

Fourier-transzformáció a Schwartz-téren

Dr. Keresztes Zoltán, egyetemi docens
Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék,
Tisza Lajos krt. 84-86, Szeged 6720
E-mail: zkeresztes@titan.physx.u-szeged.hu

Olvadási idő kb. 60 perc. Formai szempontból lektorálta: Dr. Majorosi Szilárd

I. A SCHWARTZ-TÉR

Definíció (Schwartz-tér): Jelölje $S(\mathbb{R}^n)$ az n -dimenziós Euklideszi téren értelmezett "gyorsan lecsengő", C^∞ komplex értékű függvények halmazát. E halmaz a függvények szokásos pontonkénti összeadásával és skalárral szorzással vektorteret alkot, amelyet Schwartz-térnek nevezünk. A definícióban a gyors lecsengés azt jelenti, hogy $\forall \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ -re $\exists M_{\alpha,\beta}$ véges szám, amelyre

$$|x^\alpha D^\beta \varphi| \leq M_{\alpha,\beta} \quad (1)$$

a teljes \mathbb{R}^n -en. Itt α és β multi-indexek: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, továbbá

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad (2)$$

és

$$D^\beta \varphi \equiv \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \varphi(\mathbf{x}). \quad (3)$$

A gyors lecsengés alternatív megfogalmazás szerint azt jelenti, hogy

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi| < \infty. \quad (4)$$

Definíció (konvergencia): Egy $\varphi_k \in S(\mathbb{R}^n)$ függvénytartomány tart a $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvényhez a Schwartz-térben, ha $\forall \alpha, \beta$ -ra

$$|x^\alpha D^\beta \varphi_k - x^\alpha D^\beta \varphi| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (5)$$

egyenletesen a teljes \mathbb{R}^n -ben.

A fenti definíció alapján egy $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvény és deriváltjai bármilyen $|\mathbf{x}|$ hatványnál gyorsabban tűnnek el a ∞ -ben. Hiszen, ha $|x^\alpha D^\beta \varphi| < M_{\alpha,\beta}$, akkor lehet találni olyan M_β számot amire $|P(x_1, \dots, x_n) D^\beta \varphi| < M_\beta$, ahol $P(x_1, \dots, x_n)$ egy tetszőleges polinomja az x_1, \dots, x_n változóknak, pl.: $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^8 + x_3^6 x_1$. Polinomként válasszuk a $P(x_1, \dots, x_n) = (|\mathbf{x}|^2)^{P+1}$ -et, ahol $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ és $P \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\left| (|\mathbf{x}|^2)^{P+1} D^\beta \varphi \right| \leq M_{\beta, P+1} \Rightarrow \left(|\mathbf{x}|^2 \right)^P |D^\beta \varphi| \xrightarrow[|\mathbf{x}|^2 \rightarrow \infty]{} 0. \quad (6)$$

o Példák:

- 1) $P(x_1, \dots, x_n) e^{-|\mathbf{x}|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$, ahol $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Megjegyezzük, hogy $|x^\alpha D^\beta \varphi| = |x^\alpha| |D^\beta \varphi| \leq r^N |D^\beta \varphi|$, ahol $N = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ és $r = |\mathbf{x}|$. A $P(x_1, \dots, x_n) e^{-|\mathbf{x}|^2}$ függvény tetszőleges változója szerinti bárhányadik deriváltja is $P'(x_1, \dots, x_n) e^{-|\mathbf{x}|^2}$ alakú lesz, ahol $P'(x_1, \dots, x_n)$ szintén a változóinak egy

polinomja. Egy polinom pedig felülről becsülhető egy $C(1+r^d)$ kifejezéssel, ahol C egy alkalmas véges szám és d nagyobb mint a polinomban az $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ esetén megjelenő legmagasabb kitevő. Így esetünkben azt kapjuk, hogy

$$|x^\alpha D^\beta \varphi| \leq C(1+r^d)e^{-r^2}. \quad (7)$$

Mivel a jobboldalon folytonos, véges $r \in (a, b)$ intervallumon korlátos függvények és azok szorzata áll, így elegendő belátni azt, hogy a jobboldali kifejezés a nullához tart $r \rightarrow \infty$ -re. A L'Hospital szabály ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy $\lim_{r \rightarrow \infty} r^k/e^{r^2} = 0$ tetszőleges véges k -ra. Ezért következik, hogy $P(x_1, \dots, x_n)e^{-|\mathbf{x}|^2} \in S(\mathbb{R}^n)$.

2) Az

$$f = \frac{1}{(1+r^2)^k} \notin S(\mathbb{R}^n), \quad (8)$$

ahol k tetszőleges. Ez látható abból, hogy $r^{2k}f$ nem tart nullához az $r \rightarrow \infty$ -re.

3) Az

$$f = e^{-r^2} \sin(e^{r^2}) \notin S(\mathbb{R}^n). \quad (9)$$

Pl.:

$$\partial_1 f = -2x_1 e^{-r^2} \sin(e^{r^2}) + 2x_1 \cos(e^{r^2}), \quad (10)$$

ahol a második tag nem tart zérushoz a térbeli végtelenben.

Az $S(\mathbb{R}^n)$ ∞ -dimenziós komplex vektorteret alkot a pontonkénti összeadás és skalárral szorzás definíciókkal: $(\varphi_1 + \varphi_2)(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \varphi_2(\mathbf{x})$ és $(z\varphi)(\mathbf{x}) = z\varphi(\mathbf{x})$, ahol $z \in \mathbb{C}$.

A Schwartz-tér fontos tulajdonsága, hogy bármely $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvény és annak deriváltjainak integrálja korlátos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} |D^\beta \varphi| < \infty, \quad (n \geq 1). \quad (11)$$

Ez a következőképpen mutatható meg. Egyrészt $d^n \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^{n-1} dr d\Omega^{n-1} = r^{n-1} dr d\Omega^{n-1}$, ahol $r = |\mathbf{x}|$, másfelől létezik K_β , amelyre $|D^\beta \varphi| \leq K_\beta / (1+r^n)^2$. Ezért

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} |D^\beta \varphi| &= \int_{S^{n-1}} d\Omega^{n-1} \int_0^\infty dr r^{n-1} |D^\beta \varphi| \leq \int_{S^{n-1}} d\Omega^{n-1} \int_0^\infty dr \frac{r^{n-1}}{(1+r^n)^2} \\ &= -\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} d\Omega^{n-1} \left[\frac{1}{1+r^n} \right]_0^\infty = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} d\Omega^{n-1} < \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

II. FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

Definíció: Egy $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvény Fourier-transzformáltja:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}) = (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}), \quad (13)$$

ahol $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$.

Az integrál értéke minden esetben véges, hiszen

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} |e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x})| = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} |\varphi(\mathbf{x})| < \infty . \quad (14)$$

Ez ugyanígy teljesül a φ deriváltjainak a Fourier-traszformáltjaira.

A Fourier-traszformáció **folytonos leképezést** valósít meg. A *Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel* értelmében, ha φ_n az integrálható függvényeknek egy olyan sorozata, amely null mértékű halmaztól eltekintve pontonként konvergál egy φ függvényhez

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi , \quad (15)$$

és létezik egy integrálható h függvény, amelyre $|\varphi_n| \leq h$, ekkor φ integrálható és a φ_n integráljaiból álló sorozat konvergál a φ integráljához:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n = \int \varphi . \quad (16)$$

Mivel a Schwartz-térbeli konvergencia erősebb a függvények pontonkénti konvergenciájánál és $|e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}| = 1$, ezért a Fourier-traszformáció folytonossága következik.

A Fourier-traszformált **folytonosan deriválható**. Tekintsük a Fourier-traszformáltnak a \mathbf{k} hullámszám vektor i -edik komponense szerinti parciális deriváltját:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_i} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) &= \lim_{k_i^* \rightarrow k_i} \frac{1}{k_i^* - k_i} \left[\int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) - \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) \right] \\ &= \lim_{k_i^* \rightarrow k_i} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} \frac{e^{-i\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{x}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k_i^* - k_i} \varphi(\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (17)$$

A jobboldali integrandusra teljesül, hogy

$$\lim_{k_i^* \rightarrow k_i} \frac{e^{-i\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{x}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k_i^* - k_i} \varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial k_i} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) = -i x_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) , \quad (18)$$

ami egy folytonos függvény. Ezért, illetve a Schwartz-térbeli függvények tulajdonságai miatt a baloldali sorozat tagjai eleget tesznek a Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel feltételeinek. Ami azt jelenti, hogy a hullámszám vektor komponensei szerinti parciális deriválás felcserélhető az integrálással, vagyis

$$\frac{\partial}{\partial k_i} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) \frac{\partial e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\partial k_i} = -i \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} x_i \varphi(\mathbf{x}) . \quad (19)$$

Ez bárhányadik parciális deriváltra teljesül. Mivel a $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ függvény tetszőleges $x_i^{\alpha_i}$ hatványokkal való szozata is a Schwartz-tér eleme, ezért egy Schwartz-térbeli elem Fourier-traszformáltjának hullámszámvektor komponensei szerinti deriváltak is megfelelnek egy Schwartz-térbeli függvény Fourier-traszformáltjának. Az utóbbiról beláttuk, hogy folytonos. Ezért a Fourier-traszformáció a végtelenszer folytonosan differenciálható függvényekből a végtelenszer folytonosan differenciálható függvények körébe létesít leképezést.

A. A Fourier-traszformáció tulajdonságai

A Fourier-traszformáció az integrálás tulajdonságai miatt **lineáris leképezés**, vagyis $z_i \in \mathbb{C}$, és $\varphi_i \in S(\mathbb{R}^n)$ esetén teljesül, hogy

$$\mathcal{F}(z_1 \varphi_1 + z_2 \varphi_2) = z_1 \mathcal{F}(\varphi_1) + z_2 \mathcal{F}(\varphi_2) . \quad (20)$$

Az eltoló függvény Fourier-transzformáltja: Az eltolás definíció szerint tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ -re:

$$(T_a \varphi)(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) , \quad (21)$$

ahol $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Ekkor

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(T_a \varphi))(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{y} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{a})} \varphi(\mathbf{y}) \\ &= e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{y} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) . \end{aligned} \quad (22)$$

Így

$$\mathcal{F}T_a = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}} \mathcal{F} . \quad (23)$$

Tehát az eltolás hatása a Fourier-transzformáltra:

$$T_a(\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) = (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k} - \mathbf{a}) . \quad (24)$$

Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$T_a \mathcal{F} = \mathcal{F} e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}} . \quad (25)$$

A derivált függvény Fourier-transzformáltja: A parciális deriválásra az alábbi jelölést vezetjük be

$$\partial_j \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} , \quad (26)$$

ahol $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Így

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\partial_j \varphi)(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j \varphi e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^n \mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^{n-1} \mathbf{x} \right]_{x^j=-\infty}^{x^j=\infty} - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \partial_j e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^n \mathbf{x} \\ &= \frac{ik_j}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^n \mathbf{x} = ik_j (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) , \end{aligned} \quad (27)$$

ahol felhasználtuk hogy a Schwartz-tér elemei a ∞ -ben gyorsan lecsengenek. Ezért

$$\mathcal{F}\partial_j = ik_j \mathcal{F} . \quad (28)$$

Bevezetve a

$$\partial_j (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) \equiv \frac{\partial}{\partial k_j} (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) \quad (29)$$

jelölést szintén bizonyítható, hogy

$$\partial_j \mathcal{F} = -i\mathcal{F}x_j . \quad (30)$$

Továbbá

$$\mathcal{F}\partial_j \partial_i = (ik_i)(ik_j) \mathcal{F} , \quad \partial_i \partial_j \mathcal{F} = i^2 \mathcal{F}x_i x_j . \quad (31)$$

A fentiekből tetszőleges polinomiális alakra következik, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}P(\partial_1, \dots, \partial_n) &= P(ik_1, \dots, ik_n) \mathcal{F} , \\ P(i\partial_1, \dots, i\partial_n) \mathcal{F} &= \mathcal{F}P(x_1, \dots, x_n) . \end{aligned} \quad (32)$$

Példa polinomiális alakú deriváló operátorra:

$$P(\partial_1, \partial_2, \partial_3) = \partial_1^2 + \partial_1 \partial_2^3 + \partial_3 . \quad (33)$$

A függvények konvolúciójának Fourier-transzformáltja: Emlékeztetőként a konvolúció

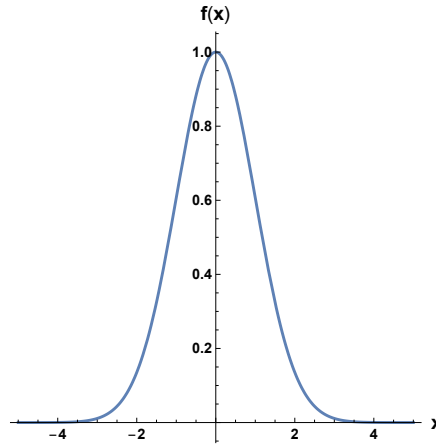
$$(\varphi * \psi)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^n \mathbf{y}, \quad (34)$$

ahol jelen esetben φ és $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. A Fourier-transzformáció definíciójából:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\mathcal{F}(\varphi * \psi))(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi * \psi)(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^n \mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}} (\mathcal{F}\psi)(\mathbf{k}) = (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) (\mathcal{F}\psi)(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (35)$$

B. Példák

1) Keressük a Gauss-függvényt (lásd 1. ábra)



1. ábra. A Gauss-függvény az 1-es példához.

$$\varphi(\mathbf{x}) = e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}}$$

Fourier-transzformáltját:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\varphi)(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{k}|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} + i\mathbf{k})^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{y} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^2} = e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{2}}, \end{aligned} \quad (36)$$

ahol felhasználtuk az

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{x} + i\mathbf{k})^2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} + i\mathbf{k})(\mathbf{x} + i\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} \left[|\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{k}|^2 + 2i\mathbf{k}\mathbf{x} \right] = -\frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2 + \frac{1}{2} |\mathbf{k}|^2 - i\mathbf{k}\mathbf{x}, \quad (37)$$

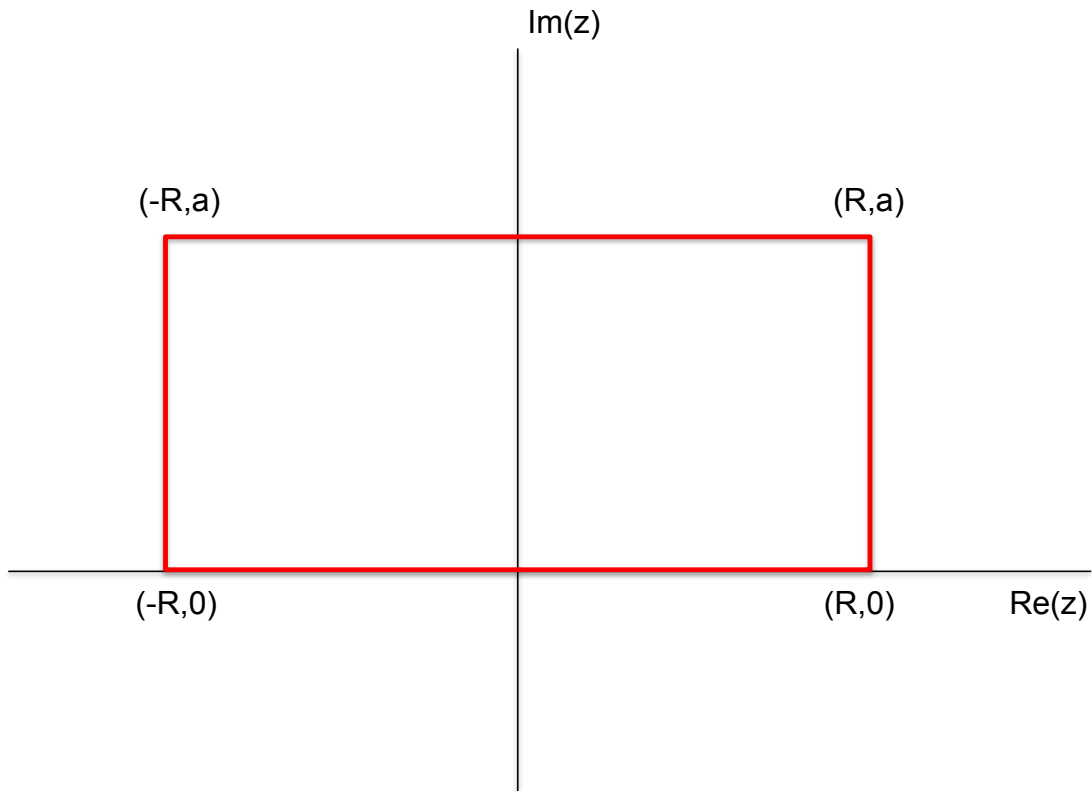
átalakítást, alkalmaztuk az

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + i\mathbf{k} \quad (38)$$

változó cserét és az integrál táblázatból a

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{y} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^2} = (2\pi)^{n/2} \quad (39)$$

formulát. **Megjegyzés:** A fenti számolásban egy olyan változó cserét alkalmaztunk ((38) kifejezés), amikor az integrálás során a valós térről egy komplex térre tértünk át. Részletezzük az integrálási változó cserét 1-dimenzióban, az általánosítás több dimenzióra az exponenciális függvény tulajdonságai miatt könnyen látható. Tehát 1 változó esetén az



2. ábra. Integrálási út a komplex számsíkon az 1-es példához.

$$z = x + ik \quad (40)$$

változó cserével kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} = \int_{-\infty+ik}^{\infty+ik} dz e^{-\frac{1}{2}z^2} . \quad (41)$$

Használjuk fel a Cauchy-integrál tételt, amelynek alapján

$$\oint_C dz e^{-\frac{1}{2}z^2} = 0 , \quad (42)$$

ha C egy zárt görbe, ami egy egyszeresen összefüggő tartományt határol, hiszen az integrandusban egy holomorf függvény szerepel. Legyen C egy téglalap, amelynek végpontjai a komplex számsíkon: $(-R, 0)$, $(R, 0)$, (R, a) , $(-R, a)$ (lásd 2 ábrát). Tekintsük az integrál kifejezését a képzetes tengellyel párhuzamos szakaszon, amit az $(R, 0)$, (R, a) pontok határolnak. Felhasználva, hogy $z = R + is$, alakú ezen a szakaszon, és a képzetes rész szerint kell integrálni ($dz = ids$) kapjuk e szakaszon:

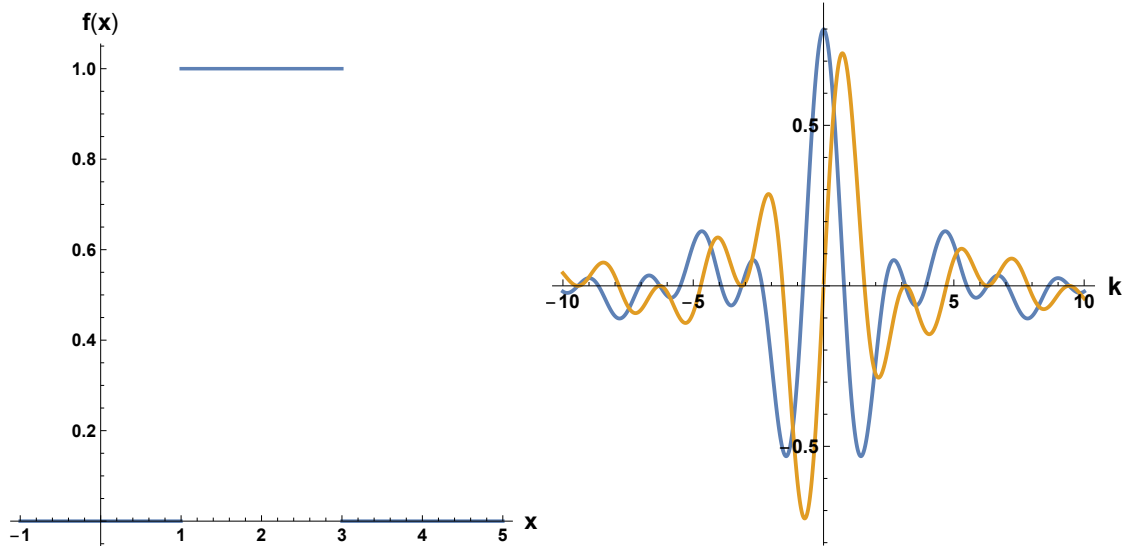
$$i \int_0^a ds e^{-\frac{1}{2}(R+is)^2} = ie^{-\frac{1}{2}R^2} \int_0^a ds e^{\frac{1}{2}s^2 - iRs} . \quad (43)$$

A $(-R, a)$ és $(-R, 0)$ pontok közötti szakaszon az integrál hasonló alakú. Ha $R \rightarrow \infty$, akkor e szakaszokon az integrál értéke a nullához konvergál. Ezért $R \rightarrow \infty$ -re a $(-R, 0)$, $(R, 0)$ szakaszon (a téglalap alsó, valós számegegyenesen fekvő szakaszán) az integrál éppen megegyezik az $(-R, a)$, (R, a) szakaszon vettével. Így

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} = \int_{-\infty+ik}^{\infty+ik} dz e^{-\frac{1}{2}z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad (44)$$

amit fentebb alkalmaztunk.

2) A négyszög-függvény:



3. ábra. Baloldalon a négyszög-függvény a 2-es példához $A = 1$ és $B = 3$ paraméter választással. A Jobboldalon pedig a függvény Fourier-transzformáltjának valós (kék) és képzetes (narancs) részei láthatók.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & A \leq x \leq B \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (45)$$

(lásd 3. ábra baloldalát $A = 1$ és $B = 3$ -ra). A Fourier-transzformált:

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B dx e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_A^B = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}ik} (e^{-ikB} - e^{-ikA}). \quad (46)$$

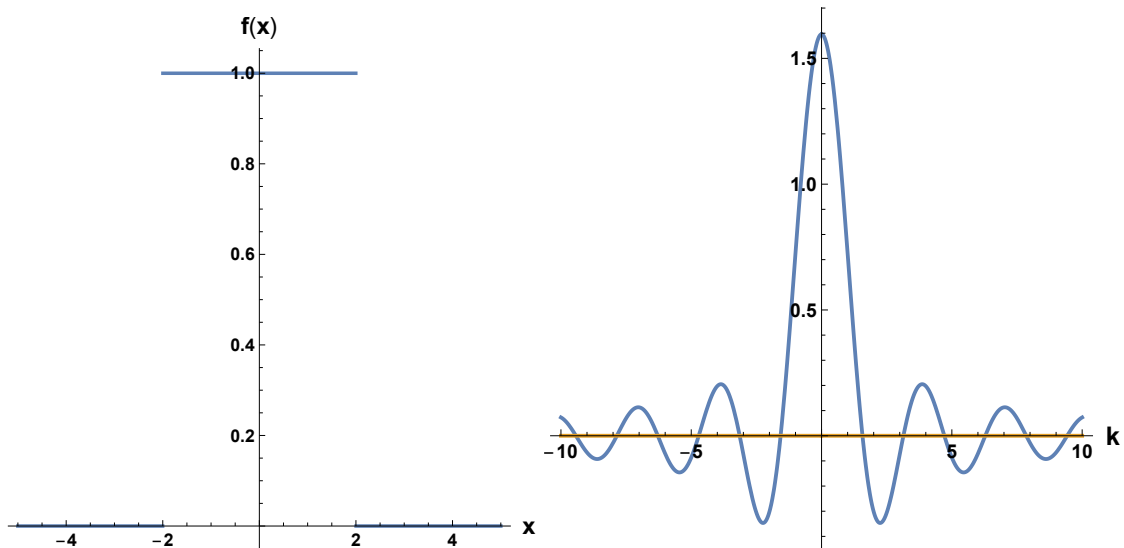
A 3. ábra jobboldala mutatja a Fourier-transzformált valós és képzetes részeit $A = 1$ és $B = 3$ esetén. Ha $A = -T$ és $B = T$:

$$\widetilde{f}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}ik} (e^{-ikT} - e^{ikT}) = \frac{2 \sin kT}{\sqrt{2\pi}k}. \quad (47)$$

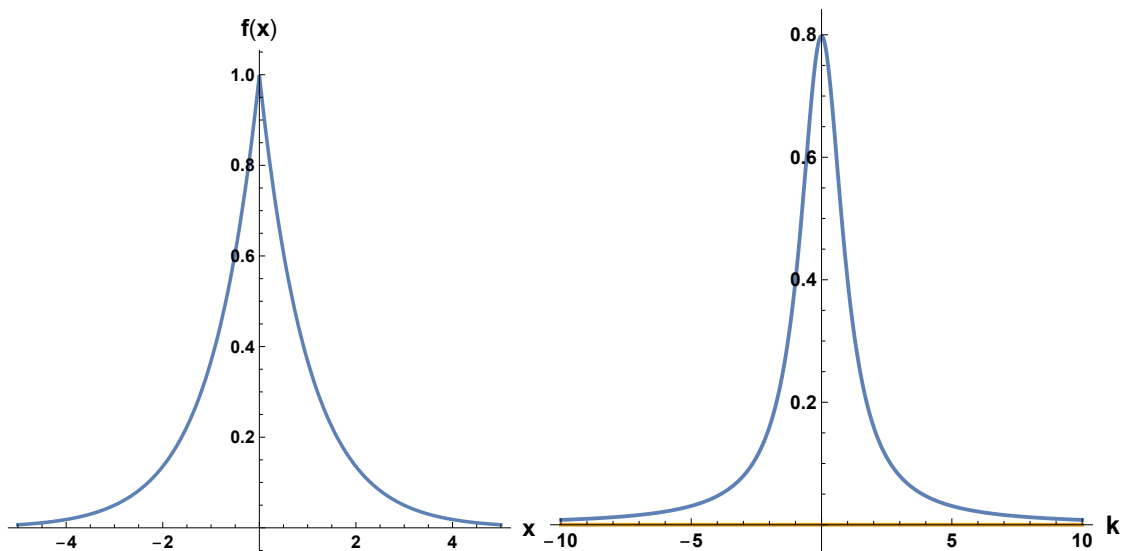
Ekkor az eredeti függvényt és Fourier-transzformáltját a 4. ábra mutatja $T = 2$ -vel.

3) Az

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad (a > 0) \quad (48)$$



4. ábra. Baloldalon a négyszög-függvény a 2-es példához $A = -T = -2$ és $B = T = 2$ paraméter választással. A Jobboldalon pedig a függvény Fourier-transzformáltjának valós (kék) és képzetes (narancs) részei láthatók.



5. ábra. Baloldalon az $f(x) = e^{-|x|}$ függvény. A Jobboldalon pedig a függvény Fourier-transzformáltjának valós (kék) és képzetes (narancs) részei láthatók.

függvény Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{e^{-a|x|}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-a|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 dx e^{-ikx} e^{ax} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-ax} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 dx e^{(a-ik)x} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx e^{-(a+ik)x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik} \right]_{-\infty}^0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik} \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + k^2} .
 \end{aligned} \tag{49}$$

Az eredeti függvényt és Fourier-transzformáltját a 5 ábra mutatja $a = 1$ -el.

III. ELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK-FELADATOK

1. Mondjon egy olyan komplex értékű függvényt amely eleme a Schwartz-térnek, illetve egy olyat, amely nem eleme annak.
2. A $\sin x$ függvény eleme e a Schwartz-térnek?
3. Az (22) formula bizonyításának analógiájával mutassa meg (25) kifejezés teljesülését.
4. A (28) formula bizonyításának analógiájával mutassa meg (30) és (31) kifejezések teljesülését.
5. Határozza meg az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > A \\ \cos x, & -A \leq x \leq A \end{cases} \quad (50)$$

függvény Fourier-transzformáltját. Sematikusan rajzolja fel mind az $f(x)$ függvényt és annak Fourier-transzformáltját.

IV. REFERENCIÁK

Az alábbi referenciák segítik az órai tananyag mélyebb szintű megértését, illetve továbblépési lehetőséget kínálnak a témakörben:

-
- [1] Bartha F., *Óravázlatok a Matematikai Módszerek a Fizikában 2. előadásokhoz I. rész: Disztribúcióelmélet* (2003). <http://www.staff.u-szeged.hu/~barthaf/1resz.pdf>
 - [2] J. Kirkwood, *Mathematical Physics with Partial Differential Equation*, Academic Press, Elsevier, Second Edition (2018).
 - [3] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Distributions: Theory and Applications*, Springer (2010).
 - [4] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Second Edition (1991).
 - [5] J. K. Hunter, B. Nachtergaele, *Applied Analysis*, World Scientific (2001).
 - [6] H. Abels, *Pseudodifferential and Singular Integral Operators, An Introduction with Applications*, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG (2012).

JELLEN TANANYAG
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEMEN KÉSZÜLT,
AZ EURÓPAI ÚNIÓ TÁMOGATÁSÁVAL.
PROJEKTAZONOSÍTÓ: EFOP-3.4.3-16-2016-00014.

