

LOGIKA

Harmadik téma – negáció, konjunkció, diszjunkció

Első lecke – negáció

Most egyenként megvizsgáljuk a konnektívumok sajátosságait és alkalmazási körülményeiket.

Negáció

A negáció a logikai tagadás. Akkor alkalmazzuk, ha egy egyszerű vagy összetett proposíció hamisságát kívánjuk állítani. A következő természetes nyelvi mondatok logikailag negációnak minősülnek:

- Nem számítok rád.
- Az ünnepek alatt járatunk nem közlekedik.
- Nem igaz, hogy Darth Vader ölte meg Luke Skywalker apját.
- A mikrohullámú sütő semmiképpen sem arra való, hogy macskát szárítsunk benne.
- Sem a nyírfa, sem a tölgyfa nem örökzöld.
- Nem felel meg a valóságnak, hogy a sértett provokálta a vádlottat.

Ezekben az esetekben valamilyen proposíciót negálunk. A példákban, egy kivétellel, a negált proposíció atomi. Például vegyük ezt a proposíciót: „számítok rád”. Ennek negációja: „nem igaz, hogy számítok rád”, vagy egyszerűbben „nem számítok rád”. Amennyiben a „számítok rád” proposíciót p -vel szimbolizáljuk, negációjának logikai formája ez lesz:

$$\text{nem-}p$$

A példák között szerepel egy olyan eset, amelyben a negáció hatókörébe nem egyetlen atomi proposíció esik. Amikor azt mondjuk, hogy „sem a nyírfa, sem a tölgyfa nem örökzöld”, akkor két különböző atomi proposíció esik a negáció hatókörébe: az, hogy „a nyírfa örökzöld” és az, hogy „a tölgyfa örökzöld”. Szimbolizáljuk p -vel az első, q -val a második proposíciót. Amit mondani akarunk, az logikai értelemben a következő:

$$\text{nem-}p \text{ és } \text{nem-}q$$

ami egyébként ekvivalens azzal, hogy:

$$\text{nem-}(p \text{ vagy } q)$$

Ez a példa felhívja a figyelmet arra, hogy természetes nyelvi kifejezéseknek sokszor több egyenrangú formalizálása is elképzelhető. Ez nem jelent gondot, mindaddig, amíg a különböző lehetőségek logikailag ekvivalensek egymással (mint esetünkben). A *logikai ekvivalencia* fogalmát a későbbiekben részletesen kifejtjük. Addig is az intuitív megértés elegendő. Figyeljük meg továbbá a zárójelek használatát a példában! Erről is lesz még szó részletesebben, de annyi már most világos, hogy a „nem- $(p$ vagy $q)$ ” forma esetében az *egész* zárójelbe tett kifejezés negációjáról beszélünk.

Bizonyos esetekben formalizációs döntés kérdése, hogy egy propozíciót negációként értünk-e. Nézzük a következő állításokat:

- A lista hiánytalan.
- A gyanúsított alibije kikezdzhetetlen.

Ilyenkor a kontextus határozza meg, hogy az állításokat atomi propozíciókként, vagy atomi propozíciók negációjaként értjük-e. Ha például egy olyan gondolatmenetben találkozunk „a lista hiánytalan” propozícióval, amelyben valahol máshol már előfordult „a lista hiányos” propozíció is (ugyanannak a listának a vonatkozásában), akkor célszerű „a lista hiánytalan” kifejezést negációként kezelni.

A negáció mint logikai konstans szimbolikusan kifejezhető a propozicionális logika formális nyelvén. Egy p propozíció negációját a következőképpen jelöljük:

$$\sim p$$

A „ $\sim$ ” tehát a negáció logikai szimbóluma. Mindig a negált propozíció elé írjuk, térköz nélkül. Összetett kifejezések negációjánál az összetett kifejezés zárójelek közé kerül, a negáció jele pedig a nyitó zárójel elé:

$$\sim(p \text{ vagy } q)$$

Jelölési konvenció. A negációnak léteznek alternatív jelölései. Van úgy, hogy a „ $\neg$ ” szimbólum jelöli a negációt, egyes jelölésmódokban pedig a negált kifejezés fölötti vízszintes vonal szolgálja ezt a célt. Tehát p negációja lehet $\neg p$, illetve $\bar{p}$ is. Mi tartjuk magunkat a „ $\sim$ ” használatához; ez a megjegyzés azért lehet fontos, mert az olvasó más szövegekben találkozhat az alternatív jelölésmódok valamelyikével.

Igazságtáblázat

A negáció igazságfüggvény, amely a negált propozíció igazságértékét az ellentétébe fordítja át; igaz propozícióból hamisat, hamis propozícióból igazat hoz létre. Mindezt az úgynevezett *igazságtáblázat* segítségével szemléltethetjük.

A negáció igazságtáblázata így fest:

p	$\sim p$
1	0
0	1

A felső vízszintes sor p -t, illetve p negációját tartalmazza. A bal oldali függőleges oszlop mutatja p lehetséges igazságértékeit. Mivel p egy atomi proposíció, p lehet igaz, és lehet hamis. Az 1 az *igaz* értéket, a 0 a *hamis* értéket reprezentálja – a kizárt harmadik és az ellentmondás-mentesség törvényének megfelelően p -nek nem lehet más értéke. A jobb oldali függőleges oszlop azt mutatja, hogy $\sim p$ milyen értéket vesz fel annak függvényében, hogy p értéke milyen. A táblázat második és harmadik sorából kiderül, hogy amennyiben p értéke 1, $\sim p$ értéke 0, amennyiben p értéke 0, $\sim p$ értéke 1.

Az igazságtáblázat sokoldalú eszköz. Jelen esetben arra használtuk, hogy egy logikai konstans, a negáció *jelentését* meghatározzuk.

A negáció olyan igazságfüggvény, amely a negált proposíció igazságértékét az ellentétére változtatja, azaz *igaz* értékű kifejezésből *hamis* értékű kifejezést, *hamis* értékű kifejezésből *igaz* értékű kifejezést hoz létre.

A negáció tagad egy proposíciót, ezáltal új proposíciót hoz létre. Mivel ez az új proposíció is teljes értékű logikai elem, maga is állítható vagy tagadható. Nézzük az alábbi proposíciót:

- Nem igaz, hogy a kútban nincs víz.

Ha azt, hogy „a kútban van víz”, p -vel szimbolizáljuk, akkor a szóban forgó állítás logikai formája „nem-(nem- p)”, amely formálisan a következő:

$\sim\sim p$

Terminológiai kérdés. Felvethető az a kérdés, hogy voltaképpen *mi* is az az entitás, amit a „negáció”, vagy „konjunkció” (stb.) kifejezésekkel megnevezünk. Az egyik válasz szerint ezek a kifejezések magát a *konnektívumot* nevezik meg. Egy másik válasz értelmében a megnevezett dolog az a *művelet*, amelyet a konnektívum segítségével az adott proposíción vagy proposíciókon elvégzünk (tehát például a negáció esetében egy proposíció negálása). Egy harmadik megközelítésben a név a művelet révén létrejött összetett *proposícióra* vonatkozik (tehát a „ $\sim p$ ” kifejezés negációnak, a „ $p \& q$ ” kifejezés konjunkciónak tekintendő). Igazság szerint *mindhárom* felelet elfogadható; az egyes válaszok más és más aspektusát ragadják meg a jelenségnek. Amíg a proposíciók logikai formájának szerkezeti felépítésére koncentrálnak, az első és főleg a második megközelítés a fontos, amikor áttérünk a következtetések érvényességének kérdésére, a harmadik lesz az irányadó. De önmagában mind a három válasz korrekt.

Igazságtáblázat segítségével megnézhetjük, miként módosítja az ismételt negáció a proposíció értékét:

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
1	0	1
0	1	0

Látjuk, hogy a $\sim\sim p$ alatti oszlop értékei megegyeznek a p alatti oszlop értékeivel.

A negáció logikailag akárhányszor értelmesen iterálható művelet. Klasszikus logikában a páros számú negáció az *igaz* érték állításával, a páratlan számú negáció a *hamis* érték állításával ekvivalens.