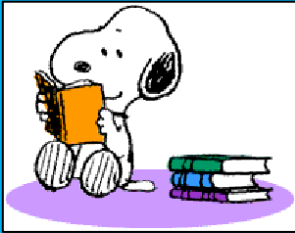


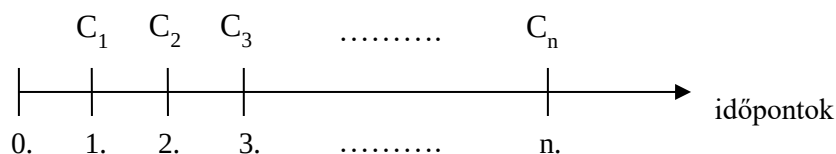
 Kosztópulosz Andreász	Mottó: <i>„Ha hajót akarsz építeni, talán nem is az a legfontosabb, hogy összegyűjtsd a mérnököket és a hajóácsokat, hanem, hogy felébreszd a vágyat a végtelen után.”</i> Antoine de Saint-Exupéry	Kulcsfogalmak: DCF-módszer, örökjáradék, növekvő örökjáradék, esedékes és szokásos annuitás, annuitásos hitelkonstrukció, növekvő annuitás	 ≈ 60 perc
---	--	---	---

A jelenérték-számítás segítségével most már közös nevezőre tudjuk hozni a különböző időpontokban esedékes pénzáramlás-sorozatokat (cash-flow-kat), így ezek – a jelenértékükön – összeadhatóvá, kivonható, összehasonlíthatóvá válnak. Másként fogalmazva: a jelenérték rendelkezik az additivitás tulajdonságával, vagyis: $PV(A+B) = PV(A) + PV(B)$. Két pénzáramlás-sorozatot akkor tekintünk egyenértékűnek, ha jelenérték-összegük megegyezik. Az olvasóleckében áttekintjük a módszer néhány speciális alkalmazását, amelyek révén lehetőségünk nyílik bizonyos, szabályszerű pénzáramlás-sorozatok jelenértékének gyorsabb meghatározására.

1. Pénzáramlás-sorozat jelenértéke

A jelenérték-számítás egyik nagy előnye, hogy a segítségével mindent mai pénzben kifejezve a különböző időpontokban esedékes pénzáramlások összeadhatóvá válnak. A **jelenérték rendelkezik tehát az additivitás tulajdonságával**, vagyis az $A+B$ pénzáramlások jelenértéke megegyezik az A jelenértékének és a B jelenértékének az összegével: **$PV(A+B) = PV(A) + PV(B)$** .

1. ábra Cash-flow időbeli szerkezete



A gyakorlatban legtöbbször nem egyetlen pénzösszeggel van dolgunk, hanem a pénzügyi döntések pénzáramlás-sorozatokhoz, cash-flow-khoz kötődnek. **A cash-flow különböző időpontokban esedékes pénzáramlások sorozatát jelenti (1. ábra).** **Ha ez pénzbeáramlást jelent, akkor cash-inflow-ról, ha pénzkiráramlást jelent, akkor cash-outflow-ról beszélünk.** Ha pénzáramlás-sorozatokról kell dönteni, akkor meg kell tudnunk határozni egy cash-flow mai értékét, ami azt a mai pénzösszeget jelenti,

ami egyenértékű a vizsgált pénzáramlás-sorozattal. Az additivitás tulajdonságát felhasználva ez nem más, mint a pénzáramlás-sorozatot alkotó pénzösszegek jelenértékeinek az összege. Ez az ún. **DCF (azaz diszkontált cash-flow) módszer**.

A DCF (diszkontált cash flow) - módszer:

$$PV = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^n} = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+r)^i}, \text{ ahol}$$

$C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$: a cash-flowt alkotó (periodikusan jelentkező) pénzösszegek sorozata

r : a periódusra vonatkozó, a kockázatot is tükröző diszkontráta,

n : a periódusok száma

Egy pénzáramlás-sorozat jelenérték-összegének meghatározása

Egy beruházás a következő 3 év végén az alábbi pénzbevételeket eredményezi:

Év	Pénzbevétel
1.	5 MFt
2.	7 MFt
3.	8 MFt

Mennyit ér ma a beruházás, ha a hasonló kockázatú befektetési lehetőségek várható hozama a piacon 20%?

A DCF-módszer alapján a beruházás jelenértéke megegyezik a beruházás pénzbevételeinek jelenérték-összegével 20 %-os diszkontrátát alkalmazva, tehát:

$$PV = \frac{5MFt}{1,2} + \frac{7MFt}{1,2^2} + \frac{8MFt}{1,2^3} = 13,66MFt$$

A beruházás tehát 13,66 MFt-ot ér ma.

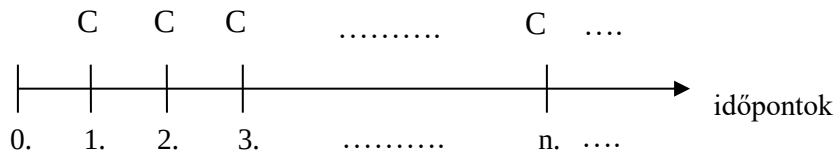
Az Excel is használható ilyen periodikus pénzáramok jelenérték-összegének meghatározására. A probléma a magyar nyelvű változatban az NMÉ függvény, míg az angol nyelvű változatban az NPV függvény segítségével oldható meg.

