedig épen $n$ alatt $k$.

Így beláttuk, hogy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

**60. Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

**Megoldás.** Képzeljük el, hogy egy $n+1$ tagú osztályban $k$ tagú küldöttséget kell választanunk. Ezt persze

$$\binom{n+1}{k}$$

módon tehetjük meg. Ha külön figyelemmel kísérjük az osztály egyik tanulójának, mondjuk Ábel sorsát, akkor ugyanerre a problémára egy újabb megoldást is találhatunk. Ábel vagy belekerül a küldöttségbe, vagy nem. Ha igen, akkor ő már ugye tag, tehát az osztály maradék $n$ tagjából kell még $k-1$ küldöttet választani, ezt pedig

$$\binom{n}{k-1}$$

módon tehetjük meg. Ha pedig Ábel nem tagja a küldöttségnek, akkor mind a $k$ küldöttet az osztály többi, $n$ számú tagja közül kell megválasztani, erre pedig

$$\binom{n}{k}$$

lehetőségünk van. Így küldötteket összesen, egy más nézőpont szerint

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

módon választhatunk.

**61.* Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$1+2+\ldots+n=\binom{n+1}{2}.$$

**Megoldás.** A jobb oldalon egy $n+1$ elemű halmaz kételemű részhalmazainak a száma áll. Elég tehát belátni, hogy a bal oldalon is ez szerepel. Jelölje a halmaz elemeit $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Soroljuk fel az összes kételemű részhalmazt a következő módon: Először vegyük azokat, amelyekben $a_1$ szerepel: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, ..., $\{a_1, a_n\}$, $\{a_1, a_{n+1}\}$. Ezek száma $n$. Most vegyük azokat, amelyekben a legkisebb indexű elem $a_2$. Ezek: $\{a_2, a_3\}$, $\{a_2, a_4\}$, ..., $\{a_2, a_{n+1}\}$. Ezen részhalmazok szám éppen $n-1$. Ezt folytatva, azon részhalmazok, melyekben szereplő legkisebb indexű elem $a_k$, pontosan $\{a_k, a_{k+1}\}$, $\{a_k, a_{k+2}\}$, ..., $\{a_k, a_{n+1}\}$; számuk pedig $n+1-k$. Így tulajdonképpen az összes kételemű részhalmazt felsoroltuk, és az egyes csoportokban lévő halmazok száma rendre $n, n-1, \ldots, 2, 1$.

$$\begin{array}{cccccc||c}
\{a_1,a_2\} & \{a_1,a_3\} & \{a_1,a_4\} & \{a_1,a_5\} & \ldots & \{a_1,a_{n+1}\} & n \\
\{a_2,a_3\} & \{a_2,a_4\} & \{a_2,a_5\} & \ldots & \{a_2,a_{n+1}\} & & n-1 \\
\{a_3,a_4\} & \{a_3,a_5\} & \ldots & \{a_3,a_{n+1}\} & & & n-2 \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\{a_{n-1},a_n\} & \{a_{n-1},a_{n+1}\} & & & & & 2 \\
\{a_n,a_{n+1}\} & & & & & & 1
\end{array}$$

**62.* Feladat.** Igazoljuk, hogy

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

**Megoldás.** Láthatjuk, hogy az egyenlőség bal oldalán egy $n$ elemű halmaz összes részhalmazainak a száma áll. Legyenek a halmaz elemei $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Minden részhalmazra igaz, hogy $a_1$ vagy eleme, vagy nem. Így az $a_1$ elem kapcsán kétféleképp dönthetünk, vagy beletesszük az adott részhalmazba, vagy nem. Bárhogyan is döntünk, ezen döntésünktől függetlenül az $a_2$ elem esetében ismét döntenünk kell, hogy beletesszük-e a részhalmazba. Így az első két elem esetén már $2 \cdot 2 = 4$ lehetséges választás van. Az eljárás tovább folytatható, és akárhogyan is döntöttünk az első $k$ elem esetén, a következő elem figyelembe vételével a lehetőségek száma megkétszereződik. Így, az $n$-edik elemhez érve $2^n$ különböző részhalmazunk lesz.

