

LOGIKA

Negyedik téma – kondicionális, bikondicionális és formulaképzési szabályok

Első lecke – kondicionális

A kondicionális a logikai „ha..., akkor...”. Akkor alkalmazzuk, amikor azt akarjuk kifejezni, hogy egy feltétel teljesülése esetén egy másik feltétel is teljesül. A következő természetes nyelvi állítások logikailag kondicionálisnak minősülnek:

- Kirándulni megyünk, feltéve, hogy nem esik az eső.
- Ha balra hord a fegyver, akkor kicsit jobbra kell célozni.
- Amennyiben a Goldbach-sejtés igaz és a Földön e pillanatban található szúnyogok száma páros, úgy az e pillanatban a Földön található szúnyogok száma kifejezhető két prímszám összegével.
- Adottnak véve, hogy minden krétai mindig hazudik, jobban járunk, ha ez a krétai itt nem beszél hazugságokról.
- Csak akkor tehetsz meg bármit, ha már semmi sincs.

A természetes nyelvben a kondicionális indikátora gyakran a „ha”, az „amennyiben”, a „feltéve” kifejezések, de ezek nem okvetlenül utalnak kondicionálisra, ahogy elmaradásuk sem jelenti azt, hogy az adott állítás nem kondicionális. Inkább onnan érdemes közelíteni, hogy egy természetes nyelvi állítás logikai formája kondicionálisnak tekintendő, amennyiben jelentésvesztés (azaz igazságértékének megváltozása) nélkül átfogalmazható „ha..., akkor...” alakba (ez a mondat is ilyen). Látjuk azonban, hogy időnként nem az a tagmondat áll elől, amely a „ha” után következne, és nem az a tagmondat a második, amely az „akkor” után állna az átfogalmazásban. A fenti listában szereplő első állítás átfogalmazásakor például megcseréljük a tagokat; tehát a „kirándulni megyünk, feltéve, hogy nem esik az eső” kanonikus alakja ez lesz: „ha nem esik az eső, akkor kirándulni megyünk”.

A kondicionálisban fontos a tagok sorrendje. A kanonikus alakú kondicionális állításokban a „ha” után következő tagot **előtag**nak, az „akkor” után következő tagot **utótag**nak nevezzük. A „ha nem esik az eső, akkor kirándulni megyünk” kondicionális propozíció előtagja eszerint „nem esik az eső”, utótagja pedig „kirándulni megyünk”.

Problémát jelenthet a „csak akkor..., ha...” típusú állítások formalizálása. Erre volt példa a „csak akkor tehetsz meg bármit, ha már semmi sincs” propozíció. Mi itt az előtag? A „ha” szó elhelyezkedése azt sugallja, hogy a második tagmondat az előtag. Csakhogy valójában itt nem azt akarjuk állítani,

hogy „ha már semmid sincs, akkor bármit megtehetsz”, hanem egy ennél erősebb dolgot. Azt, hogy kizárólag akkor tehetsz meg bármit, ha már semmid nincsen, vagyis az, hogy már ne legyen semmid, **szükséges** ahhoz, hogy bármit megtehess. Ezt a viszonyt a **szükséges** és az **elégleges feltétel** fogalmainak különbségével ragadhatjuk meg.

Egy proposíció igazságának szükséges feltétele az, ami nélkül az adott proposíció semmiképpen nem lehetne igaz. Elégleges feltétele ellenben az, aminek teljesülése esetén az adott proposíció igazságának feltételei is teljesülnek. Például annak, hogy a függöny lángra kapjon, elégleges feltétele, hogy égő gyufát érintsek hozzá. Ám ez nem szükséges feltétel; a gyújtogatást megoldhatom öngyújtóval, fáklyával vagy bármilyen tűzszerszámmal, illetve lángra kaphat a függöny attól is, hogy villám csapott be az ablakon (és sok egyébtől is). Ugyanakkor szükséges feltétele annak, hogy a függöny lángra kapjon, az, hogy legyen oxigén a levegőben. Oxigén nélkül nincs tűz. Viszont az oxigén jelenléte nem elégleges feltétele a függöny lángra lobbanásának. Kész szerencse.

Ha egy kondicionálist a szükséges és elégleges feltételek terminusaiban elemzünk, akkor az elégleges feltételek mindig a kondicionális előtagjaként szerepelnek, a szükséges feltételek viszont mindig a kondicionális utótagjaként jelennek meg. Ha égő gyufát tartok a függönyhöz, akkor lángra kap. Ha a függöny lángra kap, akkor van oxigén a levegőben. Tehát az iménti példa esetében ez azt jelenti, hogy amikor azt mondjuk, „csak akkor tehetsz meg bármit, ha már semmid sincs”, akkor ezt úgy értjük, hogy „annak, hogy bármit megtehess, szükséges feltétele az, hogy már ne legyen semmid”. Ezért az állítás logikai formája ez a kondicionális: „ha megtehetsz bármit, akkor már nincs semmid”. Mindez általánosan érvényes a „csak akkor..., ha...” típusú állításokra.

A kondicionális állítások logikai formája tehát a következő:

ha p , akkor q , amelynek jelölése: $p \supset q$

A kondicionális igazságtáblázata ez:

p	q	$p \supset q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

A kondicionális alternatív jelölése: $p \rightarrow q$. A műveletet szokás *implikációnak* is nevezni

A kondicionális tehát csakis abban az esetben hamis, ha előtagja igaz, utótagja hamis. Más szóval, a kondicionális mindig igaz, amikor az utótagja igaz, vagy pedig amikor az előtagja hamis.

A kondicionális olyan igazságfüggvény, amely akkor és csak akkor képez igaz proposíciót, ha előtagja hamis, vagy ha utótagja igaz.

A kondicionális nem kommutatív, és nem asszociatív, vagyis $p \supset q$ igazságfeltételei nem azonosak $q \supset p$ igazságfeltételeivel, és $(p \supset q) \supset r$ sem ugyanakkor igaz, mint $p \supset (q \supset r)$.

Ugyanakkor a kondicionális is kifejezhető más konnektívumok segítségével. A legfontosabb összefüggések ezzel kapcsolatban (azok, amelyeknek a későbbiekben nagy hasznát vesszük):

$p \supset q$ ekvivalens ezzel: $\sim p \vee q$
 $\sim(p \supset q)$ ekvivalens ezzel: $p \& \sim q$

Leszögeztük már, hogy a kondicionálisban előtag és utótag sorrendje nem cserélhető meg, más szóval egy kondicionális és **konverze** (az a formula, amelyet az előtag és az utótag megcserélése nyomán kapunk) eltérő igazságfeltételekkel rendelkezik. Ha viszont egy kondicionális konverzában mindkét tagot negáljuk, akkor az eredeti kondicionális **kontraponáltjához** jutunk. Tehát $p \supset q$ kontraponáltja: $\sim q \supset \sim p$.

A kontrapozíció törvénye:

Egy kondicionális logikailag ekvivalens a kontraponáltjával, azaz:

$p \supset q$ ekvivalens ezzel: $\sim q \supset \sim p$

MATERIÁLIS KONDICIONÁLIS

Természetes nyelvhasználati intuícióinkkal aligha egyezik az, hogy egy kondicionális állítás mindig igaz, valahányszor az előtagja hamis. Hiszen ezáltal igazak lesznek olyan feltételes kijelentések, amelyeket vonakodnánk igaznak elfogadni, például az, hogy „ha 2019-ben nem Donald Trump az USA elnöke, akkor Lenin felül a mauzóleumban”. Az sem tűnik elfogadhatóbbnak, hogy az utótag igazsága elég a kondicionális igazságához, hiszen ekkor olyasmiket kell igaznak minősítenünk, mint „ha nadrág nélkül megyek a bálba, akkor nincs legmagasabb prímszám”. Hogy a kondicionális igazságtáblázata ilyen implauzibilis állítások igaznak vételéhez vezet, mindig is ismert volt a logikával foglalkozók körében. De akkor miért így töltjük ki az igazságtáblázat rubrikáit?

A legegyszerűbb válasz az, hogy azért, mert nincs más lehetőség. Az, hogy egy kondicionális igaz, ha mindkét tagja igaz, és az, hogy hamis, ha az előtagja igaz, az utótagja viszont hamis, nem látszik problematikusnak. Marad tehát két lehetőség, az, amelyben az előtag hamis, az utótag igaz, és az, amelyben mindkét tag hamis. Az előtag tehát ebben az utóbbi két esetben egyaránt hamis. Mármost, milyen alapon minősítenénk hamisnak a kondicionalist akármelyik esetben a kettő közül? Elvégre arról tettünk állítást, hogy mit von maga után, ha egy bizonyos feltétel fennáll, nem pedig arról, hogy mit implikál ugyanannak a feltételnek a fenn nem állása. Amikor azt állítjuk, hogy „ha p , akkor q ”, nem beszélünk arról, hogy mi van akkor, ha nem- p (az már egy teljesen más állítás lenne). Ezért kondicionális állításunk, ha hamis az előtagja, *nem lehet hamis*, márpedig ha egy állítás nem hamis, akkor, a kizárt harmadik törvényéből fakadóan, csakis igaz lehet.



Tehát ha fenntartjuk azt az elvet, hogy a konnektívumok igazságfüggvények, azaz értékeik eloszlása megadható igazságtáblázat segítségével, akkor nincs értelmes alternatívánk. Annak persze fennáll a lehetősége, hogy a kondicionálist ne tartsuk önálló konnektívumnak, vagy hogy egészében elveszük a konnektívumok igazságfüggvényekként való értelmezését. Mindkét megoldásra vannak példák a logikai irodalomban, utóbbira természetesen a klasszikus logikán kívül. Ezért, hogy az igazságfüggvényként felfogott kondicionálist elkülönítsék a rivális megközelítésektől, előbbit gyakran *materiális* kondicionálisnak nevezik.

Az alternatívák keresését nem csak az első bekezdésben említett anomáliák motiválják. A kritikusok szerint a materiális kondicionális eltorzítja a logikai következményviszonyt. Mivel hamis előtagból bármilyen utótag esetén igaz állítást kapunk – ez az *ex falso quodlibet*, vagyis a *hamisból bármi* elve – egy szükségszerűen hamis előtag tetszőleges utótag és annak tagadása esetén is igaz kondicionálist eredményez. Mivel pedig a kondicionális felfogható annak kifejezéseként is, hogy valamiből *következik* valami, oda jutunk, hogy egy ellentmondásból az égvilágon minden következni fog logikailag (ez az *ex contradictione quodlibet* elve). Ez az összefüggés valóban tétele a klasszikus logikának. Sokak – főleg az úgynevezett *releváns* vagy *parakonzisztens* logika képviselői – úgy vélik, hogy ez elfogadhatatlan. Hozzá kell tenni azonban, hogy ha lemondunk az igazságfüggvények logikájáról, az jelentősen komplikáltabbá teszi logikai rendszereinket.

Kérdések és feladatok

1. Az alábbi kifejezéspárok közül melyek ekvivalensek egymással (a tanult összefüggések alapján)?
 - $p \supset \sim(q \vee r)$; $(\sim q \ \& \ \sim r) \supset p$
 - $p \ \& \ \sim q$; $\sim(\sim p \vee q)$
 - $(p \supset q) \ \& \ (q \vee r)$; $\sim(\sim(p \vee \sim q) \vee \sim(\sim q \supset r))$
 - $p \supset (q \ \& \ \sim(r \vee s))$; $(\sim r \ \& \ \sim s) \supset (q \vee p)$
 - $\sim(p \vee \sim(q \supset r)) \supset (\sim p \ \& \ \sim r)$; $(p \vee r) \supset ((q \ \& \ \sim r) \vee \sim\sim p)$