# A Fourier-inverz tétel, mérsékelt disztribúciók és Fourier-transzformációjuk

Dr. Keresztes Zoltán, egyetemi docens
*Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék,*
*Tisza Lajos krt. 84-86, Szeged 6720*
*E-mail: zkeresztes@titan.physx.u-szeged.hu*

Olvasási idő kb. 60 perc. Formai szempontból lektorálta: Dr. Majorosi Szilárd

## I. A FOURIER-INVERZ TÉTEL

**Állítás:** Ha $\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{F}\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

*Bizonyítás:* Az előző olvasóleckében már beláttuk, hogy $\mathcal{F}\varphi \in C^\infty$. Ezért elegendő bizonyítani azt, hogy létezik olyan véges $M_{\alpha,\beta}$, amire

$$\left|k^\alpha D^\beta \mathcal{F}\varphi\right| \leq M_{\alpha,\beta} \ . \tag{1}$$

Itt $\alpha$ és $\beta$ multi-indexek, amelyek a $D^\beta$ jelöléssel együtt az előző olvasóleckében lettek bevezetve. Azonban a parciális deriválások $D^\beta$-ban most a $\mathbf{k}$ komponensei szerint történnek. Mivel

$$k^\alpha D^\beta \mathcal{F}\varphi = i^P \mathcal{F} D^\alpha \left(x^\beta \varphi\right) \ , \tag{2}$$

ahol $P = \alpha_1 + .. + \alpha_n + \beta_1 + .. + \beta_n$, ezért

$$\left|k^\alpha D^\beta \mathcal{F}\varphi\right| = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{kx}} D^\alpha \left(x^\beta \varphi\right) d^n\mathbf{x}\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left|D^\alpha \left(x^\beta \varphi\right)\right| d^n\mathbf{x} < \infty \ . \tag{3}$$

Az utolsó relációnál felhasználtuk, hogy $D^\alpha \left(x^\beta \varphi\right) \in S(\mathbb{R}^n)$.

**Tétel**: A Fourier-traszformáció invertálható és az inverz leképezés:

$$\boxed{\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}) \ ,} \tag{4}$$

ahol $\varphi(\mathbf{k}) \in S(\mathbb{R}^n)$. A tétel állítása tehát:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \varphi \ .} \tag{5}$$

**Megjegyzés**: Erről a leképezésről belátható, hogy olyan $S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ leképezés, ami folytonos és lineáris. A bizonyítás egyszerű analógja annak a bizonyításnak, amit a Fourier-traszformáció esetén az előző olvasóleckében láttunk. **Következmény**: A Fourier-transzformáció az $S(\mathbb{R}^n)$-t egy-egy értelmű módon képezi önmagára.

*A tétel bizonyítása:* Fel fogjuk használni a következő mellékszámolást:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{kx}} e^{-\varepsilon\frac{|\mathbf{k}|^2}{2}} &= e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\left(\mathbf{k}-\frac{i}{\varepsilon}\mathbf{x}\right)^2} \\ &= \frac{(2\pi)^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k}' e^{-\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{k}'^2} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2\varepsilon}} \ ,\end{aligned} \tag{6}$$

ahol az alábbi átalakítást

$$-\frac{\varepsilon}{2}\left(\mathbf{k}-\frac{i}{\varepsilon}\mathbf{x}\right)^2 = -\frac{\varepsilon}{2}\left(\mathbf{k}-\frac{i}{\varepsilon}\mathbf{x}\right)\left(\mathbf{k}-\frac{i}{\varepsilon}\mathbf{x}\right) = -\frac{\varepsilon}{2}\left[\mathbf{k}^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{x}^2 - \frac{2i}{\varepsilon}\mathbf{kx}\right] = -\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{k}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\mathbf{x}^2 + i\mathbf{kx} \ , \tag{7}$$

és a $\mathbf{k}' = \mathbf{k} - i\mathbf{x}/\varepsilon$ változó cserét alkalmaztuk. Számoljuk a következő határértéket