**63.* Feladat.** Bizonyítsuk be az alábbi összefüggést.

$$2^n \cdot \binom{n}{0} + 2^{n-1}\binom{n}{1} + 2^{n-2}\binom{n}{2} + \ldots + 2\binom{n}{n-1} + 1\binom{n}{n} = 3^n.$$

**Megoldás.** Képzeljük el, hogy Seholsincs szigeten a lakóknak háromfélék lehetnek: igazmondó, hazugmondó és normális; ám első ránézésre senkiről sem dönthető el, melyik kasztba tartozik. Amikor $n$ szigetlakóval találkozunk, külön-külön, egymástól függetlenül, mindegyikük háromféle lehet, így a korábbiak alapján az $n$ lakosnak együtt összesen $3^n$ illetősége lehet.

Az is igaz, hogy az $n$ lakos között vagy nincs igazmondó, vagy pontosan egy van, vagy pontosan kettő, és így tovább ... vagy pontosan $n$ számú igazmondó van. Számoljuk tehát most össze a szigetlakók lehetséges illetőségeinek számát aszerint, hogy hány igazmondó van közöttük. Ha nincs igazmondó, akkor mind az $n$ ember vagy hazugmondó, vagy normális, így egymástól függetlenül kétfélék lehetnek, vagyis a szembejövő lakosok lehetséges illetőségeinek száma $2^n$, ami persze éppen

$$2^n \cdot \binom{n}{0}.$$

Ha pontosan egy igazmondó van a szembejövő szigetlakók között, akkor ő az $n$ ember bármelyike lehet, de akármelyik is ő, a többi $n-1$ ember illetősége ettől függetlenül kétféle lehet, így lehetőségeink száma most:

$$\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1}.$$

És így tovább, általában ha pontosan $k$ igazmondó van a szembejövő lakosok között, akkor a lehetőségek száma

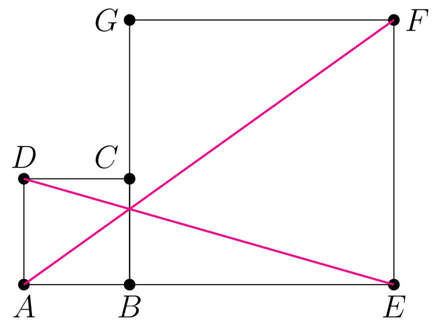
$$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}.$$

Végül, ha mindenki igazmondó, akkor csak egy lehetőségünk van (éppen az, hogy mindenki igazmondó), de ez éppen

$$1 \cdot \binom{n}{n}.$$

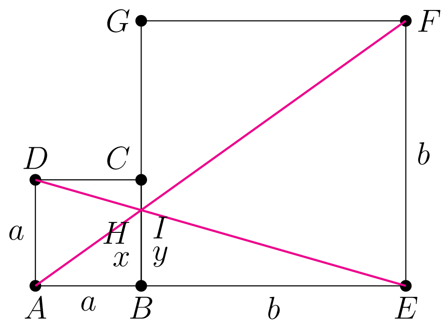
Ezeket az eseteket összegezve, épp a bizonyítandó egyenlőség másik oldalát kapjuk.

**64.* Feladat.** Az ábrán látható $ABCD$ és $BEFG$ négyzetek $AE$ és $DF$ csúcsait összekötöttük. Igazoljuk, hogy az összekötő szakaszok a $BG$ oldalon metszik egymást.




**Megoldás.**

Jelölje az $AF$ és $GB$ szakaszok metszéspontját $H$, és legyen a $DE$ és $GB$ szakaszok metszéspontja $I$. Legyen továbbá $HB = x$ és $IB = y$. Be kell látnunk, hogy $H = I$, ami ekvivalens azzal, hogy $x = y$. Legyen az $ABCD$ négyzet oldalhossza $a$, a $BEFG$ négyzeté $b$.




Az $AHB\triangle$ és $AFE\triangle$ hasonló, mert oldalaik páronként párhuzamosak. A hasonlóságból következően a megfelelő oldalak hosszának aránya megegyezik, azaz

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{a+b}.$$

Hasonlóképpen $EIB\triangle \sim EDA\triangle$, így

$$\frac{y}{b} = \frac{a}{a+b}.$$

Ekkor az egyenletek összevetéséből kapjuk, hogy $x = y$, vagyis $H = I$, azaz a két szakasza valóban a $BG$ szakaszon metszi egymást.