A jelenérték meghatározása során a pénzügyi modellekben gyakran speciális, bizonyos szabályszerűségeket mutató pénzáramokból indulunk ki. Ilyen esetekben a DCF-módszer kiváltható **különböző formulák** – gyorsabb számítást lehetővé tévő – alkalmazásával. A továbbiakban ilyen speciális pénzáramlás-sorozatokat ismerünk meg.

2. Örökjáradékok jelenértéke

Örökjáradéknak nevezzük azt a végtelen tagú fizetési sorozatot, **mely azonos időközönként (pl. évente) azonos összegű kifizetéseket biztosít** (2. ábra).

2. ábra Az örökjáradék cash-flow-ja



Egy örökjáradék jelenértékét a DCF-módszer alkalmazásával úgy számolhatjuk ki, hogy a járadék minden egyes kifizetésének kiszámítjuk a jelenértékét, és ezeket az értékeket összeadjuk. Ez a végtelen összeg – tulajdonképpen egy mértani sor – zárt formára hozva egyszerűen meghatározható.

Az örökjáradék jelenértékének képlete:

$$\frac{C}{r}, \text{ ahol}$$

C : az évente kifizetett összeg (járadéktag),

r : a diszkontáláshoz használt, a kockázatot is tükröző kamatláb.

A képlet kizárólag olyan örökjáradékok esetén használható, amelyeknél az első pénzáramlás-elem az első periódus végén esedékes.

Örökjáradék jelenértéke

Tegyük fel, hogy egy licenc után évente 1.000.000 Ft díjat kell fizetni. Ha a kamatláb 10%, mennyi a licenc értéke?

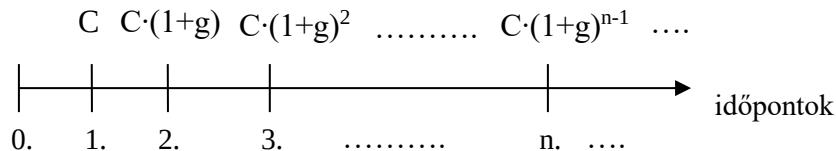
A licenc tulajdonképpen pénzügyi szempontból egy örökjáradéknak tekinthető, ami évente 1.000.000 Ft cash-flow-t biztosít a tulajdonosának. Ezen cash-flow jelenértéke 10% kamatláb mellett a fenti képletet alkalmazva:

$$1.000.000 / 0,10 = 10.000.000 \text{ Ft.}$$

A licenc értéke tehát 10.000.000 Ft.

Egyenletes (g) ütemben növekvő örökjáradékról akkor beszélünk, ha a rendszeres időközönként biztosított kifizetések összege az első kifizetéstől kezdve egyenletesen növekszik: periódusról periódusra az $(1+g)$ -szeresére nő (3. ábra). Az első kifizetés az első periódus végén esedékes.

3. ábra Az egyenletes (g) ütemben növekvő örökjáradék cash-flow-ja



A növekvő örökjáradék jelenértékének meghatározása során előállhat az a probléma, hogy amennyiben túl gyorsan nőnek a járadéktagok (a növekedés üteme nagyobb vagy egyenlő, mint a diszkontráta), akkor nem lesz véges szám a jelenérték-összeg. Ezért a jelenérték zárt formában történő meghatározhatóságának a feltétele: $r > g$.

Az egyenletes ütemben növekvő örökjáradék jelenértékének képlete:

$$\frac{C}{r - g}, \text{ ahol}$$

C : az első év végén kifizetett összeg,

r : a diszkontáláshoz használt a kockázatot is tükröző kamatláb,

g : a növekedés üteme.

Az összegző képlet alkalmazásának feltétele az $r > g$ reláció fennállása, ellenkező esetben a jelenérték minden határon túl nő!

Növekvő örökjáradék jelenértéke

Térjünk vissza az előző példánkhoz, és tegyük fel azt is, hogy az infláció miatt a licencdíj összege az első kifizetést követően évente 5 %-kal nő. (Ez a következő cash-flow-t jelenti: 1.000.000Ft, 1.050.000Ft, 1.102.500Ft, stb.) Mennyit érne ebben az esetben a licenc?

Alkalmazva képletet:

$$1.000.000 / (0,1 - 0,05) = 20.000.000\text{Ft adódik a licenc értékére.}$$

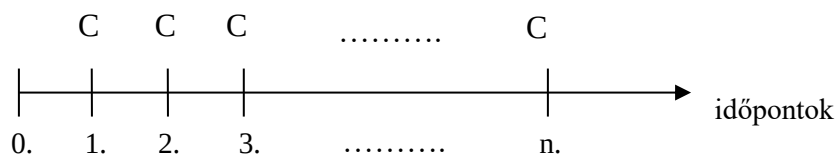
Douglas Adams a következő módon határozta meg a végtelent a „Galaxis útikalauz stopposoknak” című regényében:

„Végtelen: nagyobb, mint a valaha létezett legnagyobb dolog, továbbá nagyobb sok egyéb dolognál. Nevezetesen sokkal nagyobb, mint az elképesztően óriási, a baromi nagy és a "Hű, ezt nézd meg, mekkora!". A végtelen olyan nagy, hogy hozzá képest a nagyság maga is eltörpül. Olyasmiről van szó, amit a gigantikusszor kolosszáliссzor lélegzetelállítóan hatalmas képzetével tudnánk érzékeltetni."