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\right)(\mathbf{x}) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-\varepsilon\frac{\mathbf{k}^2}{2}} (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-\varepsilon\frac{\mathbf{k}^2}{2}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} e^{-\varepsilon\frac{\mathbf{k}^2}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) \frac{(2\pi)^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{h} \varphi\left(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{h}+\mathbf{x}\right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{h}^2} \ ,\end{aligned}$$

ahol a harmadik sor elején a $\mathbf{h} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) / \sqrt{\varepsilon}$ változó cserét hajtottunk végre. Most alkalmazzuk a *Lebesgue-féle dominált konvergencia tételt* az

$$f_\varepsilon(\mathbf{h}) = \varphi\left(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{h} + \mathbf{x}\right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{h}^2} \tag{8}$$

függvény sorozatra. A sorozat teljesíti, hogy

$$\left|\varphi\left(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{h} + \mathbf{x}\right) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{h}^2}\right| \leq C e^{-\frac{1}{2}\mathbf{h}^2} \ , \tag{9}$$

ahol

$$C = \sup_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) < \infty \ . \tag{10}$$

Így kapjuk, hogy

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\right)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{h} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{h}^2} = \varphi(\mathbf{x}) \ , \tag{11}$$

ami a tétel állítása volt.

---

Vezessük be a következő skaláris szorzatot:

$$(\psi, \varphi) = \langle \psi, \varphi^* \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) \varphi^*(\mathbf{x}) \ . \tag{12}$$

Ekkor

$$(\mathcal{F}\varphi)^*(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi^*(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{F}^{-1}\varphi^*\right)(\mathbf{k}) \ ,$$

így

$$(\mathcal{F}\psi, \mathcal{F}\varphi) = \left\langle \mathcal{F}\psi, (\mathcal{F}\varphi)^* \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}\psi, \mathcal{F}^{-1}\varphi^* \right\rangle = \langle \psi, \varphi^* \rangle = (\psi, \varphi) \ . \tag{13}$$

Ez az úgynevezett **Parseval-formula**.

---

## II. A MÉRSÉKELT DISZTRIBÚCIÓK ÉS FOURIER-TRANSZFORMÁLTJUK

**Definíció (mérsékelt disztribúció):** A Schwartz-tér folytonos lineáris funkcionáljait **mérsékelt disztribúciók**nak nevezzük, amelyek a szokásos összeadás és skalárral szorzás szabállyal vektorteret alkotnak. A mérsékelt disztribúciók terét $S'(\mathbb{R}^n)$ jelöli. Azt a számot amit egy $f$ disztribúció hozzárendel egy Schwartz-térbeli függvényhez $f(\varphi) \equiv \langle f, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$-vel jelöljük. Azokat a disztribúciókat, amelyek az összes $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvényhez ugyanazt a számot rendelik egyenlőknek tekintjük.

Tegyük fel, hogy $f$ egy olyan Lebesgue-mérhető függvény, amelyre

$$|f(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x}) \left(1 + |\mathbf{x}|^2\right)^{d/2} \tag{14}$$

teljesül $\mathbb{R}^n$-ben egy nemnegatív egész $d \geq 0$-val és egy nemnegatív, integrálható $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénnyel. Ekkor belátható, hogy

$$f(\varphi) \equiv \langle f, \varphi \rangle = \int f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} \ , \tag{15}$$

ahol az integrálás a teljes $\mathbb{R}^n$-en történik, egy mérsékelt disztribúciót definiál. Az ilyen alakban megadható disztribúciókat *reguláris disztribúció*knak nevezzük. A nemreguláris disztribúciókat pedig *szinguláris disztribúció*knak hívjuk. Tipikus szinguláris disztribúció a Dirac-$\delta$, amelynek definíciója:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \ . \tag{16}$$

Illetve általánosabban

$$\langle \delta_{\mathbf{y}}, \varphi \rangle = \varphi(\mathbf{y}) \ , \tag{17}$$

ahol a

$$\delta_{\mathbf{0}} = \delta \tag{18}$$

jelölés azonosítással éltünk.

