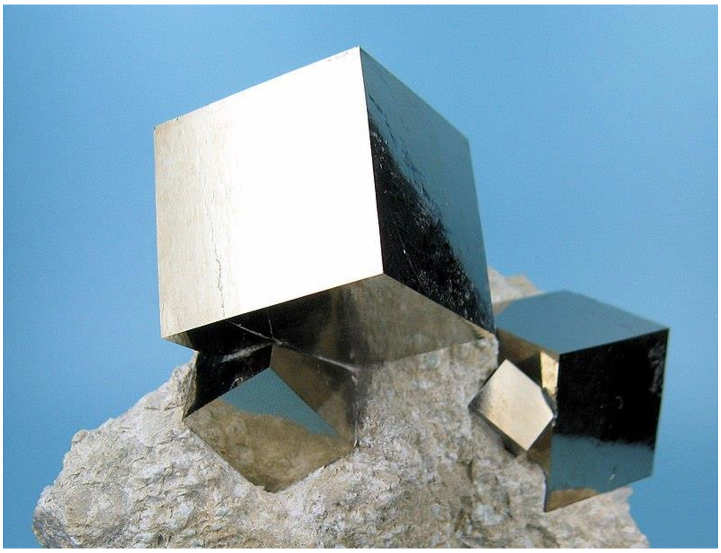
Dr. Raucsik Béla: Ásványtan leckesorozat
2. lecke

Geometriai kristálytan I.: a szimmetriaműveletek

Az olvasólecke célja: az alapvető szimmetriaelemek áttekintése és tágabb kristálytani keretbe illesztése. *Átlagos olvasási idő:* 30 perc.

Az előző lecke egyik fontos megállapítása volt, hogy a kristály egy térrácsszerkezetű, diszkontinuális térkitöltésű, szilárd anyag. Ennek az emberi érzékszervekkel észlelhető megnyilvánulása, hogy a makrovilágban a kristályok síklapokkal határolt mértani testként jelentkeznek. Következésképp a kristálytan fontos része a kristályok külső morfológiájának és a kristályrács belső szimmetriájának leírása és értelmezése. Ennek eredménye, hogy a kristályok felépítésének megértéséhez, geometriai jellemzéséhez elengedhetetlen a matematikából ismert szimmetria fogalomrendszerének és módszereinek alkalmazása. A kristálytanban azzal az egyszerűsítéssel élünk, hogy ***a szimmetria fogalmán a kristály valamely alkotóelemének a geometriai törvények szerinti ismétlődését értjük.*** A kristálytanban két pont akkor identikus (kölcsönösen azonos) egymással, ha tetszőlegesen és matematikailag azonos módon választott környezetük is fedésbe hozható, vagyis környezetük is egybevágó. ***A szimmetria tehát egyúttal az identikus pontok fedésbe hozásának művelete.*** Ennek megfelelően a külső szimmetria megnyilvánulása a kristály lapjainak, éleinek, csúcsainak szabályszerű ismétlődése, míg a belső szimmetria a kristályrácsot felépítő tömegpontoknak a periodikus ismétlődésében ölt testet. Először vizsgáljuk meg azt, hogy a külső szimmetria leírásához milyen **szimmetriaműveletek**et használunk!



Szinte tökéletes kocka alakú pirit kristályok csoportja. A legnagyobb kristály élhossza 31 mm.
Lelőhely: Rioja, Spanyolország.
https://en.wikipedia.org/wiki/Pyrite#/media/File:2780M-pyrite1.jpg

TIPP: Ha szeretné átismételni a geometriai transzformációkkal kapcsolatos alapismereteket, az alábbi linkeken könnyen áttekinthető összefoglalókat talál:

https://matekarcok.hu/kategoria/matek-temakorok/geometria/geometriai-transzformaciok/

https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/geometriai-transzformacio-tavolsagtarto-transzformacio/a-geometriai-transzformacio-fogalma-tulajdonsagai

Szimmetriaműveletek a kristálytanban

Egy kristály külső szimmetriáját az úgynevezett fedési műveletek segítségével tehetjük szemléletessé. ***Szimmetriaelemnek nevezzük azt a mértani elemet, amellyel a fedési műveletet végrehajtjuk.***

Három alapvető, egyszerű fedési műveletet különböztetünk meg: ***1. forgatás; 2. tükrözés; 3. inverzió.***

Az ezekhez tartozó, úgynevezett egyszerű szimmetriaelemek: ***1. gír*** (szimmetriatengely, vagy forgástengely); ***2. tükörsík*** (szimmetriasík); ***3. inverzióspont*** (szimmetriaközpont, vagy szimmetriacentrum).