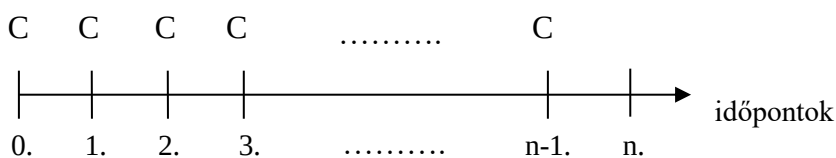
3. Annuitások jelenértéke

Annuitásról akkor beszélünk, ha **járadékunk rendszeres időközönként (pl. évente) azonos összegű kifizetést ígér, de nem örökké, hanem csupán meghatározott ideig** (pl. 20 éven keresztül). Az annuitás két típusa: a **szokásos annuitás** és az **esedékes annuitás**. Szokásos annuitás esetén a kifizetések **a periódus végéhez** rendelkeznek hozzá (4. ábra). Az esedékes (vagy más néven: előleges) annuitásoknál viszont a kifizetések **a periódusok elején** jelentkeznek (5. ábra).

4. ábra A szokásos annuitás cash-flow-ja



5. ábra Az esedékes annuitás cash-flow-ja



A szokásos annuitás jelenértékének képlete:

$$C \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \right], \text{ ahol}$$

C : az évente kifizetett összeg (járadéktag),

r : a diszkontáláshoz használt, a kockázatot is tükröző kamatláb,

n : a periódusok száma, ameddig az annuitás kifizetést biztosít.

Szokásos annuitás jelenértéke

Tegyük fel, hogy példánkban a licenccím nem örökre, hanem csak a szabadalmi védelem lejáratáig jár, amiből még 5 év van hátra. Ekkor az 1.000.000 Ft-os licenccímre csupán 5 alkalommal tarthatunk igényt. A kamatláb továbbra is 10%, a licenccímek összege most nem változik. Mekkora ekkor a licenccím értéke?

Alkalmazva a képletet:

$$1.000.000 \left(\frac{1 - \frac{1}{1,1^5}}{0,1} \right) = \text{kb. } 3.791.000 \text{ Ft adódik.}$$

A szokásos annuitás jelenértéke [annuitástényező-táblázat](#) (1. számú melléklet) segítségével is meghatározható (már amennyiben rendelkezésünkre áll ilyen táblázat). Az annuitástényező-táblázatból egyszerűen kiolvasható, hogy mekkora az 1 Ft rendszeres periódusonkénti kifizetés-sorozat jelenbeli értéke r kamatláb és n periódus esetén. Az annuitástényező-táblázatban a sorokban a periódusok száma (n) az oszlopokban pedig az alkalmazott kamatlábak (r) vannak feltüntetve. Az annuitástényező-értéke pedig koordinátamódszerrel (azaz megkeresve a megfelelő sor és oszlop metszéspontjában lévő értéket) olvasható ki a táblázatból. A jelenérték ezt követően egy egyszerű szorzás segítségével számolható ki:

A szokásos annuitás jelenérték-összegének meghatározása annuitástényező-táblázattal:

$$\text{Jelenérték} = \text{Járadék összege} \times \text{Annuitástényező}_{r,n}$$

Esedékes annuitás esetén a jelenérték kiszámításához felhasználható akár a szokásos annuitás képlete, akár az annuitástényező-táblázat egy kis korrekcióval: **a periódusszámot eggyel csökkentenünk kell, a tényező értékét viszont eggyel növelnünk kell**. Minthogy egy esedékes annuitás ugyanazokat a kifizetéseket tartalmazza, mint a szokásos, azzal, hogy minden egyes kifizetés egy periódussal korábban esedékes, ezért az **esedékes annuitás jelenértéke nagyobb, mint a szokásos annuitásé, egészen pontosan az utóbbi $(1+r)$ -szerese.**

Az esedékes annuitás jelenérték-összegének meghatározása annuitástényező-táblázattal:

$$\text{Jelenérték} = \text{Járadék összege} \times (\text{Annuitástényező}_{r,n-1} + 1)$$

Az esedékes és a szokásos annuitás jelenérték-összegének kapcsolata:

$$\text{PV}(\text{Esedékes annuitás}) = \text{PV}(\text{Szokásos annuitás}) \times (1 + r)$$

Ingatlan bérleti díjának jelenérték-összege

Tegyük fel, hogy egy ingatlan bérleti díját havonta kell fizetnünk, melynek összege: 150.000 Ft. Mekkora jelenbeli egyösszegű kifizetéssel egyenértékű a kifizetett bérleti díjak sorozata attól függően, hogy havonta előre kell fizetni, vagy minden hónap végén válik esedékessé a bérleti díj? A pénz időértékét és a kockázatot kifejező éves kamatláb 24%.

A periódus most egy hónapot jelent, és mivel 1 évet vizsgálunk a periódusok száma: $n=12$. A kamatláb érvényességi időtartama viszont 1 év, ezt havi kamatlábra kell átszámolni. Éven belül egyszerű lineáris időarányosítást szoktunk alkalmazni, ezért a havi kamatláb $24\% / 12 = 2\%$ -nak vehető.