Történeti okokból, illetve számítások során áttekinthetőség miatt hasznos bevezetni az alábbi **jelöléseket** egy tetszőleges $f$ disztribúció hatásának kifejezésére:

$$f(\varphi) \equiv \langle f, \varphi \rangle \equiv \int f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d^n\mathbf{x} \ . \tag{19}$$

Ez reguláris diszutribúciók esetén egyszerűen az $f$ disztribúciónak az $f(\mathbf{x})$ Lebesgue-mérhető (közönséges) függvénnyel történő azonosítását jelenti. Szinguláris disztribúciók esetén az integrál kifejezésben megjelenő $f(\mathbf{x})$-et *általánosított függvény*nek, vagy *szimbolikus függvény*nek nevezzük. Az integrál értékét ez esetben a baloldali $\langle f, \varphi \rangle$ definiálja.

Jelölje $\tau_{\mathbf{h}} f$ egy közönséges függvény $\mathbf{h}$-val való eltoltját:

$$\tau_{\mathbf{h}} f = f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) \ . \tag{20}$$

Ekkor reguláris disztribúciókra

$$\begin{aligned} \langle \tau_{\mathbf{h}} f, \varphi \rangle &= \int \tau_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d^n\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) \varphi(\mathbf{x}) \, d^n\mathbf{x} \\ &= \int f(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y} + \mathbf{h}) \, d^n\mathbf{y} = \langle f, \tau_{-\mathbf{h}} \varphi \rangle \ . \end{aligned} \tag{21}$$

A (16)-(18) egyenletek alapján világos, hogy

$$\delta_{\mathbf{y}} = \tau_{-\mathbf{y}} \delta \ , \tag{22}$$

ezért

$$\langle \delta_{\mathbf{y}}, \varphi \rangle = \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \, d^n\mathbf{x} \ . \tag{23}$$

### A. Mérsékelt disztribúciók deriváltja

Egyszerűség kedvéért tekintsük az $n = 1$ esetet, vagyis az $S(\mathbb{R})$ és $S'(\mathbb{R})$ tereket. A deriváltat vesszővel jelöljük. Ekkor reguláris disztribúciókra fennáll az alábbi:

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &\equiv \langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) \, dx = [f(x) \varphi(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) \, dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) \, dx = -\langle f, \varphi' \rangle \equiv -f(\varphi') \ . \end{aligned} \tag{24}$$

Az elsősorban egy parciális integrálás történt és felhasználtuk, hogy $\varphi(x = \pm\infty) = 0$. Az $m$-szeres derivált esetén pedig $m$-szeres parciális integrálással, a derivált rendjét felső indexben jelölve kapjuk, hogy

$$f^{(m)}(\varphi) \equiv \left\langle f^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \left\langle f, \varphi^{(m)} \right\rangle \equiv (-1)^m f\left(\varphi^{(m)}\right) \ . \tag{25}$$

Továbbá $n > 1$ esetére hasonlóan következik, hogy

$$D^\alpha f(\varphi) \equiv \langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \equiv (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha \varphi) \ , \tag{26}$$

ahol $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

**Definíció:** Az előzőeknek megfelelően egy tetszőleges $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció deriváltját az alábbi formulával definiáljuk:

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \ . \tag{27}$$

Mivel $D^\alpha \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ így $D^\alpha f$ jól definiált. A formulából következik az is, hogy tetszőleges disztribúció akárhányszor deriválható.

**Példa:** A

$$\Theta = \begin{cases} 0\ , & x < 0 \\ 1\ , & 0 < x \end{cases} \tag{28}$$

Heaviside-függvény $x$-szerinti deriváltja:

$$\begin{aligned} \langle \Theta', \varphi \rangle &= -\langle \Theta, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\, dx \\ &= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \ . \end{aligned} \tag{29}$$

Tehát disztribúcionális értelemben:

$$\Theta' = \delta \ . \tag{30}$$

### B. Mérsékelt disztribúciók Fourier-transzformáltja

A reguláris disztribúciókra:

$$\begin{aligned} \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} f(\mathbf{k})\, (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} f(\mathbf{k})\, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x})\, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k} f(\mathbf{k})\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle \end{aligned} \tag{31}$$

teljesül. Ennek megfelelően a **mérsékelt disztribúciók Fourier-transzformáltját** a következőképpen definiáljuk:

$$\boxed{\langle \mathcal{F}f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi \rangle \ .} \tag{32}$$

Hasonlóan definiáljuk az inverz Fourier-transzformációt is. A Fourier-transzformált jelölésére szokás még a disztribúció fölé helyezett tilde-t is alkalmazni, ahogy azt az előző olvasóleckében láttuk.

