LOGIKA

Harmadik téma – negáció, konjunkció, diszjunkció

Második lecke – konjunkció

A konjunkció a logikai „és". Akkor alkalmazzuk, ha két (vagy több) propozíció együttes igazságát kívánjuk állítani. A következő természetes nyelvi állítások mind logikai konjunkciónak minősülnek.

- Ülök és írok.
- A DNS-ben az adenin a timinnel, a guanin a citozinnal képez bázispárt.
- A sült répa egyszerre ízletes és egészséges étel.
- Az OAS többször kísérelt meg merényletet de Gaulle ellen, ám de Gaulle nem hátrált meg.
- A spanyol omletthez tojásra, burgonyára, valamint hagymára van szükségünk.
- A stressz mind fizikailag, mind lelkileg megviseli az embert.
- A konjunkció, a negáció, a diszjunkció, illetve a kondicionális logikai műveletek.

Látható, hogy a természetes nyelvben a konjunkció indikátora lehet az „és", az „illetve", a „valamint" kifejezés, jelezheti a központozás (általában vessző), de olyan, a kifejezések szembeállítására használatos szavak is lehetnek a konjunkció jelei, amilyen a „de", „azonban", „ám" stb. Logikai értelemben minden olyan állítás konjunkciónak számít, amely csak akkor lehet igaz, ha tagjai (*konjunkt*jai) igazak. Így például az „esik az eső, de süt a nap" propozíció csak abban az esetben igaz, ha igaz az, hogy esik az eső, és az is, hogy süt a nap. Ezért ez a propozíció konjunkció.

Másrészt a természetes nyelvi „és" nem minden esetben konjunkció-indikátor.

- Megtanultam késsel és villával enni.
- Thor és Loki testvérek.
- Kedvenc westernem *A jó, a rossz és a csúf*.

Az első példában az állítás nyilván nem arról szól, hogy megtanultam késsel enni *és* megtanultam villával enni, hanem arról, hogy megtanultam a két evőeszközt összehangoltan használni. Vagyis nincs is két különböző

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

propozíciónk, amelyet egy konnektívummal kapcsolnánk össze. A másik két esetben is ez a helyzet. A harmadikban ráadásul nem is *használjuk*, hanem csupán *említjük* az „és” kifejezést (mint egy filmcím részét). A középső példa kissé bonyolultabb. Az, hogy „Thor és Loki testvérek” semmiképpen nem elemezhető ugyan úgy, hogy „Thor testvér és Loki testvér”, de lehet amellett érvelni, hogy ennek az állításnak a voltaképpeni tartalma az, hogy „Thor a testvére Lokinak, és Loki a testvére Thornak”. Ez utóbbi már konjunkció volna. Csakhogy az a kölcsönösségi viszony, amelyet a konjunktív értelmezés leszögez, nem fejezhető ki a propozicionális logika nyelvében (a predikátumlogikáéban igen, de ott még nem járunk). A propozicionális logika keretei között ezért a „Thor és Loki testvérek” atomi propozíciónak számít.

A konjunkció olyan igazságfüggvény, amely akkor és csak akkor képez igaz összetett propozíciót, ha mindkét argumentuma (konjunktja) igaz.

A konjunkció révén létrehozott összetett propozíció logikai formája tehát:

p és *q* amelynek jelölése: ***p & q***

A „&” tehát a logikai konjunkció szimbóluma. Mindig a két konjunkcióval összekapcsolt propozicionális változó közé írjuk, térközzel.

A konjunkció jelentése is kifejezhető igazságtáblázat segítségével. A konjunkció igazságtáblázata a következő:

p	*q*	*p* & *q*
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Jelölési konvenció. A konjunkciónak is vannak alternatív jelölései. Gyakran látjuk *p* és *q* konjunkcióját a „$p \wedge q$”, ritkábban a „$p \times q$” alakban kifejezni (a konjunkciót szokás „logikai szorzásnak” is nevezni).

Ennek a táblázatnak négy vízszintes sora van a *p*, *q* és *p* & *q* formulákat tartalmazó fősor alatt. Ennek oka az, hogy *p* és *q* igazságértéke négy különböző eloszlást vehet fel, azaz *p* és *q* négyféle kombinációban lehet igaz vagy hamis. Az igazságtáblázat sorai az összes ilyen lehetőséget reprezentálják. Az első sor azt a lehetőséget mutatja, amelyben *p* és

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

q egyaránt igaz, a második sor azt, amelyben *p* hamis és *q* igaz – és így tovább. Fontos összefüggés, hogy *n* számú propozíció esetében mindig 2^n számú sorra van szükségünk ahhoz, hogy az összes variációs lehetőséget ábrázolhassuk. Így a negáció esetében, amely *egy* darab propozícióhoz kapcsolódik, 2^1, azaz két sorra, a konjunkció esetében, amely *két* propozíciót köt össze, 2^2, azaz négy sorra van szükségünk. Ha olyan összetett kifejezésben kell ábrázolnunk az igazságértékek összes lehetséges eloszlását, amely három különböző propozíciót tartalmaz, akkor igazságtáblázatunkban a fősor alatt 2^3, azaz nyolc sorunk lesz.

Tipp: annak érdekében, hogy biztosak lehessünk benne, hogy táblázatunk valóban kimeríti az összes lehetőséget, érdemes az igazságértékeket meghatározott sorrendben felsorolnunk az egyes oszlopokban. Hatékony opció a következő: az első oszlopban felváltva írjuk az értékeket (1, 0, 1, 0 stb.), a másodikban kettesével (1, 1, 0, 0 stb.), a harmadikban (ha van) négyesével és így tovább. A fenti táblázat pontosan ilyen receptre készült.

Szigorúan véve a konjunkció ***kétargumentumú*** konnektívum, azaz mindig pontosan kettő propozíció logikai kapcsolatát állítja (a negáció egyargumentumú). De természetesen képezhetünk további összetételeket is. Egyrészt kettőnél több propozíció konjunktív kapcsolatát is állíthatjuk. Például a következő állítást egy háromtagú konjunkció segítségével formalizálhatjuk:

a.) Athos, Porthos és Aramis már testőrök voltak, amikor D’Artagnan Párizsba érkezett.

Először is rögzítjük a szimbolizációs szótárt, például így:

p: Athos már testőr volt, amikor D’Artagnan Párizsba érkezett

q: Porthos már testőr volt, amikor D’Artagnan Párizsba érkezett

r: Aramis már testőr volt, amikor D’Artagnan Párizsba érkezett

Ezután a háromtagú konjunktív propozíciót a következőképpen formalizáljuk:

$(p \,\&\, q) \,\&\, r$

Miért van szükség a zárójelekre? Egyrészt azért, mert a konjunkció kétargumentumúságának a ténye ezt a jelölési konvenciót írja elő. Másrészt azért, mert a zárójelek használatával egyértelműsítjük, hogy mi az az összetett kifejezés, amelyen további logikai műveletet hajtunk végre. Többszörös konjunkció esetében ez nem tűnik életbevágónak, de nézzük a következő állítást:

b.) Nem igaz, hogy Athos is és Porthos is már testőr volt, amikor D’Artagnan Párizsba érkezett.

Ennek korrekt formalizálása így fest:

$\sim(p \,\&\, q)$

amely mást állít, mint ugyanez a kifejezés zárójelek nélkül:

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

~*p* & *q*

Ugyanis ha ez utóbbit a megadott szótár segítségével visszafordítjuk természetes nyelvi állításba, ezt kapjuk:

c.) Athos nem, de Porthos már testőr volt, amikor D'Artagnan Párizsba érkezett.

A logikai különbség *b.)* és *c.)* között úgy pontosítható, hogy *c.)*-ből ugyan következik *b.)*, de *b.)*-ből nem következik *c.)*. Ha Athos még nem volt testőr D'Artagnan Párizsba érkezésekor, de Porthos már igen, akkor valóban nem igaz, hogy Athos is és Porthos is már testőrök voltak ugyanakkor. Viszont abból, hogy nem igaz, hogy mind Athos, mind Porthos már testőr volt, amikor D'Artagnan Párizsba érkezett, nem feltétlenül ahhoz, jutunk, hogy Athos még nem volt testőr, hiszen az is lehet, hogy Athos igenis már testőr volt, Porthos azonban még nem. Úgy is mondhatjuk ezt, hogy *b.)*-nek és *c.)*-nek különböznek az ***igazságfeltételeik***, azaz más körülmények között igazak.

Mindezt az igazságtáblázat segítségével még könnyebben beláthatjuk.

p	*q*	~(*p* & *q*)	~*p* & *q*
1	1	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
0	0	1	0

Ez az igazságtáblázat, ha alaposan vizsgáljuk, több tanulsággal is szolgál. Egyrészt világosan látható benne az igazságfeltételek különbözősége. ~*p* & *q* egyedül abban az esetben igaz, amelyben *p* hamis és *q* igaz, ~(*p* & *q*) ellenben csak akkor hamis, ha mindkét atomi összetevője igaz – vagyis igazságtáblázata éppen a fordítottja a konjunkció igazságtáblázatának, ahogy azt el is várhattuk, tekintve, hogy a negáció az ellentétükbe fordítja át az igazságértékeket. Másrészt a táblázat alátámasztja a két összetett propozíció közötti következményviszony aszimmetriáját. Mivel ~*p* & *q* csak egy esetben igaz, és abban az esetben ~(*p* & *q*) is igaz, láthatjuk, hogy nincs olyan eset, amelyben ~*p* & *q* igaz volna, ~(*p* & *q*) viszont hamis, azaz az érvényesség definíciója értelmében ~(*p* & *q*) logikailag következik ~*p* & *q*-ból. Ezzel szemben két olyan eset is van, amelyben ~(*p* & *q*) igaz, ~*p* & *q* pedig hamis, tehát ~*p* & *q*-ra *nem*

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

következtethetünk érvényesen ~(*p* & *q*)-ból.

Nem véletlen, hogy az igazságértékek ~(*p* & *q*) esetében a „~” jel alatt, míg ~*p* & *q* esetében a „&” jel alatt sorakoznak. Amikor egy összetett kifejezésben több konnektívum szerepel, akkor rangsorolnunk kell őket. A konnektívumok hierarchiája aszerint alakul, hogy mennyire széles a hatókörük. Minden konnektívumnak van egy legszűkebb hatóköre, amely nem más, mint az a propozíció (egyargumentumú konnektívum esetében) vagy propozíciópár (kétargumentumú konnektívum esetében), amelyre közvetlenül vonatkozik. (A bemutatandó logikai nyelvekben nem használunk kettőnél több argumentumú konnektívumokat.) Például ~*p* esetében a negáció-operátor legszűkebb hatóköre *p*, *p* & *q* esetében a konjunkció-operátor legszűkebb hatóköre *p*, valamint *q*. Ha egy többszörösen összetett kifejezéssel van dolgunk, amilyen például ~((*p* & *q*) & (~*p*& ~*q*)), a konnektívumok többrétegű hierarchiájával találkozunk. A zárójeles kifejezésekben belülről kifelé haladva lépünk eggyel feljebb a hierarchiában. Példánkban a legszűkebb hatókörű konnektívumok a legbelső zárójeleken belül találhatók – színezett szedéssel emeljük ki, melyek ezek: ~((*p* **&** *q*) & (**~***p* & **~***q*)). Ezek a konnektívumok atomi propozíciókra vonatkoznak. A hierarchiában eggyel magasabb helyen áll a második zárójelpárban található konjunkció, azaz ~((*p* & *q*) & (~*p* **&** ~*q*)), hiszen ez már negált propozíciókat köt össze. A középső konjunkció, ~((*p* & *q*) **&** (~*p* & ~*q*)), két összetett propozíciót tart a hatókörében, végül a legszélesebb hatóköre az egész kifejezést negáló első negációnak van: **~**((*p* & *q*) & (~*p* & ~*q*)). A legszélesebb hatókörrel rendelkező konnektívumot a kifejezés ***vezető konnektívum***ának nevezzük. Ez szabja meg, minek minősül a kifejezésünk. Tehát előző példánk, vagyis ~((*p* & *q*) & (~*p* & ~*q*)), negációnak minősül, hiszen a vezető konnektívuma a negáció.

A vezető konnektívum tipográfiailag is lokalizálható: az a konnektívum a vezető, amely az összes zárójelen kívül található.

A vezető konnektívumnak fontos szerepe van az érvényesség megállapításában. Mivel ez határozza meg, hogy az adott kifejezés milyen logikai típusba tartozik (hogy negáció, vagy konjunkció, vagy diszjunkció stb.), arról is ez dönt, hogy milyen körülmények esetén igaz a kifejezés, az utóbbi pedig nyilván döntő fontosságú az igazságmegőrzés szempontjából.

A fentebbi igazságtáblázatban az igazságértékek a kifejezések vezető konnektívumai alatt láthatók. Ezt a konvenciót érdemes követni, hiszen rámutat arra, hogy mit tekintünk igaznak vagy hamisnak a táblázatban szereplő kifejezések esetében.

A könnyebb tanulmányozhatóság érdekében megmutatjuk a ~((*p* & *q*) & (~*p* & ~*q*)) kifejezés teljes igazságtáblázatát. Az igazságértékek az egyes konnektívumok alatt az iménti rögtönzött színkódot követik.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

p	*q*	~((*p* & *q*) & (~*p* & ~*q*))
1	1	1 1 0 0 0 0
0	1	1 0 0 1 0 0
1	0	1 0 0 0 0 1
0	0	1 0 0 1 1 1

Az ilyen többszörösen összetett propozíciókat kifejező formulák esetében az igazságtáblázat segítségével végzett elemzést mindig a legbelső, vagyis a legszűkebb hatókörű konnektívumokkal kezdjük (jelen esetben ezeket a piros szín jelzi). Utána kifelé, vagyis a szélesebb hatókörű konnektívumok felé haladunk (a zöld, majd a kék jelzésű oszlopok jönnek egymás után). Végül a vezető konnektívum igazságértékeit számítjuk ki. Jelen esetben ez egyszerű, hiszen a második legszélesebb hatókörű konnektívum, a kékkel jelölt konjunkció csupa 0 értéket adott. Mivel a vezető konnektívum negáció, csak az 1-eket kell beírnunk.

Mivel a vezető konnektívum (az egész formulát nyitó negáció) alatt csupa 1 érték sorakozik, az igazságtáblázatból megállapítható, hogy a ~((*p* & *q*) & (~*p* & ~*q*)) kifejezés tautológia, azaz *logikai igazság*. Ami nem is meglepő, hiszen ha jobban megnézzük, láthatjuk, hogy ez az összetett propozíció tulajdonképpen az ellentmondás-mentesség törvényének egyik instanciája.

Végezetül két tulajdonság, amely a konjunkció lényeges jellemzője:

1. Egy konjunkcióban a tagok az igazságérték megváltozása nélkül felcserélhetőek, vagyis *p* & *q* pontosan ugyanakkor igaz, mint *q* & *p* – más szóval, a konjunkció ***kommutatív***;
2. Egy többtagú konjunkcióban a tagok az igazságérték megváltozása nélkül átcsoportosíthatók, vagyis *p* & (*q* & *r*) pontosan ugyanakkor igaz, mint (*p* & *q*) & *r* – más szóval, a konjunkció ***asszociatív***.

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu

Kérdések és feladatok

1. Formalizálja a következő állításokat:

- Megegyeztünk mindenben, de a szolgáltató nem tartotta be a megállapodást.
- Ez a színész sem nem magas, sem nem kisportolt, viszont nagyon tehetséges.
- Nem igaz, hogy nem olvastam el a könyvet, és az sem igaz, hogy nem értettem meg, azonban az igaz, hogy untam és érdektelennek találtam.
- Nem sóztam el az ételt, nem tettem bele túl sok gyömbért, vigyáztam a párolási időre, mégsem lett jó ízű – habár kiönteni azért nem fogom.

2. Készítse el az 1. feladat első két propozíciójának igazságtáblázatát!

3. A következő formulákban melyik a vezető konnektívum?

- $p \mathbin{\&} {\sim}q$
- ${\sim}p \mathbin{\&} ({\sim}q \mathbin{\&} r)$
- $((p \mathbin{\&} q) \mathbin{\&} {\sim}r) \mathbin{\&} ({\sim}q \mathbin{\&} r)$
- ${\sim}((({\sim}q \mathbin{\&} {\sim}r) \mathbin{\&} (s \mathbin{\&} p)) \mathbin{\&} {\sim}t)$

Szegedi Tudományegyetem
Cím: 6720 Szeged, Dugonics tér 13.
www.u-szeged.hu
www.szechenyi2020.hu