Havi utólagos fizetésnél (ez szokásos annuitást jelent) az annuitástényező értéke a táblázatból az $n=12$ sor és $r=2\%$ oszlop metszéspontjában található érték, azaz: 10,5753, vagyis az annuitás jelenértéke:

$$150.000\text{Ft} \cdot 10,5753 = 1.586.295\text{Ft}.$$

Hó eleji fizetésnél (ami esedékes annuitásnak feleltethető meg) az annuitástényező meghatározásához a periódusszámot csökkenteni kell eggyel, azaz $n=11$, az annuitástényező táblázatbeli értékéhez pedig 1-et hozzá kell adni, azaz a bérleti díj sorozat jelenértéke:

$$150.000\text{Ft} \cdot (9,7868 + 1) = 1.618.020\text{Ft}.$$

Az esedékes annuitás jelenértéke mindig nagyobb, mint az azonos paraméterű szokásos annuitás jelenértéke, és értéke annak $(1+r)$ -szerese. A példában $1.618.020 / 1.586.295 \approx 1,02$

Az annuitás-számítások egyik jellemző gyakorlati alkalmazása a **hitelkonstrukciókkal** kapcsolatos különféle számításokhoz kötődik. Gyakran találkozunk ugyanis különféle hiteleknel (pl. lakáshitel, fogyasztási hitelek) az úgynevezett **annuitásos hitelkonstrukciókkal**, melyekre az jellemző, hogy **a törlesztő összegek periódusról periódusra megegyeznek** (pl. minden hónapban azonos nagyságú összeget kell törleszteni). Az ilyen hiteleknel a törlesztő összegek sorozata tulajdonképpen egy annuitás, és a hitelkamat valamint a futamidő függvényében úgy határozzák meg a nagyságukat, hogy a törlesztőösszeg-sorozat jelenértéke megegyezzen a folyósított hitel nagyságával. A kérdés tehát most fordítva vetődik fel: **ismert jelenértékhez mekkora összegű pénzáramlás-sorozat tartozik?** A következő komplex példa segítségével jobban megérthető a megközelítés logikája.

Kedvezményes kamatozású hitel

Egy autószalon a forgalom növelése érdekében a Toyota Prius modellre a következő fizetési feltételeket dolgozta ki:

„*Hitelkonstrukció*”: a vevők részére 2 millió Ft kedvezményes kölcsönt nyújtanak 18%-os éves kamat mellett, és a kölcsönt 15 hónap alatt, egyenlő részletekben kell visszafizetni.

„*Árelőny*”: a vevő 100ezer Ft engedményt kap a listaárból.

Melyik konstrukció előnyösebb az autószalon részére, ha a fogyasztási hitelek éves kamata 24% körül van? (Éven belül egyszerű lineáris időarányosítással számoljuk ki a törtidőszaki kamatot.)

A hitelkonstrukció azért jelent kedvezményt a vevő számára, mert a felajánlott kamat alacsonyabb a piaci kamatnál. Első lépésként határozzuk meg, hogy a felkínált konstrukció elfogadása esetén mekkora lesz a törlesztő összeg nagysága. A törlesztő összegek sorozata egy annuitás, ahol a periódusok száma 15, az 1 hónap terjedelmű periódusra vonatkozó kamatláb pedig $18\% / 12 = 1,5\%$.

A szokásos annuitás képletébe behelyettesítve a következő összefüggés írható fel a törlesztő összeg (C) nagyságára:

$$2.000.000 = C \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \right] = C \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{1,015^{15}}\right)}{0,015} = C \cdot 13,3432, \text{ ahonnan}$$

$$C = 149.889 \text{ Ft}$$

Havonta a vevőnek 149.889 Ft-ot kell kifizetnie. Mekkora ezen pénzáramlás-sorozat jelenértéke a piaci viszonyok szerint? A piaci kamatláb éves szinten 24%, ez havi 2%-os kamatnak felel meg; emellett kell tehát értékelnünk a hitelkonstrukció igénybe vételével létrejövő annuitást. A megfelelő

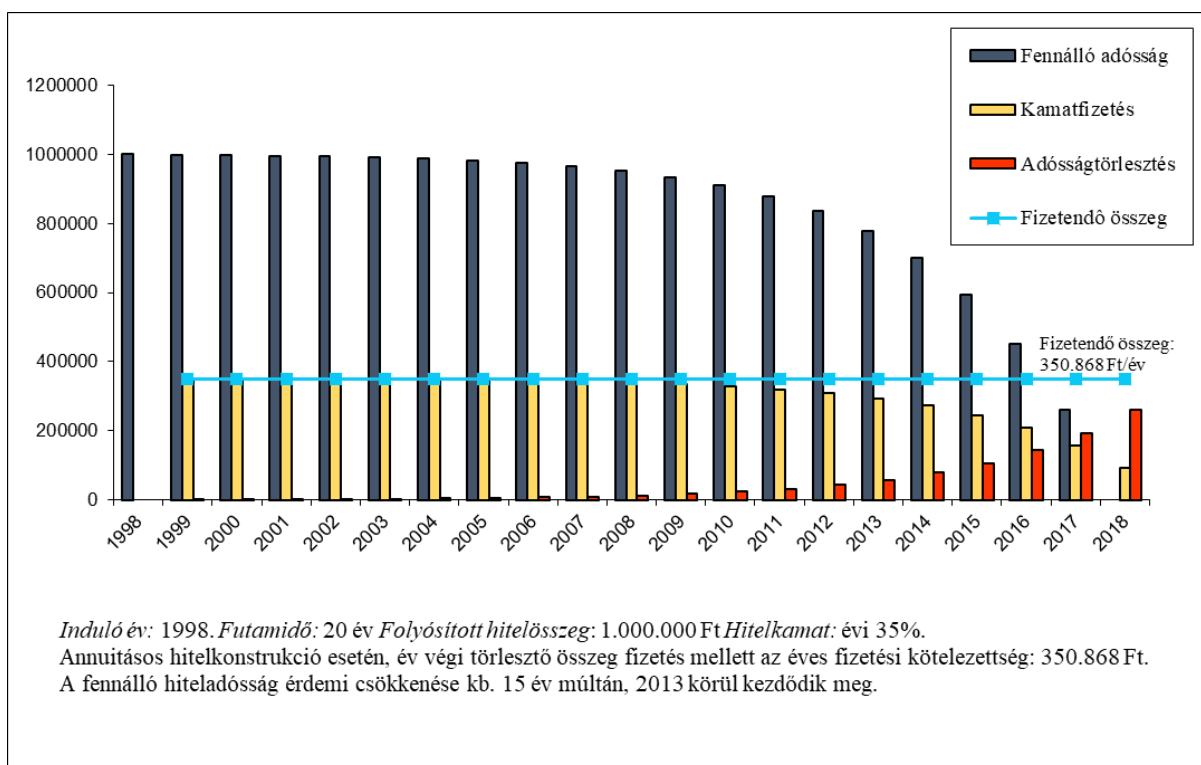
annuitás tényező kiolvasható az annuitás táblázatból: az $n=15$ sor és az $r=2\%$ oszlop metszéspontjában szereplő érték: 12,8493. Ezzel számolva a kedvezményes hitelkonstrukció jelenértéke:

$$149.889\text{Ft} \cdot 12,8492 = 1.925.969\text{Ft.}$$

Mivel a szalon 2 millió Ft-ot ad cserébe, ezért ez a konstrukció a szalon számára $2.000.000\text{ Ft} - 1.925.969\text{ Ft} = 74.031\text{ Ft}$ ráfordítást jelent, míg az árelőny-konstrukciónál a ráfordítás értéke megegyezik az árkedvezmény 100.000 Ft -os összegével. Az autósalon számára tehát egyértelműen a kedvezményes hitel a kedvezőbb konstrukció.

Az annuitásos hitelkonstrukciók egyik lényeges **jellemzője**, hogy **a futamidő elején a törlesztő összegekben a kamattörlesztés a domináns, a tőke visszafizetése – érdeemben – a futamidő végéhez közeledvén gyorsul fel.** A 6. ábrán egy magas kamattal terhelt, hosszú lejáratú hitel esetében követhető nyomon a fennálló adósság csökkenésének időbeli alakulása, valamint a törlesztő összeg összetételének változása.

6. ábra Egy hosszú lejáratú hitel törlesztőösszegének összetevői



Az is lehetséges, hogy az annuitás összege az első kifizetést követően évente adott ütemben nő. Ezt a pénzáramlás sorozatot hívjuk **egyenletes (g) ütemben növekvő annuitásnak**. Egy ilyen annuitásnak mindig véges a jelenérték-összege, hiszen véges számú cash-flow elemből áll.

Az egyenletes ütemben növekvő annuitás jelenértékének képlete:

$$\frac{C}{r-g} - \frac{C \cdot (1+g)^n}{(1+r)^n}, \text{ ahol}$$

C : az első évben kifizetett összeg,

r : a diszkontáláshoz használt, a kockázatot is tükröző kamatláb,

g : a növekedés üteme (g nem lehet egyenlő r -rel).

n : a periódusok száma, ameddig az annuitás kifizetést biztosít.

Amennyiben $r = g$, a képlet egyszerűsödik az

$$\frac{n \cdot C}{1+r} \text{ formára.}$$

Növekvő tagú annuitás jelenértéke

Tegyük fel, hogy korábbi licencdíjas példában a még 5 évig járó licencdíjak összegébe beleszámoljuk az 5%-os éves inflációt az első kifizetést követően. Ebben az esetben mekkora lesz a licenc jelenértéke?

Behelyettesítve a fenti képletbe kapjuk, hogy

$$\frac{1.000.000}{0,1 - 0,05} - \frac{1.000.000 \cdot (1 + 0,05)^5}{(1 + 0,1)^5} = \text{kb. } 4.150.600 \text{ Ft a licenc értéke.}$$

4. Pénzáramlások jövőértéke

Előfordul, hogy egy adott pénzáramlás-sorozatnak nem a jelenérték-összegét szeretnénk meghatározni, hanem a **jövőértékét**. Ilyen esetben megoldást jelenthet, ha két lépésben határozzuk meg az eredményt. Az első lépésben az eddigi eredményekre építve a jelenérték-összeget határozzuk meg, majd a második lépésben az egyösszegű kifizetést már könnyen át tudjuk számítani egy tetszőleges jövőbeli időpontra a kamatszámítás segítségével. A nehezebb feladatot mindig a pénzáramlás-sorozat

értékösszegének meghatározása jelenti, ha megvan ez az értékösszeg, már könnyen tudjuk „mozgatni” az időegyes mentén kamatszámítás vagy diszkontálás segítségével.