### A legrosszabb eset módszere

**65. Feladat.** Egy dobozban háromféle golyó van 14 piros, 17 kék és 21 zöld. Legkevesebb hány golyót kell visszatevés nélkül kihúzni, hogy a kihúzott golyók között legyen

(a) legalább kettő azonos színű,

(b) mindhárom színből legalább egy,

(c) legalább két zöld,

(d) három piros?

**Megoldás.**

(a) 4

(b) 39

(c) 33

(d) 41

**66. Feladat.** Egy dobozban háromféle golyó van 4 piros, 7 kék és 11 zöld. Véletlenszerűen kivettünk 5 golyót. A következők közül melyek igazak biztosan a dobozban maradt golyókra?

(a) Nincs köztük piros.
(b) Mindhárom színből maradt.
(c) Maradt kék.
(d) Legalább kétféle színű maradt.

**Megoldás.**

(a) nem igaz
(b) nem igaz
(c) igaz
(d) igaz

**67. Feladat.** Egy ládában 10 piros, 20 sárga, 30 kék és 40 barna golyó van. Legfeljebb hányat lehet közülük bekötött szemmel kihúzni úgy, hogy a ládában biztosan maradjon

(a) 2 különböző színű;
(b) 2 egyforma színű;
(c) több sárga, mint piros?

(Bonifert Domonkos Nemzetközi Matematikaverseny, 2018, 8. osztály, döntő)

**Megoldás.**

(a) Ha azt akarjuk, hogy két különböző színű maradjon a ládában, akkor az a legrosszabb eset, ha mind a 40 barna golyó benne marad. Viszont a 41. bent maradó golyó biztosan más színű lesz. Ezért 41-nek maradnia kell, vagyis 59-et lehet kihúzni.
(b) Ha azt akarjuk, hogy két egyforma színű maradjon a ládában, akkor az a legrosszabb eset, ha 4 páronként különböző színű golyó marad benne. Viszont az 5. bent maradó golyó színe biztosan meg fog egyezni valamely másik golyóval a 4 közül. Ezért 5-nek maradnia kell, vagyis 95-öt lehet kihúzni.
(c) Ha azt akarjuk, hogy több sárga golyó maradjon a ládában, mint piros, akkor az a legrosszabb eset, ha csak sárga golyókat húzunk ki, így 9 darabot lehet kihúzni.

**68. Feladat.** Egy dobozban van néhány papírcetli. Egy darabon az 1 áll, kettőn a 2, és így tovább, 100 darabonon az áll, hogy 100. Legalább hány cetlit kell kihúzni ahhoz (csukott szemmel, visszatevés nélkül), hogy legyen tíz cetlink, amire ugyanaz van írva?

**Megoldás.** $1 + 2 + \ldots + 8 + 9 \cdot 92 = 774$

**69. Feladat.** Egy dobozban többféle golyó van, mindegyikből ugyanannyi, összesen 30. Hányféle golyó van a dobozban, ha ahhoz, hogy biztosan legyen három egyforma a kezünkben, legalább 11-et kell elővenni?

**Megoldás.** 5

**70. Feladat.** Egy dobozban többféle golyó van, mindegyikből ugyanannyi, összesen 30. Hányféle golyó van a dobozban, ha ahhoz, hogy biztosan legyen három különböző a kezünkben, legalább 11-et kell elővenni?

**Megoldás.** 6

**71.* Feladat.** Egy zsákban fehér, piros és kék golyók vannak, összesen 100. Kékből éppen kétszer annyi mint fehérből. Mennyi van az egyes színekből, ha ahhoz, hogy biztosan legyen nálunk kék, 47 golyót kell kihúznunk?