1. A gír olyan szimmetriaelem, amelynek segítségével a kristály egy teljes körbeforgatás alatt önmagával legalább kétszer fedőhelyzetbe kerül. A gíreknek más szimmetriaelemekkel való kapcsolata alapján két alaptípusa van: ha nincs jelen a gír két végét fedésbe hozó szimmetriaelem, akkor a gír **poláros**, ha van, akkor **axiális**. Annak függvényében, hogy a teljes (tehát 360°-os) körülforgatás alatt a kristály hányszor kerül fedésbe önmagával, négyféle eshetőséggel kell számolnunk. Ezek:

1.1. ***digír***, vagy kétértékű tengely (az ismétlődés kétszer, tehát 180°-onként valósul meg);

1.2. ***trigír***, vagy háromértékű tengely (az ismétlődés háromszor, tehát 120°-onként valósul meg);

1.3. ***tetragír***, vagy négyértékű tengely (az ismétlődés négyszer, tehát 90°-onként valósul meg);

1.4. ***hexagír***, vagy hatértékű tengely (az ismétlődés hatszor, tehát 60°-onként valósul meg).

Ötértékű, vagy hatnál nagyobb értékű szimmetriatengely nem lehetséges, mert a kristályokban hézag nélküli síkkitöltést ezek nem tesznek

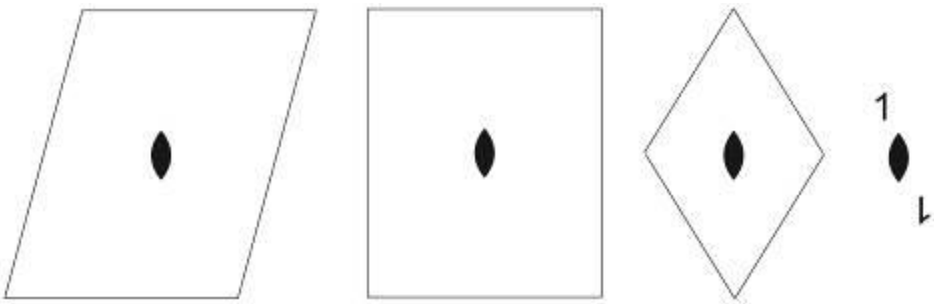
Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

lehetővé. Kiemelendő azonban, hogy a fenti kitétel nem érvényes az ún. kvázikristályok esetében. Ezek áttekintése azonban túlmutat a kurzus tematikáján.

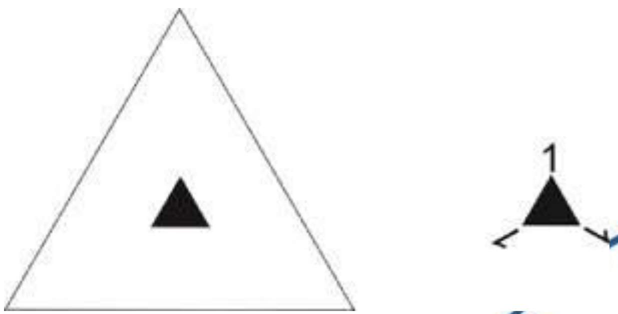
> **TIPP: Ha szeretne megismerkedni a kvázikristályok felfedezésével és tulajdonságaival, az alábbi linkeken nagyon jól használható anyagokhoz férhet hozzá:**
>
> http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz1111/Hargittai_Istvan.pdf
>
> https://www.britannica.com/science/quasicrystal
>
> https://wwwphy.princeton.edu/~steinh/quasicrystals.html
>
> https://www.annualreviews.org/doi/pdf/10.1146/annurev.pc.42.100191.003345

Az alábbi néhány egyszerű példán tanulmányozható az egyes forgástengelyek „működése” és a hozzájuk tartozó fedési művelet. Az adott forgástengely minden esetben merőleges a vetítés (azaz a monitor) síkjára.

1.1. Digír konvencionális jele: 2, ill. ⬮

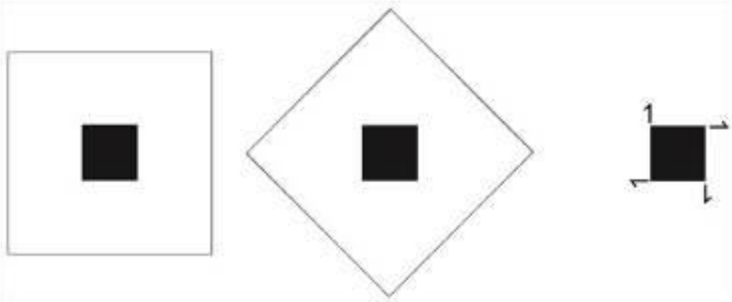


1.2. Trigír konvencionális jele: 3, ill. ▲

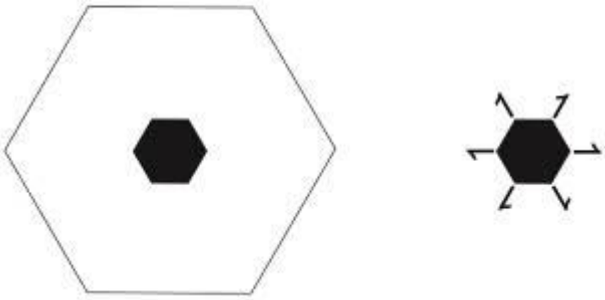


Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

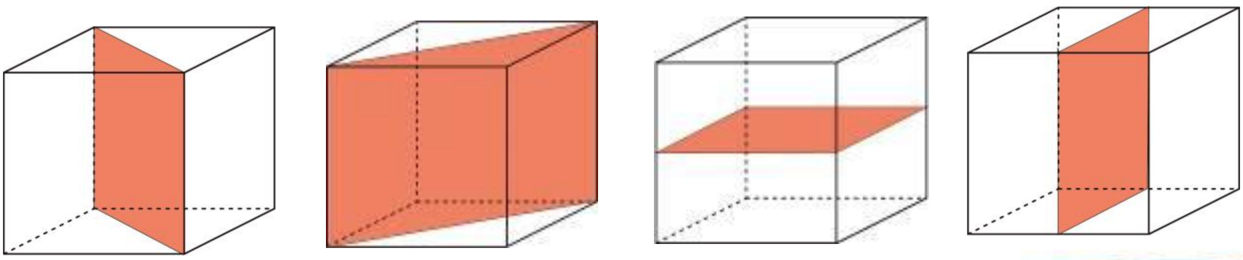
1.3. Tetragír konvencionális jele: 4, ill. ■



1.4. Hexagír konvencionális jele: 6, ill. ⬢



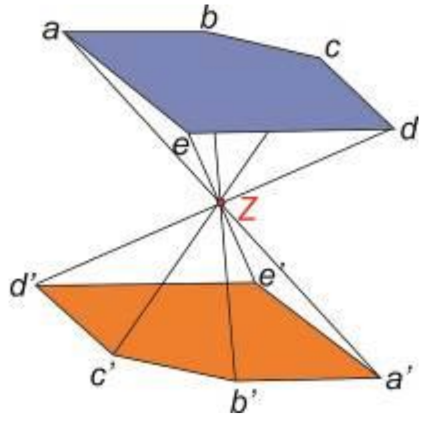
2. A tükörsík olyan szimmetriaelem, amely a kristályt két, egybevágó tükörképi félre bontja. Ez értelemszerűen csak akkor valósulhat meg, ha a tükörsík tartalmazza a test geometriai középpontját. Konvencionális jele: m.



A szimmetriasíkot a téglavörös sík jelöli

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

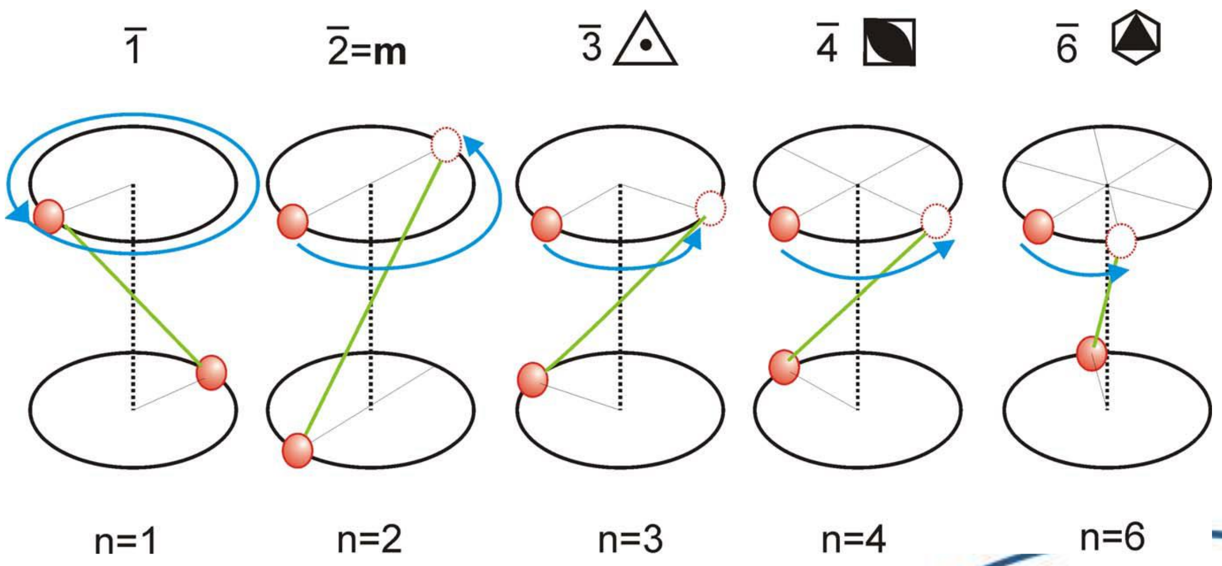
3. Az inverziópont a kristály térbeli középpontjában foglal helyet. Tőle a kristály adott irányban, adott távolságra eső bármely pontja az ellenkező irányban ugyanakkora távolságban megismétlődik. Konvencionális jele: Z.



Egy abcde sokszög inverziópont (pirossal jelölve) szerinti tükrözése

Fontos következmény, hogy egy inverziós ponttal rendelkező kristály valamennyi szemben lévő lapja párhuzamos és egybevágó!

Az eddigiekben áttekintett egyszerű szimmetriaelemek közül az inverziópont és a forgástengelyek kombinálásával (a rotoinverzió fedési művelete során) összetett szimmetriaelemeket kaphatunk. Az alábbi ábra segítségével tekintsük át a felmerülő lehetőségeket!



A forgástengelyek (értékűségüket az „n” értéke jelöli) és az inverziópont kombinációjának eredménye.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Látható, hogy az első két esetben (azaz a „monogír" és a digír inverziósponttal való „házassága" esetén) a már ismert inverziósponthoz és a tükörsíkhoz jutunk.

Új szimmetriaelemet kapunk viszont akkor, ha trigírt, vagy tetragírt kombinálunk inverziósponttal. Előbbinél ***inverziós hexagiroid***ot (más néven ***trigír hexagiroid***ot) kapunk, ami azt jelenti, hogy a kristály összes eleme egy teljes körülforgatás során háromszor (azaz 120°-onként) fedésbe, köztes 60°-os helyzetben (tehát ismét háromszor) inverziós helyzetbe kerül. Az inverziós hexagiroid tehát egyúttal trigírként viselkedik. A másik változat esetében az ***inverziós tetragiroid***hoz (más néven ***digír tetragiroid***hoz) jutunk. Ilyenkor a kristály elemei egy teljes körülforgatás során kétszer (tehát 180°-onként) fedésbe, köztes 90°-os pozícióban (szintén kétszer) inverziós helyzetbe kerülnek. Látható, hogy az inverziós tetragiroid digírként is működik. A hexagír és az inverzóspont kombinációja viszont egy trigírt és egy rá merőleges tükörsíkot eredményez, azaz ebben az esetben nem kapunk új szimmetriaelemet.

A rotoinverzió segítségével kapott összetett szimmetriaelemek következményeivel a következő leckében még találkozunk.

Tipp: Nem biztos, hogy könnyű átlátni az összetett szimmetriaelemek geometriáját. Szemléletes videóleckék találhatók az alábbi linkeken:

https://www.youtube.com/watch?v=9MMKjO5HB-I

https://www.youtube.com/watch?v=3i7UvVd7bjs

https://www.youtube.com/watch?v=eK5G6a4fhKc

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Hasznos olvasnivalók a geometriai kristálytan témájában:

Koch, S., Sztrókay, K. (1986): Ásványtan. Tankönyvkiadó, Budapest.
http://mek.oszk.hu/04700/04799/pdf/asvanytan1.pdf

Pápay, L. (2006): Kristálytan, ásvány-, kőzettan. JATEPress, Szeged.

Szakáll, S. (2011): Ásvány- és kőzettan alapjai. E-tananyag, Miskolci Egyetem.
https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0033_SCORM_MFFAT6101/adatok.html

Putnis, A. (1992): Introduction to Mineral Science. Cambridge University Press, Cambridge.

Önellenőrző kérdések (szimmetriaelemek):

1. Mit értünk a szimmetria fogalma alatt a kristálytanban?
2. Igaz-e, hogy minden gír páros értékű?
3. Mi a különbség a tükörsíkhoz és az inverziós ponthoz kapcsolódó fedési műveletek között?
4. Milyen helyzetű lappárokat követel meg az inverzió fedési művelete?
5. Milyen összetett szimmetriaelemeket ismer? Ezeknek milyen közös tulajdonságai vannak?