Megtakarítás-sorozat jövőértékének meghatározása

Havonta rendszeresen 20.000 Ft-ot takarítunk meg, amit egy megtakarítási számlán helyezünk el havi 1% kamat mellett. Mekkora összeg gyűlik össze a számlán 2 év alatt, ha a kamatokat havonta tőkésítik?

A pénzáramlás sorozatunk most $2 \cdot 12 = 24$ periódusból áll. Tehát egy $n = 24$ periódust (hónapot) felölelő annuitás jövőértékét kellene meghatároznunk, 1%-os havi kamatláb mellett. Az első lépésben határozzuk meg az annuitás jelenérték-összegét annuitástáblázat segítségével:

$$PV = 20.000 \text{ Ft} \cdot \text{Annuitástényező}_{24, 1\%} = 20.000 \cdot 21,2134 = 424.268 \text{ Ft}$$

A második lépésben határozzuk meg a 424.268 Ft jövőértékét 24 hónap múlva, havi 1%-os kamatláb esetén. A kamattényezővel való szorzást helyettesíthetjük a diszkonttényezővel való osztással, tehát a diszkonttényező-táblázat használatával a jövőérték:

$$FV = 424.268 \text{ Ft} / \text{Diszkonttényező}_{24, 1\%} = 424.268 \text{ Ft} / 0,7876 = 538.865 \text{ Ft}$$

A megtakarítási számlán tehát nagyjából 538.865 Ft gyűlik össze. (Az eredmény nem pontos, mert mind az annuitástényezők, mind pedig a diszkonttényezők a táblázatokban kerekített értékkel szerepelnek.)



További érdekes információk a témában

Örökjáradék-kötvény

Van a kötvényeknek egy fajtája, amit angolul perpetual bondnak, magyarul meg leginkább örökjáradék-kötvénynek neveznek. Ennek az a lényege, hogy birtokosa meghatározott időközönként kamatkifizetést kap a kötvény kiállítójától végtelen ideig. A végtelenség feltétele viszont az, hogy a tőkeösszeget, tehát amennyiért a kibocsátó eladta a kötvényt, soha nem fizeti meg a kibocsátó vagy csak olyan feltételekkel, amik mellett valószínűtlenné vagy időben nagyon távolivá válik a kifizetés.

Na, egy ilyen örökjáradék-kötvény most 136 euró és 20 centnyi, azaz kb. 42200 forintnyi kamatot fizet az amerikai Yale Egyetemnek. Ez még önmagában nem is lenne olyan különös, viszont a kötvényt 367 éve, 1649-ban állította ki a hollandiai De Stichtse Rijnlanden vízügyi hatósága. Ebben az időben azért kellett a pénz a cégnek, hogy építhessen egy kis mólót a hollandiai Lek folyón.

A kötvényt kecskebőrre írták, és kiállításakor 1000 holland forintot ért. Ez az egyik a világ öt legöregebb érvényes kötvénye közül. Az érvényes itt azt jelenti, hogy még mindig fizet kamatot.

A Yale hétfőn kapja majd meg a pénzét.

Az egyetem 2003-ban vásárolta a kecskebőrt műtárgyként, akkor 24 ezer eurót fizettek érte. A vásárlás óta nem kaptak még kamatot, ez az első alkalom, hogy a holland társaságnak szerződés szerint fizetnie kell.

Forrás: [Sarkadi Zsolt írása a 444.hu internetes újságban \(2015. szeptember 18.\)](#)



ÖNELLENŐRZŐ KÉRDÉSEK:

1. Milyen típusú pénzáramlás-sorozatot értünk örökjáradék alatt?
2. Milyen típusú pénzáramlás-sorozat az annuitás?
3. Mi az annuitás két válfaja?
4. Barátja kér Öntől 1 millió Ft-ot, amelyek nem fog visszafizetni. Cserébe azt ajánlja, hogy minden év végén fizet Önnek 100.000 Ft-ot, először 1 év múlva, egészen az ő vagy az Ön haláláig. Elfogadja-e az ajánlatot, ha a piacon jelenleg érvényes 10%-os éves kamatot változatlanul gondolja?

- a.) igen
- b.) nem
- c.) a megadott adatokból nem állapítható meg

Megoldás: b.)

5. Lakáshitelt szeretnénk felvenni. A hitel futamideje 10 év, a felvett összeg 8.000.000 Ft. A hitel kamatlába évi 8%. A törlesztés havonta történik, egyenlő nagyságú összegekben. Mekkora lesz a havi törlesztés (kamat + tőke) összege?

Megoldás:

A hiteltörlesztés tulajdonképpen egy olyan annuitásnak tekinthető, amely havonta azonos nagyságú összegek kifizetését ígért. Ezen annuitás jelenértéke éppen a hitelösszeg, azaz 8.000.000 Ft.

Az annuitás futamideje összesen 10×12 hónap, azaz 120 perióduson keresztül fogunk törleszteni. A periódusra jutó kamatláb, azaz a havi kamatláb $8\% / 12 = 0,67\%$.

Helyettesítsünk be az annuitás jelenértékét leíró képletbe:

$$C \cdot \left[\frac{1 - \frac{1}{(1 + 0,0067)^{120}}}{0,0067} \right] = 8.000.000$$

Innen kell meghatároznunk C-t, a havi törlesztést. Elvégezve a számolást, kapjuk, hogy $C = 97.231$ Ft, azaz ennyi a havi törlesztés összege.