**Példák**:

1) A Dirac-$\delta$ Fourier-transzformáltja:

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle = (\mathcal{F}\varphi)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \langle 1, \varphi \rangle \ , \tag{33}$$

így

$$\mathcal{F}\delta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \ . \tag{34}$$

2) A Dirac-$\delta$ deriváltjának Fourier-transzformáltja egyváltozós ($n = 1$) esetben:

$$\langle \mathcal{F}\delta', \varphi \rangle = \langle \delta', \mathcal{F}\varphi \rangle = -\left\langle \delta, (\mathcal{F}\varphi)' \right\rangle = i \langle \delta, \mathcal{F}(k\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}\delta, ik\varphi \rangle = \langle ik\mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \left\langle \frac{ik}{(2\pi)^{n/2}}, \varphi \right\rangle \ , \tag{35}$$

így

$$\mathcal{F}\delta' = \frac{ik}{(2\pi)^{n/2}} \ . \tag{36}$$

3) A Dirac-$\delta$ $x_j$-koordináta szerinti parciális deriváltjának Fourier-transzformáltja:

$$\left\langle \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right), \varphi \right\rangle = \langle ik_j \mathcal{F}f, \varphi \rangle \ . \tag{37}$$

4) A konvolúció Fourier-transzformáltja:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left\langle \mathcal{F}\left(f*g\right),\varphi\right\rangle = \left\langle \left(\mathcal{F}f\right)\left(\mathcal{F}g\right),\varphi\right\rangle \ . \tag{38}$$

5) A Fourier-transzformáció és inverzének alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\varphi\left(\mathbf{x}\right) &= \left(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\right)\left(\mathbf{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}\varphi\left(\mathbf{y}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y}\varphi\left(\mathbf{y}\right)\frac{1}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \ . \end{aligned} \tag{39}$$

Ezt összevetve a Dirac-$\delta$ disztribúció hatásának (23) kifejezésével az alábbi fontos azonossághoz jutunk:

$$\delta\left(\mathbf{y}-\mathbf{x}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n}}\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \ . \tag{40}$$

6) A $\sin\left(ax\right)$ Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned}\widetilde{\sin\left(ax\right)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-ikx}\sin\left(ax\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-ikx}\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-i(k-a)x} - \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-i(k+a)x} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2i}\left[\delta\left(k-a\right)-\delta\left(k+a\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{41}$$

7) A $\cos\left(ax\right)$ Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned}\widetilde{\cos\left(ax\right)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-ikx}\cos\left(ax\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-ikx}\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-i(k-a)x} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-i(k+a)x} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta\left(k-a\right)+\delta\left(k+a\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{42}$$

8) A

$$\Theta = \begin{cases} 0 \ , & x<0 \\ 1 \ , & 0<x \end{cases} \tag{43}$$

Heaviside-függvényre a Fourier-transzformációs formula egyenes alkalmazása adja, hogy

$$\widetilde{\Theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} dxe^{-ikx} \ . \tag{44}$$

A jobboldali integrál azonban nem jól definiált. Viszont $\Theta$ olyan disztribúció, amely az

$$f_a\left(x\right) = \begin{cases} e^{-ax} \ , & 0\leq x \\ 0 \ , & x<0 \end{cases} \ , \tag{45}$$

függvény határértékeként is képezhető:

$$\Theta = \lim_{a\to 0} f_a \ . \tag{46}$$

Tekintsük az $f_a\left(x\right)$ függvény Fourier-transzformáltját:

$$\widetilde{f_a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} dxe^{-ikx}e^{-ax} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+ik} \ . \tag{47}$$