**Megoldás.** Fehérből 27, pirosból 19, kékből 54 van.

### „A bölcs olykor a végén kezdi" módszer

**72. Feladat.** Három vándor érkezett a fogadóba és egy tál gombócot rendelt. Mire a vendéglős megfőzte a vacsorát, a vándorok az asztalnál a fáradtságtól elszunnyadtak. A vendéglős eléjük tolta a gombócos tálat, és elment. Felébredt az egyik vándor, megszámolta a gombócokat, megette azok egyharmadát, majd ismét elaludt. Ezután felébredt a második, ő is elfogyasztotta a tálon maradt mennyiség egyharmadát, majd tovább aludt. Később felébredt a harmadik, megette a maradék harmadrészét, mire a tálon 8 gombóc maradt. Hány gombócot főzött a vendéglős? (Természet Világa)

**Megoldás.** Képzeljük magunk elé a végállapotot. A harmadik vándor 8 gombócot hagyott a tálon. Miért? Ez azért történhetett így, mert 12-t talált és ebből megevett 4-et. Azaz a második vándor 12 gombócot hagyott, úgy gondolva, hogy ez az összes gombóc kétharmad része. Vagyis ő 18 gombócot talált a tálon, ebből evett meg 6-ot. Ugyanígy gondolkodott az első is, 18-at hagyott meg a másik kettőnek, miután 9-et megevett. Tehát a vendéglős 27 gombócot készített.

**73.* Feladat.** Hogyan lehet egy folyóról pontosan 6 liter vizet felhozni, ha csak egy 4 és egy 9 literes edényünk van? (Természet Világa)

**Megoldás.** Induljunk a végső helyzetből, azaz a nagyobbik edényben 6 liter víznek kell lennie, a kisebbik pedig üres. Ehhez úgy juthatunk, ha a teli nagyobbik edényből pontosan három liter vizet tudunk a kisebbe önteni. Ehhez azonban a 4 literes edényben egy liter víznek kell állnia. Ezt viszont úgy érhetjük el, hogy a 9 literes edényt teletöltjük vízzel, majd ebből kétszer egymás után színültig töltjük a kisebbet, és belőle mindkét alkalommal visszaöntjük a vizet a folyóba. Így a nagyobbik edényben 1 liter víz marad, amit átönthetünk a kisebbe.

**74. Feladat.** Négy játékos megegyezett, hogy a vesztes minden játszma után megkétszerezi a többi játékos pénzét. Összesen 4 játékot játszottak. Mindenki egyszer vesztett, a játék befejeztével mindegyik játékos megszámolta a pénzét, és úgy találta, hogy mindegyiküknek 16 forintja van. Mennyi pénze volt a játékosoknak a játék kezdetekor?

**Megoldás.** A játékosoknak kezdetben 33; 17; 9; 5 forintja volt abban a sorrendben, amelyben veszítettek.

**75.* Feladat.** Egy asztalon 27 gyufaszál hever. Az első játékos tetszése szerint elvehet ebből 1, 2 vagy 3 gyufaszálat, majd a 2. a maradékból úgyszintén 1-et, 2-t vagy 3-at választhat. Ezután ismét az első vesz, és így tovább, felváltva. Az nyer, aki utolsóként vesz gyufaszálat a halomból. A kezdő játékos tudja-e biztosítani, hogy nyerjen? (Természet Világa)

**Megoldás.** Aki 4 gyufát hagy az asztalon, az már nyer (1, 2 vagy 3 gyufaszál marad neki, attól függően, hogy a másik 3, 2 vagy 1 gyufát vesz el ). Előzőleg tehát 8, korábban pedig rendre 12, 16, 20, 24 szálat kell meghagyni. Ezt a kezdő mindig megteheti.

# Harmadik zárthelyi dolgozat

A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos! Válaszait minden esetben részletesen indokolja, indoklás nélküli megoldásra nem jár pont. A feladatok megoldásához 100 perc áll rendelkezésre.

# Matematikai alapismeretek — 3. zh

Név: ______________________________ A csoport

| Feladat: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max pont: | 16 | 16 | 16 | 20 | 20 | 12 | 100 |
| Elért pont: | | | | | | | |

1. Három szám mértani sorozatot alkot, összegük 26. Ha az elsőhöz 1-et, a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, a kapott három szám számtani sorozatot alkot. Melyik ez a három szám? [16]

2. Egy $a_n$ mértani sorozat első 8 tagjának összege 250. Tudjuk továbbá, hogy [16]

$$(a_2 + a_4 + a_6 + a_8) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 150.$$

   Határozzuk meg ezt a sorozatot.

3. Számítsuk ki az $e$ és $f$ egyenesek metszéspontjának koordinátáit, valamint a két egyenes hajlásszögét, ha az $e$ egyenes párhuzamos az $x - 3y + 5 = 0$ egyenessel és áthalad a $P(-1; 0)$ ponton, továbbá az $f$ egyenes áthalad a $Q(3; 7)$ ponton és az $x - y - 1 = 0$ egyenletű egyenesre merőleges. [16]

4. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$ egyenletű kör $P(1; 3)$ ponton áthaladó legrövidebb húrja egyenesének egyenletét. [20]

5. Legyen $\frac{m}{n}$ $(m, n, \in \mathbb{N}^+)$ annak a valószínűsége, hogy a $10^{99}$ számnak egy véletlenszerűen választott osztója többszöröse a $10^{88}$ számnak. Mennyi $m + n$ minimális értéke? [20]

6. Felírjuk 8 cédulára az $1, 2, 3, \ldots, 8$ számokat. Hányféleképp lehet a cédulákat sorba rendezni úgy, hogy [12]

   (a) azonos paritásúak ne kerüljenek egymás mellé,

   (b) az első négy helyen csak páros szám álljon?

# Matematikai alapismeretek — 3. zh

Név: __________________________________ A csoport

| Feladat: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Összesen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max pont: | 16 | 16 | 16 | 20 | 20 | 12 | 100 |
| Elért pont: | | | | | | | |

1. Három szám mértani sorozatot alkot, összegük 26. Ha az elsőhöz 1-et, a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, a kapott három szám számtani sorozatot alkot. Melyik ez a három szám? [16]

**Megoldás.**

- Az $a_n$ mértani sorozatban $a_1 + a_2 + a_3 = 26$. 1 pont
- Ekkor $a_1 + 1$; $a_2 + 6$; $a_3 + 3$ számtani sorozatot alkot. 1 pont
- Ezen tagok összege $26 + 1 + 6 + 3 = 36$. 1 pont
- Innen a középső tag $\frac{36}{3} = 12$, 2 pont
- vagyis $a_2 = 6$. 1 pont
- Ekkor a mértani sorozat hányadosát $q$-val jelölve $\frac{6}{q} + 6 + 6q = 26$. 2 pont
- A megfelelő másodfokú egyenlet megoldásai $q_1 = 3$ és $q_2 = \frac{1}{3}$. 2 pont
- Ha $q = 3$; akkor $a_1 = 2$; $a_2 = 6$; $a_3 = 18$. 2 pont
- Ekkor a módosított tagok: 3; 12; 21 egy $d = 9$ differenciájú számtani sorozatot alkotnak. 1 pont
- Ha $q = \frac{1}{3}$; akkor $a_1 = 18$; $a_2 = 6$; $a_3 = 2$. 2 pont
- Ekkor a módosított tagok: 19; 12; 5 egy $d = -7$ differenciájú számtani sorozatot alkotnak. 1 pont

2. Egy $a_n$ mértani sorozat első 8 tagjának összege 250. Tudjuk továbbá, hogy [16]

$$(a_2 + a_4 + a_6 + a_8) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 150.$$

Határozzuk meg ezt a sorozatot.

**Megoldás.**

- Jelöljük a páratlan indexű tagok összegét $A$-val, azaz $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = A$. 1 pont
- Ekkor a páros indexű tagok összege $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = q \cdot A$, ahol $q$ a mértani sorozat hányadosa. 2 pont
- Ekkor $A + qA = 250$, illetve $qA - A = 150$. 3 pont

- Innen $A = 50, q = 4$. 3 pont
- A $250 = a_1 \cdot \dfrac{4^8 - 1}{4 - 1}$ összefüggésből 3 pont
- $a_1 = \dfrac{750}{65535}$ adódik. 3 pont
- Ezzel a sorozatot meghatároztuk. 1 pont

3. Számítsuk ki az $e$ és $f$ egyenesek metszéspontjának koordinátáit, valamint a két egyenes hajlásszögét, ha az $e$ egyenes párhuzamos az $x - 3y + 5 = 0$ egyenessel és áthalad a $P(-1; 0)$ ponton, továbbá az $f$ egyenes áthalad a $Q(3; 7)$ ponton és az $x - y - 1 = 0$ egyenletű egyenesre merőleges. [16]

**Megoldás.**

- Az $e$ egyenes egyenlete $x - 3y = -1$, 2 pont
- az $f$ egyenes egyenlete pedig $x + y = 10$. 2 pont
- Az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja a két egyenes metszéspontjának koordinátáit, 1 pont
- ami $M\left(\dfrac{29}{4}; \dfrac{11}{4}\right)$. 2 pont
- Az $e$ egyenes egyik irányvektora $\overrightarrow{v_e} = (3; 1)$, 1 pont
- az $f$ egyenes egyik irányvektora $\overrightarrow{v_f} = (1; -1)$. 1 pont
- Ekkor a két vektor skaláris szorzatának kétféle módon történő felírásából 2 pont
- következik
$$3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = \sqrt{3^2 + 1^1} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \cos\alpha,$$
ahol $\alpha$ a két egyenes hajlásszöge. 3 pont
- Innen $\alpha \approx 63{,}43°$. 2 pont

4. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$ egyenletű kör $P(1; 3)$ ponton áthaladó legrövidebb húrja egyenesének egyenletét. [20]

**Megoldás.**

- A kör egyenletét mindkét változójában teljes négyzetté kiegészítve adódik, 1 pont
- hogy $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$. 2 pont
- A kör középpontja $K(-1; 1)$, 1 pont
- sugara $r = 4$. 1 pont
- A $P$ és $K$ pontok távolsága $|PK| = \sqrt{8}$, 2 pont
- mivel $PK < r$, ezért $P$ a kör belső pontja. 1 pont
- A $P$-n átmenő legrövidebb húr a $PK$ egyenesre merőleges. 1 pont

# Matematikai alapismeretek — 3. zh

- Ennek egy normálvektora $\overrightarrow{n_e} = \overrightarrow{KP} = (2;2)$. 2 pont
- A $P$ ponton átmenő $\overrightarrow{KP}$ normálvektorú egyenes egyenlete $e\colon x + y = 4$. 2 pont
- Ennek a körrel vett metszéspontjai $A(-1;5)$ és $B(3;1)$. 5 pont
- Ezen pontok távolsága, a húr hossza $|AB| = \sqrt{32}$. 2 pont

5. Legyen $\frac{m}{n}$ $(m, n, \in \mathbb{N}^+)$ annak a valószínűsége, hogy a $10^{99}$ számnak egy véletlenszerűen választott osztója többszöröse a $10^{88}$ számnak. Mennyi $m + n$ minimális értéke? [20]

**Megoldás.**

- Mivel $10^{99} = 2^{99} \cdot 5^{99}$, 1 pont
- ezért osztóinak száma $100 \cdot 100 = 10000$. 3 pont
- A $10^{88} = 2^{88} \cdot 5^{88}$ szám $10^{99}$ osztói közül kikerülő többszörösei $2^a \cdot 2^b$ alakúak, 4 pont
- ahol $88 \leq a; b \leq 99$, $a; b \in \mathbb{Z}$. 2 pont
- Így $12 \cdot 12$ olyan osztója van a $10^{99}$-nek, ami $10^{88}$-nak többszöröse. 4 pont
- Így a keresett valószínűség $p = \frac{12 \cdot 12}{10000}$ 2 pont
- Ennek redukált tört alakja $p = \frac{9}{625}$. 2 pont
- Így $m + n$ minimális értéke $9 + 625 = 634$. 2 pont

6. Felírjuk 8 cédulára az $1, 2, 3, \ldots, 8$ számokat. Hányféleképp lehet a cédulákat sorba rendezni úgy, hogy [12]

   (a) azonos paritásúak ne kerüljenek egymás mellé,

   (b) az első négy helyen csak páros szám álljon?

**Megoldás.**

(a)
- Ahhoz, hogy azonos paritásúak ne kerüljenek egymás mellé, felváltva kell állniuk. 1 pont
- A párosok 4!, 1 pont
- a páratlanok is (ettől függetlenül) 4! különböző sorrendben állhatnak. 1 pont
- A sorrend kezdődhet páros, illetve páratlan számmal is, 1 pont
- így a sorrendek száma $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$. 2 pont

(b)
- A párosok 4!, 2 pont
- a páratlanok is (ettől függetlenül) 4! különböző sorrendben állhatnak. 2 pont
- Így a sorrendek száma $4! \cdot 4! = 576$. 2 pont