6. Az előző példában szereplő lakáshitelnél a harmadik hónap törlesztő összegén belül mennyi lesz a kamatfizetés és a tőketörlesztés nagysága?

Megoldás

Az előző példában meghatároztuk a hónapról hónapra fizetendő törlesztő összeg nagyságát, ez 97.231 Ft-ra adódott. A törlesztő összeg nagysága minden hónapban azonos, viszont eltérő arányban tartalmaz kamat- illetve tőketörlesztést. Kamatot mindig a még fennálló hiteltartozás után kell fizetni, és a tőketörlesztés összegével folyamatosan csökken a még fennálló hiteltartozás.

Az 1. hónap elején a hiteltartozás 8.000.000 Ft, ez után az összeg után kell kamatot fizetni a havi 0,67% kamatot, ami 53.600 Ft. Ez azt jelenti, hogy a teljes törlesztő összegből kivonva a kamatrészt, megkapjuk a tőketörlesztés nagyságát az 1. hónapban, ez 43.631 Ft. Az első hónapot követően ennyivel csökken a hiteltartozás összege, ami tehát a 2. hónap elején 7.956.369 Ft lesz. A 2. hónapban erre a fennálló tartozásra fizetjük a 0,67%-os kamatot. Ennek összege most 53.308 Ft lesz. A változatlan törlesztő összegből levonva a kamatfizetés nagyságát megkapjuk a 2. hónap tőketörlesztését, ami 43.923 Ft lesz. Ennyivel csökken a még fennálló hiteltartozás, mely a 3. hónap elején 7.912.446 Ft lesz. A keresett 3. hónapban kifizetett kamat ennek 0,67%-a, azaz 53.013 Ft. A tőketörlesztés összege pedig a teljes törlesztő összegből a kamaton felüli rész, vagyis 44.218 Ft lesz.

7. Határozza meg az 1 Ft értékű, n perióduson keresztül járó szokásos annuitás jövőbeli értékét!

Megoldás: $\text{Annuitástényező}_{r,n} / \text{Diszkonttényező}_{r,n}$

8. Határozza meg az 1 Ft értékű, n perióduson keresztül járó esedékes annuitás jövőbeli értékét!

Megoldás: $(\text{Annuitástényező}_{r,n-1} + 1) / \text{Diszkonttényező}_{r,n}$

8. Mennyi egy évente g ütemben csökkenő örökjáradék jelenértéke? (Most a pénzáramlás-sorozat a következő: $C, C(1-g), C(1-g)^2, C(1-g)^3, \dots$)

Megoldás: $C / (r+g)$



It's all corporate finance. (Aswath Damodaran)

Bővítse ismereteit az alábbi újságcikk elolvasásával!

[Lakásért életjáradék](#)

1. melléklet A (szokásos) annuitástényezők táblázata

Szokásos annuitástényező-táblázat: 1 Ft rendszeres periódusonkénti (periódusvégi) kifizetés jelenértéke