Ennek határértéke:

$$\lim_{a\to 0}\widetilde{f}_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik} \ . \tag{48}$$

Kérdés ez valóban megfelel-e a $\Theta$ Fourier-transzformáltjának. Ugyanis a $k=0$ helyen probléma lehet, hiszen ott divergens eredményt kaptunk. Vegyük az inverz Fourier-transzformáltat:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\lim_{a\to 0}\widetilde{f}_a &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{e^{ikx}}{ik} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} dk\frac{e^{ikx}}{ik} + \int_{0}^{\infty} dk\frac{e^{ikx}}{ik}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} dk\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{ik} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dk\frac{\sin kx}{k} = \frac{sgn\,(x)}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\frac{\sin\omega}{\omega} = sgn\,(x)\,\frac{1}{2} \ ,\end{aligned}$$

ahol bevezettük az $\omega = kx$ jelölést és integrál táblázatból felhasználtuk, hogy

$$\int_0^{\infty} d\omega\frac{\sin\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2} \ . \tag{49}$$

Ami azt jelenti, hogy

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{ik} = \widetilde{sgn\,(x)} \ . \tag{50}$$

Tehát az előjel függvény Fourier-transzformáltját nem pedig a Heaviside-függvényét, vagy annak számszorosáét kaptuk. Viszont a Heaviside-függvény írható úgyis, mint

$$\Theta\,(x) = \frac{1}{2}sgn\,(x) + \frac{1}{2} \ , \tag{51}$$

így

$$\widetilde{\Theta\,(x)} = \widetilde{sgn\,(x)} + \widetilde{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta\,(k) \ . \tag{52}$$

## III. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK-FELADATOK

1. Jelölje $D\,(\mathbb{R}^n) \subset S\,(\mathbb{R}^n)$ azokat a függvényeket, amelyek az $\mathbb{R}^n$-ben egy véges sugarú gömbön kívül azonosan nullák. Ez a függvényosztály is egy vektorteret alkot, amelyen szintén értelmezhetünk disztribúciókat, mint folytonos lineáris funkcionálokat. Ezek terét jelölje $D'\,(\mathbb{R}^n)$. Vajon $D'\,(\mathbb{R}^n)$, vagy $S'\,(\mathbb{R}^n)$ a bővebb halmaz és miért?

2. A $\sin x$ függvény mérsékelt disztribúció-e?

3. A Heaviside-függvény deriváltja ismeretében határozza meg az

$$f\,(x) = \begin{cases} 2x \ , \ 0 \le x \\ 0 \ , \ egyébként \end{cases} \tag{53}$$

függvény $x$-szerinti kétszeres deriváltját disztribúcionális értelemben!

4. Határozza meg az $1/x$ függvény Fourier-transzformáltját!

## IV. REFERENCIÁK

Az alábbi referenciák segítik az órai tananyag mélyebb szintű megértését, illetve továbblépési lehetőséget kínálnak a témakörben:

---

[1] Bartha F., *Óravázlatok a Matematikai Módszerek a Fizikában 2. előadásokhoz I. rész: Disztribúcióelmélet* (2003). http://www.staff.u-szeged.hu/~barthaf/1resz.pdf

[2] J. Kirkwood, *Mathematical Physics with Partial Differential Equation*, Academic Press, Elsevier, Second Edition (2018).
[3] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Distributions: Theory and Applications*, Springer (2010).
[4] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Second Edition (1991).
[5] J. K. Hunter, B. Nachtergaele, *Applied Analysis*, World Scientific (2001).
[6] H. Abels, *Pseudodifferential and Singular Integral Operators, An Introduction with Applications*, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG (2012).

JELEN TANANYAG
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEMEN KÉSZÜLT,
AZ EURÓPAI ÚNIÓ TÁMOGATÁSÁVAL.
PROJEKTAZONOSÍTÓ: EFOP-3.4.3-16-2016-00014.

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE