

LOGIKA

Harmadik téma – negáció, konjunkció, diszjunkció

Harmadik lecke – diszjunkció

A diszjunkció a logikai „vagy”. Akkor alkalmazzuk, ha két (vagy több) propozícióról azt kívánjuk állítani, hogy legalább az egyikük igaz. A következő természetes nyelvi állítások mind logikai diszjunkciónak minősülnek.

- Desszertként tiramisut, vagy palacsintát eszünk.
- Az allergia tünete lehet könnyező, vagy égő szem.
- Isten vagy nem mindenható, vagy ő felelős a rossz dolgokért is a világban.
- A vonat négyre, vagy fél ötre ér be.
- Két (vagy több) propozícióról azt kívánjuk állítani, hogy legalább az egyikük igaz.
- Vagy összeszeded magad, vagy nézhetsz más partner után.

Amint látható, a „vagy” kétféle értelemben használatos a természetes nyelvben. Jelentheti azt, hogy két állítás közül lehet mindkettő igaz, de legalább az egyik az, de jelentheti azt is, hogy két állítás közül pontosan egy igaz. Az első eset a „vagy” *megengedő (inkluzív)*, a második a „vagy” *kizáró (exkluzív)* értelme. Az, hogy tiramisut vagy palacsintát eszünk desszertnek igaz akkor is, ha mindkettőt eszünk, ahogy az allergia tünete is lehet egyszerre könnyező és égő szem, ugyanaz a vonat viszont nem érhet be négykor is és fél ötkor is. Van úgy is, hogy kontextuális tényezők döntenek arról, hogy a megengedő, vagy a kizáró olvasat a megfelelő. Az utolsó példamondatban szereplő állítást általában olyankor szokták hangoztatni, amikor az egyik fél kizáró jellegű alternatíva elé állítja a másikat, ám valójában semmi nem zárja ki, hogy az ember összeszedi magát, és más partner után néz.

A klasszikus logikában (és a legtöbb logikai rendszerben) alapértelmezetten a *megengedő* „vagy” használatos. Amennyiben hangsúlyozni kívánjuk, hogy egymást kizáró alternatívákról beszélünk, le kell szögeznünk, hogy a diszjunkt propozíciók együttese (azaz konjunkciója) nem igaz. Ezért a fenti példákat bevezető állítást, vagyis hogy a példák mindegyike konjunkciónak minősül, azzal kell kiegészítenünk, hogy mindegyik konjunkció, de némelyik egy negált konjunkció kiegészítésére szorul.

A diszjunkció olyan igazságfüggvény, amely akkor és csak akkor *nem* hoz létre igaz összetett proposíciót, ha mindkét argumentuma (*diszjunktja*) hamis.

A diszjunktív proposíciók logikai formája tehát:

p vagy q , amelynek jelölése: $p \vee q$

A diszjunkció igazságtáblázata, definíciójának megfelelően, a következő:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

A diszjunkciót időnként nevezik *logikai összeadásnak*. Jelölése ilyenkor $p + q$.

A diszjunkció, akárcsak a konjunkció, kommutatív és asszociatív, azaz $p \vee q$ ugyanakkor igaz, mint $q \vee p$, és $p \vee (q \vee r)$ ugyanakkor igaz, mint $(p \vee q) \vee r$.

Ezen felül a diszjunkció **disztributív** a konjunkcióra. Ez azt jelenti, hogy egy atomi proposíció és egy kéttagú konjunkció diszjunkciója logikailag ekvivalens azzal a konjunkcióval, amelyet az atomi proposíció és az eredeti konjunkt tagok diszjunkciójából képzünk. Ez formálisan jóval áttekinthetőbb:

$p \vee (q \& r)$ ugyanakkor igaz, mint $(p \vee q) \& (p \vee r)$.

A konjunkció is disztributív a diszjunkcióra, azaz:

$p \& (q \vee r)$ ugyanakkor igaz, mint $(p \& q) \vee (p \& r)$.

Hétköznapi nyelvhasználatunkban gyakoriak a „sem-sem” típusú állítások. Például mondhatjuk ezt:

- Nem érdekel engem sem a logika, sem az ésszerűség.

Hogyan kell az efféle állításokat formális nyelvbe átültetni? Az első lépés, mint mindig, a szótár rögzítése:

p : Engem érdekel a logika

q : Engem érdekel az ésszerűség

Azt akarjuk kifejezni, hogy a két dolog közül egyik sem igaz. Ezt kétféleképpen is megtehetjük:

a.) $\sim(p \vee q)$

b.) $\sim p \ \& \ \sim q$

Ha nem érdekel sem a logika, sem az ésszerűség, akkor nem igaz, hogy egyik vagy másik érdekelne, hanem az igaz, hogy nem érdekel az egyik, és nem érdekel a másik sem. Mind a két formális rekonstrukció korrekt. Ennek oka egy alapvető összefüggéspár, amely a negáció, a konjunkció és a diszjunkció logikai viszonyát jellemzi, vagyis a **De Morgan azonosságok**.

De Morgan azonosságok:

$$\sim(p \ \& \ q) \text{ logikailag ekvivalens ezzel: } \sim p \vee \sim q;$$

$$\sim(p \vee q) \text{ logikailag ekvivalens ezzel: } \sim p \ \& \ \sim q$$

A De Morgan azonosságok azt mondják ki, hogy a konjunkció és a negáció kifejezhetők egymás és a negáció segítségével. Ez a későbbiekben, a következtetések érvényességének vagy érvénytelenségének bizonyításakor még fontos szerepet kap.

Kérdések és feladatok

1. Formalizálja a lecke elején található proposíciókat (ügyeljen az inkluzív és az exkluzív diszjunkció megkülönböztetésére)!
2. Tegyük fel, hogy a logikai nyelvünkben létezik külön konnektívum az exkluzív „vagy” számára, amelynek jelölése „|”. Milyen lenne a $p | q$ formula igazságtáblázata?
3. Alakítsa át úgy a következő kifejezéseket, hogy a bennük található konjunkciót diszjunkcióval, a diszjunkciót pedig konjunkcióval fejezze ki!
 - $p \& q$
 - $\sim(p \vee q) \vee \sim(p \& q)$
 - $\sim((p \vee \sim q) \& \sim(\sim r \& \sim p))$