r/n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%	19%	20%
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091	0,9009	0,8929	0,8850	0,8772	0,8696	0,8621	0,8547	0,8475	0,8403	0,8333
2	1,9704	1,9416	1,9135	1,8861	1,8594	1,8334	1,8080	1,7833	1,7591	1,7355	1,7125	1,6901	1,6681	1,6467	1,6257	1,6052	1,5852	1,5656	1,5465	1,5278
3	2,9410	2,8839	2,8286	2,7751	2,7232	2,6730	2,6243	2,5771	2,5313	2,4869	2,4437	2,4018	2,3612	2,3216	2,2832	2,2459	2,2096	2,1743	2,1399	2,1065
4	3,9020	3,8077	3,7171	3,6299	3,5460	3,4651	3,3872	3,3121	3,2397	3,1699	3,1024	3,0373	2,9745	2,9137	2,8550	2,7982	2,7432	2,6901	2,6386	2,5887
5	4,8534	4,7135	4,5797	4,4518	4,3295	4,2124	4,1002	3,9927	3,8897	3,7908	3,6959	3,6048	3,5172	3,4331	3,3522	3,2743	3,1993	3,1272	3,0576	2,9906
6	5,7955	5,6014	5,4172	5,2421	5,0757	4,9173	4,7665	4,6229	4,4859	4,3553	4,2305	4,1114	3,9975	3,8887	3,7845	3,6847	3,5892	3,4976	3,4098	3,3255
7	6,7282	6,4720	6,2303	6,0021	5,7864	5,5824	5,3893	5,2064	5,0330	4,8684	4,7122	4,5638	4,4226	4,2883	4,1604	4,0386	3,9224	3,8115	3,7057	3,6046
8	7,6517	7,3255	7,0197	6,7327	6,4632	6,2098	5,9713	5,7466	5,5348	5,3349	5,1461	4,9676	4,7988	4,6389	4,4873	4,3436	4,2072	4,0776	3,9544	3,8372
9	8,5660	8,1622	7,7861	7,4353	7,1078	6,8017	6,5152	6,2469	5,9952	5,7590	5,5370	5,3282	5,1317	4,9464	4,7716	4,6065	4,4506	4,3030	4,1633	4,0310
10	9,4713	8,9826	8,5302	8,1109	7,7217	7,3601	7,0236	6,7101	6,4177	6,1446	5,8892	5,6502	5,4262	5,2161	5,0188	4,8332	4,6586	4,4941	4,3389	4,1925
11	10,3676	9,7868	9,2526	8,7605	8,3064	7,8869	7,4987	7,1390	6,8052	6,4951	6,2065	5,9377	5,6869	5,4527	5,2337	5,0286	4,8364	4,6560	4,4865	4,3271
12	11,2551	10,5753	9,9540	9,3851	8,8633	8,3838	7,9427	7,5361	7,1607	6,8137	6,4924	6,1944	5,9176	5,6603	5,4206	5,1971	4,9884	4,7932	4,6105	4,4392
13	12,1337	11,3484	10,6350	9,9856	9,3936	8,8527	8,3577	7,9038	7,4869	7,1034	6,7499	6,4235	6,1218	5,8424	5,5831	5,3423	5,1183	4,9095	4,7147	4,5327
14	13,0037	12,1062	11,2961	10,5631	9,8986	9,2950	8,7455	8,2442	7,7862	7,3667	6,9819	6,6282	6,3025	6,0021	5,7245	5,4675	5,2293	5,0081	4,8023	4,6106
15	13,8651	12,8493	11,9379	11,1184	10,3797	9,7122	9,1079	8,5595	8,0607	7,6061	7,1909	6,8109	6,4624	6,1422	5,8474	5,5755	5,3242	5,0916	4,8759	4,6755
16	14,7179	13,5777	12,5611	11,6523	10,8378	10,1059	9,4466	8,8514	8,3126	7,8237	7,3792	6,9740	6,6039	6,2651	5,9542	5,6685	5,4053	5,1624	4,9377	4,7296
17	15,5623	14,2919	13,1661	12,1657	11,2741	10,4773	9,7632	9,1216	8,5436	8,0216	7,5488	7,1196	6,7291	6,3729	6,0472	5,7487	5,4746	5,2223	4,9897	4,7746
18	16,3983	14,9920	13,7535	12,6593	11,6896	10,8276	10,0591	9,3719	8,7556	8,2014	7,7016	7,2497	6,8399	6,4674	6,1280	5,8178	5,5339	5,2732	5,0333	4,8122
19	17,2260	15,6785	14,3238	13,1339	12,0853	11,1581	10,3356	9,6036	8,9501	8,3649	7,8393	7,3658	6,9380	6,5504	6,1982	5,8775	5,5845	5,3162	5,0700	4,8435
20	18,0456	16,3514	14,8775	13,5903	12,4622	11,4699	10,5940	9,8181	9,1285	8,5136	7,9633	7,4694	7,0248	6,6231	6,2593	5,9288	5,6278	5,3527	5,1009	4,8696
21	18,8570	17,0112	15,4150	14,0292	12,8212	11,7641	10,8355	10,0168	9,2922	8,6487	8,0751	7,5620	7,1016	6,6870	6,3125	5,9731	5,6648	5,3837	5,1268	4,8913
22	19,6604	17,6580	15,9369	14,4511	13,1630	12,0416	11,0612	10,2007	9,4424	8,7715	8,1757	7,6446	7,1695	6,7429	6,3587	6,0113	5,6964	5,4099	5,1486	4,9094
23	20,4558	18,2922	16,4436	14,8568	13,4886	12,3034	11,2722	10,3711	9,5802	8,8832	8,2664	7,7184	7,2297	6,7921	6,3988	6,0442	5,7234	5,4321	5,1668	4,9245
24	21,2434	18,9139	16,9355	15,2470	13,7986	12,5504	11,4693	10,5288	9,7066	8,9847	8,3481	7,7843	7,2829	6,8351	6,4338	6,0726	5,7465	5,4509	5,1822	4,9371
25	22,0232	19,5235	17,4131	15,6221	14,0939	12,7834	11,6536	10,6748	9,8226	9,0770	8,4217	7,8431	7,3300	6,8729	6,4641	6,0971	5,7662	5,4669	5,1951	4,9476
30	25,8077	22,3965	19,6004	17,2920	15,3725	13,7648	12,4090	11,2578	10,2737	9,4269	8,6938	8,0552	7,4957	7,0027	6,5660	6,1772	5,8294	5,5168	5,2347	4,9789
40	32,8347	27,3555	23,1148	19,7928	17,1591	15,0463	13,3317	11,9246	10,7574	9,7791	8,9511	8,2438	7,6344	7,1050	6,6418	6,2335	5,8713	5,5482	5,2582	4,9966
50	39,1961	31,4236	25,7298	21,4822	18,2559	15,7619	13,8007	12,2335	10,9617	9,9148	9,0417	8,3045	7,6752	7,1327	6,6605	6,2463	5,8801	5,5541	5,2623	4,9995

3. lecke A pénz időértéke

Speciális pénzáramok jelenértéke: örökjáradék, annuitás

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR
KÖZGAZDÁSZ KÉPZÉS
TÁVOKTATÁSI TAGOZAT
LECKESOROZAT
COPYRIGHT © SZTE GTK 2017/2018

A LECKE TARTALMA, ILLETVE ALKOTÓ ELEMEI ELŐZETES,
ÍRÁSBELI ENGEDÉLY MELLETT HASZNÁLHATÓK FEL.

JELLEN TANYAG
A SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEMEN KÉSZÜLT
AZ EURÓPAI UNIÓ TÁMOGATÁSÁVAL.
PROJEKT AZONOSÍTÓ: EFOP-3.4.3-16-2016-00014

SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE